Řešené příklady ze skript MECH v. 1.01

Jan Mareš, Josef Schmidt[1]

5. září 2023

[1]schmijos@fjfi.cvut.cz

Tento dokument má sloužit jako pomůcka při přípravě na zkoušku z mechaniky na FJFI ČVUT v Praze. Pro maximální využití příkladů k procvičení látky je vřele doporučeno pokusit se příklady napřed vypočítat samostatně, než se podíváte na řešení.

Aktuální verzi tohoto dokumentu získáte na adrese `https://physics.fjfi.cvut.cz/~schmijos/mech/sbirka.php`

Objevené chyby, prosím, zasílejte na schmijos@fjfi.cvut.cz.

Jan Mareš, Josef Schmidt

Obsah

Kapitola 0

Matematický aparát

0.1 Rozměrová analýza

Zadání: Pomocí rozměrové analýzy se pokuste „uhádnout“ vzorec pro dráhu tělesa při volném pádu.

Řešení: Nejprve musíme odhadnout, na kterých veličinách bude dráha při volném pádu záviset. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že padající těleso je na začátku pohybu v klidu a urazilo nulovou dráhu. Uražená dráha bude jistě záviset na době pádu t, dále na tíhovém zrychlení g a také by třeba mohla záviset na hmotnosti tělesa m. Obecně tedy předpokládáme vztah pro dráhu s:

$$s = Ct^\alpha m^\beta g^\gamma,$$

kde C je nějaká bezrozměrná konstanta. Rozměrová analýza prostě říká, že veličina na levé i pravé straně má stejnou jednotku. Jakkoli se to může zdát triviální, jedná se o velmi dobrou kontrolu správnosti, které může v mnoha případech odhalit nesmyslnost odhadu nějaké závislosti. Použijme značení ze skript pro nějakou obecnou jednotku času T, hmotnosti M a délky L. Pak musí platit:

$$L^1 = T^\alpha M^\beta (LT^{-2})^\gamma = T^{\alpha-2\gamma} M^\beta L^\gamma.$$

Okamžitě tak dostáváme hodnoty exponentů: $\beta = 0$ (dráha volného pádu tedy ve výsledku na hmotnosti částice nezáleží, alespoň pro pád ve vakuu), $\gamma = 1$ a $\alpha = 2$. Dostáváme tedy vzorec:

$$s = Cgt^2.$$

Hodnotu konstanty C nám již rozměrová analýza nepomůže odhadnout. Jednoduchý experiment, kdy například pustíme malý předmět z výšky 2 m a měříme čas, by nám umožnil určit hodnotu $C = \frac{1}{2}$.

0.2 Povrch a objem koule

Zadání: Vypočítejte povrch a objem koule ve sférických souřadnicích.

Řešení: Ve skriptech můžeme najít vzorce pro diferenciály plochy a objemu ve sférických souřadnicích a to:

$$\mathrm{d}S = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$
$$\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r.$$

Podívejme se krátce na to, jak můžeme tyto vzorce odvodit. U diferenciálu plochy nás zajímá, jak velká plocha je dána přírůstky úhlů $\mathrm{d}\theta$ a $\mathrm{d}\varphi$ ve vzdálenosti r od středu. Ptejme se nejprve, jaká je délka oblouku, který opíše bod na poloměru r při otočení v souřadnici θ o $\mathrm{d}\theta$. Jedná se o část kružnice, jejíž celý obvod je $2\pi r$ a opsaná část této kružnice odpovídá tomu, jakou částí z plného úhlu 2π je právě úhel $\mathrm{d}\theta$. Oblouk tedy bude mít délku $2\pi r\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = r\mathrm{d}\theta$. U pootočení ve směru souřadnice φ je situace podobná, ale celková délka opisované kružnice závisí na úhlu θ. Jednoduchý obrázek ukáže, že délka opisované kružnice je $2\pi r\sin(\theta)$ a výsledný diferenciální oblouk pak $r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi$. U diferenciálu objemu pak jen přibude změna $\mathrm{d}r$ v radiálním směru.

Povrch koule o poloměru R určíme integrací diferenciálu plochy na poloměru R přes celou kouli, tedy přes celý rozsah souřadnic $\theta \in \langle 0, \pi\rangle$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$:

$$S = \int \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

Vůči souřadnicím θ a φ je R konstanta, kterou můžeme vytknout před integrál. Jelikož integrand je součinem výrazů v proměnných θ a φ (součinem výrazu $\sin(\theta)$ a jednotky), můžeme výpočet převést na součin dvou integrálů:

$$S = R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta)\mathrm{d}\theta = R^2 \left[\phi\right]_0^{2\pi} \left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi} = R^2 2\pi(-(-1)+1) = 4\pi R^2.$$

Poznamenejme, že tento postup by selhal, pokud by integrand byl například tvaru $\varphi^{\sin(\theta)}$ a podobně, tedy ne ve tvaru součinu. (Například s integrandem $\sin(\varphi+\theta)$ bychom si ještě poradili použitím součtových vzorců.)

V případě objemu postupujeme analogicky, jen musíme integrovat třikrát (navíc přes souřadnici $r \in \langle 0, R\rangle$):

$$V = \int \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{R} r^2\mathrm{d}r =$$
$$= 2\pi 2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

0.3 Ortogonalita matice rotace

Zadání: Ověřte, že transformační matice rotace kolem osy z je ortogonální, tedy že pro

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

platí a) $\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}$ (pro $\forall i, k$) a b) $|\alpha| = \det \alpha = 1$.

Poznámka: Povšimněte si, že zde (na rozdíl od skript) striktně označujeme celou matici jako α a její prvek i-tém řádku v j-tém sloupci jako α_{ij}.

Řešení a) – po prvcích: Můžeme systematicky projít všechny kombinace indexů j a k a ověřit, že zadaná rovnost platí. Například pro $j = 1$ a $k = 2$ máme:

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1}\alpha_{i2} = \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} =$$
$$= \cos\varphi \sin\varphi + (-\sin\varphi)\cos\varphi + 0 = 0 = \delta_{12},$$

což je v pořádku. Podobně bychom postupovali i v dalších osmi případech.

Řešení a) – maticově: Rychlejší způsob je využití maticového počtu. Danou rovnost můžeme přepsat:

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_{ik} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ji}^{T}\alpha_{ik} = \left(\alpha^T \alpha\right)_{jk},$$

kde α^T je matice transponované k matici α. Podmínka ortogonality tedy říká, že součin matice α^T a α musí dát jednotkovou matici. Podle pravidel pro maticové násobení jednoduše dostaneme:

$$\alpha^T \alpha = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení b): Podle pravidla pro počítání determinantu matice o rozměrech 3×3 (Sarusovo pravidlo) dostáváme:

$$|\alpha| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + 0 + 0 - 0 - 0 - (-\sin^2\varphi) = 1.$$

0.4 Sumační pravidlo

Zadání: Rozepište nebo vypočítejte výrazy (předpokládáme, že α je transformační matice z předchozího příkladu, δ je Kroneckerovo delta, ϵ Levi-Civitův symbol, a obecná matice 3×3 a x_i například kartézské souřadnice):

Řešení: Einsteinovo sumační pravidlo říká, že pokud se ve výrazu některý index vyskytuje právě dvakrát, je třeba přes tento index sčítat přes všechny přípustné hodnoty indexu (v našem případě od 1 do 3).

Kroneckerovo delta δ_{ij} nabývá hodnot 0 nebo 1 v závislosti na tom, zda se indexy shodují nebo neshodují:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Levi-Civitův symbol ϵ_{ijk} je nenulový pouze pro permutace indexů 123 – pro tyto nabývá hodnot ± 1 v závislosti na sudosti/lichosti dané permutace:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \qquad \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1,$$

kdykoliv se vyskytnou dva stejné indexy (např. ϵ_{112} nebo ϵ_{313}), nabývá symbol nulové hodnoty.

1. $a_{jl}x_l = \sum_{l=1}^{3} a_{jl}x_l = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3$. Výraz není možné nijak dále upravit.
2. $\delta_{jk}x_k = \sum_{k=1}^{3} \delta_{jk}x_k = \delta_{j1}x_1 + \delta_{j2}x_2 + \delta_{j3}x_3 = \delta_{jj}x_j = x_j$. Bez ohledu na to, jakou hodnotu má j, bude δ_{jk} nenulové pouze pro $j = k$ a přitom hodnota δ_{jj} je 1 (zde se přes index j nesčítá, protože máme tři indexy j ve výrazu $\delta_{jj}x_j$!). Obecně vždy, když máme ve výrazu Kroneckerovo delta a přes jeden jeho index se sčítá (např. zde δ_{jk} a sčítáme přes k), můžeme z výrazu deltu odstranit a současně ve všech ostatních částech výrazu zaměnit sčítací index (zde k) za nesčítací index u delty (zde j), tedy příště rovnou $\delta_{jk}x_k = x_j$.
3. $\alpha_{1k}x_k = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{1k}x_k = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \cos(\varphi)x_1 + \sin(\varphi)x_2$. (Použili jsme matici α z příkladu 0.3.)
4. $\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$.
5. $\delta_{ij}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{11}\delta_{11} + \delta_{12}\delta_{12} + \delta_{13}\delta_{13} + \delta_{21}\delta_{21} + \delta_{22}\delta_{22} + \ldots = 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 3$. Zde jsme provedli výpočet vypsáním všech členů. Mnohem jednodušší je však použít pravidlo uvedené na konci bodu 2 a předchozí výsledek, tedy $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{jj} = 3$.
6. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \epsilon_{123}\epsilon_{123} + \epsilon_{132}\epsilon_{132} + \epsilon_{213}\epsilon_{213} + \epsilon_{231}\epsilon_{231} + \epsilon_{312}\epsilon_{312} + \epsilon_{321}\epsilon_{321} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$. Ve výrazu jsme rovnou vypustili všechny nulové členy s alespoň dvěma stejnými indexy.

0.5 Velikosti vektorů

Zadání: Určete velikosti následujících vektorů:

Řešení: Velikost obecného vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ můžeme spočítat jako $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$, což lze také zapsat pomocí skalárního součinu jako $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.

Vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$ jsou definovány jako jednotkové vektory ve směru souřadných os, tzn. $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

1. $|\vec{i} + 2\vec{j}| = |(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0)| = |(1, 0, 0) + (0, 2, 0)| = |(1, 2, 0)| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ nebo alternativně $|\vec{i} + 2\vec{j}| = \sqrt{(\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j})} = \sqrt{\vec{i} \cdot \vec{i} + 2\vec{i} \cdot \vec{j} + 2\vec{j} \cdot \vec{i} + 4\vec{j} \cdot \vec{j}} = \sqrt{1 + 0 + 0 + 4} = \sqrt{5}$.
2. $|\vec{i} - 3\vec{k}| = |(1, 0, -3)| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$.

3. $|2\vec{i} - 3\vec{j}| = |(2, -3, 0)| = \sqrt{13}$.

4. $|\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}| = |(1, 1, -2)| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$.

0.6 Součiny vektorů

Zadání: Určete:

Řešení: Pro výpočet potřebujeme vektorové součiny jednotkových vektorů ve směrech souřadných os $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pro libovolné vektory platí $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ a také vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů je nulový, tedy speciálně $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. Z definičních vlastností vektorového součinu nalezneme $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ a $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$. Tyto vztahy si snadno zapamatujeme pomocí „základního" vztahu $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ a pomocí řetězového pravidla, kdy cyklicky zaměňujeme $\vec{i} \to \vec{j} \to \vec{k} \to \vec{i}$.

1. $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} \times \vec{j} + \vec{i} \times \vec{k} = \vec{k} - \vec{j}$.

2. $\vec{i} \times (\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{i} + \vec{i} \times \vec{j} = \vec{0} + \vec{k} = \vec{k}$.

3. $\vec{i} \cdot (\vec{i} + \vec{k}) = \vec{i} \cdot \vec{i} + \vec{i} \cdot \vec{k} = 1 + 0 = 1$.

4. $\vec{i} \times (\vec{i} + \vec{k}) = \vec{i} \times \vec{i} + \vec{i} \times \vec{k} = \vec{0} - \vec{j} = -\vec{j}$.

0.7 Velikost vektoru

Zadání: Vypočítejte: $\left|\vec{i} - \frac{\vec{i}+2\vec{j}}{5}\right|$

Řešení:

$$\left|\vec{i} - \frac{\vec{i} + 2\vec{j}}{5}\right| = \left|\frac{5\vec{i} - \vec{i} - 2\vec{j}}{5}\right| = \frac{1}{5}|(4, -2, 0)| = \frac{\sqrt{16+4}}{5} = \frac{\sqrt{20}}{5}.$$

0.8 Velikost vektoru pomocí skal. součinu

Zadání: Vypočítejte: $\left|\vec{a} - \frac{\vec{a}-\vec{b}}{3}\right|$, kde $a = 1$, $b = 2$ a vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ svírají úhel $\pi/3$.

Řešení: Poznamenejme, že se automaticky předpokládá značení $a = |\vec{a}|$. Vztah mezi skalárním součinem a úhlem α mezi vektory je $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\alpha$. Pro libovolný vektor platí

$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.

$$\left|\vec{a} - \frac{\vec{a} - \vec{b}}{3}\right| = \left|\frac{3\vec{a} - \vec{a} + \vec{b}}{3}\right| = \frac{1}{3}|2\vec{a} + \vec{b}| = \frac{1}{3}\sqrt{(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})} =$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{4a^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2} = \frac{1}{3}\sqrt{4a^2 + 4ab\cos(\pi/3) + b^2} =$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 4} = \frac{1}{3}\sqrt{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

0.9 Velikost vektoru pomocí skal. součinu 2

Zadání: Vypočítejte: $|2\vec{m} - \vec{n}|$, jsou-li $\vec{m}$ a $\vec{n}$ jednotkové vektory, které svírají úhel $\pi/4$.

Řešení: Analogicky předchozímu příkladu

$$\left|2\vec{m} - \vec{2}\right| = \sqrt{(2\vec{m} - \vec{n}) \cdot (2\vec{m} - \vec{n})} = \sqrt{4m^2 - 4mn\cos(\pi/4) + n^2} =$$
$$= \sqrt{4 - 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}.$$

0.10 Podmínka kolmosti

Zadání: Dokažte, že vektor $\vec{a}$ je kolmý k vektoru $\vec{b}$, platí-li $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

Řešení: Budeme upravovat zadanou rovnost. Jelikož se jedná o nezáporné veličiny, můžeme obě strany bez problémů umocnit:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$
$$\sqrt{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})} = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})}$$
$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$$
$$a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2 = a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Daná rovnost tedy vyžaduje nulovost skalárního součinu $\vec{a}$ a $\vec{b}$, což je ekvivalentní kolmosti těchto vektorů.

0.11 Zjednodušení 1

Zadání: Určete $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

Řešení: Druhou mocninou vektoru je myšlen skalární součin tohoto vektoru se sebou samým neboli druhá mocnina jeho velikosti. Využitím definic skalárního a vektorového součinu:

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}\times\vec{b}|^2+|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2=(ab\sin\varphi)^2+(ab\cos\varphi)^2=$$
$$=a^2b^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=a^2b^2.$$

0.12 Zjednodušení 2

Zadání: Upravte $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$.

Řešení: Vektorový součin můžeme roznásobit (linearita v obou argumentech) a použitím vztahů $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{b}=0$ a $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{0}=2\vec{b}\times\vec{a}.$$

0.13 Zjednodušení 3

Zadání: Upravte $\vec{i}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})+(\vec{j}+\vec{k})\times(\vec{i}-2\vec{j})$.

Řešení: Roznásobením vektorového součinu a použitím vztahů uvedených v řešení příkladu 0.6:

$$\vec{i}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})+(\vec{j}+\vec{k})\times(\vec{i}-2\vec{j})=\vec{0}+\vec{k}-\vec{j}-\vec{k}+\vec{j}-2\cdot\vec{0}-2(-\vec{i})=2\vec{i}.$$

0.14 Shodné výrazy

Zadání: Které z těchto výrazů: $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}),(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c},(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b},(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b},(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}$ jsou stejné?

Řešení: Je důležité si uvědomit, že výsledkem skalárního součinu je číslo. v každém výrazu je tedy vektor násobený číslem. Vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ mají obecně různé směry a proto se obecně nebudou rovnat ani jakékoli jejich násobky. Naproti tomu je skalární součin komutativní a také je jedno, zda násobíme vektor číslem zprava nebo zleva. Proto jsou vždy shodné výrazy, které jsou násobkem stejného vektoru. Konkrétně je shodný první s posledním a třetí se čtvrtým.

0.15 Jednotkový vektor 1

Zadání: Určete k vektoru $\vec{a}=(1,3,5)$ vektor jednotkový. (Rozumí se jednotkový ve stejném směru.)

Řešení: Jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{a}$ dostaneme jednoduše tak, že vektor $\vec{a}$ vydělíme jeho velikostí. Pak bude platit: $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right|=\frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=1$. Zde tedy $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+3^2+5^2}=\sqrt{35}$ a hledaný vektor je $\frac{1}{\sqrt{35}}(1,3,5)$.

0.16 Jednotkový vektor 2

Zadání: Určete jednotkový vektor ve směru $\vec{a}-\vec{b}$, kde $\vec{a}=(3,2,0)$ a $\vec{b}=(2,1,1)$.

Řešení: Nejprve jednoduše určíme vektor $\vec{a}-\vec{b}=(3,2,0)-(2,1,1)=(1,1,-1)$, pak určíme jeho velikost $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ a výsledný jednotkový vektor tedy je $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$.

0.17 Jednotkový vektor 3

Zadání: Určete jednotkový vektor ve směru $\vec{a}+\vec{b}$, kde $\vec{a}=(3,3,1)$ a $\vec{b}=(1,-3,2)$.

Řešení: Nejprve jednoduše určíme vektor $\vec{a}+\vec{b}=(3,3,1)+(1,-3,2)=(4,0,3)$, pak určíme jeho velikost $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{16+9}=5$ a výsledný jednotkový vektor tedy je $\frac{1}{5}(4,0,3)$.

0.18 Jednotkový vektor 4

Zadání: Najděte jednotkový vektor kolmý k rovině určené vektory $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ a $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

Řešení – obecné poznámky: Nejprve najdeme libovolný kolmý vektor $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ k zadaným $\vec{a}$ a $\vec{b}$ a následně z něho snadno určíme vektor jednotkový.

Řešení – pomocí vektorového součinu: Vektorový součin vektorů $\vec{a}\times\vec{b}$ dá vektor kolmý na oba vektory. Výpočet dle příkladu 0.6 nebo 0.19:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k})\times(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})=(0,8,4).$$

Velikost vektoru $\vec{c}$: $|\vec{c}|=\sqrt{0+64+16}=4\sqrt{5}$. Jednotkový vektor je pak $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)$ (opačný vektor je také kolmý k dané rovině).

Řešení – pomocí skalárního součinu: Podmínka kolmosti k rovině dané dvěma vektory je ekvivalentní k podmínce současné kolmosti na oba vektory. Dva vektory jsou kolmé, pokud je jejich skalární součin roven nule. Dostáváme tedy $0=\vec{a}\cdot\vec{c}=2c_1-2c_2+4c_3$ a $0=\vec{b}\cdot\vec{c}=c_1+c_2-2c_3$. Přičtením dvojnásobku druhé rovnice k první dostaneme $c_1=0$ a dosazením do druhé rovnice $c_2=2c_3$. Obecně tedy máme vektor $\vec{c}=(0,2c_3,c_3)$, který můžeme zvolit například jako $\vec{c}=(0,2,1)$. Jeho normováním dostaneme výsledek jako v předchozím postupu, tj. $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)$.

0.19 Vektorový součin

Zadání: Určete $\vec{a}\times\vec{b}$, kde $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$ a $\vec{b}=2\vec{j}+\vec{k}$.

Řešení: Použitím vztahů a vlastností vektorového součinu popsaných v řešení příkladu 0.6 snadno odvodíme obecný vzorec pro vektorový součin dvou obecných vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

(všimněte si toho, že druhou a třetí složku vektoru dostaneme opět cyklickou záměnou indexů $1 \to 2 \to 3 \to 1$). Výpočtem dle tohoto vzorce dostaneme:

$$(2, -1, 0) \times (0, 2, 1) = (-1 - 0, 0 - 2, 4 - 0) = (-1, -2, 4).$$

0.20 Skalární součin

Zadání: Určete $\vec{a} \cdot \vec{b}$, kde $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ a $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Řešení: Skalární součin můžeme počítat v souřadnicích jako $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, kde $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

$$(1, 1, 0) \cdot (2, 1, -1) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 2 + 1 = 3.$$

0.21 Jednotkový vektor 5

Zadání: Určete jednotkový vektor ve směru výslednice vektorů $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Řešení: Výslednice vektorů je prostě jejich součtem, tedy $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = (2, 1, 1)+(1, -2, 2)+(-2, 1, -1) = (1, 0, 2)$. Určíme jeho velikost $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ a jednotkový vektor tedy bude $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{k})$.

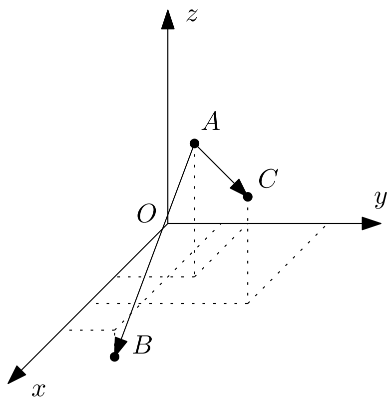
0.22 Hledání vektorů a úhlu

Zadání: Je dán součet a rozdíl dvou vektorů: $\vec{a} + \vec{b} = (4, 2, 1)$, $\vec{a} - \vec{b} = (2, 3, 1)$. Určete vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ a úhel mezi $\vec{a}$ a $(\vec{a} + \vec{b})$.

Řešení: Sečtením rovnic dostaneme $2\vec{a} = (6, 5, 2)$, a tedy $\vec{a} = (3, 5/2, 1)$ a odečtením dostaneme $\vec{b} = (1, -1/2, 0)$. Dále platí $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{a} + \vec{b}| \cos\varphi$. Dostáváme tedy $\cos\varphi = \frac{12+5+1}{\frac{1}{2}\sqrt{36+25+4}\sqrt{16+4+1}} = \frac{36}{\sqrt{65}\sqrt{21}} \doteq 0,974$ a $\varphi = \arccos\frac{36}{\sqrt{65}\sqrt{21}} \doteq 13°$.

0.23 Plocha trojúhelníka

Zadání: Pomocí vektorového počtu určete plochu trojúhelníka s vrcholy $A(2, 3, 5), B(4, 2, -1), C(3, 6, 4)$.



Řešení: Nejprve si určíme například vektory $\vec{AB} = (4, 2, -1) - (2, 3, 5) = (2, -1, -6)$ a $\vec{AC} = (3, 6, 4) - (2, 3, 5) = (1, 3, -1)$. Velikost jejich vektorového součinu je dvojnásobkem plochy trojúhelníka, a tedy $S = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}|(2, -1, -6) \times (1, 3, -1)| = \frac{1}{2}|(1+18, -6+2, 6+1)| = \frac{1}{2}|(19, -4, 7)| = \frac{1}{2}\sqrt{426}$.

0.24 Objem rovnoběžnostěnu

Zadání: Určete objem rovnoběžnostěnu, jehož strany jsou dány vektory $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}, \vec{b} = 4\vec{j}, \vec{c} = \vec{j} + 3\vec{k}$.

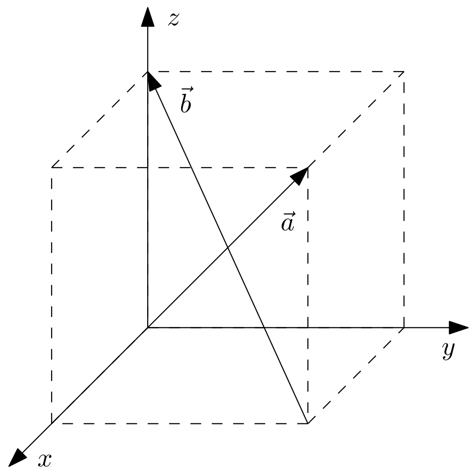
Řešení: Objem rovnoběžnostěnu odpovídá smíšenému součinu:

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = ((\vec{i} + 2\vec{j}) \times 4\vec{j}) \cdot (\vec{j} + 3\vec{k}) = (4\vec{k} + \vec{0}) \cdot (\vec{j} + 3\vec{k}) = 0 + 12\vec{k} \cdot \vec{k} = 12.$$

0.25 Krychle

Zadání: Pomocí skalárního součinu vektorů určete úhly, které svírají tělesové úhlopříčky krychle.

Řešení: Jelikož velikost úhlů nezávisí na velikosti krychle, můžeme si zvolit krychli o straně délky 1. Krychli umístíme přirozeně do soustavy souřadnic tak, že jeden vrchol je v počátku soustavy, hrany jsou rovnoběžné s osami a všechny souřadnice bodů krychle jsou nezáporné. Jedna tělesová úhlopříčka pak bude ve směru vektoru $\vec{a} = (1, 1, 1) - (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$ a další například $\vec{b} = (1, 1, 0) - (0, 0, 1) = (1, 1, -1)$.

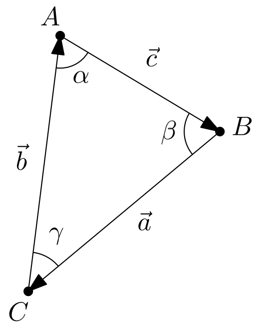


Potom platí $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi$, a tedy $\cos\varphi = \frac{(1,1,1)\cdot(1,1,-1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$. Tomu odpovídá úhel $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \doteq 70,53^\circ$ a druhý úhel je doplněk do 180°.

0.26 Kosinová a sinová věta

Zadání: Pomocí vektorového počtu dokažte kosinovou větu a sinovou větu.

Řešení: Mějme libovolný trojúhelník ABC a označme jako $\vec{a}$ vektor z B do C, jako $\vec{b}$ vektor z C do A a jako $\vec{c}$ vektor z A do B.



Potom platí $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, a tedy $\vec{a}=-\vec{b}-\vec{c}$. Odtud také platí $\vec{a}\cdot\vec{a}=(-\vec{b}-\vec{c})\cdot(-\vec{b}-\vec{c})$, což můžeme upravit na $a^2=b^2+c^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}=b^2+c^2+2bc\cos(\pi-\alpha)=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$. Kvůli volbě orientací vektorů je totiž úhel mezi $\vec{b}$ a $\vec{c}$ doplňkový k α a nikoli přímo α. Tím jsme dostali kosinovou větu.

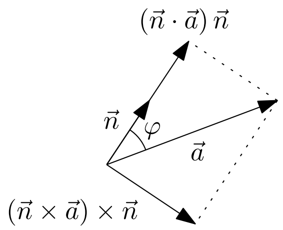
Jelikož $\vec{a}=-\vec{b}-\vec{c}$, je vektor $\vec{a}$ rovnoběžný s vektorem $\vec{b}+\vec{c}$, a tedy $\vec{0}=\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$. Odtud $-\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$, a proto se musí rovnat velikosti $|-\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{c}|$, tedy $ab\sin(\pi-\gamma)=ac\sin(\pi-\beta)$, což dává po úpravě sinovou větu $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.

Analogicky bychom dostali věty pro jiné kombinace a, b a c.

0.27 Rozklad vektoru

Zadání: Najděte složky vektoru $\vec{a}$ do směru daného jednotkovým vektorem $\vec{n}$ a do směru kolmého.

Řešení: Jednoduchý obrázek nám ukáže, že velikost projekce ve směru vektoru $\vec{n}$ je $a\cos\varphi$, což je přesně hodnota skalárního součinu $(\vec{n}\cdot\vec{a})$.



Pokud touto hodnotou vynásobíme jednotkový vektor $\vec{n}$, dostaneme přímo požadovanou složku rozkladu $(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n}$. Druhá složka bude mít velikost $a\sin\varphi$, což je velikost vektoru $(\vec{n}\times\vec{a})$. Dalším vektorovým vynásobením vektorem $\vec{n}$ již nezměníme velikost (je jednotkový a kolmý k $\vec{n}\times\vec{a}$) a dostaneme vektor správného směru, tedy výsledek je $(\vec{n}\times\vec{a})\times\vec{n}$.

Poznámka: Kolmou složku můžeme také získat jednoduchým odečtením části rovnoběžné s vektorem $\vec{n}$: $\vec{a}-(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n}$.

0.28 Neasociativita vektorového součinu

Zadání: Jsou dány vektory $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=4\vec{j}-3\vec{k}$. Vypočítejte $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Řešení: Počítáme pomocí pravidel v řešení příkladu 0.6.

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} &= (-3\vec{k}-\vec{j}+2\vec{k}+\vec{i})\times(4\vec{j}-3\vec{k}) = (\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k})\times(4\vec{j}-3\vec{k}) = \\
&= 4\vec{k}+3\vec{j}+3\vec{i}+20\vec{i} = (23,3,4), \\
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= (\vec{i}+\vec{j})\times(8\vec{k}+6\vec{j}+9\vec{i}-4\vec{i}) = (\vec{i}+\vec{j})\times(5\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k}) = \\
&= 6\vec{k}-8\vec{j}-5\vec{k}+8\vec{i} = (8,-8,1).
\end{aligned}$$

Kapitola 1

Kinematika částice

1.1 Pohyb po přímce

Zadání: Částice se pohybuje přímočaře po ose x podle zákona $x = At + Bt^2$, kde $A = 5\ \mathrm{cm.s^{-1}}$ a $B = 6\ \mathrm{cm.s^{-2}}$. Určete okamžitou rychlost částice začátkem desáté a koncem dvanácté sekundy a střední rychlost v intervalu mezi těmito okamžiky.

Řešení: Pro lepší přehlednost budeme používat vyjádření s uvedením nezávislé proměnné, tedy $x(t) = At + Bt^2$. Rychlost v daném čase t získáme derivováním dráhy podle času:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = [x(t)]' = (At + Bt^2)' = A + 2Bt.$$

(Speciálně derivace podle času budeme někdy značit tečkou místo čárky, $[x(t)]' = \dot{x}(t)$) Rychlosti v daných časech pak už dostaneme pouhým dosazením jako:

$$\begin{aligned} v(9\ \mathrm{s}) &= A + 2B \cdot 9\ \mathrm{s} = 113\ \mathrm{cm.s^{-1}}, \\ v(12\ \mathrm{s}) &= A + 2B \cdot 12\ \mathrm{s} = 149\ \mathrm{cm.s^{-1}}. \end{aligned}$$

Průměrnou rychlost na daném intervalu dostaneme obecně tak, že celkovou uraženou dráhu vydělíme časem potřebným na její překonání. Zde tedy:

$$\overline{v} = \frac{x(12\ \mathrm{s}) - x(9\ \mathrm{s})}{3\ \mathrm{s}} = \frac{924\ \mathrm{cm} - 531\ \mathrm{cm}}{3\ \mathrm{s}} = \frac{393\ \mathrm{cm}}{3\ \mathrm{s}} = 131\ \mathrm{cm.s^{-1}}.$$

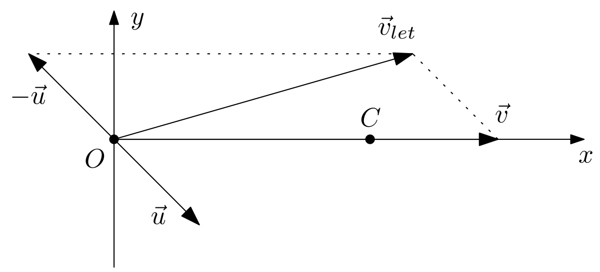
Postup použitý výše pro získání okamžité a průměrné rychlosti je univerzální. Můžeme si všimnout, že v této konkrétní situaci bychom dostali hodnotu střední rychlosti také tak, že bychom jednoduše zprůměrovali dvě hodnoty rychlosti v krajních bodech. To ale funguje jen, pokud se rychlost mění lineárně (případně je konstantní). Můžete si ověřit, že například pokud bychom měli $v(t) = Ct^2$ (C je konstanta, třeba $4\ \mathrm{cm.s^{-3}}$), průměrná rychlost na intervalu už nebude průměrem rychlostí v krajních bodech!

1.2 Letadlo ve větru

Zadání: Pilot letadla je od svého cíle vzdálen 200 km na západ a přitom vane severozápadní vítr o rychlosti 30 km.h^{-1}. Určete vektor rychlosti letadla, chce-li pilot dosáhnout svého cíle za 40 minut.

