Desatero* VOAFu

Josef Schmidt

11. listopadu 2024

Nutná[1] podmínka pro složení ústní části zkoušky z VOAFu je znalost následujících faktů.

1. Eulerova identita $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ a její důsledek $\operatorname{Re} e^{i\varphi} = \cos\varphi$.
2. Řešení rovnice LHO, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, lze zapsat v ekvivalentních tvarech
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t + \phi) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = c_1 e^{i\omega t} + \bar{c}_1 e^{-i\omega t}.$$
3. Střední hodnoty
$$\langle\cos\omega t\rangle = \langle\sin\omega t\rangle = 0, \qquad \langle\cos^2\omega t\rangle = \langle\sin^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}.$$
4. 1D vlnová rovnice
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$
kde v má význam fázové rychlosti – rychlosti šíření – postupných vln a $\psi(z,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
5. Okrajové podmínky pevného a volného konce v $z = z_0$:
$$\psi(z_0, t) = 0 \quad \text{(pevný)}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z}(z_0, t) = 0 \quad \text{(volný)}.$$
6. Počáteční podmínky pro prostředí na $z \in \langle 0, L\rangle$ popsané vlnovou rovnicí:
$$\psi(z, 0) = f(z) \quad \text{(počáteční poloha)}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}(z, 0) = g(z) \quad \text{(počáteční rychlost)},$$
kde $f, g : \langle 0, L\rangle \to \mathbb{R}$.
7. D'Alembertovo řešení 1D vlnové rovnice
$$\psi(z,t) = F(z - vt) + G(z + vt),$$
kde $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou libovolné funkce (jedné proměnné) a udávají tvar vlny postupující v kladném (pro F), resp. záporném (pro G), směru osy z fázovou rychlostí v.

*O dvaceti šesti bodech, tzn. je to 10 v číselném základu 26.
[1] Ale ne postačující...

8. Harmonická postupná vlna v reálném a komplexním zápisu

$$\psi(z,t) = A\cos(\omega t - kz + \varphi), \qquad \psi(z,t) = Ae^{i(\omega t - kz + \varphi)},$$

kde $\omega \in \mathbb{R}^+$ je úhlová frekvence a $k \in \mathbb{R}^+$ je vlnové číslo. Tato postupuje prostředím fázovou rychlostí $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$.

9. Disperzní vztah udává přípustné kombinace ω a k, kdy se příslušná postupná vlna šíří daným prostředím. Disperzní vztah je zadaný funkcí $\omega(k)$, případně inverzně $k(\omega)$ (nebo také implicitně $f(\omega,k) = 0$). Přípustné ω pro zadané k získáme jako $\omega = \omega(k)$ (a přípustné k pro zadané ω jako $k = k(\omega)$).

10. Grupová rychlost pro vlnový balík s centrálním vlnovým číslem k_0 je

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}(k_0).$$

Tato rychlost udává rychlost šíření vlnového balíku (rychlost šíření amplitudové obálky nosné vlny).

11. Na rozhraní dvou prostředí se dopadající vlna tvaru $F(x)$ odráží ve tvaru $RF(-x)$ a prochází ve tvaru $PF(\frac{v_1}{v_2}x)$, kde v_i jsou příslušné fázové rychlosti jednotlivých prostředí a R a P nazýváme koeficienty odrazu a průchodu. Tvar odražené vlny se tedy zrcadlí podle „svislé“ osy a tvar prošlé vlny se protahuje/smršťuje podél směru šíření faktorem $\frac{v_2}{v_1}$.

    Pro harmonické postupné vlny máme dopadající vlnu $\psi_d(z,t) = e^{i(\omega t - k_1 z)}$, odraženou vlnu $\psi_r(z,t) = Re^{i(\omega t + k_1 z)}$ a prošlou vlnu $\psi_t(z,t) = Pe^{i(\omega t - k_2 z)}$.

12. Prostorová vlnová rovnice je rovnice pro prostorovou vlnu $\psi(\vec{r},t)$ tvaru

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \Delta \psi,$$

kde Δ je Laplaceův operátor v příslušné dimenzi. Pro 3D v kartézských souřadnicích je to

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Fázová rychlost v udává rychlost šíření vlnoploch daným prostředím.

13. Vlnoplochy jsou plochy konstantní fáze dané vlny. Konkrétně pro $\psi(\vec{r},t) = e^{i\varphi(\vec{r},t)}$ jsou vlnoplochy dané rovnicí $\varphi(\vec{r},t) = \varphi_0$ pro jednotlivé hodnoty φ_0.

14.
    - Harmonická rovinná postupná 3D vlna je tvaru

    $$\psi(\vec{r},t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})},$$

    kde $\vec{k} = k\vec{n}$ je vlnový vektor, $k = |\vec{k}|$ je vlnové číslo a $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, je směr postupu. Vlnoplochy jsou roviny kolmé k $\vec{n}$. Rychlost postupu je daná fázovou rychlostí $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$.

    - Harmonická sférická postupná 3D vlna je tvaru

    $$\psi(\vec{r},t) = \frac{A}{r}e^{i(\omega t - kr)}.$$

    Vlnoplochy jsou sféry se středem v počátku. Rychlost postupu je daná fázovou rychlostí $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$. Amplituda ubývá jako $\frac{1}{r}$.