Řešení: Celou úlohu budeme řešit jako rovinný problém. Zanedbáváme tedy křivost Země a přistání. Vítr chápeme jako pohyb celé masy vzduchu, ve které se letadlo nachází. Z pohledu vztažné soustavy spojené se zemí tedy letadlo vykonává dva pohyby. Jednak je to pohyb s masou vzduchu rychlostí danou vanoucím větrem, jednak pohyb letadla vůči tomuto vzduchu.

Zaveďme vztažnou soustavu spojenou se Zemí s počátkem v místě letadla na začátku uvažovaného pohybu, osou x směrem na východ (tedy směrem k cíli letadla) a osou y na sever. V těchto souřadnicích (a vždy v kilometrech) máme výchozí bod $O = (0, 0)$, cílový bod $C = (C_x, C_y) = (200, 0)$. Pokud by panovalo bezvětří, pak letadlo musí letět rychlostí $v = \frac{s}{t} = \frac{200 \text{ km}}{\frac{2}{3} \text{ h}} = 300$ km/h přímo na východ, tzn. ve směru osy x a vektorově by tedy rychlost byla $\vec{v} = (300, 0)$.



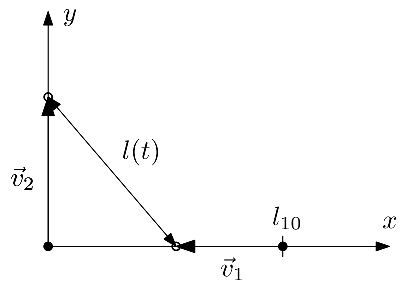
Na letadlo ale nyní působí vítr a vektor rychlosti větru je následující $\vec{u} = (u_x, u_y) = (30 \cdot \cos \frac{\pi}{4}, -30 \cdot \sin \frac{\pi}{4}) = (15\sqrt{2}, -15\sqrt{2})$ (severozápadní vítr vane ze severozápadu na jihovýchod). Označme hledaný vektor rychlosti letadla $\vec{v}_{let} = (v_{letx}, v_{lety})$. Pak musí platit, že $\vec{v} = \vec{v}_{let} + \vec{u}$ – tedy že pilot musí kompenzovat působení větru tak, aby výslednice rychlosti letadla vůči vzduchu a rychlosti masy vzduchu dala původní „bezvětrnou“ rychlost. Vyjádříme $\vec{v}_{let} = \vec{v} - \vec{u} = (300 - 15\sqrt{2}, 15\sqrt{2}) \doteq (278,8; 21,2)$ km/h.

Tato rychlost představuje rychlost letadla vůči okolnímu vzduchu (tzn. ve vztažné soustavě okolního vzduchu). Rychlost $\vec{v}_{let}$ měří letadlo pomocí Pitotových trubic. Rychlost $\vec{v}$ bude měřena např. pomocí GPS a udává tedy rychlost letadla vůči zemi (tzn. ve vztažné soustavě spojené se zemí).

1.3 Brouci

Zadání: Po ramenech pravého úhlu lezou dva brouci. První z bodu A vzdáleného od vrcholu pravého úhlu o vzdálenost l_{10} rychlostí v_1 směrem k vrcholu, druhý po druhém rameni z vrcholu směrem od něho rychlostí v_2. Ve kterém okamžiku si budou brouci nejblíže, jak budou od sebe daleko a jaké budou při tom jejich vzdálenosti od vrcholu?

Řešení: Souřadnice budou voleny tak, že po ose x se pohybuje první brouk a po ose y druhý s tím, že bod A a druhý brouk po zahájení pohybu leží na kladných poloosách.



Poloha prvního brouka bude popsána vektorem $\vec{r}_1(t) = (l_{10} - v_1 t, 0)$ a poloha druhého brouka $\vec{r}_2(t) = (0, v_2 t)$. Vektor vzájemné polohy bude $\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = (-l_{10} + v_1 t, v_2 t)$ a jeho velikost $l(t) = |\vec{r}_{12}(t)|$ je vzdálenost brouků. Ta má následující vyjádření:

$$l = \sqrt{(-l_{10} + v_1 t)^2 + (v_2 t)^2} = \sqrt{(l_{10})^2 + (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2v_1 l_{10} t}.$$

Minimální hodnotu vzdálenosti nalezneme tak, že derivace funkce v tomto bodě musí být nulová. Pro zjednodušení využijeme toho, že výraz l^2 bude nabývat extrémů ve stejných bodech[1] jako l:

$$(l^2(t))' = 2(v_1^2 + v_2^2)t - 2v_1 l_{10}.$$

Vzdálenost tedy bude minimální v čase T, ve kterém je derivace nulová: $2(v_1^2 + v_2^2)T - 2v_1 l_{10} = 0$, odkud $T = \frac{l_{10} v_1}{v_1^2 + v_2^2}$. Dosazením dostaneme vzdálenost při největším přiblížení $l(T) = \frac{l_{10} v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$. Vzdálenosti brouků od vrcholu pak dostaneme přímo jako jejich odpovídající souřadnice x a y z vektorů $\vec{r}_1(T) = \left(\frac{l_{10} v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}, 0\right)$ a $\vec{r}_2(T) = \left(0, \frac{l_{10} v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\right)$.

V rámci kontroly správnosti si můžeme ověřit, že všechny výsledky mají správný fyzikální rozměr (T má rozměr času, l_{10} rozměr délky a v_1 a v_2 mají rozměr délky.času^{-1}).

1.4 Vzájemná poloha částic

Zadání: Dvě částice se pohybují rychlostmi o vektorech $\vec{v}_1 = (2, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 3)$ (v příslušných jednotkách). V čase $t = 0$ se nacházely v bodech $\vec{r}_{10} = (-3, 0)$, $\vec{r}_{20} = (0, -3)$. Určete vektor vzájemné polohy částic, čas a délku maximálního sblížení.

Řešení: Úloha je zcela analogická předešlé úloze s brouky. Poloha prvního bodu bude popsána vektorem $\vec{r}_1(t) = (-3+2t, 0)$ a poloha druhého bodu $\vec{r}_2(t) = (0, -3+3t)$ a vektor vzájemné polohy je $\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = (3 - 2t, -3 + 3t)$. Vzájemná vzdálenost bude $l(t) = |\vec{r}_{12}(t)| = \sqrt{9 - 12t + 4t^2 + 9 - 18t + 9t^2} = \sqrt{18 - 30t + 13t^2}$. Druhá mocnina vzdálenosti tedy je $l^2(t) = 18 - 30t + 13t^2$. Tu zderivujeme a derivaci položíme rovnu nule $0 - 30 + 2 \cdot 13T = 0$. Odtud dostáváme čas maximálního přiblížení $T = 15/13$ a dosazením dostáváme vzdálenost při maximálním přiblížení $l(T) = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

[1] Přesněji řečeno, jelikož $(l^2(t))' = 2l(t)l'(t)$ mohlo by l^2 nabývat extrémů ve více bodech, pokud by někde platilo $l(t) = 0$

1.5 Vzájemná poloha částic 2

Zadání: Dvě částice se pohybují rovnoměrně přímočaře, první z bodu $\vec{A} = (0, 1)$ rychlostí $\vec{v}_1 = (3, -2)$, druhá z bodu $\vec{B} = (0, -1)$ rychlostí $\vec{v}_2 = (6, 4)$, vše v příslušných jednotkách. Určete průsečík trajektorií, vektor vzájemné polohy, okamžik maximálního sblížení a velikost tohoto sblížení.

Řešení: Odložme určení průsečíku trajektorií na později. Zbytek úlohy je analogií předchozích dvou. Poloha prvního bodu bude popsána vektorem $\vec{r}_1(t) = (3t, 1 - 2t)$ a poloha druhého bodu $\vec{r}_2(t) = (6t, -1 + 4t)$ a vektor vzájemné polohy je $\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = (3t, -2 + 6t)$. Opět určíme vzájemnou vzdálenost $l(t) = |\vec{r}_{12}(t)| = \sqrt{4 - 24t + 45t^2}$. Zderivujeme kvadrát vzdálenosti a položíme ho roven nule: $0 - 24 + 90T = 0$, odkud máme čas maximálního sblížení $T = \frac{4}{15}$ a dosazením dostaneme odpovídající vzdálenost $l = \sqrt{\frac{4}{5}}$.

Zbývá určit polohu průsečíku trajektorií. Trajektorie rovnoměrné přímočarého pohybu je přímka, a tedy chceme určit průsečík dvou přímek. Polohové vektory bodů, které jsme určili, jsou vlastně parametrickým vyjádřením přímek trajektorií, kde roli parametru hraje čas t. Při hledání průsečíku se musí rovnat x-ové i y-ové složky obou polohových vektorů. Musíme však mít na paměti, že každá částice prochází průsečíkem v jiném čase! Označme okamžik průchodu prvního bodu průsečíkem trajektorií jako t_1, čas průchodu druhého bodu jako t_2 a složky polohových vektorů $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ a $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$. Potom musí platit $\vec{r}_1(t_1) = \vec{r}_2(t_2)$ (z definice časů t_1 a t_2). Máme tedy dvě rovnice:

$$\begin{aligned} 3t_1 &= 6t_2, \\ 1 - 2t_1 &= -1 + 4t_2. \end{aligned}$$

Tuto soustavu jednoduše vyřešíme a dostaneme $t_1 = 1/2$ a $t_2 = 1/4$ a dosazením dostaneme souřadnice průsečíku jako $x_1(t_1) = x_2(t_2) = 3/2$ a $y_1(t_1) = y_2(t_2) = 0$.

1.6 Pohyb částice

Zadání: Pohyb částice je určen parametricky jako $x = A_1t^2 + B_1$, $y = A_2t^2 + B_2$, kde $A_1 = 20$ cm.s^{-2}, $B_1 = 5$ cm, $A_2 = 15$ cm.s^{-2}, $B_2 = -2$ cm. Najděte rychlost a zrychlení částice v okamžiku $t = 2$ s.

Řešení: Vektor polohy tedy je $\vec{r} = (A_1t^2 + B_1, A_2t^2 + b_2)$. Jeho derivací dostaneme vektor rychlosti $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = (2A_1t, 2A_2t)$, který stačí vyčíslit v čase $t = 2$ s, tedy $\vec{v}(2\text{ s}) = (80\text{ cm.s}^{-1}, 60\text{ cm.s}^{-1})$. Dalším zderivováním pak dostaneme zrychlení $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) = (2A_1, 2A_2)$, které má v čase $t = 2$ s hodnotu $\vec{a}(2\text{ s}) = (40\text{ cm.s}^{-2}, 30\text{ cm.s}^{-2})$.

1.7 Trajektorie pohybů

Zadání: Určete rovnici trajektorie, rychlost a zrychlení následujících pohybů částice zadaných parametrickými rovnicemi:

a) $x(t) = 4\sin(\frac{\pi}{2}t)$, $y(t) = 3\sin(\frac{\pi}{2}t)$

b) $x(t) = 4\cos(\frac{\pi}{2}t)$, $y(t) = 3\sin(\frac{\pi}{2}t)$

c) $x(t) = 4\sin(\frac{\pi}{2})t$, $y(t) = 3\sin(\frac{\pi}{2})t$

d) $x(t) = 4\cos^2(\frac{\pi}{2}t)$, $y(t) = 3\sin^2(\frac{\pi}{2}t)$

Řešení: Ve všech případech budeme postupovat analogicky. Nejprve najdeme rovnici trajektorie tak, že z rovnic pro $x(t)$ a $y(t)$ vhodnými úpravami vyloučíme čas t. Pro určení vektoru rychlosti a zrychlení stačí zadané parametrické vzorce derivovat jednou, resp. dvakrát, podle času.

a) Z první rovnice si vyjádříme $\sin(\frac{\pi}{2}t) = \frac{x}{4}$ a dosazením do druhé dostáváme rovnici přímky $y = \frac{3}{4}x$. Pohyb tedy bude probíhat po této přímce, ale ne nutně po celé přímce. Jelikož funkce $\sin(\frac{\pi}{2}t)$ nabývá hodnot od -1 do 1, bude pohyb probíhat v souřadnici x v intervalu $\langle -4, 4\rangle$ a v souřadnici y v intervalu $\langle -3, 3\rangle$. V obou souřadnicích se jedná o harmonický pohyb a celkově je i pohyb po dané úsečce harmonický.
Vektor rychlosti bude mít tvar $\vec{v}(t) = (4 \cdot \cos(\frac{\pi}{2}t)\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t))$ a vektor zrychlení $\vec{a}(t) = (-\pi^2\sin(\frac{\pi}{2}t), -\frac{3\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{2}t))$.

b) Zde použijeme goniometrický vzorec $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Umocníme tedy $x(t)$ i $y(t)$ na druhou, rovnici pro x vydělíme šestnácti a rovnici pro y devíti a sečteme, čímž dostaneme rovnici elipsy: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.
Vektor rychlosti bude mít tvar $\vec{v}(t) = (-2\pi\sin(\frac{\pi}{2}t), \frac{3\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t))$ a vektor zrychlení $\vec{a}(t) = (-\pi^2\cos(\frac{\pi}{2}t), -\frac{3\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{2}t))$.
Jelikož pohyb probíhá po elipse, jistě není přímočarý. Ještě by však mohl být rovnoměrný. U přímočarého pohybu se nemění směr vektoru rychlosti a u rovnoměrného se zase nemění jeho velikost. (Obecně tedy neplatí, že u rovnoměrného pohybu musí být nulové zrychlení – viz rovnoměrný pohyb po kružnici.) Velikost rychlosti zde je:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \sqrt{4\pi^2\sin^2(\frac{\pi}{2}t)) + \frac{9}{4}\pi^2\cos^2(\frac{\pi}{2}t))} = \pi\sqrt{\frac{16}{4}\sin^2(\frac{\pi}{2}t) + \frac{9}{4}\cos^2(\frac{\pi}{2}t)} \\
&= \pi\sqrt{\frac{9}{4}\left(\sin^2(\frac{\pi}{2}t) + \cos^2(\frac{\pi}{2}t)\right) + \frac{7}{4}\sin^2(\frac{\pi}{2}t))} = \pi\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}\sin^2(\frac{\pi}{2}t))}.
\end{aligned}
$$

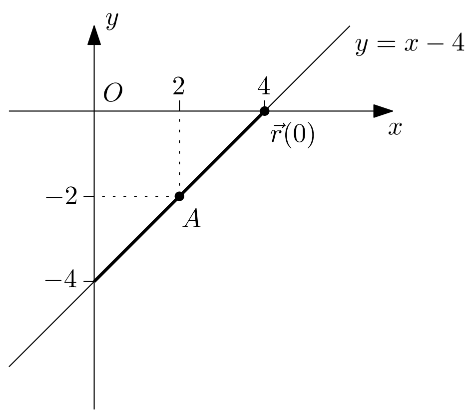
Výraz jsme upravovali proto, aby bylo zřejmé, že se jeho hodnota mění s časem t. (Například výraz $\pi\sqrt{\frac{16}{4}\sin^2(\frac{\pi}{2}t) + \frac{16}{4}\cos^2(\frac{\pi}{2}t)}$ také obsahuje t, ale jeho hodnota na t nezávisí.) V našem případě se tedy jedná o nerovnoměrný pohyb.

c) V tomto případě se ve vzorcích pro x a y vyskytuje pouze konstantní hodnota $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ nezávislá na t. Máme tedy $x(t) = 4t$ a $y(t) = 3t$. Z první rovnice vyjádříme $t = \frac{x}{4}$ a dosadíme do druhé. Trajektorie je tedy popsána rovnicí $y(x) = \frac{3}{4}x$. (Dodejme, že i kdybychom nevyčíslili hodnotu výrazu $\sin(\frac{\pi}{2})$, výraz by se vykrátil.) Pohyb tedy probíhá na přímce a souřadnice polohy částice mohou nabývat libovolných hodnot (uvažujeme samozřejmě i záporné časy $t < 0$).
Vektor rychlosti bude mít tvar $\vec{v}(t) = (4, 3)$ a vektor zrychlení bude nulový $\vec{a}(t) = (0, 0)$. Jedná se tedy o rovnoměrný přímočarý pohyb.

d) Pro nalezení trajektorie rovnou rovnici pro x vydělíme čtyřmi, rovnici pro y třemi a výsledky sečteme. Výsledek upravíme na $y(x) = -\frac{3}{4}x + 3$. Pohyb tedy probíhá na části přímky, přičemž $x \in \langle 0, 4\rangle$ a $y \in \langle 0, 3\rangle$.
Pro přehlednost napřed určíme samostatně první složku vektoru rychlosti $\dot{x}(t) = 4 \cdot 2\cos(\frac{\pi}{2}t)(-\sin(\frac{\pi}{2}t))\frac{\pi}{2} = -2\pi\sin(\pi t)$, kde jsme využili vzorec $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Analogicky dostaneme i druhou složku a celkově $\vec{v}(t) = (-2\pi\sin(\pi t), \frac{3}{2}\pi\sin(\pi t))$. Další derivací dostaneme vektor zrychlení jako $\vec{a}(t) = (-2\pi^2\cos(\pi t), \frac{3}{2}\pi^2\cos(\pi t))$.
Velikost vektoru rychlosti je $v(t) = \pi\sqrt{4\sin^2(\pi t) + \frac{9}{4}\sin^2(\pi t)} = \frac{5\pi}{2}|\sin(\pi t)|$. Pohyb je tedy nerovnoměrný a podle předpisu pro $x(t)$ a $y(t)$ poznáme, že se nejedná ani o pohyb harmonický.

1.8 Parametrizace harmonického pohybu

Zadání: Napište parametrické rovnice pro pohyb částice, která koná harmonický pohyb po úsečce, jejíž nosná přímka má tvar $y = x - 4$. Rovnovážná poloha leží v bodě $A = (2, -2)$, amplituda je rovna $s_0 = 2\sqrt{2}$, úhlová frekvence $\omega = \pi/4$, v okamžiku $t = 0$ je částice v bodě $(4, 0)$ (vše v příslušných jednotkách).



Řešení: Stačí určit výraz pro $x(t)$ a pak výsledný vzorec pro $y(t)$ dostaneme jednoduše jako $y(t) = x(t) - 4$. Jelikož má být pohyb harmonický, máme daný tvar $x(t) = A_x + s_x\sin(\omega t + \varphi_0)$, kde s_x je amplituda ve směru x (ta se liší od celkové amplitudy pohybu v rovině s_0!), $A_x = 2$ označuje x-ovou složku rovnovážné polohy. Trajektorie pohybu svírá s osou x úhel $\frac{\pi}{4}$ a tedy pro amplitudu s_x bude platit $s_x = s_0\cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$. Nyní určíme φ_0 tak, aby platila počáteční podmínka $x(0) = 2 + 2\sin(\frac{\pi}{4}\cdot 0 + \varphi_0) = 4$, tedy musíme mít $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Výsledně tedy:

$$x(t) = 2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right), \qquad y(t) = x(t) - 4 = -2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Můžeme ještě využít toho, že $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$ a psát

$$x(t) = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \qquad y(t) = -2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

Je však třeba mít na paměti, že podle naší konvence je ve vzorci standardně sinus, a tedy pokud se ptáme, jaká je počáteční fáze pohybu, je to $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ a nikoli nula. (Jedná se ale skutečně jen o konvenci názvosloví.)

1.9 Polární souřadnice

Zadání: Určete rychlost a zrychlení částice v polárních souřadnicích, je-li pohyb zadán parametricky jako $x = at$, $y = bt$, jde a, b jsou konstanty.

Řešení: Pokud bychom měli rychlost a zrychlení určit v kartézských souřadnicích, byli bychom hned hotovi, jelikož $v_x(t) = \dot{x}(t) = a$, $v_y(t) = \dot{y}(t) = b$ a $a_x(t) = \ddot{x}(t) = 0$, $a_y(t) = \ddot{y}(t) = 0$. Vzorce pro rychlost a zrychlení v polárních souřadnicích jsou složitější:

$$
\begin{aligned}
v_r(t) &= \dot{r}(t), & v_\varphi(t) &= r(t)\dot{\varphi}(t), \\
a_r(t) &= \ddot{r}(t) - r(t)\dot{\varphi}(t)^2, & a_\varphi(t) &= 2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t) + r(t)\ddot{\varphi}(t).
\end{aligned}
$$

Neplatí tedy, že by například rychlost a zrychlení ve směru φ byla dána prostě jako $\dot{\varphi}(t)$ a $\ddot{\varphi}(t)$!

Pro použití výše uvedených vzorců musíme náš pohyb převést do polárních souřadnic. Z Pythagorovy věty platí $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\, t$. (Předpokládáme $t \geq 0$.) Úhel φ můžeme určit ze vztahu $\tan(\varphi(t)) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{b}{a}$, a tedy $\varphi(t) = \arctan(\frac{b}{a})$. Ve výsledku nás ani nebude zajímat samotná hodnota $\varphi(t)$, ale pouze její derivace, která bude nulová, jelikož $\varphi(t)$ je konstantní. (To je vidět i z toho, že rovnice trajektorie je $y = \frac{b}{a}x$, a částice se tedy pohybuje po dané přímce směrem od počátku.)

Použitím vzorců dostáváme:

$$
\begin{aligned}
v_r(t) &= \dot{r}(t) = \sqrt{a^2 + b^2}, & v_\varphi(t) &= r(t)\dot{\varphi}(t) = \sqrt{a^2 + b^2}\, t \cdot 0 = 0, \\
a_r(t) &= \ddot{r}(t) - r(t)\dot{\varphi}(t)^2 = 0 - 0 = 0, & a_\varphi(t) &= 2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t) + r\ddot{\varphi}(t) = 0 + 0 = 0.
\end{aligned}
$$

1.10 Nerovnoměrný pohyb po kružnici

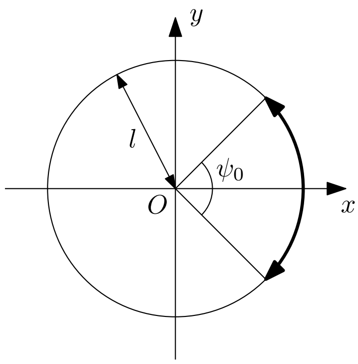
Zadání: Určete charakter pohybu částice (trajektorii, rychlost, zrychlení) daného parametricky jako $x = l\cos[\psi_0 \sin(\omega t + \varphi_0)]$, $y = l\sin[\psi_0 \sin(\omega t + \varphi_0)]$.

Řešení: Určeme nejprve rovnici trajektorii vyloučením času t. Obě rovnice umocníme na druhou a sečteme. Použitím vzorce $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ dostaneme $x^2 + y^2 = l^2$ (je úplně jedno, jak složitý je argument α funkcí $\sin^2\alpha$ a $\cos^2\alpha$, zde $\alpha = \psi_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$). Pohyb tedy probíhá po kružnici, což naznačuje, že by mohlo být snazší pracovat v polárních souřadnicích. (V zadání se neříká, v jakých souřadnicích máme rychlost a zrychlení určit, v principu to samozřejmě jde „uderivovat“ i v kartézských souřadnicích.)

Jelikož pohyb probíhá po kružnici daného poloměru l, bude zřejmě $r(t) = l$ ve všech časech, a tedy $\dot{r}(t) = 0$. Souřadnici φ vlastně vidíme rovnou. Jelikož vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi je $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$, je zřejmě $\varphi(t) = \psi_0\sin(\omega t + \varphi_0)$. Nyní už stačí jen počítat:

$$\begin{aligned}
v_r(t) &= \dot{r}(t) = 0,\\
v_\varphi(t) &= r(t)\dot{\varphi}(t) = l\psi_0\omega\cos(\omega t + \varphi_0),\\
a_r(t) &= \ddot{r}(t) - r(t)\dot{\varphi}(t)^2 = 0 - l\psi_0^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0),\\
a_\varphi(t) &= 2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t) + r\ddot{\varphi}(t) = 0 + (-l\psi_0\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)).
\end{aligned}$$

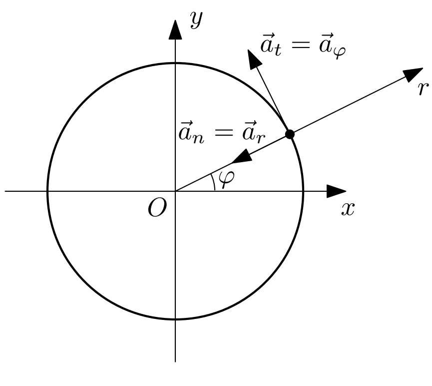
Částice vykonává harmonický pohyb po oblouku kružnice o poloměru l, který probíhá v rozsahu úhlů $\langle -\psi_0, \psi_0\rangle$.



1.11 Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici

Zadání: Částice se pohybuje po kružnici o poloměru $r = 5$ cm se středem v počátku souřadné soustavy, s konstantním úhlovým zrychlením $\varepsilon = 2\ \mathrm{s}^{-2}$ a v okamžiku $t = 0$ je v bodě A o souřadnicích $(0, 5)$ cm. Určete tečné a normálové zrychlení. Řešte v polárních souřadnicích. (Podle výsledku se v úloze navíc předpokládá nulová počáteční úhlová rychlost $\omega(0) = 0$, která je na rozdíl od počáteční polohy pro příklad relevantní.)

Řešení: Speciálně v případě pohybu po kružnici a při této volbě souřadné soustavy (tzn. že počátek leží ve středu kruhového pohybu) platí, že velikost zrychlení v souřadnici φ odpovídá tečnému zrychlení ($|a_t| = |a_\varphi|$) a velikost zrychlení v souřadnici r odpovídá zrychlení normálovému ($|a_n| = |a_r|$). Pro tento pohyb platí $a_n = -a_r$, neboť radiální polární souřadnice směřuje „ven“ z kružnice, zatímco zde směr normálového zrychlení směřuje „dovnitř“ kružnice.



Připomeňme, že obecně jsou a_φ a a_r vztažena k polárním souřadnicím, zatímco a_t a a_n se vztahují k pohybu částice a žádný jednoduchý vzájemný vztah nemusí existovat. (Například u jiného speciálního případu – částice pohybující se po přímce procházející počátkem – by platilo $a_r = a_t$.)

Souřadnice r je konstantní, a tedy její derivace je nulová. U souřadnice φ je situace složitější. Ze zadání víme, že $\ddot{\varphi} = \varepsilon$, takže můžeme rovnou určit

$$a_t = a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 + r\varepsilon = 10 \text{ cm.s}^{-2}.$$

Ještě potřebujeme spočítat $a_n = -a_r = -\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2$. Potřebujeme spočítat úhlovou rychlost $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$. Platí, že úhlové zrychlení je derivací úhlové rychlosti ($\varepsilon = \dot{\omega}$), stejně jako je „normální“ zrychlení derivací rychlosti. Máme tedy rovnici $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}$. Obě strany zintegrujeme podle času a dostaneme:

$$\begin{aligned}\int \varepsilon \, \mathrm{d}t &= \int \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t, \\ \varepsilon t + C &= \omega(t),\end{aligned}$$

kde C je integrační konstanta. (Výsledek samozřejmě platí jen pro konstantní ε!) Hodnotu C určíme z počátečních podmínek $\omega(0) = 0$. Tím dostaneme $\omega(0) = \varepsilon \cdot 0 + C = 0$, a tedy konstanta je v tomto případě nulová. Úhlová rychlost se tedy bude měnit s časem jako $\omega(t) = \varepsilon t$, stejně jako normální rychlost při rovnoměrně zrychleném pohybu. Nyní již můžeme spočítat:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0 - r(\varepsilon t)^2 = -r\varepsilon^2 t^2 = -20t^2 \text{ cm.s}^{-4}.$$

což např. pro $t = 1\,\text{s}$ dává $a_n = -a_r = 20\,\text{cm.s}^{-2}$.

1.12 Harmonický pohyb 1

Zadání: Určete amplitudu a fázovou konstantu harmonického pohybu, je-li doba kmitu $T = 3,14$ s a v okamžiku $t = 0$ je výchylka $x_0 = 10$ cm a rychlost $v_0 = 0,4$ m.s^{-1}.

Řešení: Harmonický pohyb má obecně předpis $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$. Úhlovou rychlost můžeme určit z periody T jako $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Hodnoty amplitudy A a fázovou konstantu (počáteční fázi) φ_0 musíme určit řešením soustavy dvou rovnic pro polohu a rychlost v čase $t = 0$. Obecný předpis rychlosti dostaneme derivací jako $v(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$. V čase $t = 0$ tedy máme:

$$\begin{aligned}x_0 &= A\sin(\varphi_0), \\ v_0 &= A\omega\cos(\varphi_0).\end{aligned}$$

Druhou rovnici vydělíme ω. Dále obě rovnice umocníme na druhou a sečteme, čímž dostaneme $x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2$, a tedy $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 0,22$ m. Nakonec rovnice podělíme a dostaneme $\frac{\sin(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)} = \tan(\varphi_0) = \frac{x_0\omega}{v_0}$, tedy $\varphi_0 = \arctan\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right) = 0,46$.

1.13 Harmonický pohyb 2

Zadání: Částice koná harmonický pohyb. Její maximální rychlost je 6 m.s^{-1} a maximální zrychlení 24 m.s^{-2}. Určete dobu kmitu, frekvenci, úhlovou frekvenci a amplitudu.

Řešení: Harmonický pohyb má obecně předpis:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Zderivováním podle času dostaneme výrazy pro okamžitou rychlost $v(t)$ a zrychlení $a(t)$:

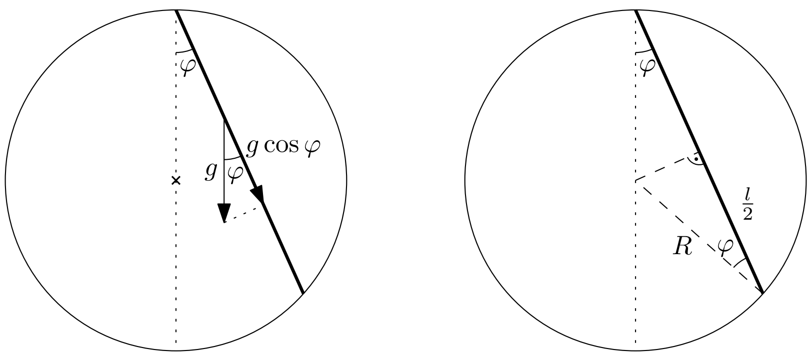
$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0),$$
$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Pro maximální rychlost tedy platí $|v_m| = A\omega$ (nastává pro $\cos(\omega t + \varphi_0) = \pm 1$) a pro maximální zrychlení $|a_m| = A\omega^2$ (nastává pro $\sin(\omega t + \varphi_0) = \pm 1$). Podělením rovnic pro rychlost a zrychlení dostaneme rovnou $\omega = \frac{a_m}{v_m} = 4$ s^{-1}, ze které snadno spočítáme frekvenci jako $f = \frac{\omega}{2\pi} = 0,64$ s$^{-1} = 0,64$ Hz a $T = \frac{1}{f} = 1,57$ s. Ze vztahu $v_m = A\omega$ pak vyjádříme maximální amplitudu $A = \frac{v_m}{\omega} = \frac{v_m^2}{a_m} = 1,5$ m.

1.14 Kruh se žlábky

Zadání: Mějme kružnici poloměru R ležící ve svislé rovině. Z jejího vrcholu vycházejí žlábky ve směru tětiv k obvodu kružnice (viz obrázek ve skriptech). Do žlábků současně vložíme malé kuličky a vypustíme. Dokažte, že všechny kuličky dosáhnou obvodu kružnice za stejnou dobu. Úlohu poprvé řešil v 17. století český učenec Jan Marcus Marci z Kronlandu.

Řešení: Tato úloha patří spíše do kapitoly o dynamice (studiu příčin pohybu). Při volném pádu z klidu urazí částice za čas t dráhu $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, kde zrychlení pohybu g je dáno působením tíhové síly.



Pokud si uděláme obrázek celé situace a jako φ označíme úhel mezi směrem žlábku a svislým směrem, bude na částici působit pouze průmět tíhové síly do směru žlábku –

$F_g \cos\varphi$. Jelikož se síla zmenší o $\cos\varphi$, příslušně se zmenší i zrychlení kuličky: $a(\varphi) = g\cos\varphi$. Pohyb podél žlábku pak bude určen vztahem $s(t) = \frac{1}{2}gt^2\cos\varphi$. Pro určení délky žlábku využijeme rovnoramenný trojúhelník, jehož vrcholy jsou průsečíky žlábku s kružnicí a střed kružnice. Polovina délky žlábku pak bude $\frac{l}{2} = R\cos\varphi$. Vidíme, že se zvětšujícím se úhlem φ se délka žlábku zmenšuje stejně, jako působící zrychlení, a tedy čas potřebný na opuštění kruhu bude stejný pro všechny úhly φ. Explicitní výpočet ukáže konkrétní hodnotu trvání pohybu. Z rovnice $s(t) = l$,

$$\frac{1}{2}gt^2\cos\varphi = 2R\cos\varphi,$$

vyjádříme t:

$$t = \sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

1.15 Vrh vzhůru a volný pád

Zadání: Těleso je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí v_0. Zároveň je z výšky h volně puštěno druhé těleso. Obě tělesa dopadnou na zem současně. Z jaké výšky bylo puštěno druhé těleso?

Řešení: U prvního tělesa dochází k rovnoměrnému přímočarému pohybu směrem nahoru, přičemž za čas t těleso urazí dráhu v_0t. Zároveň však padá k zemi volným pádem, kterým za čas t spadne dolů o $\frac{1}{2}gt^2$. Výška tělesa nad zemí v závislosti na čase pak je $z_1(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$. Těleso se bude nacházet na zemi, pokud bude platit $z_1(t) = 0$. Jedním řešením je zřejmě $t_{zem} = 0$ na začátku pohybu. Nás ale zajímá druhé řešení rovnice $t_{zem} = \frac{2v_0}{g}$. Druhé těleso jen padá volným pádem z výšky h, takže jeho výška je dána předpisem $z_2(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$. Na zemi se bude nacházet, pokud $z_2(t) = 0$. Nyní stačí dosadit za čas t z předchozího výpočtu hodnotu t_{zem} a vyjádřit výšku h. Dostaneme $h = \frac{1}{2}gt_{zem}^2 = \frac{2v_0^2}{g}$.

1.16 Průchod dvěma body

Zadání: Těleso je vrženo v okamžiku $t = 0$ svisle vzhůru. Určitým místem ve výšce h prochází v okamžiku t_1 směrem vzhůru a v okamžiku t_2 směrem dolů. Určete výšku h a počáteční rychlost v_0.

Řešení: Poloha tělesa ve svislém směru se bude vyvíjet jako $z(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$. Ve dvou časech t_1 a t_2 tedy musí platit:

$$v_0t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = h,$$
$$v_0t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = h.$$

Jedná se o rovnice pro v_0 a h. Odečtením obou rovnic vyloučíme h: $v_0(t_1-t_2) = \frac{1}{2}g(t_1^2-t_2^2)$, tedy $v_0 = \frac{g}{2}\frac{(t_1-t_2)(t_1+t_2)}{t_1-t_2} = \frac{g(t_1+t_2)}{2}$. Dosazením za v_0 do první rovnice pak dostaneme $h = \frac{g(t_1+t_2)}{2}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{gt_1t_2}{2}$.

Alternativní řešení: Můžeme také najít explicitní vyjádření pro t_1 a t_2 a z nich vyjádřit h a v_0. Časy t_1 a t_2 jsou řešením kvadratické rovnice

$$z(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = h \quad \longrightarrow \quad t^2 - \frac{2v_0}{g} t + \frac{2h}{g} = 0.$$

Explicitně

$$t_{1,2} = \frac{\frac{2v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{4v_0^2}{g^2} - \frac{8h}{g}}}{2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2h}{g}}.$$

Nyní máme opět dvě rovnice pro neznámé h a v_0 (pomocí známých časů t_1 a t_2). Jejich sečtením vyloučíme h: $t_1 + t_2 = \frac{2v_0}{g}$, tzn. $v_0 = \frac{g}{2}(t_1 + t_2)$. Pokud časy vynásobíme, tak dle vzorce $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ máme

$$t_1 t_2 = \frac{v_0^2}{g^2} - \left(\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2h}{g} \right) = \frac{2h}{g}.$$

Hledaná výška tedy je $h = \frac{g}{2} t_1 t_2$.

1.17 Vrh dolů

Zadání: Jakou rychlostí v_0 je nutno hodit těleso z výšky h, aby dopadlo o čas τ dříve, než při volném pádu.

Řešení: Označme dobu volného pádu jako T. Tato je dána rovnicí $z(T) = 0$, kde

$$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2.$$

Vyřešením rovnice dostaneme $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Výška tělesa vrženého dolů rychlostí v_0 se vyvíjí v čase takto:

$$z_{v_0}(t) = h - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Požadujeme, aby doba pádu byla $T - \tau$, tzn. aby $z_{v_0}(T - \tau) = 0$, explicitně

$$0 = h - v_0 (T - \tau) - \frac{1}{2} g (T - \tau)^2.$$

Vyjádřením v_0 dostaneme

$$v_0 = \frac{h}{T - \tau} - \frac{1}{2} g (T - \tau).$$

Dosazením za $h = \frac{1}{2} g T^2$ dospějeme k vyjádření

$$v_0 = \frac{1}{2} g \left(T^2 - (T - \tau)^2 \right) \frac{1}{T - \tau} = \frac{g\tau}{2} \frac{2T - \tau}{T - \tau}$$

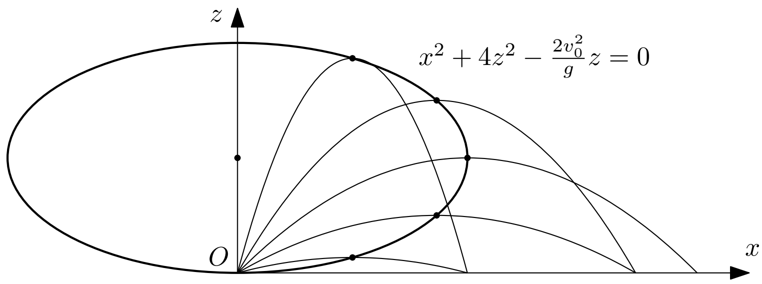
a po dosazení za T a úpravě máme výsledek (mohli jsme samozřejmě rovnou dosadit za T v prvním výrazu pro v_0, ale takto jsou úpravy jednodušší):

$$v_0 = g\tau \frac{\sqrt{8hg} - g\tau}{\sqrt{8hg} - 2g\tau}.$$

1.18 Vrcholy trajektorií I

Zadání: Uvažujte množinu trajektorií šikmého vrhu z počátku soustavy souřadnic s touž počáteční rychlostí v_0 a proměnným elevačním úhlem α. Dokažte, že vrcholy trajektorií leží na elipse

$$x^2 + 4z^2 - \frac{2v_0^2}{g} z = 0.$$



Řešení: Počáteční rychlost částice si rozdělíme na rychlost ve vodorovném směru $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ a rychlost ve svislém směru $v_{0z} = v_0 \sin\alpha$. Ve svislém směru samozřejmě ještě působí gravitace. Poloha tělesa v závislosti na čase pak je:

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t, \qquad z(t) = (v_0 \sin\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Vrchol trajektorie je dán nulovou vertikální rychlostí, $\dot{z}(t) = v_0 \sin\alpha - gt = 0$. Částice tedy prochází vrcholem v čase $t_v = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Dosazením tohoto času do parametrického vyjádření pohybu získáme souřadnice vrcholu:

$$\begin{aligned} x_v &= x(t_v) = (v_0 \cos\alpha) \frac{t_v}{2} = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}, \\ z_v &= z(t_v) = (v_0 \sin\alpha) \frac{t_v}{2} - \frac{1}{2} g \left(\frac{t_v}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}. \end{aligned}$$

Křivku tvořenou vrcholy trajektorií pro proměnný elevační úhel α získáme tak, že ze vztahů pro souřadnice vrcholů tento úhel vyloučíme. Umocněním x_v^2, přepsáním $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ a dosazením $\sin^2\alpha = \frac{2gz_v}{v_0^2}$ získáme

$$x_v^2 = \frac{v_0^4}{g^2} \frac{2gz_v}{v_0^2} \left(1 - \frac{2gz_v}{v_0^2} \right) = \frac{2v_0^2 z_v}{g} - 4z_v^2,$$

což je hledaná rovnice.

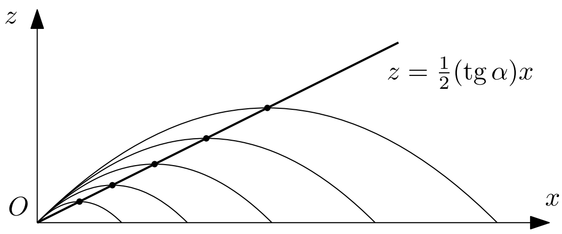
Poznámka: Jelikož máme rovnici křivky již v zadání, mohli jsme si ušetřit práci a souřadnice vrcholu do rovnice křivky pouze dosadit a ukázat, že je splněna:

$$\begin{aligned} x_v^2 + 4z_v^2 - \frac{2v_0^2}{g} z_v &= \frac{v_0^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{g^2} + 4 \frac{1}{4} \frac{v_0^4 \sin^4\alpha}{g^2} - \frac{2v_0^2}{g} \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} \\ &= \frac{v_0^4 \sin^2\alpha}{g^2} (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - \frac{v_0^4 \sin^2\alpha}{g^2} = 0. \end{aligned}$$

1.19 Vrcholy trajektorií II

Zadání: Uvažujte množinu trajektorií šikmého vrhu z počátku soustavy souřadnic pod týmž elevačním úhlem α a proměnnou počáteční rychlostí v_0. Dokažte, že vrcholy trajektorií leží na přímce

$$z = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha)x.$$



Řešení: Příklad je zcela analogický předchozímu. Nyní ze vztahů pro souřadnice vrcholu z řešení předchozího příkladu vylučujeme proměnnou v_0. Zjevně stačí uvažovat podíl $\frac{z_v}{x_v}$:

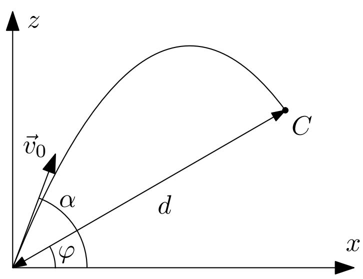
$$\frac{z_v}{x_v} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\sin^2\alpha}{g}}{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{g}} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Poznámka: Alternativou je opět jen dosadit do zadané rovnice:

$$z_v - \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha)x_v = \frac{1}{2}\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = 0.$$

1.20 Střelba na cíl

Zadání: Cíl leží v šikmé vzdálenosti $d = 6000$ m pod polohovým úhlem $\varphi = 30°$. (Zde d je šikmá vzdálenost z počátku přímo k cíli.) Jaká musí být minimální počáteční rychlost střely, aby byl cíl zasažen? Jaký elevační úhel odpovídá této rychlosti? (Viz obrázek ve skriptech.)



Řešení: Rychlost si opět (jako v příkladech 1.18 a 1.19) rozložíme na $v_0\sin\alpha$ ve svislém směru a $v_0\cos\alpha$ ve vodorovném směru. Cíl má pak polohu $x_c = d\cos\varphi$ a $z_c = d\sin\varphi$

Aby byl cíl zasažen, musí v nějakém čase t být obě souřadnice střely rovny souřadnicím cíle, tedy

$$d\sin(\varphi) = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2,$$
$$d\cos(\varphi) = (v_0 \cos\alpha)t.$$

Z rovnic nyní potřebujeme eliminovat čas t a získat tak výraz pro v_0. Ze druhé rovnice vyjádříme $t = \frac{d\cos\varphi}{v_0\cos\alpha}$ a dosadíme do první, čímž z rovnic odstraníme čas. Po úpravách můžeme vyjádřit

$$v_0^2 = \frac{\frac{1}{2}gd\cos^2\varphi}{\cos\alpha(\sin\alpha\cos\varphi - \sin\varphi\cos\alpha)} = \frac{\frac{1}{2}gd\cos^2\varphi}{\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi)}.$$

Nyní musíme najít úhel α, pro který je v_0 minimální. (Protože je $v_0 > 0$, můžeme bez obav zkoumat v_0^2 a vyhnout se derivaci odmocniny (viz příklad 1.3).) Zderivujeme tedy $v_0^2(\alpha)$ podle α a položíme derivaci rovnou nule. Pro obecnou funkci $f(x)$ a konstantu C platí $\left(\frac{C}{f(x)}\right)' = -C\frac{f'(x)}{f(x)^2}$, a tedy tato derivace je rovna nule právě tehdy, kdy je rovna nule $f'(x)$. Proto v našem výrazu pro v_0^2 stačí zderivovat jmenovatel a výsledek položit roven nule. Tak dostaneme (za použítí součtového vzorce)

$$\cos\alpha\cos(\alpha-\varphi) - \sin\alpha\sin(\alpha-\varphi) = \cos(2\alpha-\varphi) = 0.$$

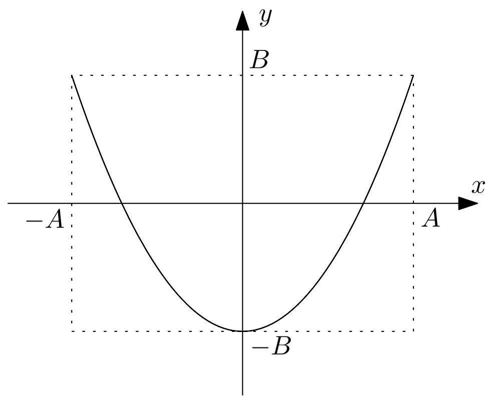
Řešením pak je $2\alpha - \varphi = \frac{\pi}{2}$ (jelikož $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, tak nás zajímá jen kořen $\frac{\pi}{2}$ rovnice $\cos x = 0$) a tedy $\alpha_{min} = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{3} = 60°$ (což odpovídá výsledku ve skriptech, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$). Potřebnou minimální rychlost pak dostaneme dosazením za α jako

$$v_{min} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}gd\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{2}gd} = 300\ \mathrm{m.s^{-1}}.$$

1.21 Lissajousovy obrazce

Zadání: Pohyb částice je dán rovnicemi a) $x = A\cos(\omega t)$, $y = B\cos(2\omega t)$, b) $x = A\cos(\omega t)$, $y = B\cos(3\omega t)$. Určete tvar trajektorie.

Řešení: a) Rovnici pro y upravíme použitím vzorců $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ a $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ jako $y = B(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)) = 2B\cos^2(\omega t) - B = \frac{2B}{A^2}x^2 - B$ a to je hledaná rovnice trajektorie.



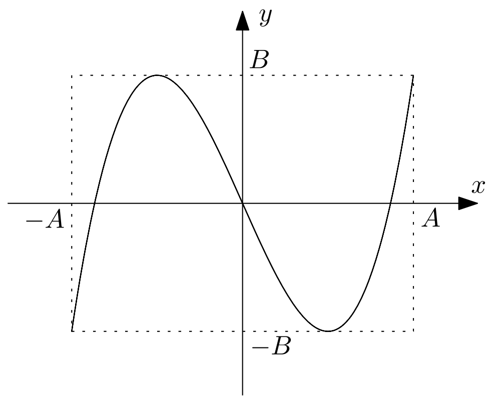
b) Postupujeme analogicky, jen je třeba napřed použít součtový vzorec

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

pro $\cos(2\omega t + \omega t)$ a vzorec $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ (a také předešlé vzorce) a dosazovat z rovnice pro x:

$$\begin{aligned} y &= B(\cos(2\omega t)\cos(\omega t) - \sin(2\omega t)\sin(\omega t)) \\ &= B\left((2\cos^2(\omega t) - 1)\cos(\omega t) - 2\cos(\omega t)(1-\cos^2(\omega t))\right) \\ &= B\left(\left(2\frac{x^2}{A^2} - 1\right)\frac{x}{A} - 2\frac{x}{A}\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Ve výsledku tak dostaneme rovnici $y = \frac{4B}{A^3}x^3 - \frac{3B}{A}x$.



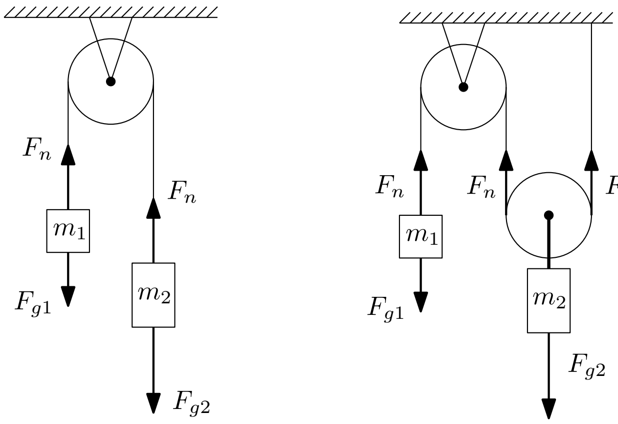
V obou případech vidíme, že $|x| \leq A$ a $|y| \leq B$, jelikož sinus a cosinus nabývají hodnot od -1 do 1.

Kapitola 2

Dynamika částice

2.1 Kladky

Zadání: Určete zrychlení tělesa sílu napětí vláken v soustavách na obrázku. Hmotnosti kladek a vláken považujte za nulové, tření vláken o kladky zanedbejte.



Poznámka (k zadání): Pro pevně uchycenou kladku jsou předpoklady nulového tření vlákna a nulové hmotnosti kladky rovnocenné. Stačilo by tedy předpokládat jen jedno z toho. Ve druhé úloze ovšem máme kladku pohyblivou – v té je naopak nutné předpokládat hmotnost kladky nulovou (jinak o ní nemáme žádné informace, museli bysme si například představovat, že hmotnost m_2 má pravá kladka i těleso dohromady). Při konzistentním předpokladu nulových hmotností kladek pak již není třeba dodávat, že vlákna mají na kladkách nulové tření.

Řešení (soustava vlevo): (jednoduchá kladka) Jelikož již máme náčrtek včetně všech sil, které na tělesa působí, stačí jen použít **2. Newtonův zákon**:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{2.1.1}$$

Přesto, že pohyb probíhá v rovině, je ve své podstatě jednorozměrný. Proto se vektorová povaha sil promítne pouze ve znaménku před velikostí sil. Zvolme si například směr dolů jako kladný směr pohybu. Pohybové rovnice tedy budou:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - F_n, \\ m_2 a_2 &= m_2 g - F_n. \end{aligned}$$

Máme tedy dvě rovnice pro tři neznámé (a_1, a_2, T) a potřebujeme tedy dostat další rovnici, které vychází z omezení, že se vlákno nemůže deformovat. Pokud se těleso 1 pohybuje se zrychlením velikosti a_1 směrem k zemi, potom se těleso 2 pohybuje se stejně velkým zrychlením směrem od země, tedy $a_2 = -a_1$. Tím dostáváme 2 rovnice pro pouze 2 neznámé a_1 a F_n:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - F_n, \\ -m_2 a_1 &= m_2 g - F_n. \end{aligned}$$

Řešením soustavy pak je:

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad F_n = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Poznámka: Můžeme si povšimnout, že výsledné zrychlení můžeme také napsat jako $a = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} g$ odkud vidíme, že pohyb je závislý pouze na poměru hmotností těles.

Řešení (soustava vpravo): (dvojitá kladka) Zde opět stačí napsat pohybové rovnice pro jednotlivá tělesa a uvědomit si, jaký je vztah mezi jejich zrychleními. Pokud opět označíme jako $a \equiv a_1$ velikost zrychlení tělesa 1 které bereme jako kladné při pohybu dolů, bude platit $a_2 = -\frac{a}{2}$ (vysvětlení viz poznámka níže). Druhé těleso se tedy pohybuje poloviční rychlostí opačným směrem.

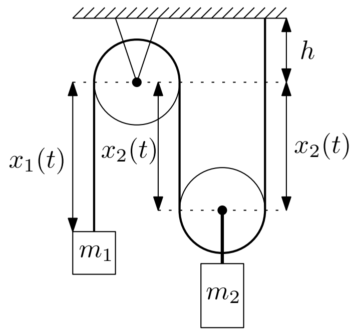
Pohybové rovnice tedy v tomto případě budou:

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - F_n, \\ -m_2 \frac{a}{2} &= m_2 g - 2F_n. \end{aligned}$$

Jejich řešením již dostaneme výsledek:

$$a = \frac{2(2m_1 + m_2)}{4m_1 + m_2} g, \quad F_n = \frac{3 m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g.$$

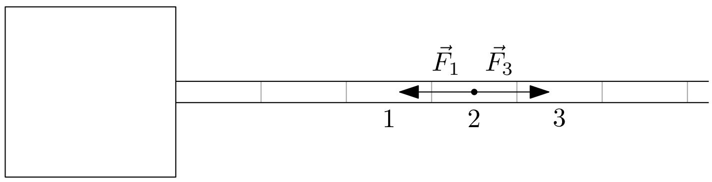
Poznámka k $a_2 = -\frac{a}{2}$: Pokud se nechceme spokojit s prostým konstatováním, že „je to vidět“, můžeme vztah mezi zrychleními jednotlivých těles odvodit rigorózně. Označme si jako $x_1(t)$ délku úseku od tělesa 1 ke kladce (závislou na čase), r poloměr kladky, $x_2(t)$ vzdálenost mezi kladkami, h vzdálenost středu levé kladky od stropu a l délku provázku, viz obrázek.



Potom platí: $l = x_1(t) + \pi r + x_2(t) + \pi r + x_2(t) + h$. Derivací tohoto vztahu podle času dostaneme $0 = \dot{x}_1(t) + 2\dot{x}_2(t)$ (jelikož l, r, h jsou konstanty) a další derivací již $0 = a_1(t) + 2a_2(t)$.

Poznámka (k výsledku): Zrychlení a bude kladné (těleso 2 bude stoupat) právě tehdy, když bude platit $2m_1 > m_2$. To znamená, že stačí, aby těleso 1 mělo poloviční hmotnost oproti tělesu 2. Právě proto se dvojitá kladka využívá. Chceme-li zvedat těžké těleso, zavěsíme jej na volnou kladku, a poté stačí působit poloviční silou než při vytahování na jednoduché kladce. Musí nám však rukama projít dvojnásobná délka vlákna, tedy vykonaná práce je pochopitelně stejná.

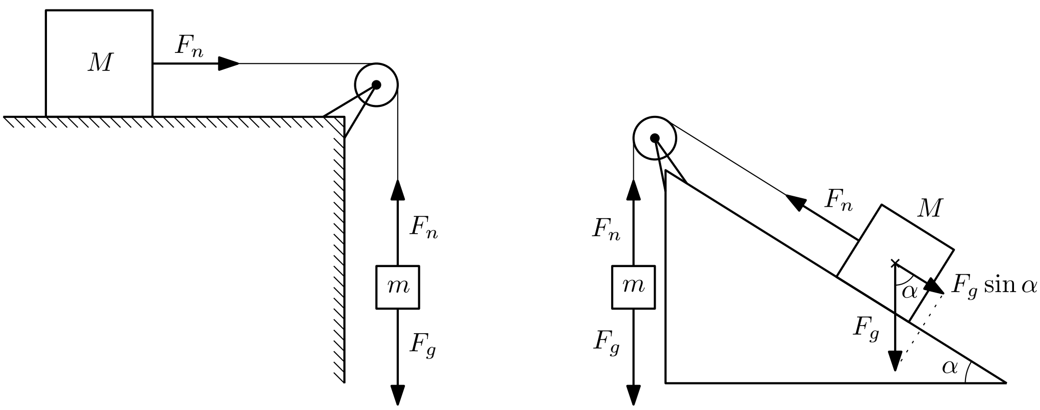
Poznámka (k zadání): V obrázku jsou již znázorněny síly, které na tělesa působí. Jistě stojí za krátké zamyšlení otázka, proč má síla napětí působící na obě tělesa stejnou velikost. První věc je, že obecně F_n nebude mít stejnou velikost jako $m_1 g$ (to je vidět i z extrémního případu $m_2 = 0$, kdy by síla velikosti $m_1 g$ měla způsobovat nekonečné zrychlení nehmotného provázku a tělesa). Ze zákona akce a reakce platí, že jak provázek působí na těleso silou F_n, tak těleso působí na konec provázku opačně orientovanou silou stejné velikosti F_n. Nyní si můžeme představit provázek jako složení nekonečně mnoha „malých kousků“ provázku. Sousední kousky na sebe vzájemně působí silami napětí v provázku. Viz obrázek, kde jsou znázorněné síly působící na vybraný kousek provázku (označený číslem 2) - levý sousední kus provázku (s číslem 1) působí napěťovou silou $\vec{F}_1$ a pravý sousední (s číslem 3) působí silou $\vec{F}_3$.



Pro nehmotné vlákno musí mít síly od sousedních kousků vždy přesně stejnou velikost, jinak by, z Newtonovy pohybové rovnice, došlo opět k nekonečnému zrychlování kousků (nehmotného) provázku. Takto se síla napětí F_n přenese beze změny až ke druhému tělesu. Pro hmotné vlákno tato argumentace neplatí a napěťové síly by nebyly na jednom a druhém konci stejné.

2.2 Další tělesa na vlákně

Zadání: Určete zrychlení tělesa sílu napětí vláken v soustavách na obrázku. Tření těles o podložky zanedbejte.



Poznámka (k zadání): Jako v příkladu 2.1 opět zanedbáváme hmotnosti vláken a hmotnosti kladek/tření na vláken na kladkách.

Řešení (soustava vlevo): Není zde vůbec nic nového oproti příkladu 2.1. Pohybové rovnice budou:

$$\begin{aligned} ma &= mg - F_n, \\ Ma &= F_n, \end{aligned}$$

kde kladný směr zrychlení a míří směrem dolů pro těleso hmotnosti m a doprava pro těleso hmotnosti M. Řešením soustavy pak dostaneme výsledek:

$$a = \frac{m}{m+M}\, g, \quad F_n = \frac{mM}{m+M}\, g.$$

Řešení (soustava vpravo): Zde je jediná novinka v tom, že je třeba u tělesa hmotnosti M rozložit tíhovou sílu do směru vlákna, které bude mít vliv na jeho pohyb a na sílu kolmou k podložce. (Síla kolmá k podložce by obecně vyvolávala odporovou sílu vzniklou třením, kterou zde ale zanedbáváme.) Pohybové rovnice jsou:

$$\begin{aligned} ma &= mg - F_n, \\ Ma &= F_n - Mg\sin\alpha. \end{aligned}$$

Kladný směr zrychlení je zvolen pro levé těleso dolů a pro těleso na nakloněné rovině podél roviny vzhůru. Řešením soustavy pak dostaneme výsledek:

$$a = \frac{m - M\sin\alpha}{m+M} g, \quad F_n = \frac{mM(1+\sin\alpha)}{m+M} g.$$

Poznámka (k výsledku): Všimněme si, že kdybychom v příkladu 2.1 (a) použili hmotnost $m_2 = M\sin\alpha$, nedostali bychom stejný výsledek jako zde. K setrvačnosti totiž přispívá celá hmotnost M.

2.3 Brzdění tělesa

Zadání: Těleso o hmotnosti m pohybující se přímočaře rychlostí v_0 má být zabrzděno konstantní silou velikosti F na dráze s. Určete tuto sílu.

Řešení (dynamicky – pomocí práce): Úlohu můžeme jednoduše vyřešit přes práci (energii). Víme, že těleso má kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}mv_0^2$ a na jeho zabrzdění tedy musíme vykonat stejně velkou práci. Pro práci vykonanou **konstantní sílou** působící ve směru pohybu platí $A = Fs$. Máme tedy vztah:

$$E_k = A,$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = Fs,$$
$$F = \frac{mv_0^2}{2s},$$

což je požadovaný výsledek.

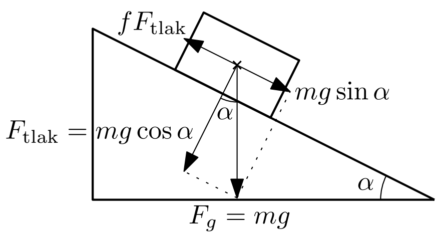
Řešení (kinematicky): Alternativně můžeme úlohu řešit kinematickým způsobem. Víme, že pohyb bude rovnoměrně zrychlený (zpomalený) se zrychlením velikosti $a = \frac{F}{m}$. (Zrychlení jsme dostali z 2. Newtonova zákona.) Dobu pohybu určíme tak, že chceme dostat nulovou rychlost, tedy musí platit $0 = v_0 - at$, tedy $t = \frac{v_0 m}{F}$. Má-li dále těleso zastavit na dané dráze s, musí platit $s = \frac{1}{2}at^2$, kam stačí dosadit za t:

$$s = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\frac{(v_0 m)^2}{F^2} = \frac{mv_0^2}{2F},$$

odkud opět máme $F = \frac{mv_0^2}{2s}$. Využili jsme zde zjednodušení v tom, že jsme pohyb rovnoměrně zpomalený z rychlosti v_0 na 0 nahradili pohybem z klidu rovnoměrně zrychleným do v_0. Pokud bychom to neudělali a psali $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$, dostali bychom pochopitelně stejný výsledek.

2.4 Koeficient smykového tření

Zadání: Po nakloněné rovině s úhlem sklonu α se smýká těleso a pohybuje se přitom konstantní rychlostí. Určete koeficient smykového tření.



Řešení: Pro odporovou sílu F_t vyvolanou třením platí, že působí vždy proti směru pohybu a její velikost je:

$$F_t = fF_{\text{tlak}},$$

kde f je **koeficient smykového tření** a F_{tlak} tlaková síla, tedy síla působící kolmo na podložku, po které se těleso smýká. Jelikož pohyb probíhá konstantní rychlostí, musí být nulové zrychlení, a tedy nulová výslednice sil. To nastane v případě, kdy se odporová síla tření F_t přesně vyrovná složce tíhové síly ve směru pohybu, jejíž velikost zde je $mg \sin \alpha$. Tlaková síla je dána druhou částí rozkladu tíhové síly a tedy musí platit:

$$mg \sin \alpha = F_t = fmg \cos \alpha,$$

odkud máme výsledek $f = \mathrm{tg}\, \alpha$.

2.5 Raketa

Zadání: Raketa o hmotnosti $m = 20$ t dosáhne výšky $h = 5$ km za $t = 10$ s. Jaký je výkon P jejích motorů?

Očekávané řešení: Předpokládáme, že je veškerý výkon motorů využit na získání potenciální energie. Pro potenciální energii v tíhovém poli máme vztah

$$E_p = mgh,$$

kde m je hmotnost tělesa, h výška od hladiny nulového potenciálu a g tíhové zrychlení. Hladinu nulového potenciálu si zvolíme na zemi v místě, odkud raketa startuje. Je-li výkon P konstantní, potom platí:

$$P = \frac{A}{t},$$

kde A je vykonaná práce a t čas pohybu. Celkem máme:

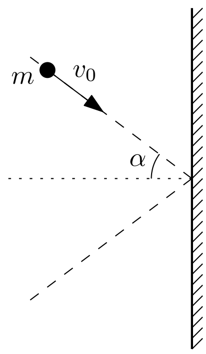
$$mgh = E_p = A = Pt,$$

tedy $P = \frac{mgh}{t}$. Dosazením zadaných hodnot dostaneme výsledek ze skript $N = 98$ MW (kde byla použita hodnota $g = 9,8$ m.s^{-2}).

Poznámka k fyzikálnosti řešení: Ve skutečnosti jsme spočítali spíše průměrný výkon motorů během daného pohybu. Okamžitá hodnota výkonu by byla konstantní jen pro konstantní rychlost během celého pohybu ($P = Fv = mgv$). Nicméně, určitě musíme navíc předpokládat, že počáteční a koncová rychlost rakety je stejná, jinak by se energie motorů ukládala nejen do potenciální energie ale i do kinetické energie (případně, pokud by koncová rychlost byla menší než počáteční, tak by se naopak část kinetické energie použila místo energie motorů).

2.6 Odraz

Zadání: Těleso o hmotnosti $m = 50$ g pohybující se rychlostí $v_0 = 20$ m.s^{-1} narazilo na pevnou stěnu pod úhlem 60°. Jakou průměrnou silou působilo na stěnu, šlo-li o pružný ráz a trval-li náraz 0,1 s.



Řešení (dynamicky – pomocí impulsu síly): Nejprve je dobré si pohyb rozdělit do směru rovnoběžného se stěnou (kde se nic neděje) a směru kolmého (kde dochází ke změně). Předpoklad pružného rázu nám říká, že se zachovává kinetická energie tělesa, a tedy jeho rychlost po odrazu bude mít stejnou velikost jako při dopadu, jen se změní její směr. Typicky se úloha řeší pomocí **impulsu síly** I, což je veličina popisující časový účinek síly a v případě konstantní síly pro ni platí vztah:

$$I = Ft,$$

kde t je doba působení síly. V našem případě místo F budeme psát $\langle F \rangle$ – tedy konstantní hodnotu střední velikosti působící síly. Dále platí, že impuls síly je roven změně hybnosti, tedy[1] $\Delta p = I$. Máme tedy:

$$\langle F \rangle \, t = I = \Delta p = m(v' - v) = 2mv_0 \cos\alpha,$$

kde m je hmotnost tělesa, v' vodorovná složka rychlosti po odrazu, v je vodorovná složka rychlosti před odrazem, v_0 velikost původní (celkové) rychlosti (šikmé ke stěně) a α úhel dopadu (tedy i odrazu) měřený od kolmice ke stěně. Dostáváme tedy vztah

$$\langle F \rangle = \frac{2mv_0 \cos\alpha}{t}$$

a dosazením zadaných hodnot máme výsledek $\langle F \rangle = 10$ N.