15. Maxwellovy rovnice v homogenním látkovém prostředí (popsaném permitivitou ε a permeabilitou μ – tzv. lineární prostředí) bez volných nábojů a proudů jsou tvaru:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{(Gaussův zákon)}, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Faradayův zákon)},$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{(Ampér-Maxwellův zákon)}.$$

16. Rovinná harmonická elektromagnetická vlna je řešením vlnových rovnic pro $\vec{E}$ a $\vec{B}$ plynoucí z Maxwellových rovnic,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = v^2 \Delta \vec{E}, \qquad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = v^2 \Delta \vec{B},$$

$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, ve tvaru

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \qquad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})},$$

kde $\omega = v|\vec{k}|$ (disperzní vztah pro EM vlny), $\vec{E} \perp \vec{n}$ a $\vec{B} \perp \vec{n}$ (EM vlna je vlna příčná), $\vec{E} \perp \vec{B}$, $E = vB$ a $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n})$ tvoří pravotočivý soubor vektorů.

17. Intenzita EM vlny je dána jako $I = \langle \vec{S} \rangle$, kde $\vec{S}$ je Poyntingův vektor (tok energie), který pro EM vlnu je tvaru $\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2\, \vec{n}$, kde $\vec{n}$ je směr šíření.

18.
- Úplně (obecně elipticky) polarizovaná EM vlna postupující ve směru osy z má tvar

  $$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{x0}\, \vec{x}\, e^{i(\omega t - kz + \varphi_1)} + E_{y0}\, \vec{y}\, e^{i(\omega t - kz + \varphi_2)}.$$

- Lineárně polarizovaná EM vlna je vlna tvaru

  $$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0\, \vec{n}\, e^{i(\omega t - kz + \varphi)},$$

  kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor směru polarizace. Pro dané z elektrické pole $\vec{E}$ v čase opisuje úsečku v rovině xy.
- Kruhově polarizovaná EM vlna je vlna, pro kterou pro dané z elektrické pole $\vec{E}$ v čase opisuje kružnici v rovině xy. Jedním z možných tvarů kruhově polarizované vlny je

  $$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0\, \vec{x} \cos(\omega t) \pm E_0\, \vec{y} \sin(\omega t),$$

  kde různá znaménka odpovídají různému smyslu otáčení vektoru $\vec{E}$ v rovině xy.

19.
- Polarizátor propouští elektrické pole jen ve směru propustnosti $\vec{n}$ dle vztahu

  $$\vec{E}_{out} = (\vec{E}_{in} \cdot \vec{n})\, \vec{n}.$$

- Vlnová destička s fázovým posunem $\Delta\varphi$ a osou $\vec{n}$ mění tvar elektrického pole následujícím způsobem. Pokud vstupní pole je

  $$\vec{E}_{in} = E_1\, \vec{n}\, e^{i(\omega t + \varphi_1)} + E_2\, \vec{n}_\perp e^{i(\omega t + \varphi_2)},$$

  pak výstupní pole má tvar

  $$\vec{E}_{out} = E_1\, \vec{n}\, e^{i(\omega t + \varphi_1 + \Delta\varphi)} + E_2\, \vec{n}_\perp e^{i(\omega t + \varphi_2)},$$

  kde $\vec{n}_\perp$ je jednotkový vektor kolmý na $\vec{n}$.

20. Index lomu n daného prostředí je definován jako $n = \frac{c}{v}$, kde c je rychlost světla ve vakuu a v je fázová rychlost v tomto prostředí. Příslušný disperzní vztah je pak tvaru $\omega = \frac{c}{n}|\vec{k}|$.

21. *Zákon odrazu a lomu rovinné EM vlny na rovinném rozhraní.* Pro úhly dopadu ϑ_d, odrazu ϑ_r a lomu ϑ_t, značící úhly odklonu od kolmice k rozhraní, platí:

$$\vartheta_d = \vartheta_r, \qquad n_1 \sin\vartheta_d = n_2 \sin\vartheta_t,$$

kde n_1 a n_2 jsou indexy lomu v „dopadajícím" a „prošlém" prostředí. Kritický úhel ϑ_C je dán vztahem $\sin\vartheta_C = \frac{n_2}{n_1}$ pro $n_2 < n_1$. Pro $n_1 < n_2$ kritický úhel neexistuje. Pro úhly dopadu $\vartheta_d \geq \vartheta_C$ dochází k totálnímu odrazu.

22. Difrakční integrál

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \int_B \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)}\, dS,$$

představuje superpozici sférických vln se stejnou ale neurčenou amplitudou, které se vyzařují z každého bodu otvoru B v přepážce. Nejjednodušší aproximací je tzv. Fraunhoferův difrakční integrál

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \int_B e^{i\frac{k}{R}(xX + yY)}\, dS,$$

význam jednotlivých symbolů viz skripta.

23. Difrakční obrazec je prostorové rozložení intenzity $I(x,y) = \langle \vec{E}(x,y)^2 \rangle$ na stínítku v rovině xy.

24. Difrakční obrazec typicky obsahuje maxima a minima intenzity, které pozorujeme pod úhlem θ (úhlový odklon od osy otvoru v přepážce). Kvalitativně platí

$$\sin\theta \propto m\frac{\lambda}{d},$$

kde $m \in \mathbb{N}_0$ je tzv. řád maxima, λ je vlnová délka použitého světla a d je charakteristický rozměr otvoru v přepážce – např. vzdálenost sousedních šterbin, velikost kruhového otvoru, atp.

25. Pro polohy maxim na stínítku blízko osy otvoru platí

$$y_m \propto mL\frac{\lambda}{d},$$

kde L je vzdálenost přepážky a stínítka.

26. Difrakční mřížka s N štěrbinami zužuje difrakční maxima dle předpisu

$$\Delta(\sin\theta) \propto \frac{1}{N}\frac{\lambda}{d}.$$