Řešení (kinematicky): Opět se budeme zabývat jen pohybem ve směru kolmém ke stěně. V zadání není určený konkrétní průběh pohybu – přísně vzato tedy tuto úlohu nemůžeme řešit kinematicky. Ale řešení přes impuls síly ukázalo, že na konkrétním průběhu stejně nezáleží. Zkusme tedy vzít nějaký „jednoduchý“ pohyb jen jako jednoduchou zkoušku konzistence. Vezměme například rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením $a = \frac{\langle F \rangle}{m}$ (2. Newtonův zákon). Víme, že se rychlost musí změnit z $v = -v_0 \cos\alpha$ na $v' = v_0 \cos\alpha$. Platí tedy $v' - v = 2v_0 \cos\alpha = at = \frac{\langle F \rangle}{m} t$, odkud dostáváme stejný výsledek jako v dynamickém řešení.

[1] Obecně je impuls síly vektorová veličina $\vec{I}$ (stejně jako je hybnost vektorová veličina $\vec{p}$. Vztah mezi impulsem síly a změnou hybnosti je pak obecně $\Delta\vec{p} = \vec{I}$. V tomto příkladě máme změnu hybnosti pouze ve vodorovném směru a efektivně tedy řešíme jednorozměrný problém.

2.7 Střela brzděná stěnou

Zadání: Střela hmotnosti $m = 20$ g narazí rychlostí $v_1 = 600$ m.s^{-1} na stěnu tloušťky $d = 12$ cm a vyletí z ní rychlostí $v_2 = 50$ m.s^{-1}. Jaká průměrná síla $\langle F\rangle$ působila na střelu uvnitř stěny?

Řešení (dynamicky – pomocí práce): Vyjdeme z toho, že změna kinetické energie střely se musí rovnat práci, která je na ni vykonána: $\Delta E_k = A$. Pro průměrnou (a tedy konstantní) sílu $\langle F\rangle$ platí $A = \langle F\rangle d$. Dohromady máme:

$$\frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_2^2\right) = \Delta E_k = A = \langle F\rangle\, d,$$

kde v_1 je původní rychlost střely a v_2 rychlost střely po průchodu stěnou. Celkově dostaneme:

$$\langle F\rangle = \frac{m}{2d}\left(v_1^2 - v_2^2\right),$$

kam stačí dosadit a dostaneme výsledek $\langle F\rangle \doteq 29,8$ kN.

Řešení (kinematicky): Zde platí stejná poznámka jako u kinematického řešení příkladu 2.6. Konkrétní průběh pohybu nemáme zadaný, ale zároveň z dynamického řešení víme, že na něm nezáleží. Uvažujme tedy například rovnoměrně zpomalený pohyb se zrychlením $a = \frac{\langle F\rangle}{m}$ a musí platit $d = v_1 t - \frac{1}{2}at^2$ a současně $at = v_1 - v_2$. Dostaneme tedy:

$$d = v_1\frac{v_1 - v_2}{a} - \frac{1}{2}a\frac{(v_1 - v_2)^2}{a^2} = \frac{1}{2a}(v_1^2 - v_2^2),$$

a stačí již jen vyjádřit a a dosadit $\langle F\rangle = ma$.

2.8 Zrychlování vlaku

Zadání: Jakou práci je třeba vykonat, aby vlak o hmotnosti $m = 300$ t zvětšil svou rychlost z $v_1 = 36$ km/h na $v_2 = 54$ km/h.

Řešení: Potřebná práce se rovná změně kinetické energie vlaku, tedy:

$$A = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right),$$

kde v_1 je původní rychlost vlaku, v_2 požadovaná rychlost a m hmotnost vlaku. Nyní stačí jen dosadit $v_1 = 10$ m.s^{-1} a $v_2 = 15$ m.s^{-1} a dostaneme výsledek $A = 18,75$ MJ.

2.9 Automobil v zatáčce

Zadání: Určete nejmenší koeficient smykového tření mezi koly automobilu a asfaltem, aby vůz mohl projet zatáčku poloměru $r = 200$ m rychlostí $v = 100$ km/h.

Řešení: Aby automobil mohl projet zatáčku, nesmí odstředivá síla, která na něj při průjezdu působí, převýšit maximální odporovou sílu tření, která jej drží na požadované dráze. Velikost odstředivé síly je $F_o = m\frac{v^2}{r}$ (m je hmotnost automobilu) a maximální velikost síly tření je $F_t = fF_{tlak} = fmg$, kde f je hledaný koeficient smykového tření, F_{tlak} tlaková síla, kterou automobil tlačí na asfalt, zde tíhová síla, a g je tíhové zrychlení. Musí tedy platit:

$$m\frac{v^2}{r} = F_o \leq F_t = fmg,$$

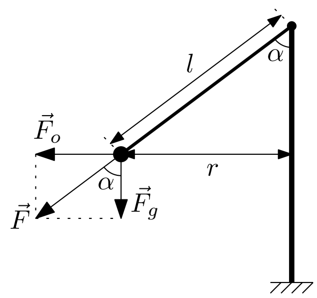
odkud dostáváme výsledek pro minimální koeficient smykového tření $f = \frac{v^2}{rg} \doteq 0,39$, kde jsme použili $g = 9,8\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

Poznámka: V řešení jsme se na pohyb automobilu dívali z pohledu neinerciální rotující vztažné soustavy, která rotuje spolu s automobilem (počátek soustavy je umístěn ve středu pomyslné kružnice tvořící zatáčku). V této rotující neinerciální soustavě se automobil nepohybuje a působí na něj nepravá/zdánlivá (nemůžeme určit jejího původce) odstředivá síla $\vec{F_o}$. Tato musí být vyrušena právě třecí silou $\vec{F_t}$, aby výslednice sil působící na automobil byla nulová (a mohl se tedy nepohybovat), tzn. $\vec{F_o} + \vec{F_t} = 0$.

Z pohledu inerciální vztažné soustavy spojené se zemí automobil vykonává kruhový pohyb. Tento zakřivený pohyb je způsobován (pravou) dostředivou silou $\vec{F_d}$, která je tvořena (suplována) třecí silou $\vec{F_t}$. Požadujeme tedy $\vec{F_d} = \vec{F_t}$.

2.10 Kolotoč

Zadání: Sedadlo kolotoče na závěsu délky l se otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí ω. Určete úhel α, který svírá závěs s osou.



Řešení: Veškerá fyzika úlohy je vlastně vyřešena v obrázku. Na situaci se díváme z pohledu rotující neinerciální soustavy s počátkem umístěným ve sloupu kolotoče. V takovéto soustavě se sedadlo kolotoče nepohybuje a působí na něj zdánlivá/nepravá odstředivá síla $\vec{F_o}$. Klíčová myšlenka pro určení úhlu závěsu je ta, že výslednice tíhové a odstředivé síly působí **ve směru** závěsu. Právě v tom případě může být tato výslednice plně vykompenzována tahovou silou závěsu, která může působit pouze ve směru závěsu. Kdyby tato výslednice měla jiný směr, závěs by ji kompenzoval jen částečně a docházelo by ke změně úhlu α mezi závěsem a osou. Nyní již jednoduše přeneseme úhel α do trojúhelníku o stranách $F_g = mg, F_o$ a F a dostáváme:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_o}{F_g} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 l \sin\alpha}{g}.$$

Výsledně máme $\cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}$, a tedy $\alpha = \arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)$.

Poznámka (k výsledku): Vidíme, že pro malou rychlost otáčení tyto rovnice pro úhel α nemají řešení. Musí totiž platit, že $\frac{g}{l\omega^2} \leq 1$. Tzn. kolotoč se musí točit alespoň minimální úhlovou rychlostí $\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Pro $\omega = \omega_{\min}$ dostáváme $\alpha = 0$, tedy kolotoč visící svisle dolů. V případě, že se točí ještě pomaleji, kolotoč stále visí svisle dolů, odstředivá síla není jednoduše dost velká, aby mohla způsobit, že výslednice gravitační a odstředivé bude směřovat ve směru závěsu pro libovolně malý úhel α.

Poznámka (k řešení): Alternativně můžeme úlohu opět (podobně jako v příkladu 2.9) řešit z pohledu inerciální soustavy spojené se zemí. V tomto případě se sedačka kolotoče pohybuje po kruhové dráze a tento pohyb je způsobován dostředivou silou $\vec{F}_d$. Nyní tedy požadujeme, aby výslednicí gravitační síly a síly závěsu byla právě dostředivá síla potřebná k udržení kruhového pohybu s úhlovou rychlostí otáčení ω. Požadujeme $\vec{F}_d = \vec{F}_g + \vec{F}_z$ ($\vec{F}_z$ je síla závěsu). V rotující neinerciální soustavě jsme naproti tomu měli $\vec{F}_o + \vec{F}_g + \vec{F}_z = 0$, tzn. že výslednice všech sil působících na těleso je nulová.

2.11 Napětí vlákna

Zadání: Kuličku o hmotnosti $m = 100$ g zavěšenou na niti délky $l = 30$ cm roztočíme ve svislé rovině dvěma způsoby: 1./ s konstantní obvodovou rychlostí $v = 210\,\mathrm{cm.s^{-1}}$, 2./ tak, že jí udělíme v nejvyšším bodě trajektorie tečnou rychlost $v = 210\,\mathrm{cm.s^{-1}}$. Jakou silou bude tažena nit v nejnižším a nejvyšším bodě trajektorie v obou případech?

Poznámka 1 (k zadání): První případ je poměrně těžko představitelný s nití. Asi by bylo lépe uvažovat pevnou tyčku (klidně hmotnou – centrifuga na pouti), jelikož pro dosažení popisovaného pohybu je třeba na těleso působit silou tečnou k pohybu (tedy kolmou na závěs), což se s nití dělá těžko. (Při pohybu dolů je třeba těleso brzdit, při pohybu nahoru bránit jeho zpomalování.)

Řešení 1. případu: V tomto případě je obvodová rychlost konstantní, takže po celé dráze na těleso musí působit dostředivá síla velikosti $F_d = m\frac{v^2}{l}$, kde v je obvodová rychlost tělesa. V horním bodě musí tuto sílu tvořit gravitační síla $F_g = mg$ společně s napětím vlákna F_n: $F_d = F_n + F_g$. V dolním bodě naproti tomu musí napětí vlákna jednak „vyrušit“ gravitační sílu a ještě suplovat dostředivou sílu potřebnou pro daný kruhový pohyb: $F_n = F_d + F_g$. Máme tedy napěťovou sílu v horním bodě $F_{n\text{horní}}$ a spodním bodě $F_{n\text{spodní}}$:

$$F_{n\text{spodní}} = F_d + F_g = m\frac{v^2}{l} + mg = 2,45 \text{ N},$$
$$F_{n\text{horní}} = F_d - F_g = m\frac{v^2}{l} - mg = 0,49 \text{ N},$$

kde jsme použili hodnotu $g = 9,81\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

Poznámka (rotující vztažná soustava): Příklad by opět (jako v příkladech 2.9 a 2.10) šel řešit i v rotující neinerciální soustavě. Pak na kuličku působí odstředivá síla $F_o = m\frac{v^2}{l}$. V horním bodě se od velikosti této síly odečítá gravitační síla, tato výslednice pak musí být vykompenzována napěťovou silou vlákna, $F_n = F_o - F_g$. V dolním bodě se gravitační se gravitační a odstředivá síla sčítají, $F_n = F_o + F_g$.

Řešení 2. případu: Případ je analogický předchozímu s tím rozdílem, že se obvodová rychlost tělesa mění. V horním bodě dostaneme stejný výsledek jako v prvním případě. Ve spodním bodě je obvodová rychlost v_2 větší než původní v. K jejímu určení použijeme zákon zachování energie. Platí, že celková kinetická energie ve spodním bodě je rovna součtu původní kinetické energie a potenciální energie, kterou těleso ztratilo, tedy:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgl,$$
$$v_2^2 = v^2 + 4gl.$$

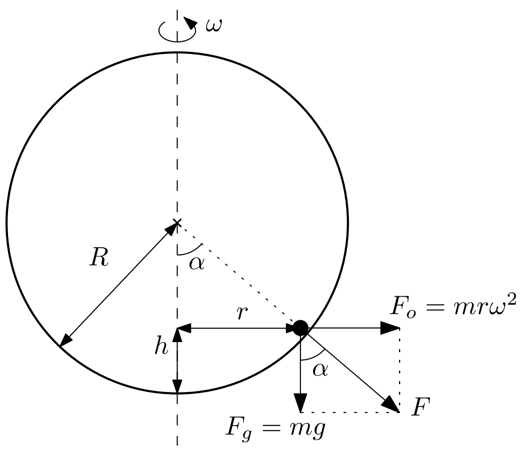
Potom pro síly dostáváme:

$$F_{s2} = m\frac{v_2^2}{l} + mg = m\frac{v^2 + 4gl}{l} + mg = 6,37\ \mathrm{N},$$
$$F_{h2} = m\frac{v^2}{l} - mg = 0,49\ \mathrm{N},$$

kde jsme opět použili hodnotu $g = 9,81\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

2.12 Odstředivka

Zadání: Odstředivka má tvar koule o poloměru R a otáčí se kolem svislé osy s konstantní úhlovou frekvencí ω. Určete výšku h, do které vystoupí malá kulička hmotnosti m, vložíme-li ji do odstředivky. Jakou silou bude tlačit na stěnu odstředivky? Jak se změní situace v případě odstředivky kuželového tvaru?



Řešení pro kouli: Kulička vlivem tření získá rychlost odstředivky a bude kolem osy otáčení obíhat také s úhlovou frekvencí ω. Přejdeme do neinerciální vztažné soustavy rotující s úhlovou rychlostí ω (s počátkem v místě osy otáčení). Na kuličku pak bude působit odstředivá síla F_o. Kulička vystoupá v odstředivce do takové výšky, kdy výslednice odstředivé síly F_o a tíhové síly F_g bude působit kolmo na stěnu odstředivky. Z obrázku tedy stačí vyjádřit:

$$\frac{mr\omega^2}{mg} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{R-h},$$

odkud již dostaneme

$$h = R - \frac{g}{\omega^2}.$$

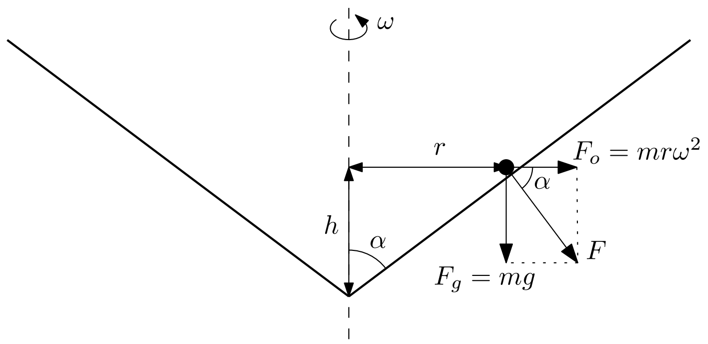
Velikost tlakové síly dostaneme analogickým postupem:

$$\frac{mr\omega^2}{F} = \sin\alpha = \frac{r}{R},$$

tedy $F = mR\omega^2$.

Poznámka: Získaný výsledek pro výšku h samozřejmě platí pouze v případech, kdy dostaneme $h \geq 0$, tedy pro $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$. Pro $\omega < \frac{g}{R}$ máme jedinou stabilní rovnovážnou polohu $h = r = 0$. Povšimněte si, že je také řešením našich rovnic, jen jsme toto řešení opomenuli. Teprve pro $\omega > \frac{g}{R}$ začne existovat nová stabilní rovnovážná poloha (ta, kterou jsme nalezli) a z polohy „na dně“ se stane labilní rovnovážná poloha – při sebemenším vychýlení z ní se kulička vyhoupne do polohy $R - \frac{g}{\omega^2}$.

Řešení pro kužel: Uvažujme dále odstředivku tvaru kužele, jejíž plášť svírá s osou rotace úhel α. (Úhel α je tedy nyní jiný úhel, než v předchozím případě.)



Aby byla kulička v rovnovážné poloze (kromě polohy v nejnižším bodě), musí být opět výslednice odstředivé a tíhové síly kolmá ke stěně odstředivky. Máme tedy:

$$\frac{mg}{mr\omega^2} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{h},$$

tedy $h = \frac{r^2\omega^2}{g}$ a dále vyjádříme $r = h\operatorname{tg}\alpha$ a celkem dostaneme

$$h = \frac{g}{\omega^2}\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Našli jsme polohu, kde bude kulička stacionární. Dá se ovšem ukázat, že tato poloha je labilní. Jakmile kuličku vychýlíme dolů, tíhová síla převáží a místo aby výslednice tlačila kuličku nazpět, zatlačí ji do vrcholu kužele. Analogicky při vychýlení nahoru kulička odletí pryč.

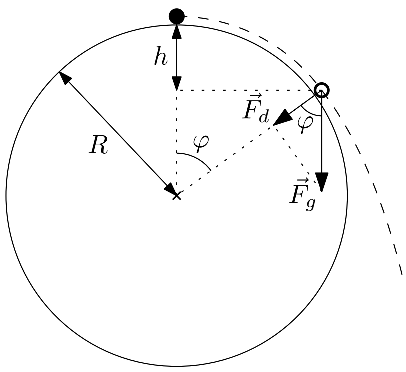
Tlaková síla F je tentokrát dána

$$\frac{mr\omega^2}{F} = \cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}, \quad \text{tzn.} \quad F = \frac{mr\omega^2\sqrt{h^2+r^2}}{h}.$$

Po dosazení $r = h \operatorname{tg}\alpha$ a $h = \frac{g}{\omega^2}\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$ dostaneme výsledek $F = \frac{mg}{\sin\alpha}$.

2.13 Odlepení od koule

Zadání: Z nejvyššího místa dokonale hladké koule poloměru R pustíme volně hmotný bod hmotnosti m a necháme jej klouzat po povrchu koule působením tíhové síly. V jaké výšce měřené od vrcholu koule opustí bod kouli a po jaké křivce se bude dále pohybovat?



Řešení: Hmotný bod opustí kouli v momentě, kdy tlaková síla F_t (zde složka tíhové síly pusobící kolmo na povrch koule) začne být menší než dostředivá síla $F_d = m\frac{v^2}{R}$ potřebná k udržení kruhového pohybu odpovídajícímu klouzání po povrchu koule. K určení obvodové rychlosti v použijeme zákon zachování energie; v každém bodě trajektorie platí:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gh,$$

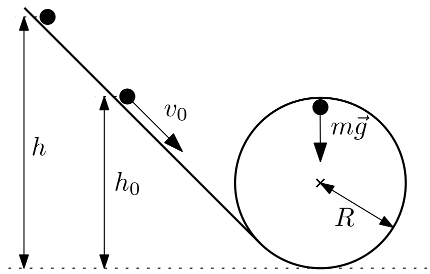
kde h je svislá vzdálenost měřená od vrcholu koule. Částice se odtrhne, pokud bude platit:

$$\begin{aligned} mg\cos\varphi = F_t = F_d = m\frac{v^2}{R} &= \frac{2mgh}{R}, \\ mg\frac{R-h}{R} &= \frac{2mgh}{R}, \\ h &= \frac{R}{3}. \end{aligned}$$

Jelikož se dále jedná o šikmý vrh v tíhovém poli, bude se částice pohybovat po parabole.

2.14 Smyčka

Zadání: Hmotný bod se pohybuje po hladké dráze, která leží ve svislé rovině a přechází v kruhovou smyčku o poloměru R. Z jaké výšky h musíme pustit hmotný bod s nulovou počáteční rychlostí, aby se v nejvyšším bodě smyčky neodtrhl? Jakou rychlost v_0 mu musíme udělit ve výšce h_0?



Řešení: Aby se hmotný bod v nejvyšším bodě neodtrhl, musí být tíhová síla v nejvyšším bodě maximálně rovna dostředivé síle odpovídající kruhovému pohybu po dráze o poloměru R (pokud bude gravitační síla větší, bod se odtrhne; pokud bude menší, na pomoc přispěchá tlaková síla podložky tak, aby výslednice byla přesně rovna potřebné dostředivé síle). Musí tedy platit:

$$m\frac{v^2}{R} = F_d \geq F_g = mg,$$
$$v^2 \geq gR.$$

Ze zákona zachování mechanické energie pak dostáváme pro nulovou počáteční rychlost, resp. pro počáteční rychlost v_0:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h-2R), \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{2}mv^2 = mg(h_0-2R) + \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Spojením vztahů pak již dostaneme

$$h \geq \frac{5}{2}R, \quad \text{resp.} \quad v_0 \geq \sqrt{5gR - 2gh_0}.$$

2.15 Částice na elipse

Zadání: Částice opisuje v silovém poli elipsu $x = a\cos(\omega t)$, $y = b\sin(\omega t)$. Určete práci, kterou vykoná silové pole působící na tuto částici za dobu od $t = 0$ do t, konkrétně pak pro $t = \pi/4\omega, t = \pi/2\omega, t = \pi/\omega$.

Řešení: Práce je definována jako dráhový účinek síly: $A = \int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $\vec{F}$ je výslednice všech sil působící na dané těleso. Platí vztah, že vykonaná práce A je rovna rozdílu kinetické energie na konci a na začátku pohybu: $A = T_2 - T_1$. My máme sílu jedinou a to sice silové pole, které působí na částici tak, že vykonává pohyb po elipse. Stačí tedy vypočítat změnu kinetické energie a dostaneme práci silového pole.

Kinetická energie je $T = \frac{1}{2}mv^2$. Rychlost částice bude:

$$\dot{x}(t) = -a\omega \sin(\omega t), \qquad \dot{y}(t) = b\omega \cos(\omega t),$$

a dosazením do vzorce pro T dostaneme kinetickou energii částice v libovolném čase t:

$$T(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(a^2\sin^2(\omega t) + b^2\cos^2(\omega t)\right).$$

Nyní stačí vyčíslit $T(0) = \frac{1}{2}m\omega^2 b^2$ a použít vzorec pro práci:

$$A(t) = T(t) - T(0) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(a^2\sin^2(\omega t) + b^2\cos^2(\omega t) - b^2\right),$$

speciálně $A(\pi/4\omega) = \frac{1}{4}m\omega^2\left(a^2 - b^2\right)$, $A(\pi/2\omega) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(a^2 - b^2\right)$, $A(\pi/\omega) = 0$. (Práce je v některých částech pohybu kladná a v jiných záporná – částice předává energii poli.)

Poznámka: Pokud by se částice pohybovala pod vlivem například dvou silových polí $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$, změna kinetické energie by pak dávala práci výslednice těchto dvou sil $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Pokud bychom se však ptali, jak k práci přispívají jednotlivé síly, jednoduchý postup využívající $A = \Delta T$ bychom nemohli použít a museli bychom jednotlivé příspěvky počítat z definice práce:

$$A_1 = \int_1^2 \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \qquad A_2 = \int_1^2 \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

pro ukázku takového výpočtu viz příklad 2.18.

Poznámka: Mohli bychom se ptát, jak vypadá silové pole zakřivující pohyb částice po zadané elipse. To určíme jednoduše z druhého Newtonova zákona:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}} = -m\omega^2(a\cos(\omega t), b\sin(\omega t)).$$

2.16 Jednorozměrné potenciály

Zadání: Určete potenciální energii částice, na kterou působí síla ve směru x nebo r o složce a) $F_x = -mg = \text{konst.}$, b) $F_x = -kx$, c) $F_x = -kx^2$, d) $F_x = -kx^3$, e) $F_r = -\frac{\alpha}{r^2}$, f) $F_r = -\frac{\alpha}{r^3}$.

Řešení: Jednorozměrné silové pole je vždy potenciální. Vztah mezi potenciálem a silovým polem v obecném počtu dimenzí

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}\right)$$

má v jednorozměrném případě prostě tvar $F_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$ (analogicky pro souřadnici r, $F_r = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$). Potenciál U dostaneme jednoduše integrováním $U(x) = -\int F(x)\,\mathrm{d}x + C$, kde pomocí integrační konstanty C můžeme nastavit nulovou hladinu potenciálu. Tak dostaneme:

$$\text{a)}\quad U(x) = mgx + C, \qquad \text{b)}\quad U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C, \qquad \text{c)}\quad U(x) = \frac{1}{3}kx^3 + C,$$

$$\text{d)}\quad U(x) = \frac{1}{4}kx^4 + C, \qquad \text{e)}\quad U(r) = -\frac{\alpha}{r} + C, \qquad \text{f)}\quad U(r) = -\frac{\alpha}{2r^2} + C.$$

2.17 Impuls síly a energie

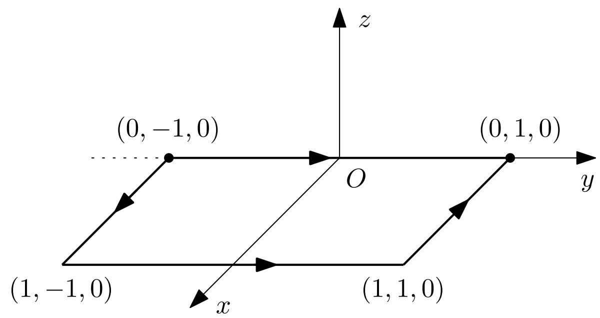
Zadání: Na hmotný bod m působil impuls síly $\vec{I}$, který vyvolal změnu rychlosti z $\vec{v}_1$ na $\vec{v}_2$, Dokažte, že změna kinetické energie je rovna $\frac{1}{2}\vec{I}\cdot(\vec{v}_1+\vec{v}_2)$.

Řešení: Impulz síly je definován jako $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t$, tedy jako časový účinek síly, a platí $\vec{I}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$. DThatostáváme

$$\frac{1}{2}\vec{I}\cdot(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=\frac{1}{2}m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)=T_2-T_1.$$

2.18 Nekonzervativní síla

Zadání: Vypočítejte, jakou práci vykoná síla $\vec{F}=(2y^2,4x^2,-6(x^2+y^2))$ (koeficienty v příslušných jednotkách SI) při přemístění částice hmotnosti m z bodu $(0,-1,0)$ do bodu $(0,1,0)$ po různých drahách: a) podél osy y, b) po třech úsecích podél osy x do bodu $(1,-1,0)$, podél osy y do bodu $(1,1,0)$ a podél osy x. Je toto silové pole konzervativní?



Řešení: Práce je síla působící po dráze, obecně se práce vypočte jako:

$$A=\int_1^2\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r},$$

kde meze 1 a 2 symbolicky značí počáteční a koncovou polohu pohybu. Pro vlastní výpočet je nutné si pohyb nějak parametrizovat – například časem. Vězměme průběh pohybu $\vec{r}(t)$ (vyjádření polohy jako funkce času) a následně můžeme počítat

$$A=\int_1^2\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zde píšeme $\vec{F}(t)$ jako vektor síly působící na těleso v čase t – máme sílu zadánu jako $\vec{F}(\vec{r})$, tedy jako funkci polohy, pak $\vec{F}(t)$ značí $\vec{F}(\vec{r}(t))$, tedy sílu v místě, ve kterém je částice v čase t.

Důležité je poznamenat, že práce závisí pouze na trajektorii pohybu a nezávisí na jeho konkrétním průběhu po dané trajektorii. Není tedy třeba volit parametrizaci tak, jak pohyb skutečně probíhal, ale stačí zvolit co nejjednodušší pohyb kopírující danou trajektorii. Toho v následujícím využijeme.

V případě a) máme trajektorii úsečku, můžeme tedy zvolit například rovnoměrný přímočarý pohyb z bodu $(0,-1,0)$ do bodu $(0,1,0)$:

$$\vec{r}(t) = (0,-1,0) + (0,1,0)\ t = (0,-1+t,0), \quad \text{kde} \quad t \in \langle 0,2\rangle\,\text{s}.$$

Vektor rychlosti je pak konstantní $\vec{v} = (0,1,0)$, síla nabude tvaru

$$\vec{F}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) = (2y(t)^2, 4x(t)^2, -6(x(t)^2 + y(t)^2)) = (2(1-t)^2, 0, -6(1-t)^2)$$

a konkrétní výraz pro práci bude

$$A = \int_0^2 \vec{F}(t)\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (2(1-t)^2, 0, -6(1-t)^2)\cdot(0,1,0)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 0\,\mathrm{d}t = 0\,J.$$

Práce je nulová proto, že síla vždy působí kolmo na směr pohybu částice.

V případě b) bude práce součtem $A = A_1 + A_2 + A_3$ podél jednotlivých úseček tvořící celou trajektorii. Zopakujeme nyní stejný postup jako v případě za a) jen pro jednotlivé úsečky zvlášť. Opět pokaždé zavedeme nejjednodušší možný pohyb sledující danou trajektorii – rovnoměrný přímočarý pohyb. V prvním úseku vezmeme $\vec{r}(t) = (t,-1,0)$ pro $t \in \langle 0,1\rangle$. Pak $\vec{v} = (1,0,0)$, $\vec{F}(t) = (2(-1)^2, 4t^2, -6(t^2+1))$ a práce bude

$$A_1 = \int_0^1 \vec{F}(t)\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (2(-1)^2, 4t^2, -6(t^2+1))\cdot(1,0,0)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{J}.$$

Ve druhém úseku vezměme například polohový vektor $\vec{r}(t) = (1,-1,0) + (0,1,0)t = (1,-1+t,0)$ pro $t \in \langle 0,2\rangle$, rychlost je pak $\vec{v} = (0,1,0)$ a síla $\vec{F}(t) = (2(t-1)^2, 4, -6(1+(t-1)^2))$ a práce bude

$$A_2 = \int_0^2 \vec{F}(t)\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (2(t-1)^2, 4, -6(1+(t-1)^2))\cdot(0,1,0)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 4\,\mathrm{d}t = 8\,J.$$

V posledním úseku máme například $\vec{r}(t) = (1-t,1,0)$ pro $t \in \langle 0,1\rangle$, rychlost $\vec{v} = (-1,0,0)$ a sílu $\vec{F}(t) = (2, 4(1-t)^2, -6((1-t)^2+1))$ a práce tedy

$$A_3 = \int_0^1 \vec{F}(t)\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (2, 4(1-t)^2, -6((1-t)^2+1))\cdot(-1,0,0)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 -2\,\mathrm{d}t = -2\,\mathrm{J}.$$

Celkově tedy dostáváme práci v případě b) $A = A_1 + A_2 + A_3 = 8$ J.

Jelikož vykovaná práce se liší v závislosti na trajektorii, po které se mezi dvěma body pohybujeme, silové pole **není konzervativní**.

Poznámka: Postup uvedený v řešení výše je zcela obecný – funguje pro jakoukoliv trajektorii, nejen pro jednoduchý případ úseček. V tomto případě by ale k výsledku šlo dospět i jednodušeji. Podívejme se na tři situace, kdy je práci jednoduché spočítat.

Pokud na částici působí konstantní síla ve směru pohybu částice, práce je dána jako $A = Fs$, kde F je velikost působící síly a s dráha, po které síla působila. Pokud je velikost síly konstantní a její směr svírá se směrem pohybu částice konstantní úhel φ, můžeme práci počítat jako $A = Fs\cos\varphi$. Navíc není třeba požadovat, aby velikost síly a zároveň úhel φ byly konstantní každý zvlášť. Pro platnost vzorce postačuje, aby součin $F_p = F\cos\varphi$ byl konstantní[2]. Tento součin reprezentuje průmět síly $\vec{F}$ do směru pohybu částice. Přesně tento poslední případ máme ve všech částech této úlohy:

a) Částice se pohybuje po ose y, takže bude vždy $x = 0$ (na z síla nezávisí) a výraz pro sílu bude mít tvar $\vec{F} = (2y^2, 0, -6y^2)$. Vidíme, že síla působí pouze v rovině x, z (její složka ve směru y je vždy nulová). Z toho je jasné, že síla působí vždy kolmo ke směru pohybu ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), a tedy práce konaná silou bude nulová: $A = 0$ J.

b) V prvním úseku se částice pohybuje po přímce s $y = -1$, síla tedy bude mít tvar $\vec{F} = (2, 4x^2, -6(x^2+1))$. Její průmět do osy x (do směru pohybu) je její složka $F_x = \vec{F}\cdot(1,0,0) = 2$ – průmět je konstantní. Délka dráhy je 1, a práce pak bude $A = F_x\, s = 2$ J.

Ve druhém úseku se částice pohybuje po přímce s $x = 1$, síla má tvar $\vec{F} = (2y^2, 4, -6(+y^2))$, její průmět do osy y (do směru pohybu) je $F_y = 4$ a je opět konstantní. Délka dráhy je 2, tím pádem práce je $A = F_y\, s = 8$ J.

Ve třetím úseku se částice pohybuje po přímce s $y = 1$, síla nabývá tvaru $\vec{F} = (2, 4x^2, -6(x^2+1))$, tedy její průmět do osy x (do směru pohybu) bude mít konstantní velikost 2. Délka dráhy je 1, ale částice se nyní pohybuje proti směru působící síly. Práce tedy bude $A = -F_x\, s = -2\cdot 1 = -2$ J.

2.19 Síla závislá na čase

Zadání: Částice hmotnosti $m = 2$ kg se může pohybovat bez tření podél osy x. V čase $t = 0$ byla v klidu v bodě $x = 0$. Po dobu 6 sekund na ni působila síla $F_x(t) = 2 + 6t$ (koeficienty v odpovídajících jednotkách SI). Určete zrychlení, rychlost, dráhu částice a výkon síly v okamžiku $t = 6$ s.

Řešení: U síly závislé na čase je situace jednoduchá. Stačí vyjít ze 2. Newtonova zákona $F = ma = m\ddot{x}$, tzn. $\ddot{x}(t) = \frac{1}{m}(2+6t)$. Zrychlení po 6 sekundách pohybu tedy bude $a(6\text{ s}) = \frac{1}{2}(2+36)\text{ m.s}^{-2} = 19\text{ m.s}^{-2}$. Integrací vztahu pro zrychlení dostaneme rychlost:

$$\dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{m}(2+6t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m}\left(2t + \frac{6}{2}t^2\right) + C.$$

Hodnotu integrační konstanty C dostaneme z počáteční podmínky:

$$\dot{x}(0) = \frac{1}{m}(0+0) + C = C = 0,$$

jelikož částice je na začátku v klidu, $\dot{x}(0) = 0$. V čase $t = 6$ sekund pak bude rychlost

[2] Toto tvrzení snadno plyne z obecného vzorce pro práci. Pokud si vektor $\mathrm{d}\vec{r}$ zapíšeme jako $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{t}\,\mathrm{d}r$, kde $\vec{t}$ je jednotkový tečný vektor k trajektorii, pak výraz $F_p = \vec{F}\cdot\vec{t}$ představuje průmět síly $\vec{F}$ do směru pohybu. Z předpokladu je průmět F_p konstantní a můžeme ho z integrálu vytknout: $A = F_p\int_1^2 \mathrm{d}r$. Integrál z jedničky po dráze délky s je roven právě délce dráhy: $A = F_p s$. Z definice skalárního součinu můžeme průmět psát jako $F_p = F\cos\varphi$.

$v(6\ \mathrm{s}) = \dot{x}(6\ \mathrm{s}) = 60\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Další integrací pak dostaneme polohu:

$$x(t) = \int \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{m}\left(2t + \frac{6}{2}t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{m}\left(t^2 + t^3\right) + K.$$

Hodnotu integrační konstanty K dostaneme z počáteční podmínky

$$x(0) = \frac{1}{m}(0+0) + K = K = 0,$$

jelikož částice je na začátku v bodě $x(0) = 0$. V čase $t = 6$ sekund pak bude poloha $x(6\ \mathrm{s}) = 126$ m. Okamžitý výkon je možné počítat jako součin působící síly a okamžité rychlosti. V našem případě tedy $P(t) = F(t)v(t) = (2+6t)\frac{1}{m}\left(2t + 3t^2\right)$ a konkrétně $P(6\ \mathrm{s}) = 2280$ W.

2.20 Síla závislá na poloze

Zadání: Částice hmotnosti $m = 2,4$ kg se může pohybovat bez tření podél osy x. V čase $t = 0$ byla v klidu v bodě $x = 0$. Působením síly $F_x(x) = 2 + 6x$ (koeficienty v příslušných jednotkách SI) byla uvedena do pohybu. Určete zrychlení a rychlost částice a výkon síly v bodě $x = 6$ m.

Řešení: Zrychlení v závislosti na poloze určíme velmi rychle jako $a = \frac{F}{m} = \frac{2+6x}{m}$. U síly závislé na poloze už nemůžeme využít postup z předchozího příkladu, protože už pro první integraci bychom potřebovali znát vyjádření $x(t)$, což samozřejmě neznáme. Úlohu je možné řešit využitím zákonu zachování mechanické energie.

V jednorozměrném případě je síla vždy potenciální, tedy je možné najít potenciál $U(x)$ tak, že platí $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$. Tento potenciál nalezneme integrací (v proměnné x):

$$U(x) = -\int (2+6x)\mathrm{d}x = -(2x + 3x^2) + U_0,$$

kde U_0 je libovolná konstanta. Tato konstanta slouží k nastavení například nulové hladiny potenciálu. Celková energie se pak zachovává a tedy platí

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = \text{konst.} = E$$

Celkovou energii jsme označili E a její hodnotu určíme z počátečních podmínek, že v čase $t = 0$ platilo $x = 0$ a $v = 0$: $E = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - (2 \cdot 0 + 3 \cdot 0^2) + U_0 = U_0$. Zákon zachování energie tedy má v našem konkrétním případě tvar

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (2x + 3x^2) + U_0 = U_0.$$

Vidíme, že konstanta U_0 vystupuje na obou stranách a její konkrétní hodnota nemá na nic vliv. Z této rovnice vyjádříme rychlost a dostaneme:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(2x + 3x^2)}.$$

Pro polohu $x = 6$ m můžeme zrychlení vypočítat přímo jako $a(6 \text{ m}) = \frac{F(6 \text{ m})}{m} = 15,8 \text{ m.s}^{-2}$, rychlost jsme určili a stačí dosadit $v(6 \text{ m}) = 10 \text{ m.s}^{-1}$ a výkon určíme jako součin síly a rychlosti, $P(x) = F(x)v(x)$, $P(6 \text{ m}) = 380$ W.

Poznámka: Povšimněte si, že jsme dostali výrazy pro zrychlení a rychlost jako funkce polohy a nikoliv času! Pokud bychom trvali na určení funkcí $a(t)$ a $v(t)$, museli bychom úlohu dořešit, tzn. získat funkci polohy v závislosti na čase $x(t)$ a tu následně substituovat do funkcí zrychlení a rychlosti: $a(x(t))$ a $v(x(t))$. Toto „dořešení“ by se provedlo separací proměnných (viz příklad 2.21) z rovnice pro rychlost:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}(2x + 3x^2)} \quad \to \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(2x + 3x^2)}}.$$

Následnou integrací (levou stranu integrujeme podle t, pravou stranu podle x)

$$t + C = \int \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(2x + 3x^2)}}$$

bychom získali funkci $t(x)$ a tu by bylo ještě třeba invertovat pro získání funkce $x(t)$ (a také určit hodnotu integrační konstanty z počátečních podmínek).

2.21 Síla závislá na rychlosti

Zadání: Částice hmotnosti $m = 3$ kg se může pohybovat bez tření podél osy x. V čase $t = 0$ byla v klidu v bodě $x = 0$ a začala na ni působit síla $F_x(v) = 2 - 6v$. Určete (i graficky) závislost rychlosti a dráhy částice na čase. Na jaké hodnotě se rychlost částice ustálí?

Řešení: Vyjdeme z 2. Newtonova pohybového zákona a napíšeme zrychlení jako $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2 - 6v.$$

Tuto rovnici vyřešíme tzv. separací proměnných. Budeme pracovat s diferenciály jako malými nenulovými veličinami. Rovnici upravíme tak, aby se na jedné straně vyskytovala pouze proměnná v a na druhé pouze proměnná t (separujeme proměnné):

$$m\frac{\mathrm{d}v}{2 - 6v} = \mathrm{d}t.$$

Nyní obě strany zintegrujeme:

$$m\int \frac{\mathrm{d}v}{2 - 6v} = \int \mathrm{d}t.$$

Na pravé straně vyjde $t + C$ (C je integrační konstanta) a na levé straně použijeme substituci $u = 2 - 6v$, kde pak $\mathrm{d}u = -6\mathrm{d}v$:

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{2 - 6v} = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\frac{1}{6}\ln(u) = -\frac{1}{6}\ln(2 - 6v) = -\frac{1}{6}\ln(2 - 6v),$$

(zde již integrační konstantu nemusíme psát, vznikla při integraci podle času na pravé straně rovnice). Výsledkem integrace tedy je

$$t + C = -\frac{m}{6} \ln(2 - 6v).$$

Integrační konstantu C určíme z počáteční podmínky $v(t = 0) = 0$. Po dosazení:

$$C = -\frac{m}{6} \ln 2.$$

Vyjádříme nyní rychlost jako funkci času:

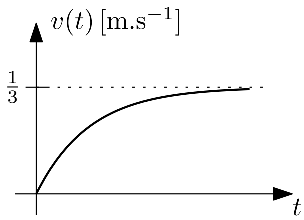
$$t = -\frac{m}{6} \ln \left[\frac{1}{2}(2 - 6v)\right] \quad \rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{6t}{m}}\right).$$

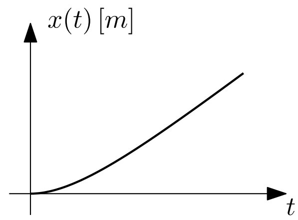
Závislost polohy na čase získáme další integrací, $x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$:

$$x(t) = \frac{1}{3}\left(t + \frac{m}{6}\,\mathrm{e}^{-\frac{6t}{m}}\right) + K.$$

Z počáteční podmínky $x(t = 0) = 0$ dostaneme hodnotu integrační konstanty $K = -m/18$ (pro zadané $m = 3\,kg$ máme $K = -1/6$). Pokud bude t růst do nekonečna, budeme mít ve výrazu pro rychlost $\mathrm{e}^{-\infty} = 0$, a tedy rychlost se bude ustalovat na hodnotě $1/3$ m.s^{-1}.

Grafy rychlosti a polohy vypadají následovně:





2.22 Padající lano

Zadání: Lano délky l_0 leží nataženo na hladké desce stolu. v okamžiku $t = 0$ visí úsek lana délky l přes okraj desky a rychlost lana je nulová. V tomto okamžiku začne lano s desky sklouzávat. Určete, jak poroste jeho rychlost s časem a jak se bude měnit poloha konce lana. Můžete řešit i obecnější úlohu a vzít v úvahu tření lana o desku stolu.

Řešení: Aby bylo prezentované řešení adekvátní, měli bychom ještě předpokládat, že na hraně stolu je například nějaký plechový oblouk, který zajišťuje změnu směru pohybu vodorovné části lana do směru kolmo k zemi.

Zavedeme kartézskou souřadnici x ve svislém směru s počátkem v místě ohybu lana, viz obrázek. Polohu konce lana pak bude označovat funkce $x(t)$. Sestavme nyní pohybovou rovnici. Na lano působí gravitační síla $F_g = m(x)g$, kde funkce $m(x)$ představuje hmotnost lana visící ze stolu, jestliže konec lana je na souřadnici x. Zjevně platí $m(x) = \frac{x}{l_0}m$, kde podíl $\frac{x}{l_0}$ představuje podíl lana visící ze stolu. Levá strana Newtonova pohybového zákona bude mít tvar $ma = m\ddot{x}$, jelikož zrychluje celé lano a k setrvačnosti přispívá celá hmotnost lana m. Máme tedy rovnici:

$$m\ddot{x} = \frac{x}{l_0}mg.$$

Máme zde vlastně sílu závislou na poloze. My však nepoužijeme postup z příkladu 2.20 (a jeho dodatku), jelikož postup pro určení funkce $x(t)$ je poměrně zdlouhavý. Zde využijeme toho, že působící síla je lineární funkce v proměnné x a máme tedy lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Tu umíme obecně vyřešit a získat tak „rovnou“ funkci $x(t)$. Rovnici si přepíšeme na tvar:

$$\ddot{x} - \frac{g}{l_0}x = 0.$$

Předpokládáme (a u lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty to vždy zafunguje) řešení ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je zatím neurčená konstanta. Dosazením do diferenciální rovnice dostaneme $\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} - \frac{g}{l_0}\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$. Tuto rovnici můžeme vydělit nenulovým výrazem $\mathrm{e}^{\lambda t}$, a tak dostaneme takzvanou charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - \frac{g}{l_0} = 0,$$

jejíž kořeny jsou $\lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{l_0}}$. Pro přehlednost zaveďme označení $\kappa \equiv \sqrt{\frac{g}{l_0}}$. Máme tedy konkrétní hodnoty λ, pro něž je funkce $\mathrm{e}^{\lambda t}$ řešením zadané diferenciální rovnice – zde konkrétně $\{\mathrm{e}^{\kappa t}, \mathrm{e}^{-\kappa t}\}$. Jelikož se jedná o diferenciální rovnici lineární, je řešením i libovolná lineární kombinace těchto fundamentálních řešení:

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\kappa t} + C_2 \mathrm{e}^{-\kappa t}.$$

Toto je obecné řešení naší diferenciální rovnice. Konstanty C_1 a C_2 (koeficienty lineární kombinace) určíme z počátečních podmínek: $x(0) = l$ a $v(0) = 0$. Rychlost konce lana v obecném čase má tvar

$$v(t) = C_1\kappa \mathrm{e}^{\kappa t} - C_2\kappa \mathrm{e}^{-\kappa t}.$$

Z podmínky $x(0) = l$ dostaneme rovnici $C_1 + C_2 = l$ a z podmínky $v(0) = 0$ rovnici $C_1\kappa - C_2\kappa = 0$. Řešením této soustavy snadno dostaneme $C_1 = C_2 = l/2$ a výsledné řešení tedy je

$$x(t) = \frac{l}{2}\left(\mathrm{e}^{\kappa t} + \mathrm{e}^{-\kappa t}\right) = l\cosh(\kappa t).$$

(Rychlost konce lana je $v(t) = l\kappa\frac{\mathrm{e}^{\kappa t} - \mathrm{e}^{-\kappa t}}{2} = l\kappa\sinh(\kappa t)$.) a $\dot{x}(t) = l\kappa\frac{\mathrm{e}^{\kappa t} - \mathrm{e}^{-\kappa t}}{2} = l\kappa\sinh(\kappa t)$. Můžeme na závěr dosadit zpět za $\kappa = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$.

Poznámka: Zvolme nyní počátek souřadné soustavy jinde než v místě ohybu lana. Například v místě, kde je konec lana v čase $t = 0$ (tzn. na „staré“ souřadnici $x = l$).

S tímto novým počátkem je vyjádření gravitační síly tvaru $F_g = \frac{l+x}{l_0} mg$ a výsledná pohybová rovnice pak má tvar (po úpravě):

$$\ddot{x} - \frac{g}{l_0} x = \frac{l}{l_0} g.$$

Dostali jsme tzv. nehomogenní rovnici – rovnici s nenulovou pravou stranou ve formě funkce nezávisející na neznámé x. Její obecné řešení je pak tvaru $x(t) = x_0(t) + x_p(t)$, kde $x_0(t)$ označuje řešení tzv. homogenní rovnice (rovnice, kde jsme pravou stranu položili rovnu nule) a x_p označuje partikulární řešení – libovolné jedno řešení, které splňuje nehomogenní rovnici. Homogenní řešení $x_0(t)$ jsme už vlastně nalezli v předchozím postupu – tam jsme měli pravou stranu rovnou nule „samu od sebe“. Partikulární řešení zde nalezneme „metodou uhodnutí“ – vymyslíme co nejjednodušší řešení, které splňuje nehomogenní rovnici. Zde máme pravou stranu diferenciální rovnice konstantní a pak snadno nahlédneme, že vyhovuje (konstantní) partikulární řešení $x_p(t) = -l$. (Pokud bychom partikulární řešení neuhodli, mohli bychom použít obecný postup zvaný metoda variace konstant. Tento postup je ale poměrně zdlouhavý a zde ho rozepisovat nebudeme.) S nově zvoleným počátkem má obecné řešení tvar

$$x(t) = x_p(t) + x_0(t) = -l + C_1 \,\mathrm{e}^{\kappa t} + C_2 \,\mathrm{e}^{-\kappa t}.$$

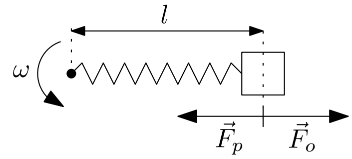
(Mohli jsme ho ostatně napsat rovnou jen pomocí translace souřadnice x o l.) Nyní (s nově zvoleným počátkem) jsou počáteční podmínky tvaru $x(0) = 0$ a $v(0) = 0$ a výsledné řešení bude mít tvar

$$x(t) = l\,(\cosh(\kappa t) - 1)\,.$$

Poznámka: I v příkladu 2.20 jsme měli sílu, která byla lineární funkcí proměnné x! To znamená, že by výše uvedený postup mohl být použit i v příkladu 2.20 pro získání funkce $x(t)$. Pro obecné (nelineární) síly je ovšem nutno použít postup prezentovaný v příkladu 2.20.

2.23 Otáčení na pružině

Zadání: Těleso hmotnosti m je připevněno na pružině a otáčí se ve vodorovné rovině konstantní úhlovou rychlostí ω kolem svislé osy, která prochází koncem pružiny. Nezatížená pružina má délku l_0, pružinová konstanta je k. Určete poloměr l kružnice, po které se těleso pohybuje.

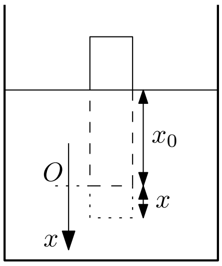


Řešení: Poloměr otáčení se ustálí ve chvíli, kdy se vyrovná odstředivá síla $F_o = m\omega^2 l$ a síla pružiny $F_p = k(l - l_0)$, tedy $m\omega^2 l = k(l - l_0)$, odkud dostáváme $l = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}$.

Poznámka: Vidíme, že pro $\omega = 0$ dostaneme přirozený výsledek $l = l_0$. Pokud zvyšujeme rychlost otáčení, nakonec dostaneme ve výsledku nulu ve jmenovateli. Dojde k tomu na $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Pro $\omega \geq \omega_0$ se síla od pružiny nikdy nevyrovná odstředivé síle a těleso odletí do nekonečna (utrhne se z pružiny).

2.24 Hustoměr

Zadání: Hustoměr v podobě válcové trubky průměru d o hmotnosti m plave v kapalině hustoty ρ. Dáme mu malý vertikální impuls a rozkmitáme ho tak. Určete periodu kmitů hustoměru.



Řešení: Při ustálení je v rovnováze tíhová síla působící na hustoměr a vztlaková síla daná jeho částečným ponořením. Zaveďme kartézskou souřadnici x mířící směrem dolů, která bude odměřovat výchylku hustoměru z rovnovážné polohy. Hustoměr vychýlíme dolů o x z rovnovážné polohy, bude tím vytlačena voda o objemu $V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 x$, a tedy na hustoměr bude působit podle Archimédova zákona vztlaková síla větší o $|F| = V\rho g = \frac{\pi d^2}{4}\rho g x$. Jelikož síla působí vždy proti směru vychýlení budeme mít $F = -\frac{\pi d^2}{4}\rho g x$. Pohybová rovnice pro výchylku hustoměru z rovnovážné polohy tedy má tvar

$$m\ddot{x} = -\frac{\pi d^2}{4}\rho g x \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\pi d^2 \rho g}{4m}x = 0,$$

což není nic jiného než pohybová rovnice harmonického oscilátoru, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ s

$$\omega^2 = \frac{\pi d^2 \rho g}{4m}.$$

Víme, že platí $\omega = 2\pi f$ a $f = \frac{1}{T}$ a tedy

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\sqrt{\frac{\pi m}{d^2 \rho g}}.$$

2.25 Tlumený oscilátor

Zadání: Tlumený harmonický oscilátor má frekvenci $f = 50\,\mathrm{Hz}$ a dekrement útlumu $\delta = 2,3\ \mathrm{s}^{-1}$. Jak se změní jeho frekvence, vymizí-li tlumení?

Řešení: Pro úhlovou frekvenci tlumeného oscilátoru platí $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, kde ω_0 je úhlová frekvence netlumeného oscilátoru a δ dekrement útlumu. Vyjádříme-li $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2}$, pak frekvence netlumeného oscilátoru bude $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{(2\pi f)^2+\delta^2}}{2\pi} \doteq 50,00134$ Hz.

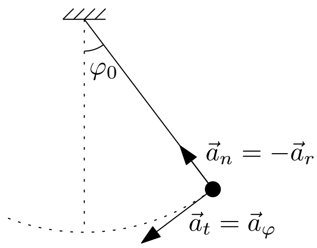
2.26 Rezonance

Zadání: Těleso hmotnosti $m = 200\,\mathrm{g}$ koná vynucené harmonické kmity. Amplituda vynucující síly je $F_0 = 2\,\mathrm{N}$, doba vlastních kmitů tělesa je $T_0 = 0,785\,\mathrm{s}$ a koeficient útlumu $\delta = 4\ \mathrm{s}^{-1}$. Určete rezonanční frekvenci f_r a amplitudu kmitů A_r při rezonanci.

Řešení: Pro rezonanční frekvenci tlumeného oscilátoru platí $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2-2\delta^2}}{2\pi} \doteq 0,90$ Hz. Amplituda v rezonanci je $A_r = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\frac{2\pi}{T_0}-\delta^2}} \doteq 0.18$ m.

2.27 Matematické kyvadlo

Zadání: Pro malé kmity matematického kyvadla, které v okamžiku $t = 0$ vychýlíme o úhel φ_0 a pustíme, určete úhlovou rychlost, úhlové zrychlení, tečné zrychlení a normálové zrychlení.



Řešení: Úhel kyvadla bude v čase dán jako $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$, kde úhlová frekvence je $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, kde l je délka závěsu a g je tíhové zrychlení. Pak máme úhlovou rychlost $\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = -\omega_0\varphi_0 \sin(\omega_0 t)$, úhlové zrychlení $\varepsilon(t) = \ddot{\varphi} = -\omega_0^2\varphi_0 \cos(\omega_0 t)$, tečné zrychlení (zde rovné zrychlení v polární souřadnici φ)

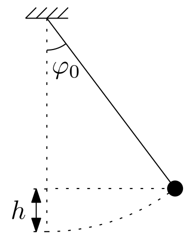
$$a_t = a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 - l\omega_0^2\varphi_0 \cos(\omega_0 t) = -g\varphi_0 \cos(\omega_0 t)$$

a normálové zrychlení (zde odpovídající absolutní hodnotě zrychlení v polární souřadnici r)

$$a_n = |a_r| = |\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2| = |0 - l\omega_0^2\varphi_0^2 \sin^2(\omega_0 t)| = g\varphi_0^2 \sin^2(\omega_0 t).$$

2.28 Houpačka

Zadání: Houpačka hmotnosti m na závěsu délky l byla vychýlena o úhel φ_0 a puštěna. Určete maximální namáhání závěsu a rychlost houpačky v dolní poloze.



Řešení: Rychlost houpačky v dolní poloze určíme ze zachování energie

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(1 - \cos\varphi_0),$$

tedy $v = \sqrt{2gl(1 - \cos(\varphi_0))}$. Síla namáhající závěs ve spodní poloze je součtem tíhové síly velikosti $F_g = mg$ a odstředivé síly velikosti $F_o = m\frac{v^2}{l}$, tedy celkově

$$F = mg + m\frac{2gl(1 - \cos\varphi_0)}{l} = mg(3 - 2\cos\varphi_0).$$

2.29 Sekundové kyvadlo

Zadání: Určete délku sekundové kyvadla na severním pólu, na rovníku a na zeměpisné šířce Prahy (kde je tíhové zrychlení $g = 9,81077$ m.s^{-2}).

Řešení: Sekundové kyvadlo je takové, jehož kyv (polovina periody) trvá jednu sekundu, tedy $T = 2$ s. Přitom pro periodu matematického kyvadla platí $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, tedy $l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$. Nyní jde jen o to, že nestačí použít přibližnou hodnotu tíhového zrychlení $g = 10$ m.s^{-2} nebo $g = 9,8$ m.s^{-2}, ale potřebujeme přesnější hodnotu pro konkrétní místo na Zemi. Hodnotu g na významných místech určitě dokážeme dohledat na internetu. Na pólu je to $g_p \doteq 9,832$ m.s^{-2} a $l_p \doteq 0,9962$ m, na rovníku $g_r \doteq 9,780$ m.s^{-2} a $l_r \doteq 0,9909$ m a v Praze $g_P \doteq 9,81373$ m.s^{-2} a $l_p \doteq 0,9943$ m. (Pro Prahu jsme použili hodnotu z wolframalpha.com, která je i na české Wikipedii.)

Poznámka: Je dobré si uvědomit, že přibližná hodnota $g = 9,8$ m.s^{-2} je tedy adekvátní na celé Zemi, kdežto $g = 9,81$ m.s^{-2} už je správně jen pro naše zeměpisné šířky.

Poznámka: Také se někdy může hodit samotný výsledek tohoto příkladu – pokud umíte udělat provázek dlouhý 1 m, můžete velmi přesně počítat sekundy.

2.30 Válení se ve škarpě

Zadání: Předpokládejme, že vaše hmotnost je 100 kg. O kolik budete těžší, když si lehnete? O kolik budete lehčí, když spadnete do škarpy?

Řešení: Shrňme si napřed některé základní poznatky o gravitačním působení. Dva hmotné body o hmotnostech m_1 a m_2 vzdálené r od sebe se gravitačně přitahují silou velikosti

$F_G = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$, kde $\kappa \doteq 6,67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2} je takzvaná gravitační konstanta. (Na střední škole také často značená G.)

Dále platí, že sféricky symetrické těleso (ne nutně přímo tvaru koule, mohou to být třeba kulové slupky) vytváří kolem sebe stejné gravitační pole, jako hmotný bod o stejné hmotnosti umístěný ve středu tělesa. Proto můžeme gravitační sílu mezi zemí a hmotným bodem na jejím povrchu počítat jako sílu mezi dvěma hmotnými body, jejichž vzdálenost je rovna poloměru Země. Toto však platí pouze v případě, že se nacházíme vně tělesa. Naopak, pokud se nacházíme uvnitř sféricky symetrického gravitujícího tělesa, je výslednice působení veškeré hmoty, která je dále od středu než my, nulová. Budeme-li tedy klesat ke středu Země, bude na nás vždy gravitačně působit jen část Země – koule o poloměru, na kterém se právě nacházíme.

Pokud často pracujeme s jedním tělesem (o hmotnosti m_1), v jehož poli se pohybují jiná tělesa (tedy například pohyby v gravitačním poli Země), často se nám bude hodit zavést gravitační zrychlení $g = \kappa \frac{m_1}{r^2}$. Gravitační sílu působící na těleso hmotnosti m_2 pak již dostaneme jako $F_G = m_2 g$.

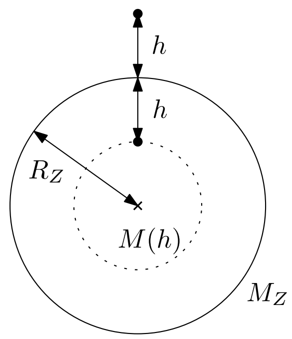
Nyní již máme připraveno vše k řešení příkladu, u kterého je však použití výše uvedených myšlenek dost hraniční. Při řešení budeme sebe považovat za hmotný bod umístěný v těžišti. (Už to není adekvátní – člověk není příliš sféricky symetrické těleso.) Když stojíme, je naše těžiště zhruba 1 m nad podlahou, a tedy při lehnutí se přihlížíme asi o $l_0 = 1$ m ke středu Země. Gravitační zrychlení se tedy změní z $g_{R_Z+l_0} = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z+l_0)^2}$ na $g_{R_Z} = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$. Proto naše váha[3] bude $m_l = \frac{g_{R_Z+l_0}}{g_{R_Z}} m = \frac{R_Z^2}{(R_Z+l_0)^2} m$, tedy oproti naší hmotnosti m se bude lišit o $m - m_l = \left(1 - \frac{R_Z^2}{(R_Z+l_0)^2}\right) m \doteq 31$ mg, kde jsme použili $R_Z = 6371$ km.

Pokud spadneme do škarpy, je to chápáno tak, že se dostaneme $l_0 = 1$ m pod povrch Země s tím, že ve škarpě ležíme a leželi jsme i na začátku (abychom dostali výsledek ze skript). Předpokládáme (opět to není úplně pravda), že je Země homogenní koule konstantní hustoty $\rho = \frac{M_Z}{V_Z} = \frac{M_Z}{\frac{4}{3}\pi R_Z^3}$. V hloubce l_0 pod povrchem, na nás tedy bude působit již jen koule o hmotnosti $M = \frac{4}{3}\pi (R_Z - l_0)^3 \rho = \frac{(R_Z-l_0)^3}{R_Z^3} M_Z$. Ve škarpě na nás tedy bude působit gravitační zrychlení $g_{R_Z-l_0} = \kappa \frac{M}{(R_Z-l_0)^2} = \kappa M_Z \frac{R_Z-l_0}{R_Z^3} = \frac{R_Z-l_0}{R_Z} g$ a naše váha tak bude oproti hmotnosti asi o 15 mg nižší.

2.31 Nahoru a dolů

Zadání: Najděte takovou vzdálenost h, aby ve výšce h nad zemí a v hloubce h pod zemí byla gravitační síla stejná.

[3] Váhy měří gravitační (tíhovou) sílu F_g, kterou na ně těleso působí. Jsou nakalibrované na určitou hodnotu gravitačního (tíhového) zrychlení g_0 a na stupnici pak ukazují „hmotnost“ $m = \frac{F_g}{g_0}$. Pokud se skutečně nacházíme v gravitačním (tíhovém) zrychlení g_0, pak váhy ukazují naši skutečnou hmotnost m_0. Pokud se nacházíme v gravitačním (tíhovém) poli g, je gravitační (tíhová) síla $F_g = m_0 g$ a váhy ukážou „hmotnost“ $m_g = \frac{F_g}{g_0} = \frac{g}{g_0} m_0$.



Řešení: Zde (stejně jako v předchozím příkladě 2.30) použijeme Gaussův zákon, který říká, že sféricky symetrické těleso kolem sebe vytváří gravitační pole, které je stejné jako od hmotného bodu o stejné hmotnosti umístěného ve středu původního tělesa. Pokud se nacházíme pod povrchem sféricky symetrického tělesa, ke gravitaci přispívá část jen „pod námi“, gravitační působení hmoty „nad námi“ se vzájemně vyruší. Využitím těchto informací můžeme napsat gravitační zrychlení pomocí Newtonova gravitačního zákona, $g = \frac{F_G}{m} = \kappa \frac{M}{r^2}$. Pro místo ve výšce h nad zemí máme zrychlení

$$g_{\text{nad}} = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2},$$

kde M_Z je hmotnost Země. Pro určení zrychlení v hloubce h pod zemí si nejdříve musíme spočítat hmotnost části Země ležící hlouběji než h – funkci $M(h)$. Uvažujeme, že hustota Země je konstantní: $\rho_Z = \frac{M_Z}{\frac{4}{3}\pi R_Z^3}$. Pak máme

$$M(h) = \rho_Z V(h) = \rho_Z \frac{4}{3}\pi (R_Z - h)^3 = \frac{(R_Z - h)^3}{R_Z^3} M_Z.$$

A gravitační zrychlení je pak

$$g_{\text{pod}} = \kappa \frac{M(h)}{(R_Z - h)^2} = \kappa \frac{(R_Z - h) M_Z}{R_Z^3}.$$

Rovnice $g_{\text{nad}} = g_{\text{pod}}$ po úpravě vypadá následovně:

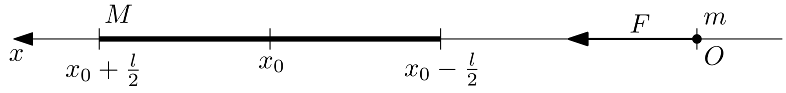
$$h(h^2 + R_Z h - R_Z^2) = 0.$$

Tato rovnice má jednak triviální řešení $h = 0$ a také řešení $h_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} R_Z$. Naše úvahy platí pouze pro $h > 0$ a tedy $h = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R_Z$.

2.32 Gravitující tyč

Zadání: Mějme gravitující těleso v podobě protáhlé homogenní tyče hmotnosti M a délky l ležící v ose x. Ve vzdálenosti x_0 od středu tyče leží na ose x částice hmotnosti m. Určete gravitační sílu, která na částici působí.

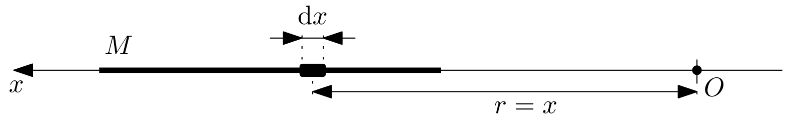
Řešení: Jelikož se nejedná o hmotný bod ani o sféricky symetrický objekt, který se gravitačně jeví jako hmotný bod, budeme muset tyč pomyslně rozdělit na nekonečně malé úseky a výslednou působící sílu určit integrací. Zaveďme počátek kartézské souřadnice x v místě hmotného bodu. Pak se tyč rozkládá na souřadnicích $x \in \langle x_0 - \frac{l}{2}, x_0 + \frac{l}{2} \rangle$.



Malý kousek tyče $\mathrm{d}x$ o hmotnosti $\mathrm{d}M$ na obecné hodnotě souřadnice x bude k celkové gravitační síle přispívat malým příspěvkem

$$\mathrm{d}F = \kappa \frac{m\,\mathrm{d}M}{r^2} = \kappa \frac{m\frac{\mathrm{d}x}{l}M}{x^2} = \frac{\kappa m M}{l}\frac{\mathrm{d}x}{x^2},$$

kde jsme použili vztahy $r = x$ a $\mathrm{d}M = \frac{\mathrm{d}x}{l}M$ (délková hustota tyče je $\tau = \frac{M}{l}$ a pak $\mathrm{d}M = \tau\,\mathrm{d}x$).



Celkovou velikost síly pak dostaneme integrací od jednoho kraje tyče ke druhému, což odpovídá $x \in \langle x_0 - \frac{l}{2}, x_0 + \frac{l}{2}\rangle$:

$$F = \int_{x_0-\frac{l}{2}}^{x_0+\frac{l}{2}} \frac{\kappa m M}{l}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\kappa m M}{l}\left[-\frac{1}{x}\right]_{x_0-\frac{l}{2}}^{x_0+\frac{l}{2}} = \ldots = \frac{\kappa m M}{x_0^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

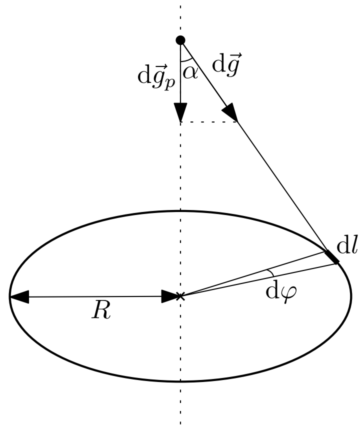
2.33 Gravitující obruč

Zadání: Mějme gravitující těleso v podobě homogenní kružnice hmotnosti M a poloměru R a určete gravitačí zrychlení na ose kružnice ve vzdálenosti h od roviny kružnice. V jaké vzdálenosti bude toto zrychlení maximální?

Řešení: Postup bude podobný jako v příkladu 2.32. Opět si musíme těleso rozdělit na malé kousky a gravitační zrychlení od jednotlivých částí nasčítat. Výsledné zrychlení na ose bude zřejmě působit ve směru osy kružnice, jelikož příspěvky do jiných směrů se vzájemně vyruší. Malý příspěvek ke zrychlení $\mathrm{d}g$ od malého úseku kružnice délky $\mathrm{d}l$ bude mít velikost

$$\mathrm{d}g = \kappa \frac{\mathrm{d}M}{r^2} = \kappa \frac{\frac{\mathrm{d}l}{2\pi R}M}{h^2 + R^2} = \kappa \frac{\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}M}{h^2 + R^2},$$

kde jsme použili vztahy $r = \sqrt{h^2 + R^2}$ a $\mathrm{d}M = \frac{\mathrm{d}l}{2\pi R}M$ (délková hustota tyče je $\tau = \frac{M}{2\pi R}$ a pak $\mathrm{d}M = \tau\,\mathrm{d}l$) a $\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\varphi$ ($\mathrm{d}\varphi$ je malý úhel na kružnici odpovídající malému úseku délky $\mathrm{d}l$).



Průmět dg_p do směru osy kružnice bude mít velikost

$$dg_p = dg\cos\alpha = dg\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}},$$

kde α je úhel mezi osou kružnice a přímkou spojující bod na ose s kouskem kružnice. Celkové gravitační rychlení získame integrací přes celou kružnici, což pro souřadnici φ znamená $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$:

$$g = \int dg_p = \int_0^{2\pi} \kappa\,\frac{\frac{1}{2\pi}M}{h^2+R^2}\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\,d\varphi = \kappa\,\frac{\frac{M}{2\pi}h}{(h^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \kappa\,\frac{Mh}{(h^2+R^2)^{3/2}}.$$

(Mohli bychom také využít symetrii úlohy a integraci se úplně vyhnout.) Vzdálenost h, ve které je zrychlení maximální, získáme snadno derivací:

$$\frac{dg(h_{max})}{dh} = \kappa\,\frac{M(R^2-2h^2)}{(h^2+R^2)^{5/2}} = 0 \quad \rightarrow \quad h_{max} = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

2.34 Gravitace ve výšce

Zadání: Určete gravitační zrychlení ve výšce $h = 20$ km nad zemským povrchem.

Řešení: Opět (jako v příkladech 2.30 a 2.31) využijeme toho, že gravitace od sféricky symetrického objektu je stejná jako od hmotného bodu stejné hmotnosti umístěného ve středu objektu. Máme tedy

$$g_{R_Z+h} = \kappa\frac{M_Z}{(R_Z+h)^2} = \kappa\frac{M_Z}{R_Z^2}\frac{R_Z^2}{(R_Z+h)^2} = \left(\frac{R_Z}{R_Z+h}\right)^2 g_{R_Z},$$

kde jsme v druhé rovnosti rozšířili zlomek R_Z^2. Použitím hodnot $R_Z = 6371$ km a $g(R_Z) = 9{,}81$ m.s^{-2} dostaneme $g_{R_Z+h} \doteq 9{,}75$ m.s^{-2}.

2.35 Družice

Zadání: Jak velkou rychlost je třeba udělit nějakému tělesu ve výšce $h = 500$ km nad zemským povrchem, aby se pohybovalo jako umělá družice Země po kruhové trajektorii?

Řešení: Musí platit, že se odstředivá síla $F_o = m\frac{v^2}{R_Z+h}$ rovná síle gravitační $F_G = \kappa\frac{mM_Z}{(R_Z+h)^2}$ (toto zdůvodnění platí v rotující neinerciální soustavě; v inerciální soustavě je dostředivá síla F_d tvořena gravitační silou F_G), tedy

$$v^2 = \frac{\kappa M_Z}{R_Z+h} = \frac{\kappa M_Z}{R_Z^2}\frac{R_Z^2}{R_Z+h} = \frac{R_Z^2}{R_Z+h}g,$$

kde jsme použili $g = \kappa\frac{M_Z}{R_Z^2}$. Odtud již můžeme spočítat $v \doteq 7,6$ km.s^{-1}. (Dosadili jsme hodnoty $R_Z = 6371\,\mathrm{km}$ a $g = 9,8\,\mathrm{m.s}^{-2}$.)

2.36 Gravitace Slunce a Měsíce

Zadání: Určete gravitační zrychlení na povrchu Slunce a Měsíce. Kolikrát jsme lehčí na Měsíci? Poloměr Slunce je $R_S = 6,96.10^8$ m, Měsíce $R_M = 1,74.10^6$ m.

Řešení: Jednoduše vyjdeme ze vztahu $g = \frac{F_g}{m} = \frac{\kappa M}{R^2}$, do kterého ale budeme ještě potřebovat zjistit hmotnosti Slunce a Měsíce. Hmotnost Slunce je $M_S = 1,99.10^{30}$ kg a Měsíce $M_M = 7,35.10^{22}$ kg. Pak dostaneme $g_S \doteq 274$ m.s^{-2} a $g_M \doteq 1,62$ m.s^{-2}. Na Měsíci jsme tedy asi šestkrát lehčí než na Zemi.

2.37 Těleso na desce

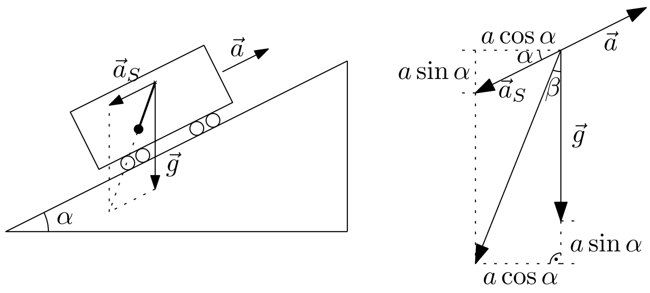
Zadání: Na desce konající harmonický pohyb $x = A\sin(\omega t)$ ve vodorovném směru spočívá závaží hmotnosti m. Koeficient smykového tření je $f = 0,5$, $\omega = 10$ s^{-1}. Při jaké amplitudě A začne závaží po desce klouzat?

Řešení: Zrychlení při daném pohybu je $\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t)$, které má maximální velikost $A\omega^2$. Těleso začne klouzat po podložce ve chvíli, kdy setrvačná síla velikosti $F_S = ma = mA\omega^2$ překoná odporovou třecí sílu velikosti $F_t = fF_g = mgf$. Odtud dostáváme pro hraniční amplitudu vztah $A_m = \frac{gf}{\omega^2} = 5$ cm.

2.38 Olovnice ve vlaku

Zadání: V železničním voze pohybujícím se se zrychlením $0,3$ m.s^{-2} nahoru po svahu se sklonem $10°$ visí na šňůře závaží. Určete úhel, který svírá šňůra se svislým směrem.

Řešení: Označme jako α úhel sklonu svahu a jako β úhel vychýlení, který máme určit. Závaží na šňůře se ustálí ve chvíli, kdy bude výslednice tíhové síly a setrvačné síly dané zrychlováním vlaku mířit ve směru závěsu. Viz obrázek, kde $\vec{a}$ označuje zrychlení vagonu a $\vec{a}_S = -\vec{a}$ setrvačné zrychlení působící na závaží ve voze.



Vytvoříme si pravoúhlý trojúhelník mezi výslednicí zrychlení a gravitačním zrychlením tak, že tyto vektory „doplníme“ rozkladem setrvačného zrychlení do vodorovného a svislého směru ($|\vec{a}_S| = |\vec{a}|$) – opět viz obrázek. Z tohoto trojúhelníku pak jednoduše vyjádříme

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a\cos\alpha}{g + a\sin\alpha}.$$

Po dosazení hodnot pak dostaneme $\beta \doteq 1°43'$ při použití hodnoty $g = 9,8$ m.s^{-2}.

2.39 Kyvadlo ve výtahu

Zadání: Jaké je zrychlení výtahu, kývá-li v něm matematické kyvadlo délky 1 m s dobou kmitu a) $T = 2,3$ s, b) $T = 1,8$ s, c) krouží volně kolem závěsu, d) $T = 4,2$ s s rovnovážnou polohou kolmo nad bodem závěsu?

Řešení: Dobou kmitu se zde myslí perioda a nikoli doba kyvu, která je polovinou periody. Pro periodu matematického kyvadla platí $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}}$, kde a je zrychlení (v jiných případech často $a = g$) a l délka kyvadla. Odtud dostáváme $a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l$. Jelikož se výtah navíc nachází v tíhovém poli, bude $a = g + a_v$, kde a_v je zrychlení výtahu směrem nahoru. V případě a) pak dostáváme $a \doteq 7,4$ m.s^{-2} a $a_v = a - g \doteq -2,3$ m.s^{-2}, tedy zrychlení $2,3$ m.s^{-2} směrem dolů. V případě b) je $a \doteq 12,2$ m.s^{-2} a $a_v = a - g \doteq 2,4$ m.s^{-2}, tedy zrychlení $2,4$ m.s^{-2} směrem nahoru. Varianta c) nastane zřejmě ve chvíli, kdy se setrvačné a tíhové zrychlení vyrovnají, tedy když $a_v = g$ směrem dolů. Jedná se vlastně o volný pád výtahu. V případě d) dostáváme velikost zrychlení $a \doteq 2,2$ m.s^{-2}, ale v opačném směru a je třeba nejprve vynulovat tíhové zrychlení. Proto bude $a_v = a + g \doteq 12$ m.s^{-2} směrem dolů.

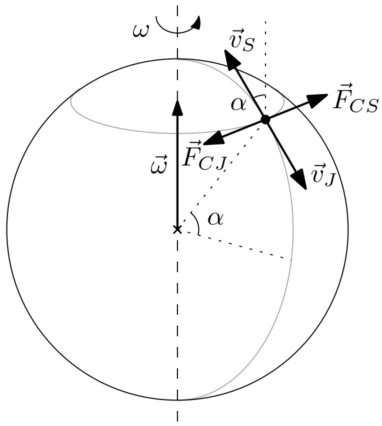
2.40 Váhy ve výtahu

Zadání: Ve výtahu jsou pružinové váhy, na kterých visí těleso hmotnosti 1 kg. Jakou sílu budou ukazovat váhy v těchto případech: a) výtah stoupá se zrychlením $4,9$ m.s^{-2} mířícím dolů (zastavuje se), b) výtah klesá se zrychlením $4,9$ m.s^{-2} mířícím vzhůru (zastavuje se), c) výtah klesá se zrychlením 1 m.s^{-2} mířícím dolů (rozjíždí se), d) výtah stoupá se zrychlením 1 m.s^{-2} mířícím vzhůru (rozjíždí se)?

Řešení: Standardně v tíhovém poli velikosti g ukazují váhy sílu $F = mg$. V případě zrychleného pohybu výtahu nahradíme g upraveným zrychlením a závislým na zrychlení výtahu a_v, $a = g \pm a_v$. Je dobré si uvědomit, že síla závisí pouze na zrychlení výtahu (velikosti a směru) a nikoli na samotném směru pohybu výtahu. Dostáváme tak v případě a) $ma = m(g - a_v) = 4,9$ N, v případě b) $ma = m(g + a_v) = 14,7$ N, v případě c) $ma = m(g - a_v) = 8,8$ N, v případě d) $ma = m(g + a_v) = 10,8$ N.

2.41 Coriolisova síla vs. tíha

Zadání: Porovnejte velikost Coriolisovy síly a tíhy tělesa, které se v zeměpisné šířce $\varphi = 50°$ pohybuje rychlostí $v = 100$ km.h^{-1} po poledníku.

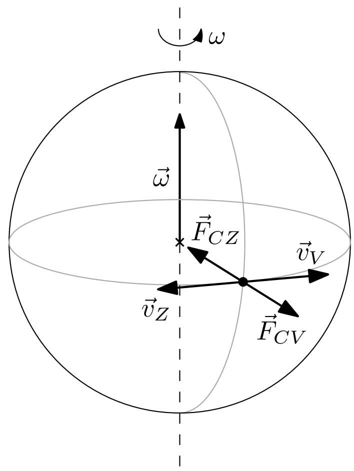


Řešení: Coriolisova síla je dána vztahem $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ a její velikost je tedy $F_C = 2m\omega v \sin\alpha$, kde α je úhel mezi vektory $\vec{\omega}$ a $\vec{v}$. Vektor úhlové rychlosti míří se směru zemské osy. Z vlastností vektorového součinu víme, že Coriolisova síla bude mířit kolmo na vektor úhlové rychlosti a vektor rychlosti tělesa. Bude tedy mířit ve směru tečny k dané rovnoběžce. Zeměpisná šířka se měří od rovníku a z jednoduchého náčrtku je zřejmé, že úhel $\alpha = 50°$ je také úhel mezi vektorem rychlosti a vektorem úhlové rychlosti. Vektor úhlové rychlosti má velikost $\omega = \frac{2\pi}{T} \doteq \frac{2\pi}{24.3600\ \mathrm{s}} \doteq 7,3.10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$. Celkově tedy dostáváme $\frac{F_C}{F_g} = \frac{2m\omega v \sin\alpha}{mg} \doteq 3,2.10^{-4}$.

Dle pravidla pravé ruky můžeme také určit směr působící Coriolisovy síly: pro pohyb směrem na sever dostáváme sílu směřující na východ a naopak, viz obrázek.

2.42 Coriolisova síla na rovníku

Zadání: Oč se změní tíhové zrychlení tělesa, které se pohybuje po rovníku rychlostí 1 km.s^{-1} působením Coriolosovy síly?



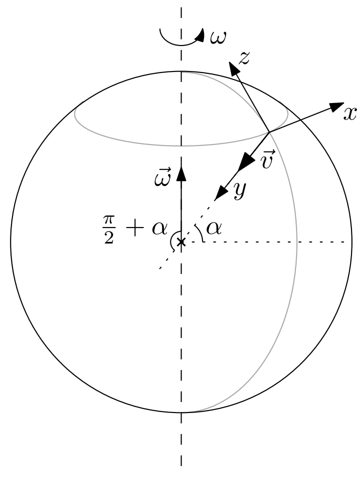
Řešení: Při pohybu po rovníku je vektor rychlosti $\vec{v}$ kolmý k vektoru úhlové rychlosti $\vec{\omega}$. Vztah pro Coriolisovu sílu je $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{v} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega}$ a její velikost pro kolmé vektory je $F_C = 2m\omega v$. Dostáváme tedy $a_C = \frac{F_C}{m} = 2\omega v \doteq 0,15$ m.s^{-2}. Dle pravidla pravé ruky určíme směr působící Coriolisovy síly (viz obrázek): pokud se těleso pohybuje na západ, míří Coriolisova síla do středu země; pro pohyb na východ naopak.

2.43 Pád z Eiffelovy věže

Zadání: Jak se odchýlí těleso od paty kolmice při volném pádu z Eiffelovy věže působením Coriolisovy síly?

Řešení: Při řešení budeme zanedbávat efekty vyšších řádů. Budeme tedy uvažovat volný pád, kdy navíc na těleso působí Coriolisova síla ve vodorovném směru a zanedbáme například to, že díky vzniklému vodorovnému pohybu by měl vznikat další příspěvek od Coriolisovy síly ve svislém směru.

Označme si výšku Eiffelovy věže jako $h = 300$ m a celkovou dobu pádu $T = \sqrt{2h/g}$. Vertikální souřadnici mířící směrem k zemi budeme označovat jako y a souřadnici ve směru ze západu na východ jako x (a souřadnice z míří z jihu na sever), viz obrázek.



Vertikální rychlost tedy bude $v_y(t) = gt$. Působením Coriolisovy síly $F_C = 2m|\vec{\omega} \times \vec{v}|$ pak vznikne zrychlení $\vec{a}_C$ ve vodorovném směru ve směru na východ (ve směru osy x):

$$a_C(t) = |2\vec{\omega} \times \vec{v}(t)| \doteq 2\omega v_y(t) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 2\omega g t \cos\alpha,$$

kde $\alpha \doteq 49°$ je úhel odpovídající zeměpisné šířce Paříže a aproximovali jsme vektor rychlosti $\vec{v} \doteq (0, v_y, 0)$. Rychlost ve vodorovném směru pak dostaneme integrací jako

$$v_x(t) = \int a_C(t)\,\mathrm{d}t = \int 2\omega g t \cos\alpha\,\mathrm{d}t = 2\omega\cos\alpha\, g\frac{t^2}{2} + C_1,$$

kde $C_1 = 0$ (počáteční rychlost je nulová), jelikož je počáteční rychlost ve vodorovném směru nulová. Posledním krokem je pak analogické určení uražené vzdálenosti

$$x(t) = \int \omega\cos\alpha\, g t^2 \mathrm{d}t = \omega\cos\alpha\, g\frac{t^3}{3} + C_2,$$

kde opět $C_2 = 0$ (vodorovný pohyb začal na souřadnici $x = 0$). Nyní stačí dosadit

$$x(T) = \omega\cos\alpha\, g\frac{T^3}{3} = \frac{\omega g}{3}\cos\alpha\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \doteq 7,5\ \text{cm}.$$

2.44 Vertikální výstřel z děla

Zadání: V 17. století provedl francouzský matematik a fyzik M. Mersenne pokus s vertikálním výstřelem z děla, aby zjistil, kam náboj vzhledem k rotaci Země dopadne. Byl-li pokus prováděn na 48° severní šířky a počáteční rychlost střely byla 300 m.s^{-1}, kde mohl očekávat místo dopadu?

Řešení: Úloha je obdobná té předchozí. Zde je přirozenější směřovat osu y vzhůru k nebi a pak kvůli pravotočivosti souřadné soustavy musí například osa x směřovat na západ (porovnejte se zavedením os na obrázku u předchozího příkladu). Rychlost tělesa ve svislém směru bude $v_y(t) = v_0 - gt$. Vzniklé Coriolisovo zrychlení $\vec{a}_C = 2\vec{v} \times \vec{\omega}$ bude směřovat na západ (ve směru osy x) a jeho velikost bude

$$a_C = a_x(t) = 2\omega \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) v_y(t) = 2\omega\cos\alpha\,(v_0 - gt).$$

(znaménko minus v sinu odpovídá pohybu směrem vzhůru, znaménko plus pohybu směrem dolů, použitím součtového vzorce ale dostaneme vždy $\cos\alpha$). Vodorovná rychlost bude

$$v_x(t) = \int a_x(t)\,\mathrm{d}t = \int 2\omega\cos\alpha\,(v_0 - gt)\,\mathrm{d}t = 2\omega\cos\alpha\left(v_0 t - g\frac{t^2}{2}\right) + C_1,$$

kde $C_1 = 0$ (rychlost na počátku pohybu je nulová) a výsledná poloha

$$x(t) = \int v_x(t)\,\mathrm{d}t = \int 2\omega\cos\alpha\left(v_0 t - g\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = 2\omega\cos\alpha\left(v_0\frac{t^2}{2} - g\frac{t^3}{6}\right) + C_2,$$

kde $C_2 = 0$ (počáteční poloha je $x = 0$). Nyní stačí vyčíslit $x(2T)$, kde $T = \frac{v_0}{g}$ je doba stoupání, respektive doba zpětného pádu. Tak dostaneme

$$x(2T) = 2\omega\cos\alpha\,\frac{v_0^3}{g^2}\frac{2}{3} \doteq 18,2\,\text{m (západně)}.$$

Kapitola 3

Mechanika soustavy částic

3.1 Celková síla a moment

Zadání: Je dána soustava tří hmotných bodů o hmotnostech $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg a $m_3 = 3$ kg a jejich polohové vektory jako funkce času: $\vec{r}_1(t) = (2t, 4t, 5)$, $\vec{r}_2(t) = (t^2 + 2, 1, 0)$, $\vec{r}_3(t) = (1, t^2 + 2, 0)$. Údaje jsou v metrech a sekundách. Určete výslednici vnějších sil a výsledný moment vnějších sil vzhledem k počátku souřadnic.

Řešení: V tomto příkladě použijeme k řešení první a druhou větu impulsovou. Ty znějí:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}^{(e)}, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{N}^{(e)},$$

tedy že časová změna celkové hybnosti je rovna výslednici vnějších sil a časová změna celkového momentu hybnosti je rovna výslednému momentu vnějších sil. Celková hybnost a celkový moment hybnosti soustavy částic jsou sumy hybností a momentů hybností jednotlivých částic:

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{p}_\alpha, \qquad \vec{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{l}_\alpha.$$

Hybnosti a momenty hybností jednotlivých částic jsou

$$\vec{p}_\alpha = m_\alpha \vec{v}_\alpha, \qquad \vec{l}_\alpha = \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha,$$

kde m_α, $\vec{r}_\alpha$ a $\vec{v}_\alpha$ jsou hmotnost, polohový vektor a vektor rychlosti jednotlivých částic.

Výslednice vnějších sil je dána jako vektorový součet vnějších sil působících na jednotlivé částice, stejně tak celkový moment vnějších sil je sumou jednotlivých momentů:

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(e)}, \qquad \vec{N}_\alpha^{(e)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{N}_\alpha^{(e)} = \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)}.$$

Spočtěme tedy (rychlosti a) hybnosti jednotlivých částic:

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = 1(2, 4, 0), \quad \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 = 2(2t, 0, 0), \quad \vec{p}_3 = m_3 \vec{v}_3 = 3(1, 2t, 0).$$

Celková hybnost tedy je

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = (4t + 5, 6t + 4, 0).$$

Výslednici vnějších sil získáme podle první věty impulsové zderivováním celkové hybnosti podle času: $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = (4, 6, 0)\, N = \vec{F}^{(e)}$. Pro celkový moment vnějších sil si nejprve spočteme momenty hybností jednotlivých částic:

$$\vec{l}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = (-20, 10, 0), \quad \vec{l}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = (0, 0, -4t), \quad \vec{l}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{p}_3 = (0, 0, 6t).$$

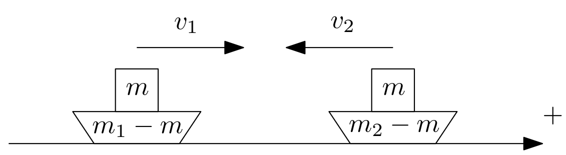
Nyní tyto momenty sečteme pro získání celkového momentu hybnosti a tento zderivujeme pro získání celkového momentu vnějších sil:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 = (-20, 10, 2t), \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = (0, 0, 2)\,\mathrm{N.m} = \vec{N}^{(e)}.$$

Poznámka: Na pravých stranách první a druhé věty impulsové vystupují pouze vnější síly a jejich momenty. Nejsou tam tedy vůbec síly působící vzájemně mezi částicemi, které se při odvozování těchto vět vzájemně vyruší. Pro platnost první věty impulsové je třeba předpokládat platnost zákona akce a reakce, pro platnost druhé věty impulsové je třeba navíc předpokládat, že síly jsou centrální, tzn. působí podél spojnice mezi příslušnými dvěma částicemi.

3.2 Pašeráci

Zadání: Dvě loďky plují proti sobě rovnoběžným směrem. Když se setkají, vymění si pytle s pašovaným zbožím o stejných hmotnostech $m = 50$ kg. Následkem toho se první loďka zastaví, $v_1' = 0$, a druhá se pohybuje dál rychlostí $v_2' = v = 8,5\ \mathrm{m.s^{-1}}$ v původním směru. Jaké jsou rychlosti loděk v_1, v_2 před výměnou pytlů, jsou li hmotnosti loděk $m_1 = 500$ kg, $m_2 = 1000$ kg?



Řešení: (Abychom dostali výsledek jako ve skriptech, musíme zadání chápat tak, že hmotnosti loděk m_1, m_2 jsou včetně pytlů.) Použijeme zákon zachování hybnosti. (Energie se zde nezachovává, na pytle při dopadu musí působit třecí síly, které je zastaví.)

Systém rozdělíme na dvě části: první loďku a pytel z druhé loďky a dále pak druhou loďku a pytel z té první. V těchto částech se také zachovává hybnost (v takto rozděleném systému pořád působí jen vnitřní síly (při dopadu příslušných pytlů do příslušných loděk) a hybnost je tedy v čase konstantní). Zvolme si kladný směr ve směru pohybu první loďky a zapišme příslušná zachování hybností:

$$(m_1 - m)v_1 - mv_2 = 0, \qquad mv_1 - (m_2 - m)v_2 = -m_2 v_2'.$$

Řešením soustavy pro neznámé v_1, v_2 snadno dostaneme

$$v_2 = \frac{m_2}{m_2 - m} v_2' = 9 \text{ m.s}^{-1}, \qquad v_1 = \frac{m}{m_1 - m} v_2 = 1 \text{ m.s}^{-1},$$

kde rychlosti míří opačnými směry (protože směry rychlostí jsme ošetřili psaním příslušných znamének do zákonů zachování hybnosti, kladná rychlost v_1 směřovala v kladném směru souřadnice a kladná rychlost v_2 směřovala do záporného směru souřadnice).

Poznámka: Také se zachovává hybnost celého systému – obou loděk a obou pytlů:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 - m_2 v_2'.$$

Součtem zákonů zachování hybnosti pro dva podsystémy dostaneme tuto rovnici pro zachování celkové hybnosti.

3.3 Tři loďky

Zadání: Tři loďky stejné hmotnosti M jedou za sebou stejnou rychlostí v. Ze střední loďky byla rychlostí u vzhledem k této loďce vyhozena ve stejnou dobu dvě závaží téže hmotnosti m do přední a zadní loďky. Jaké jsou rychlosti loděk v_1, v_2, v_3 po přehození závaží?

Řešení: Rychlost prostřední loďky se zřejmě nezmění, tedy bude $v_2 = v$. U dalších loděk použijeme zákon zachování hybnosti (vždy pro jednu loďku a jedno závaží zvlášť). Rychlost závaží (vůči hladině) bude $v \pm u$, a tedy $Mv + m(v \pm u) = (M+m)v_{1,3}$, odkud $v_{1,3} = \frac{Mv+m(v\pm u)}{M+m}$.

Poznámka: Neměnnost rychlosti prostřední loďky, $v_2 = v$, také můžeme „rigorózně“ získat z následujícího zákona zachování hybnosti:

$$(M + 2m)v = Mv_2 + m(v - u) + m(v + u).$$

3.4 Granát

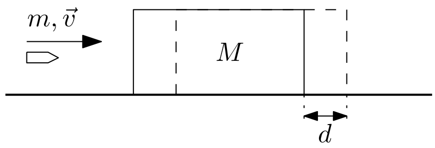
Zadání: Granát, který byl v klidu, se při explozi rozdělil na dvě části o hmotnostech m a $4m$. Část o hmotnosti m odletěla s kinetickou energií 100 J. Určete celkovou uvolněnou kinetickou energii.

Řešení: Použijeme zákon zachování hybnosti. Jelikož byl granát na začátku v klidu, musí platit $0 = mv_1 - 4mv_2$, kde v_1 a v_2 označují rychlosti částí po výbuchu, a tedy $v_2 = \frac{v_1}{4}$. Dále víme, že $E_{K1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = 100$ J, a tedy celková energie bude

$$E_K = E_{K1} + E_{K2} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}4mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}4m\frac{v_1^2}{16} = \frac{5}{4}\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{5}{4}E_{K1} = 125\,J.$$

3.5 Střela do dřeva

Zadání: Střela hmotnosti $m = 10$ g byla vystřelena do dřevěného bloku hmotnosti $M = 2$ kg ležícího na dřevěné podložce a uvízla v něm. Přitom jej posunula o 25 cm. Součinitel smykového tření bloku o podložku je $f = 0,2$. Určete práci síly tření, rychlost střely před nárazem a dobu pohybu bloku.



Řešení: Velikost síly tření bude $F = (M+m)gf$. Jelikož tato síla je konstantní a působila po dráze $s = 0,25$ m, bude vykonaná práce $A = Fs = (M+m)gfs \doteq (2+0,01)\cdot 9,8\cdot 0,2\cdot 0,25$ J $= 0,985$ J. Tato práce udává kinetickou energii, kterou blok získal po srážce se střelou. Jelikož se ovšem jednalo o nepružnou srážku, tak tato energie není rovna původní kinetické energii střely. Část energie přešla například na tepelnou přímo při deformaci střely a dřevěného bloku.

Využijeme toho, že impuls síly udává změnu hybnosti, $Ft = \Delta p$. Určeme tedy nejprve dobu pohybu bloku t. Jedná se o pohyb s konstantním zrychlením, tedy $s = \frac{1}{2}at^2$, kde $a = F/(M+m)$, odkud $t = \sqrt{\frac{2s(M+m)}{F}} \doteq 0,505$ s. Změna hybnosti je $\Delta p = m(v-0)$, kde v je původní rychlost střely (ještě před srážkou). Pak dostáváme

$$v = \frac{Ft}{m} = \frac{1}{m}F\sqrt{\frac{2s(M+m)}{F}} = \frac{1}{m}\sqrt{2s(M+m)F} \doteq 199 \text{ m.s}^{-1}.$$

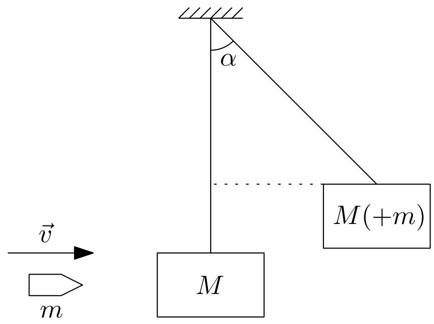
3.6 Balistické kyvadlo

Zadání: Na obrázku je balistické kyvadlo tvořené bedničkou s pískem hmotnosti M na závěsu délky l, které se používá k určování rychlosti střely. Určete rychlost střely hmotnosti m, která při nárazu do balistického kyvadla jej vychýlí o úhel α, jestliže:

a) střela po nárazu v bedničce uvízne,

b) střela po nárazu odskočí zpět rychlostí v_0,

c) střela po nárazu ztratí rychlost a spadne dolů.



Řešení: Celou úlohu si rozdělíme na dva procesy. Napřed dojde ke srážce střely s bednou s pískem. Jedná se obecně o nepružnou srážku, ale můžeme zde využít zákon zachování hybnosti. Výsledkem bude bedna v dolní poloze (s uvíznutou střelou nebo bez ní), která se bude pohybovat nějakou rychlostí w. Následně se bedna zhoupne na provázku. Zde se bude zachovávat mechanická energie.

V případě a) dostaneme ze zákona zachování hybnosti $mv = (M+m)w$, odkud $v = \frac{M+m}{m}w$. Nyní určíme rychlost bedny po srážce se střelou ze vztahu pro rovnost kinetické energie ve spodní poloze a potenciální energie v horní poloze: $\frac{1}{2}(M+m)w^2 = (M+m)g(l - l\cos\alpha)$, odkud $w = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$. Celkově tedy

$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}.$$

V případě b) bude mít zákon zachování hybnosti tvar $mv = Mw - mv_0$, takže $v = \frac{M}{m}w - v_0$, kde w určíme stejně jako v předchozím případě a tedy

$$v = \frac{M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} - v_0.$$

V případě c) se máme zachování hybnosti ve formě $mv = Mw$ a výsledně

$$v = \frac{M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}.$$

3.7 Vozík s pískem

Zadání: Stanovte zrychlení a rychlost vozíku, působí-li na něj stálá vodorovná síla velikosti F, a je-li na vozíku písek, který vypadává otvorem v podlaze. Za jednotku času se vysype μ písku. V čase $t = 0$ byla rychlost vozíku rovna nule, hmotnost vozíku s pískem M.

Řešení: Vozík s pískem představuje soustavu částic/těles a pro jeho popis vyjdeme z 1. věty impulsové $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}^{(e)}$, kde $\vec{P}$ je celková hybnost částic/těles a $\vec{F}^{(e)}$ je výslednice vnějších sil. Jelikož máme jednorozměrný problém, máme tvar $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = F$. Změna hybnosti $\mathrm{d}P$ mezi časy $t + \mathrm{d}t$ a t je $\mathrm{d}P = P(t+\mathrm{d}t) - P(t)$. V čase t je hmotnost vozíku s aktuálním množstvím písku m a rychlost v. V čase $t + \mathrm{d}t$ se rychlost vozíku obecně o trochu změnila na rychlost $v + \mathrm{d}v$ a navíc se od vozíku oddělil malý kus písku o hmotnosti $|dm|$[1]. Hybnost v čase $t + dt$ je tedy

$$P(t + \mathrm{d}t) = p_{\text{vozík}} + p_{\text{písek}} = (m - |\mathrm{d}m|)(v + \mathrm{d}v) + |\mathrm{d}m|(v + \mathrm{d}v) = m(v + \mathrm{d}v).$$

Změna hybnosti $\mathrm{d}P$ pak je

$$\mathrm{d}P = P(t + \mathrm{d}t) - P(t) = m(v + \mathrm{d}v) - mv = m\,\mathrm{d}v,$$

a výsledná pohybová rovnice má tvar $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m(t)a(t) = F$ (zde tedy vyšla „klasická“ pohybová rovnice, přestože hmotnost $m(t)$ je časově proměnná, viz také poznámka pod řešením pro případ, kdy by se písek nesypal volně).

Jestliže se sype konstantní množství písku μ za jednotku času, pak průběh hmotnosti v čase je jednoduše $m(t) = M - \mu t$. Z pohybové rovnice určíme zrychlení:

$$a(t) = \frac{F}{m(t)} = \frac{F}{M - \mu t}.$$

Rychlost dostaneme integrací:

$$v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int \frac{F}{M - \mu t}\mathrm{d}t = -\frac{F}{\mu}\ln(M - \mu t) + C.$$

Použitím počáteční podmínky dostaneme $0 = v(0) = -\frac{F}{\mu}\ln(M) + C$, a tedy celkově:

$$v(t) = -\frac{F}{\mu}\ln(M - \mu t) + \frac{F}{\mu}\ln(M) = \frac{F}{\mu}\ln\left(\frac{M}{M - \mu t}\right).$$

Poznámka: Pokud by se písek z vozíku nesypal volně, ale byl například odhazován nějakou relativní rychlostí u, dostáváme obecnější pohybovou rovnici, která se nazývá rovnicí Meščerského, viz skripta v řešené úloze pohyb tělesa s proměnnou hmotností. Vektorový tvar této rovnice je následující:

$$m(t)\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} - \vec{u}\,\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F},$$

kde $\vec{u}$ je relativní rychlost, s jakou částice opouštějí hlavní těleso. V našem případě bylo $u = 0$ a dostáváme námi odvozenou rovnici $F = m(t)a$.

3.8 Ztráta energie

Zadání: Dvě koule o hmotnostech $m_1 = 0,5$ kg a $m_2 = 1$ kg pohybující se proti sobě rychlostmi $v_1 = 5$ m.s^{-1} a $v_2 = 8$ m.s^{-1} se nepružně srazí. Určete, jak velká mechanická energie se přitom přemění na energii jiného druhu (tepelnou, akustickou atd).

[1] Bereme absolutní hodnotu, jelikož se hmotnost vozíku zmenšuje, dm je tedy záporné. My budeme znaménka psát explicitně a pracovat s kladným $|dm|$.

Řešení: Předpokládáme, že srážka je dokonale nepružná, a tedy že po srážce vznikne jediný objekt hmotnosti m_1+m_2, který se bude pohybovat nějakou rychlostí v. Označme jako kladný směr například jako směr pohybu prvního tělesa. Využijeme zákon zachování hybnosti, který bude mít tvar $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$. Odtud dostaneme rychlost po srážce jako $v = \frac{m_1v_1-m_2v_2}{m_1+m_2}$. Pokud dosadíme zadané hodnoty, vyjde nám rychlost v záporná. To znamená pouze to, že ve výsledku se bude objekt pohybovat ve směru původního pohybu druhého tělesa a nikoli prvního. Pro počítání energie to ale stejně nehraje roli.

Nyní již jednoduše vyjádříme ztrátu energie jako rozdíl celkové kinetické energie před srážkou a po srážce:

$$\begin{aligned}\Delta E_K = (E_{K1} + E_{K2}) - E_K &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \doteq 28,17\,J.\end{aligned}$$

3.9 Energie vs. hybnost

Zadání: Dvě koule o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují proti sobě a srazí se. Srážka je dokonale nepružná. Před srážkou byly kinetické energie koulí v poměru $\frac{T_1}{T_2} = \alpha = 20$. Za jaké podmínky se budou koule po srážce pohybovat ve směru původního pohybu druhé koule?

Řešení: Ze zadání víme, že platí $\frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2} = \frac{m_1v_1^2}{m_2v_2^2} = \alpha$. Při srážce se zachovává hybnost, takže $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$, kde v je rychlost výsledného tělesa po srážce. Kladný směr jsme zavedli ve směru pohybu prvního tělesa. Aby se systém po srážce pohyboval ve směru původního pohybu druhého tělesa, musí být $v < 0$, tedy

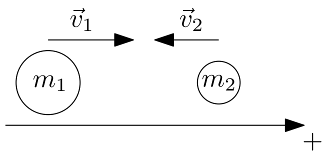
$$\begin{aligned}m_1v_1 - m_2v_2 &< 0 \\ m_1v_1 &< m_2v_2 \quad |^2 \\ \frac{m_1}{m_2}\frac{m_1v_1^2}{m_2v_2^2} &< 1 \\ \frac{m_2}{m_1} &> \alpha.\end{aligned}$$

(Umocnění je v pořádku, jelikož obě strany nerovnice jsou kladné.) Vidíme tedy, že (díky nelinearitě kinetické energie v závislosti na rychlosti) se mohou tělesa po srážce pohybovat ve směru toho s nižší energií, pokud má dostatečnou hmotnost.

3.10 Pružná a nepružná srážka

Zadání: Dvě koule o hmotnostech $m_1 = 5$ kg a $m_2 = 3$ kg se pohybují proti sobě po téže přímce rychlostmi $v_1 = 12$ m.s^{-1} a $v_2 = 4$ m s^{-1} a přímo na sebe narazí. Určete jejich rychlosti po srážce, je-li ráz a) dokonale pružný, b) dokonale nepružný.

Řešení: Při dokonale pružné srážce platí zákon zachování kinetické energie. Společně se zákonem zachování hybnosti máme dvě rovnice pro výpočet rychlostí po srážce. Uvažujme, že kladný směr pohybu je pro obě koule stejný (například pak tedy ze zadání musí být $v_1 = 12$ m.s^{-1} a $v_2 = -4$ m.s^{-1}).



Označme rychlosti po srážce jako v_1' a v_2' (kladné směry pro rychlosti po srážce jsou shodné s kladnými směry před srážkou). Zákon zachování hybnosti dává

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad \rightarrow \quad m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2).$$

Dále ze zákona zachování energie plyne:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \\ m_1(v_1 + v_1')(v_1 - v_1') = m_2(v_2 + v_2')(v_2' - v_2).\end{gathered}$$

Triviálním řešením zákonů zachování energie a hybnosti je $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2$, tzn. že tělesa se vůbec nesrazí. Uvažujme nyní, že se tělesa srazí a tedy $v_1' \neq v_1$ a $v_2' \neq v_2$. Pak můžeme upravenou rovnici zachování energie podělit upravenou rovnicí zachování hybnosti a dostat:

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'.$$

Z této rovnice a ze zákona zachování hybnosti již snadno najdeme vyjádření pro rychlosti po srážce v_1' a v_2' (například vyjádřením $v_2' = v_1 + v_1' - v_2$ a dosazením do rovnice zachování hybnosti):

$$v_1' = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}, \qquad v_2' = v_1 + v_1' - v_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}.$$

Po dosazení $v_1 = 12$ m.s^{-1} a $v_2 = -4$ m.s^{-1} máme $v_1' = 0$ m.s^{-1} a $v_2' = 16$ m.s^{-1}.

V případě dokonale nepružné srážky využijeme zákon zachování hybnosti a fakt, že se tělesa po srážce pohybují společně, tedy $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v$ (opět uvažujeme kladné směry pro obě koule stejný), odkud rovnou $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 6$ m.s^{-1} (dosazujeme $v_2 = -4$ m.s^{-1}).

3.11 Pružná srážka na niti

Zadání: Dvě ocelové kuličky jsou zavěšeny na nitích tak, že když se dotýkají, jsou jejich středy ve vzdálenosti $l = 1$ m od bodů závěsu a nitě jsou svislé. Hmotnosti kuliček jsou $m_1 = 800$ g a $m_2 = 200$ g.

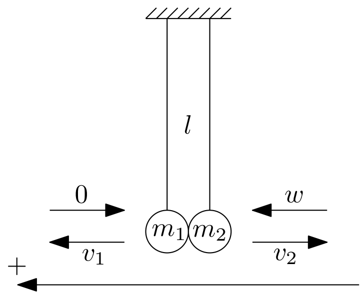
a) Lehčí kuličku vychýlíme o úhel 90° a pustíme. Ráz kuliček je dokonale pružný. Určete výšky h_1, h_2, do kterých vystoupí kuličky.

b) Co se stane, vychýlíme-li těžší kuličku o 90° a pustíme?

c) Při jakém poměru hmotností kuliček budou výšky výstupu obou kuliček po rázu stejné?

Řešení: Nejprve určíme rychlost vychýlené koule w těsně před srážkou ze zákona zachování energie: $mgl = \frac{1}{2}mw^2$, tedy $w = \sqrt{2gl}$. Pružnou srážku jsme ve vší obecnosti vyřešili v minulé úloze 3.10. Buďto tedy použijeme obecný výsledek nebo zde provedeme výpočet v tomto zjednodušeném případě znovu.

V případě za a) zákon zachování hybnosti dává $m_2w = m_1v_1 - m_2v_2$, kde v_1 a v_2 jsou rychlosti po srážce (kladné směry tentokrát uvažujeme opačné pro každou kouli a navíc opačné po srážce (předpokládáme, že se koule „odrazí“), viz obrázek), po úpravě $m_1v_1 = m_2(v_2 + w)$. (Tuto úpravu opět provádíme proto, že nám následně umožní vyhnout se řešení kvadratické rovnice.)



Zákon zachování energie bude:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_2w^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ m_2(w+v_2)(w-v_2) &= m_1v_1v_1 \\ w - v_2 &= v_1, \end{aligned}$$

kde jsme pro získání posledního řádku dosadili ze zákona zachování hybnosti a vykrátili m_1v_1. Snadno vyřešíme vzniklou soustavu rovnic pro v_1 a v_2 a dostaneme $v_2 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gl}$. Výšku, do které koule vystoupá, opět stanovíme ze zákona zachování energie: $m_2gh_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$, odkud $h_2 = \frac{(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}l = 36$ cm. Pomocí vztahu $v_1 = w - v_2$ snadno určíme druhou výšku $h_1 = \frac{4m_2^2}{(m_1+m_2)^2}l = 16$ cm.

Případ b) vyřešíme jednoduše tak, že v předchozích výsledcích prohodíme indexy 1 a 2. Tak dostaneme výšku $h_1 = \frac{(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}l = 36$ cm a $h_2 = \frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2}l = 256$ cm. Výsledek pro h_2 je však samozřejmě třeba chápat tak, že kulička bude obíhat celou kružnici, jelikož je spočtená výška větší než 2 m.

Pro řešení c) položíme $h_1 = h_2$ a využijeme například výsledné vzorce pro případ, kdy na začátku vychylujeme kuličku hmotnosti m_1 (tedy vzorce z b)). Po úpravách dostaneme rovnici $3m_1^2 + 2m_1m_2 - m_2^2 = 0$, kterou vydělíme výrazem m_2^2 a dostaneme

$$3\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 2\,\frac{m_1}{m_2} - 1 = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou $x = \frac{m_1}{m_2} = \pm\frac{1}{3}$, fyzikálně smysluplné je řešení $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$. Vychýlená kulička tedy musí mít třetinu hmotnosti té stojící.

3.12 Přitahování konstantní silou

Zadání: Dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2 se nacházejí na ose x, první v počátku, druhá ve vzdálenosti l od počátku. V okamžiku $t = 0$ se začnou k sobě přibližovat působením vzájemné konstantní přitažlivé síly F. Kdy a kde se srazí a jakou rychlostí?

Řešení: Obě částice se budou pohybovat s konstantním zrychlením, tedy $a_1 = \frac{F}{m_1}$ a $a_2 = \frac{F}{m_2}$ (2. Newtonův zákon). Jejich polohy tedy budou $x_1(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m_1}t^2$ a $x_2(t) = l - \frac{1}{2}\frac{F}{m_2}t^2$ (rovnoměrně zrychlený pohyb). Čas srážky T dostaneme z rovnosti $x_1(T) = x_2(T)$, která po úpravách dá $T = \sqrt{\frac{2m_1m_2l}{(m_1+m_2)F}}$. Rychlost se určí jednoduše jako $v_1(T) = a_1T$ a $v_2(T) = a_2T$, odkud dostáváme celkovou rychlost srážky $v_1(T) + v_2(T) = \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)Fl}{m_1m_2}}$. Místo srážky je pak $x_1(T) = x_2(T) = \frac{m_2l}{m_1+m_2}$, což je poloha těžiště částic v čase $t = 0$ (a také v libovolném jiném čase, viz poznámka).

Poznámka: Z první věty impulsové, $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}^{(e)}$, plyne, že, nepůsobí-li vnější síly, je celková hybnost $\vec{P}$ v čase konstantní. Jelikož byly částice na začátku v klidu, musí být celková hybnost nulová (a to v libovolném časovém okamžiku): $0 = P = m_1v_1(t) + m_2v_2(t)$. Tento vztah můžeme ještě jednou zintegrovat podle času:

$$C = m_1x_1(t) + m_2x_2(t) \quad \rightarrow \quad C' = \frac{C}{m_1+m_2} = \frac{m_1x_1(t) + m_2x_2(t)}{m_1+m_2},$$

po vydělení celkovou hmotností $m_1 + m_2$ jsme dostali, že poloha těžiště je v čase konstantní. Integrační konstantu C (resp. C') určíme z počátečních podmínek $x_1(0) = 0$ a $x_2(0) = l$ jako $C = m_2l$ (resp. $C' = \frac{m_2l}{m_1+m_2}$). Jelikož je poloha těžiště konstantní a v okamžiku srážky jsou částice na jednom místě, musí ke srážce dojít v těžišti, jehož polohu jsme si mohli určit již na počátku pohybu bez jakéhokoliv řešení jeho průběhu.

Poznámka: Tento příklad by šel také spočítat přes zákon zachování energie. Tento postup je ukázán v následujícím příkladu.

3.13 Přitahování gravitační silou

Zadání: Jak se změní situace v předchozím příkladě, budou-li se částice přitahovat gravitačními silami?

Řešení: K řešení nyní využijeme větu o energii soustavy částic (3. větu impulsovou), $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = Q^{(e)}$, kde E je celková energie soustavy, $E = T + U$, a $Q^{(e)} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{(e)} \cdot \vec{v}_\alpha$ je celkový výkon vnějších sil. V našem případě nemáme vnější síly, dostáváme tedy zákon zachování mechanické energie $E = T + U = \text{konst.}$ (ten dostaneme pouze, pokud jsou vnitřní síly potenciální).

Nalezněme nejprve potenciál generující síly působící na jednotlivé částice. Částice jsou přitahovány vzájemnou gravitační silou o velikosti

$$|F_g| = \kappa \frac{m_1 m_2}{(x_1 - x_2)^2}$$

závisející na polohách x_1 a x_2 obou částic. Na první částici působí síla ve směru osy x, tzn. $F_1 = |F_g|$, na druhou částici proti směru osy x, tedy $F_2 = -|F_g|$. Nalezněme potenciál $U(x_1, x_2)$ jako funkci poloh jednotlivých částic generující síly působící na jednotlivé částice, F_1 a F_2 jako

$$F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \qquad F_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2}.$$

Snadno nahlédneme (například zintegrováním předchozích vztahů podle x_1, resp. x_2), že potenciál generující tyto síly je

$$U(x_1, x_2) = \kappa \frac{m_1 m_2}{x_1 - x_2}.$$

Zákon zachování energie pak má tvar:

$$E = T + U = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \kappa \frac{m_1 m_2}{x_1 - x_2}.$$

Konkrétní hodnotu konstanty E zjistíme z počátečních podmínek – zde nulové rychlosti a polohy $x_1 = 0$ a $x_2 = l$, tzn. $E = -\kappa \frac{m_1 m_2}{l}$.

Vztah mezi rychlostmi v_1 a v_2 nalezneme ze zákona zachování hybnosti (plynoucí z první věty impulsové): $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$, po úpravě $v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$, resp. $v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1$. Po dosazení za například v_2 do zákona zachování energie máme:

$$-\kappa \frac{m_1 m_2}{l} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 v_1^2 + \kappa \frac{m_1 m_2}{x_1 - x_2}.$$

Rychlosti v závislosti na polohách částic pak vyjdou následovně (v_1 z předchozího vztahu a $v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1$):

$$v_1^2 = \frac{2\kappa m_2^2 \left(\frac{1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{l} \right)}{m_1 + m_2}, \qquad v_2^2 = \frac{2\kappa m_1^2 \left(\frac{1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{l} \right)}{m_1 + m_2}.$$

Vzájemná rychlost je pak:

$$v = v_1 + v_2 = \sqrt{2\kappa (m_1 + m_2) \left(\frac{1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{l} \right)}.$$

Pokud jsou částice nekonečně malé, tak v okamžiku srážky platí $x_1 = x_2$ a rychlost zjevně vyjde nekonečná. Pokud uvažujeme koule o poloměrech r_1 a r_2, tak v okamžiku srážky platí $x_2 - x_1 = r_1 + r_2$ a výsledná vzájemná rychlost bude

$$v = \sqrt{2\kappa(m_1 + m_2)\left(\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{1}{l}\right)}.$$

Identickou úvahou jako v minulém příkladě dojdeme k tomu, že částice se srazí v těžišti, které zůstává na konstantní poloze $x_t = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$.

Poznámka: Stejný postup přes energii soustavy částic by šel využít i v minulém příkladě, který jsme spočetli „kinematickým“ způsobem.

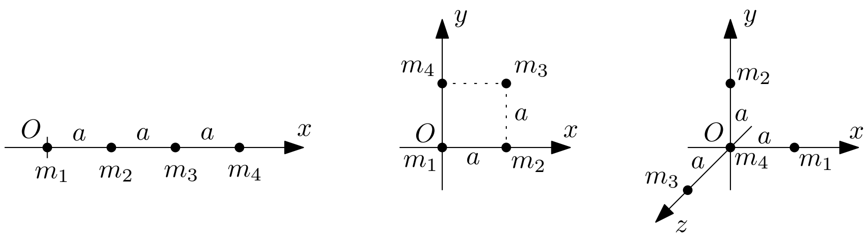
Poznámka: Vzájemná rychlost částic v závisí pouze na vzájemné vzdálenosti částic $x = x_2 - x_1$. Rovnici $\frac{dx}{dt} = v = v(x)$ můžeme separovat do tvaru $dt = \frac{dx}{v(x)}$ a tuto zintegrovat a získat tak vyjádření $t(x)$ – tedy času v závislosti na relativní poloze částic. Pomocí této funkce bychom snadno určili časy srážek pro $x = 0$, resp. $x = r_1 + r_2$. Výpočet tohoto integrálu je však daleko nad rámec výpočtů v tomto dokumentu.

Kapitola 4

Mechanika tuhého tělesa

4.1 Těžiště soustav bodů

Zadání: Čtyři částice o hmotnostech $m_1 = 1$ g, $m_2 = 2$ g, $m_3 = 3$ g, $m_4 = 4$ g, jsou spojeny nehmotnými pevnými tyčkami délky $a = 10\,\text{cm}$ do uspořádání na obrázku. Určete polohu těžiště těchto těles.



Řešení: a) Pro jednorozměrný případ určíme polohu těžiště jednoduše jako

$$x_s = \frac{\sum_{\alpha=1}^{4} m_\alpha x_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{4} m_\alpha} = \frac{(1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3)}{10}\, a = 2a = 20\,\text{cm}.$$

b) Nyní již musíme použít vektorové vztahy:

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{\alpha=1}^{4} m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{4} m_\alpha} = \frac{1(0,0) + 2(1,0) + 3(1,1) + 4(0,1)}{10}\, a = \frac{1}{10}(5,7)\, a = (5,10)\,\text{cm}.$$

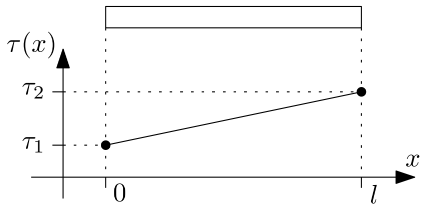
c) Zde je změna už jen v tom, že vektory mají nyní tři složky:

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{\alpha=1}^{4} m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{4} m_\alpha} = \frac{1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) + 4(0,0,0)}{10}\, a = \frac{1}{10}(1,2,3)\, a = (1,2,3)\,\text{cm}.$$

4.2 Nehomogenní tyčka

Zadání: Určete polohu těžiště tenké tyčky délky l, jejíž lineární hustota lineárně vzrůstá od τ_1 do τ_2.

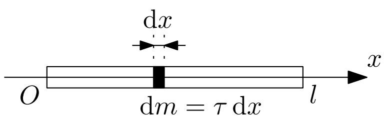
Řešení: Upozorněme, že obě slova „lineární“ jsou v zadání potřeba. První odráží to, že hustota je udávána na jednotku délky a nikoli na jednotku objemu. Hustota se dále z jednoho kraje tyčky na druhý mění lineárně, tzn. zavedeme-li osu x ve směru tyčky, tak funkce hustoty musí mít tvar $\tau(x) = ax + b$. Nechť je konec tyčky s hustotou τ_1 v počátku, druhý konec (s hustotou τ_2) na souřadnici $x = l$.



Pak platí $\tau(0) = \tau_1$ a $\tau(l) = \tau_2$. Řešením téhle jednoduché soustavy rovnic je hodnota lineární hustoty v obecném bodě tyčky:

$$\tau(x) = \frac{\tau_2 - \tau_1}{l}\, x + \tau_1.$$

Tyč si pomyslně rozdělíme na infinitesimálně malé díly hmotnosti $\mathrm{d}m(x) = \tau(x)\,\mathrm{d}x$.



Můžeme napřed určit celkovou hmotnost tyčky naintegrováním hmotností malých dílků tyče

$$m = \int_0^l \mathrm{d}m(x) = \int_0^l \frac{\tau_2 - \tau_1}{l}\, x + \tau_1\, \mathrm{d}x = \left[\frac{\tau_2 - \tau_1}{l}\, \frac{x^2}{2} + \tau_1 x\right]_0^l = l\left[\frac{\tau_2 - \tau_1}{2} + \tau_1\right].$$

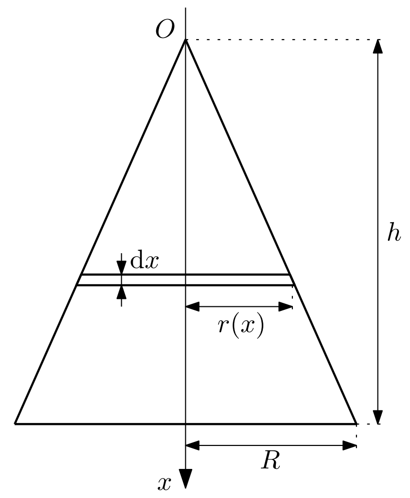
Polohu těžiště pak také určíme integrováním

$$x_s = \frac{1}{m}\int_0^l x\,\mathrm{d}m(x) = \frac{1}{m}\int_0^l x\left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{l}\, x + \tau_1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\int_0^l \frac{\tau_2 - \tau_1}{l}\, x^2 + \tau_1 x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{m}\left[\frac{\tau_2 - \tau_1}{l}\,\frac{x^3}{3} + \tau_1 \frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{1}{m} l^2 \left(\frac{1}{3}(\tau_2 - \tau_1) + \frac{1}{2}\tau_1\right) = \frac{l}{3}\,\frac{\tau_1 + 2\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}.$$

4.3 Těžiště kužele

Zadání: Určete polohu těžiště homogenního rotačního kužele.

Řešení: Nechť osa x splývá s osou symetrie válce, počátek je ve vrcholu válce a válec leží v kladných hodnotách osy x. Ze symetrie bude těžiště ležet zřejmě někde na této ose. Označme si výšku kužele h a poloměr jeho podstavy R. Kužel si pomyslně „rozsekáme“ na válce infinitezimální výšky $\mathrm{d}x$ a poloměru $r(x) = \frac{x}{h}R$, kde x je poloha konkrétního válce (poloměr válců se mění lineárně s x, tzn. $r(x) = ax + b$, řešením $r(0) = 0$ a $r(h) = R$ dospějeme k hledanému tvaru $r(x)$).



Hmotnost tohoto malého válce bude

$$\mathrm{d}m(x) = \rho\,\mathrm{d}V = \rho\,\pi r^2(x)\mathrm{d}x = \rho\,\pi\frac{x^2R^2}{h^2}\mathrm{d}x,$$

kde ρ je konstatní objemová hustota válce (válec je homogenní). Hmotnost válce pak můžeme vyjádřit jako

$$M = \int_0^h \mathrm{d}m(x) = \int_0^h \rho\,\pi\frac{x^2R^2}{h^2}\,\mathrm{d}x = \rho\,\pi\frac{R^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h\,\rho\,(= V\rho).$$

Nyní již můžeme integrováním určit polohu těžiště (složením těžišť jednotlivých válců):

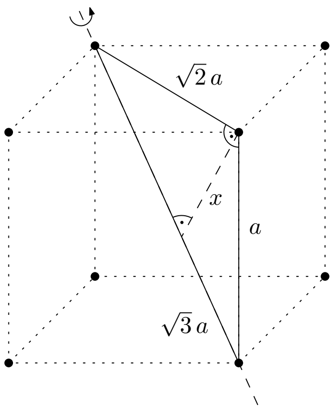
$$x_s = \frac{1}{M}\int_0^h x\,\mathrm{d}m(x) = \frac{1}{M}\int_0^h x\rho\,\pi\frac{x^2R^2}{h^2}\mathrm{d}x = \frac{R^2\rho\,\pi}{h^2M}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h = \frac{R^2\rho\pi h^2}{4M} = \frac{3}{4}h.$$

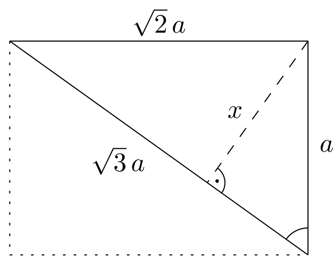
Těžiště se tedy nachází ve třech čtvrtinách výšky od *vrcholu kužele*.

4.4 Moment setrvačnosti krychle

Zadání: Částice téže hmotnosti m jsou umístěny v rozích krychle a spojeny pevnými nehmotnými tyčkami délky a. Určete moment setrvačnosti tohoto tělesa vzhledem k tělesové úhlopříčce krychle.

Řešení: Máme tedy vlastně tuhé těleso tvořené pouze osmi hmotnými body. Dva hmotné body, které leží na ose rotace, k momentu setrvačnosti nepřispějí. Příspěvek zbývajících šesti hmotných bodů bude ve všech případech stejný, a to $I_1 = mx^2$, kde x je kolmá vzdálenost bodu od osy rotace. Vzdálenost x určíme z následujícího pravoúhlého trojúhelníka. V rovině obsahující osu rotace a daný hmotný bod máme pravoúhlý trojúhelník, jehož strany jsou hrana krychle (délky a), stěnová úhlopříčka (délky $a\sqrt{2}$) a tělesová úhlopříčka (délky $a\sqrt{3}$), viz obrázek. Naše neznámá x je výškou tohoto trojúhelníka a z podobnosti trojúhelníků dostaneme $\frac{x}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}$, tedy $x = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a$. Pak dostáváme $I_1 = m\frac{2}{3}a^2$ a celkový moment setrvačnosti tělesa $I = 6I_1 = 4ma^2$.

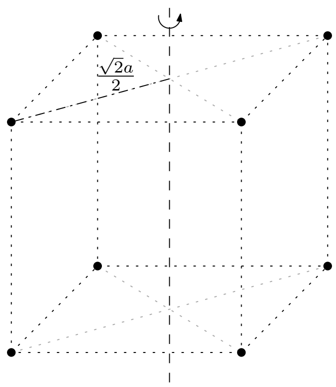




Poznámka: Dalším možným řešením je si uvědomit, že „krychle je koule“. Tzn. že pro krychli platí, že hlavní momenty setrvačnosti jsou stejné (jako u koule). Je to vidět z toho, že krychli je možné pootočit o násobky pravých úhlů okolo osy libovolné ze stěn – tím musí dojít k prohození hlavních momentů v tenzoru momentu setrvačnosti, ale jelikož vlivem symetrie krychle „zůstala stejná“, tak hlavní momenty se musí rovnat. Pokud jsou všechny hlavní momenty setrvačnosti stejné, znamená to, že moment setrvačnosti kolem libovolné osy je stejný jako hodnota hlavních momentů. Stačí si pak vybrat osu identickou s osou některé ze stěn a moment setrvačnosti (stejný pro rotaci okolo jakékoliv osy) pak ihned vyjde

$$I = 8\bar{I}_1 = 8m\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 = 4ma^2$$

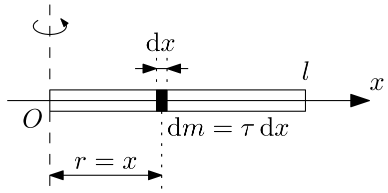
($\frac{\sqrt{2}a}{2}$ je polovina délky stěnové úhlopříčky).



4.5 Moment setrvačnosti tyčky

Zadání: Určete moment setrvačnosti tyčky délky l a hmotnosti m rotující kolem osy kolmé k tyčce a procházející a) jejím koncem, b) ve vzdálenosti $l/4$ od konce.

Řešení: a) Zvolme osu x tak, že leží ve směru tyčky, tyčka se nachází v kladných hodnotách a počátek souřadnic je na začátku tyčky. Lineární hustota tyčky je $\tau = \frac{m}{l}$. Malý kousek tyče na souřadnici x přispívá k celkovému momentu setrvačnosti malým příspěvkem $\mathrm{d}I = x^2 \mathrm{d}m = x^2 \tau \, \mathrm{d}x$, jelikož hodnota souřadnice x odpovídá právě vzdálenosti kousku tyče od osy rotace.

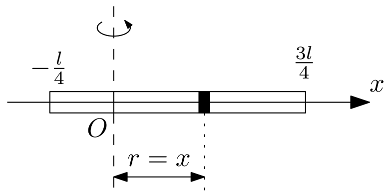


Nyní již jen naintegrujeme jednotlivé příspěvky $\mathrm{d}I(x)$:

$$I_a = \int_0^l \mathrm{d}I(x) = \int_0^l \tau x^2 \mathrm{d}x = \frac{m}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} m l^2.$$

V případě b) postupujeme obdobně, jen umístíme počátek do jedné čtvrtiny tyčky a integrujeme od $-l/4$ do $3l/4$, tedy

$$I_b = \int_{-l/4}^{3l/4} \tau x^2 \mathrm{d}x = \frac{m}{l} \frac{l^3}{3} \left(\frac{27}{64} + \frac{1}{64} \right) = \frac{7}{48} m l^2.$$



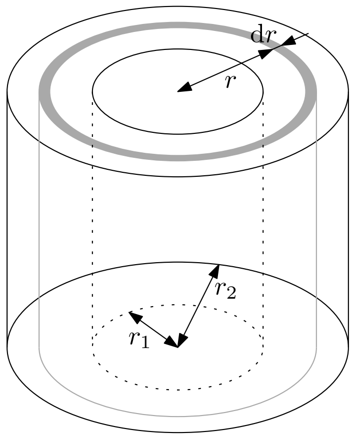
Řešení (Steinerova věta): Alternativně bychom mohli využít Steinerovu větu: $I = I_0 + ma^2$, kde I_0 je moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm a a je vzdálenost, o kterou posouváme osu z těžiště. Moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející těžištěm je $I_0 = \frac{1}{12} m l^2$ (můžeme si ho identickým postupem jako výše spočítat). Například pro případ a) by postup byl $I_a = I_0 + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) m l^2 = \frac{1}{3} m l^2$.

Poznámka: Steinerovu větu je možné použít pouze pro výpočet nového momentu setrvačnosti pomocí momentu setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm! Pokud bychom například chtěli přejít od I_a k I_b, pak nelze použít Steinerovu větu přímo! Viz: $I_b = \frac{7}{48} m l^2 \neq I_a + m \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{16}\right) m l^2 = \frac{17}{48} m l^2$. Pokud bychom přechod skutečně chtěli udělat pomocí Steinerovy věty, museli bychom napřed ze vztahu $I_a = I_0 + m \left(\frac{l}{2}\right)^2$ určit I_0 (pokud bychom ho neznali) a následně určit I_b jako $I_b = I_0 + m \left(\frac{l}{4}\right)^2$, tedy $I_b = I_a - m \left(\frac{l}{2}\right)^2 + m \left(\frac{l}{4}\right)^2$.

4.6 Moment setrvačnosti dutého válce

Zadání: Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního dutého válce o poloměrech r_1, r_2 a hmotnosti M vzhledem k jeho ose rotační symetrie.

Řešení: Vyjádřeme si napřed hustotu válce ze vztahu $M = \rho V = \rho h\pi(r_2^2 - r_1^2)$, kde h je výška válce a r_1, resp. r_2, je vnitřní, resp. vnější, poloměr. Pak máme $\rho = \frac{M}{h\pi(r_2^2 - r_1^2)}$. Nyní můžeme určit moment setrvačnosti integrací po válcových slupkách – pro ně je totiž vzdálenost hmoty od osy rotace konstantní. Infinitezimální tloušťka slupky nechť je $\mathrm{d}r$ a její hmotnosti je pak $\mathrm{d}m(r) = \rho\, 2\pi r h\, \mathrm{d}r$. Každá slupka přispívá k celkovému momentu setrvačnosti příspěvkem $\mathrm{d}I(r) = r^2 \mathrm{d}m(r)$.



Stačí již jen naintegrovat od vnitřního poloměru ke vnějšímu:

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}I(r) = \int_{r_1}^{r_2} r^2 \mathrm{d}m(r) = \int_{r_1}^{r_2} r^2 \rho\, 2\pi r h\, \mathrm{d}r = 2\rho\pi h \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{2}\pi h \rho (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_2^2).$$

Po dosazení za hustotu ρ pomocí M je výsledek

$$I = \frac{1}{2} M (r_1^2 + r_2^2).$$

Poznámka: Alternativně můžeme využít výsledek pro moment setrvačnosti plného válce $I_0 = \frac{1}{2} M r^2$. Nechť plný válec o poloměru r_1, resp. r_2, má hmotnost m_1, resp. m_2. Pomocí hustoty si tyto hmotnosti můžeme vyjádřit jako $m_{1,2} = \rho V_{1,2} = \rho\pi r_{1,2}^2 h$. Rozdíl příslušných momentů setrvačnosti je pak

$$I = \frac{1}{2} m_1 r_2^2 - \frac{1}{2} m_2 r_1^2 = \frac{1}{2}\rho\, \pi r_2^2 h\, r_2^2 - \frac{1}{2}\rho\, \pi r_1^2 h\, r_1^2 = \frac{1}{2}\rho\, \pi h (r_2^4 - r_1^4)$$

a máme tedy stejný výsledek.

Poznámka: To, že se ve výsledku kvadráty poloměrů sčítají může působit neintuitivně. Vypadá to, že když uděláme do válce větší díru, moment setrvačnosti se bude zvětšovat. Nesmíme ale zapomenout na to, že zároveň držíme hmotnost M konstantní a zvětšením r_1 vlastně jen odsouváme hmotu dál od osy rotace. V extrémním případě $r_1 = r_2 = r$ bychom dostali moment setrvačnosti obruče $I = Mr^2$. Pokud bychom skutečně kus válce uvnitř odebrali, zvětšil by se poloměr r_1, ale zároveň by se snížila hmotnost M, a ve výsledku by se zmenšil i moment setrvačnosti; jak je ostatně vidět z výsledku pro I zapsaného pomocí hustoty ρ.

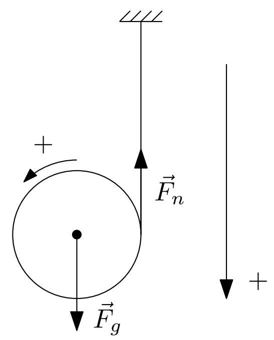
4.7 Válcový kulový setrvačník

Zadání: Je dán homogenní válec výšky h a poloměru podstavy R. Jaký musí být poměr h/R, aby tento válec byl kulovým setrvačníkem?

Řešení: Využijeme výsledky odvozené ve skriptech. Kulový setrvačník je takový, jehož všechny tři hlavní momenty setrvačnosti jsou shodné. Pro válec je moment setrvačnosti vůči ose válce $I_z = \frac{1}{2}MR^2$, kde M je hmotnost válce. V osách kolmých (procházejících těžištěm) to je $I_x = I_y = \frac{1}{4}M\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right)$. Požadavek $I_x = I_z$ nám dá $R^2 = \frac{h^2}{3}$, tedy $\frac{h}{R} = \sqrt{3}$.

4.8 Jojo

Zadání: Určete, s jakým zrychlením bude klesat k zemi (a opět stoupat) hračka zvaná jojo a jakou silou bude napínáno vlákno.



Řešení: Pohybové rovnice tuhého tělesa rotujícího kolem osy rotace, která nemění svůj směr, vypadají následovně:

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Ma = F, \qquad I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\varepsilon = N,$$

kde M je celková hmotnost tělesa, v, resp. a je translační rychlost, resp. zrychlení, tělesa, I je moment setrvačnosti vůči ose rotace, ω, resp. ε, je úhlová rychlost, resp. zrychlení, tělesa kolem osy rotace a N je celkový moment vnějších sil vůči ose rotace.

Podle obrázku považujeme jojo za válec. Zanedbáváme tedy fakt, že u reálného joja se nit namotává do drážky, tedy na menší poloměr. Jojo se bude jednak pohybovat dolů posuvným pohybem, jednak bude rotovat okolo svého středu. Výslednice vnějších sil F (dána rozdílem gravitační síly F_g a zatím neznámé napěťové síly ve vlákně F_n) a translační pohybová rovnice mají tvar:

$$F = F_g - F_n = mg - F_n, \qquad ma = mg - F_n,$$

kde jsme si kladný směr pohybu a sil zvolili směrem dolů.

Momenty jednotlivých sil F_α pro rotační pohybovou rovnici spočteme jako $N_\alpha = F_\alpha\, d_\alpha$, kde d_α je vzdálenost přímky, ve které síla „leží“, od osy rotace. Pro gravitační sílu je tato vzdálenost nulová (v homogenním gravitačním poli leží výslednice gravitační síly v těžišti) a tedy i příslušný moment. Pro napěťovou sílu je vzdálenost $d = r$, tedy poloměr joja. Zaveďme nyní kladný směr rotace joja za takový, kdy se jojo odvíjí a tedy klesá. Potom napěťová síla bude způsobovat roztáčení joja v kladném směru a do rotační pohybové rovnice ji dáme s kladným znaménkem:

$$N = F_n r, \qquad I\varepsilon = F_n r.$$

Posledním krokem k řešení je vyjádřit vazbu mezi rychlostí tělesa v a jeho rotací. Jojo poklesne vždy o takovou vzdálenost, jaká délka provázku se odmotá. Pro odmotání provázku délky x se musí jojo otočit o úhel $\varphi = 2\pi\frac{x}{o} = 2\pi\frac{x}{2\pi r} = \frac{x}{r}$, kde jsme označili obvod válce jako o. Máme tedy vztah $x = \varphi\, r$ (kladné znaménko plyne z toho, že máme kladné směry translačního a rotačního pohybu zavedené „shodně“ – otočení o kladný úhel způsobí translační pohyb v kladném směru). Jeho derivováním (s využitím toho, že r je konstantní) dostaneme $v = \omega\, r$ a $a = \varepsilon\, r$. Tím jsme dostali třetí potřebnou rovnici do soustavy rovnic:

$$ma = mg - F_n, \qquad I\varepsilon = F_n r, \qquad r\,\varepsilon = a,$$

kde neznámé jsou a, ε a F_n. Řešením této soustavy pro momentu setrvačnosti válce $I = \frac{1}{2}mr^2$ dostaneme

$$a = \frac{2}{3}g, \qquad F_n = \frac{1}{3}mg.$$

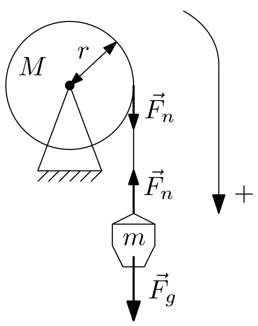
Alternativní řešení: Ekvivalentně můžeme uvažovat, že jojo rotuje kolem okamžité osy procházející vždy místem odvíjení nitě. Nyní bude rotaci zajišťovat gravitační síla momentem o velikosti mgr. Translační rovnice se nezmění a rotační rovnice bude mít tvar

$$I'\varepsilon = mgr,$$

kde I' je moment setrvačnosti válce vůči ose procházející okrajem válce. Tento získáme ze Steinerovy věty: $I' = I + mr^2$.

4.9 Vědro s rumpálem

Zadání: Určete, jakou rychlostí bude klesat vědro s vodou o hmotnosti m, jehož závěs se odvíjí z rumpálu hmotnosti M a poloměru r.



Řešení: Postup bude analogický podrobně popsanému postupu v příkladu 4.8. Na vědro působí tíhová síla velikosti mg a síla napětí provázku F_n (zatím neznámé velikosti). Máme tedy pohybovou rovnici

$$ma = mg - F_n,$$

kde jsme kladný směr zvolili směrem dolů. Dále je zde rumpál, který je roztáčen silou F_n a rotační pohybová rovnice tedy bude

$$I\varepsilon = rF_n,$$

kde $I = \frac{1}{2}Mr^2$ je moment setrvačnosti válce a kladný směr rotace je volen ve smyslu odmotávání lana s vědrem. Stejně jako v příkladu 4.8 je zde vazba odvíjení spojující úhlový pohyb rumpálu a posuvný pohyb vědra: $a = \varepsilon r$. Tím máme opět tři rovnice o třech neznámých a jednoduše vyjádříme

$$a = \frac{2m}{M + 2m}g.$$

Jelikož je zrychlení konstantní, rychlost v daném čase t bude

$$v(t) = \frac{2m}{M + 2m}gt$$

za předpokladu, že počáteční rychlost v čase $t = 0$ je nulová.

4.10 Kinetická energie rotačního pohybu

Zadání: Určete kinetickou energii obruče, plného válce a koule, které se valí po rovině postupnou rychlostí v.

Řešení: Pro osu rotace procházející těžištěm lze kinetickou energii tělesa rozložit na čistě translační T_{tr} a čistě rotační energii T_{rot}:

$$T = T_{tr} + T_{rot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

kde m je celková hmotnost tělesa, v je jeho translační rychlost, I je moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm a ω je úhlová rychlost rotačního pohybu.

Při valení tělesa neprokluzují, proto je translační a rotační pohyb svázán $v = \omega r$, kde r je poloměr daného objektu (odvození viz příklad 4.8). Dosazením $\omega = \frac{v}{r}$ do vyjádření pro kinetickou energii dostaneme:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}v^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)v^2.$$

Po dosazení příslušných momentů setrvačnosti: pro obruč $I = mr^2$, pro válec $I = \frac{1}{2}mr^2$ a pro kouli $I = \frac{2}{5}mr^2$ dostaneme výsledky:

$$T = mv^2, \qquad T = \frac{3}{4}mv^2, \qquad T = \frac{7}{10}mv^2.$$

Alternativní řešení: Je také možné uvažovat rotaci okolo okamžité osy v místě dotyku tělesa s rovinou, po které se valí. V daný okamžik má osa rotace nulovou translační rychlost a celá energie bude uložena v rotačním pohybu okolo osy vzdálené o vzdálenost r od těžiště. Ze Steinerovy věty pak bude nový moment setrvačnosti $I' = I + mr^2$ a kinetická energie bude[1] $T = \frac{1}{2} I' \frac{v^2}{r^2}$.

4.11 Chůze na kolotoči

Zadání: Na vodorovném homogenním kotouči hmotnosti M a poloměru R (kolotoči) stojí člověk hmotnosti m ve vzdálenosti r od svislé osy procházející středem kotouče, který se může otáčet bez tření. Jak velkou úhlovou rychlostí se bude otáčet kotouč, půjde-li člověk po kružnici poloměru r opsané kolem středu kotouče relativní rychlostí v vzhledem ke kotouči?

Řešení: Řešení této úlohy je založeno na zákonu zachování momentu hybnosti. Moment hybnosti je pro hmotné body $L = pr$, kde p je hybnost a r je vzdálenost přímky proložené vektorem rychlosti od osy otáčení (je to zcela analogické jako u momentu síly). Pro hmotný bod rotující ve vzdálenosti r obvodovou rychlostí v má tedy moment hybnosti velikost $L = mrv$. Pro rotující tuhé těleso je pak moment hybnosti dán jako $L = I\omega$.

Pro nulové vnější momenty sil se z druhé věty impulsové celková hybnost zachovává. Pokud je tedy kolotoč s člověkem na začátku v klidu, má nulový moment hybnosti. Jestliže se na něm člověk začne pohybovat na poloměru r rychlostí v vůči kolotoči, kolotoč se roztočí nějakou, zatím neznámou úhlovou rychlostí ω. Člověk pak bude mít vůči zemi obvodovou rychlost $v_o = v + r\omega$ a tedy moment hybnosti $L_{\text{č}} = m(v + r\omega)r$. Kolotoč bude mít moment hybnost $L_{\text{k}} = I\omega$. Zákon zachování momentu hybnosti dává

$$0 = L_{\text{č}} + L_{\text{k}} \quad \rightarrow \quad 0 = m(v + r\omega)r + I\omega.$$

Z toho plyne (po dosazení za $I = \frac{1}{2}MR^2$):

$$\omega = -\frac{mvr}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}$$

(znaménko minus plyne z toho, že jsme zavedli shodné kladné směry pro pohyb člověka a rotaci kolotoče).

[1]Nyní ovšem osa rotace neprochází těžistěm! V takovém případě obecně neplatí rozklad $T = T_{tr} + T_{rot}$. Obecný výraz pro kinetickou energii vypadá takto:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{R}') + \frac{1}{2}I'\omega^2,$$

kde $\vec{R}'$ a I' je polohový vektor těžiště a moment setrvačnosti vůči zvolené ose rotace. Pro okamžitou osu v místě dotyku s rovinou ale máme $\vec{v} = 0$, levý a prostřední člen vypadnou, takže skutečně máme $T = \frac{1}{2}I'\omega^2$.

4.12 Valení z kopce

Zadání: Určete rychlost postupného pohybu válce a koule, které se začnou valit po nakloněné rovině o sklonu α, a klesnou přitom o výšku h.

Řešení: Úlohy vyřešíme ze zákona zachování energie – potenciální energie při poklesu o výšku h o velikosti $U = mgh$ se přemění na kinetickou energii valení T. Vzorce pro kinetickou energii valivého pohybu jsme si odvodili v příkladu 4.10: $T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)v^2$, kde I je moment setrvačnosti tělesa vůči těžišti. Z rovnosti $U = T$ vyjádříme

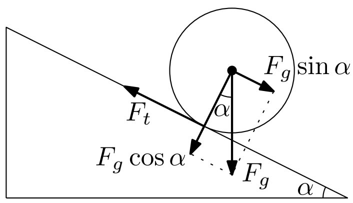
$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{r^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mr^2}}},$$

tedy rychlost je menší, než kdyby těleso jen klouzalo a nerotovalo. Po dosazení momentů setrvačnosti válce $I = \frac{1}{2}mr^2$ a koule $I = \frac{2}{5}mr^2$ máme

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}hg}, \qquad v = \sqrt{\frac{10}{7}hg}.$$

4.13 Valení z kopce v čase

Zadání: Určete rychlost postupného pohybu válce a koule, které se začnou valit po nakloněné rovině o sklonu α, za stejnou dobu t.



Řešení: Nyní již nestačí spoléhat na zákon zachování energie, jelikož do hry vstupuje čas. Použijeme tedy pohybové rovnice tuhého tělesa. Popišme pohyb jako rotaci kolem okamžité osy procházející bodem doteku. Průmět gravitační síly, který způsobuje roztáčení tělesa, je $F_g \sin\alpha$ (viz obrázek) a rameno síly je r. Naproti tomu třecí síla F_t k rotaci nepřispívá (rameno síly je nulové). Rotační pohybová rovnice pak má tvar

$$I'\varepsilon = mgr \sin\alpha,$$

kde I' je moment setrvačnosti vůči ose rotace v místě dotyku a $(mg \sin\alpha)r$ je moment průmětu gravitační síly. Ze Steinerovy věty $I' = I + mr^2$, kde I je moment setrvačnosti vůči ose v těžišti. Jelikož se válec valí bez prokluzovaní, platí $a = r\varepsilon$. Po vyjádření z rotační pohybové rovnice dostaneme

$$a = \frac{mgr^2 \sin\alpha}{I'} \quad \xrightarrow{\int \mathrm{d}t} \quad v = \frac{mgr^2 \sin\alpha}{I'}t.$$

Pro válec je $I = \frac{1}{2}mr^2$ a $I' = \frac{3}{2}mr^2$; pro kouli je $I = \frac{2}{5}mr^2$ a $I' = \frac{7}{5}mr^2$. Po dosazení: $v(t) = \frac{2}{3}gt\sin\alpha$, resp. $v(t) = \frac{5}{7}gt\sin\alpha$.

Velikost třecí síly bychom dostali z translační pohybové rovnice, která je tvaru

$$ma = mg\sin\alpha - F_t \quad \longrightarrow \quad F_t = m(g\sin\alpha - a) = mg\sin\alpha\left(1 - \frac{mr^2}{I'}\right).$$

Pro válec máme $F_t = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$ a pro kouli $F_t = \frac{2}{7}mg\sin\alpha$.

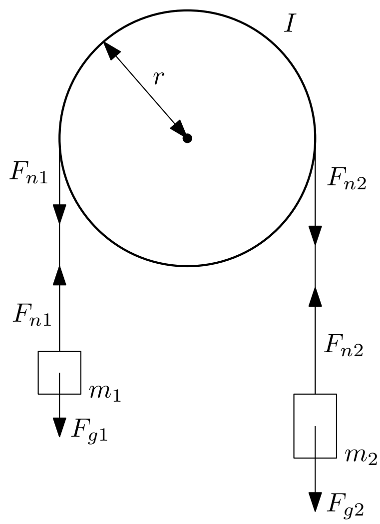
Alternativní řešení: Při uvažování rotace kolem těžiště vyjdou translační a rotační pohybové rovnice následovně:

$$ma = mg\sin\alpha - F_t, \qquad I\varepsilon = F_t\, r,$$

kde I je moment setrvačnosti vůči těžišti. Po dosazení valivé vazby $a = r\varepsilon$ a řešení soustavy vyjdou výsledky jako výše.

4.14 Atwoodův padostroj

Zadání: Přes kladku představující kotouč o momentu setrvačnosti I jsou na nehmotném závěsu zavěšena dvě břemena, s jedné strany břemeno hmotnosti m_1, z druhé strany břemeno o hmotnosti m_2. Závěs na kladce neprokluzuje. S jakým zrychlením bude klesat těžší břemeno?



Řešení: Tento příklad je obdobou příkladu 2.1, kde jsme uvažovali nehmotnou kladku (nebo prokluzování vlákna). Síly působící na jednotlivá tělesa jsou znázorněné na obrázku. Za chvíli se přesvědčíme, že napěťové síly v levé a pravé části budou různé.

Zvolme „jednotný“ kladný směr pohybu daný pohybem vlákna jedním směrem – tzn. například kladný směr levého tělesa míří vzhůru, kladný směr rotace kladky míří po směru hodinových ručiček a kladný směr pravého tělesa míří dolů. Pak pohybové rovnice (pro první a druhé těleso a rotační rovnice pro kladku) vypadají následovně:

$$m_1 a_1 = F_{n1} - m_1 g, \qquad m_2 a_2 = m_2 g - F_{n2}, \qquad I\varepsilon = F_{n2} r - F_{n1} r.$$

Znaménka momentů sil v rotační rovnici jsou dané tím, že napěťová síla F_{n2} se snaží kladku roztočit v kladném směru a síla F_{n1} naopak ve směru záporném. Tělesa jsou spojena vláknem, pro jejich zrychlení tedy platí $a_1 = a_2 \overset{\text{ozn.}}{=} a$. Vlákno na kladce neprokluzuje, tedy platí $a = r\varepsilon$. Kladné směry jsme zavedli tak, že ve všech těchto vazbách vycházejí kladná znaménka.

Z rotační pohybové rovnice zároveň vidíme, proč napětí na levé a pravé straně jsou obecně různá. Pokud by nebyla, kladka by se vůbec nemohla roztočit.

Máme tedy soustavu tří rovnic pro neznámé a, F_{n1} a F_{n2} (za ε jsme dosadili z vazby $a = r\varepsilon$):

$$m_1 a = F_{n1} - m_1 g, \qquad m_2 a = m_2 g - F_{n2}, \qquad I\frac{a}{r} = F_{n2} r - F_{n1} r.$$

Tuto vyřešíme pro a s výsledkem:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}}.$$

4.15 Valení z kopce v čase podruhé

Zadání: Po nakloněné rovině svírající s vodorovnou rovinou úhel α se valí bez prokluzování plný homogenní válec. Určete a) velikost síly smykového tření válce na nakloněné rovině, b) maximální úhel α, při němž se válec bude ještě valit bez prokluzování, je-li koeficient smykového tření f.

Řešení: Otázka a) je vyřešená již v příkladu 4.13 – pro válec vyjde $F_t = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$. Třecí síla je vyvolána tlakovou silou velikosti $F_{\text{tlak}} = mg\cos\alpha$ a maximální hodnota třecí síly (před tím, než by válec začal prokluzovat) tedy je $F_t = fF_{\text{tlak}} = mgf\cos\alpha$. Pro nalezení maximální úhlu vyjdeme z požadavku $\frac{1}{3}mg\sin\alpha = mgf\cos\alpha$, odkud $\operatorname{tg}\alpha = 3f$.

4.16 Střelba do tyčky

Zadání: Homogenní dřevěná tyč délky $l = 40$ cm a hmotnosti $M = 1$ kg se může otáčet kolem osy, která je k ní kolmá a prochází těžištěm. Na konec tyče narazí střela hmotnosti $m = 10$ g rychlostí $v = 200$ m.s^{-1} ve směru kolmém k ose i tyči. Určete úhlovou rychlost ω, kterou nabude tyč, jestliže v ní střela uvázne.

Řešení: K určení výsledné úhlové rychlosti ω použijeme zákon zachování momentu hybnosti (energie se při srážce nezachovává, nejedná se o pružnou srážku). Na začátku se tyč nepohybuje a moment hybnosti střely vůči ose procházející těžištěm tyče je $L = mv\frac{l}{2}$.

Po srážce se střela společně s tyčí roztočí úhlovou rychlostí ω, jejich moment hybnosti bude $L = I_c\,\omega$, kde I_c je celkový moment setrvačnosti tyče s uvízlou střelou. Tento je dán součtem jednotlivých momentů setrvačnosti, tedy

$$I_c = I_{\text{tyč}} + I_{\text{střela}} = \frac{1}{12}Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Zákon zachování hybnosti tedy má tvar

$$mv\frac{l}{2} = \left[\frac{1}{12}Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega,$$

z něhož již snadno vyjádříme výslednou úhlovou rychlost:

$$\omega = \frac{mvl}{2I_c} = \frac{6mv}{(M+3m)l} \doteq 29,1\ \text{m.s}^{-1}.$$

4.17 Rotační balistické kyvadlo

Zadání: Jakou rychlostí musí narazit střela hmotnosti m kolmo na spodní konec svisle zavěšené tyče hmotnosti M a délky l, aby ji vychýlila o úhel 90°? Střela v tyči uvízne.

Řešení: Nejprve proběhne proces analogický tomu v předchozím příkladu, tedy nepružná srážka. Opět se bude zachovávat moment hybnosti, ale díky posunuté ose rotace bude moment hybnosti střely $L = mvl$ a moment setrvačnosti tyčky s uvízlou střelou

$$I_c = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 + ml^2 = l^2\left(\frac{M}{3} + m\right),$$

kde druhý člen vznikne použitím Steinerovy věty. Zákon zachování momentu hybnosti tedy dává $mvl = I_c\omega$, tedy $v = \frac{I_c\omega}{ml}$.

Po srážce již můžeme použít zákon zachování energie, kdy se kinetická energie pohybu kyvadla T se střelou přemění na potenciální U. Kinetická energie je $T = \frac{1}{2}I_c\,\omega^2$. Celková potenciální energie je součtem potenciálních energií jednotlivých těles, v gravitačním poli je potenciál $U = mgh$ a pro tuhé těleso platí, že potenciální energie je dána polohou těžiště. Při vychýlení o pravý úhel střela vystoupá o l a těžiště tyče vystoupá o $\frac{l}{2}$. Potenciál energie pak je

$$U = Mg\frac{l}{2} + mgl.$$

Z rovnosti $T = U$ vyjádříme potřebnou úhlovou rychlost po srážce $\omega = \sqrt{\frac{(M+2m)gl}{I_c}}$. Nyní stačí dosadit ω do vzorce pro rychlost střely a dostáváme:

$$v = \frac{1}{l}\sqrt{gl(M+2M)\left(\frac{M}{3} + m\right)}.$$

4.18 Fyzické kyvadlo

Zadání: Tenká homogenní tyč hmotnosti M a délky l kývá kolem osy, která je k ní kolmá a prochází jejím horním koncem. a) Určete periodu malých kyvů. b) Existuje na tyči místo, do kterého můžeme připevnit těleso malých rozměrů (hmotný bod) o značné hmotnosti, aby se doba kyvu nezměnila? Kde?

Řešení: Perioda malých kmitů fyzického kyvadla se určí podle vzorce

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgx}},$$

kde I je moment setrvačnosti vůči ose procházející závěsem kyvadla a x je vzdálenost závěsu od těžiště.

Pro výpočet tedy stačí vzít moment setrvačnosti určený ze Steinerovy věty: $I = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2$, vzdálenost závěsu od těžiště je $x = \frac{l}{2}$. Výsledná perioda kmitů pak je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

(doba kyvu je pak polovinou periody kmitů).

U fyzického kyvadla je důležitý pojem tzv. *redukované délky* l_r. Jedná se o takovou délku matematického kyvadla, které bude mít stejnou periodu jako dané fyzické kyvadlo. Vyjádření pro l_r snadno získáme porovnáním vzorce pro periodu fyzického kyvadla se vzorcem pro periodu matematického kyvadla $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$, vidíme tedy, že

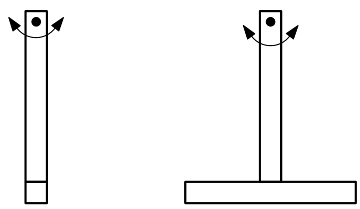
$$l_r = \frac{I}{mx}.$$

Pro naše konkrétní kyvadlo máme $l_r = \frac{2}{3}l$. Je to zároveň odpověď na druhou otázku zadání. Pokud umístíme hmotný bod do této vzdálenosti od závěsu, bude mít periodu kmitání stejnou jako fyzického kyvadla a nijak tak tedy dobu kyvu nezmění.

4.19 Kývající se T

Zadání: Fyzické kyvadlo hmotnosti M je vytvořeno ze dvou stejných tyčí délky l spojených do tvaru T. Přitom může kývat zavěšeno za spodní konec dvěma způsoby: s osou otáčení a) v rovině kolmé k rovině téčka, b) v rovině téčka (viz obrázek). Určete periodu malých kyvů v těchto případech.

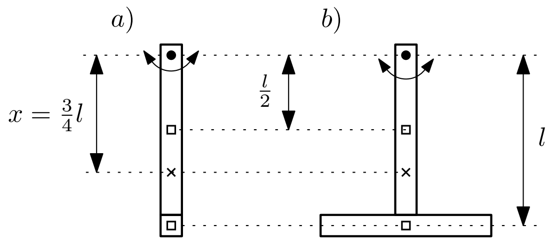
a) *b)*



Řešení: Pro určení periody malých kmitů tohoto fyzického kyvadla musíme určit moment setrvačnosti vůči ose procházející závěsem I a vzdálenost závěsu od těžiště x. Perioda pak bude $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{gmx}}$, kde $l_r = \frac{I}{mx}$ je tzv. redukovaná délka (viz také předchozí příklad) a m je celková hmotnost kyvadla (zde M, tedy hmotnost jednotlivých tyčí je $\frac{M}{2}$).

Určíme napřed vzdálenost těžiště od osy otáčení x jako hmotnostmi vážený průměr poloh těžišť jednotlivých tyčí:

$$x = \frac{\frac{M}{2}\frac{l}{2} + \frac{M}{2}l}{M} = \frac{3}{4}\,l.$$



Puntík označuje polohu osy otáčení, křížek polohu těžiště celého téčka a čtverečky označují polohy těžišť jednotlivých tyčí.

V případě a) bude moment setrvačnosti

$$I_1 = \left(\frac{1}{12}\frac{M}{2}l^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\right) + \left(0 + \frac{M}{2}l^2\right) = \frac{2}{3}Ml^2,$$

kde jsme celkový moment setrvačnosti získali jako součet momentů jednotlivých tyčí, které jsme získali pomocí Steinerových vět (nula v druhé Steinerově větě plyne z toho, že se spodní tyč otáčí okolo své osy, takže má nulový moment setrvačnosti). Tím dostaneme redukovanou délku kyvadla jako $l_r = \frac{I_1}{2Mx} = \frac{8}{9}l$ a periodu malých kmitů $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{16\,l}{18g}}$.

V případě b) postupujeme stejně, moment setrvačnosti vyjde

$$I_2 = \left(\frac{1}{12}\frac{M}{2}l^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{12}\frac{M}{2}l^2 + \frac{M}{2}l^2\right) = \frac{17}{24}Ml^2,$$

odkud dojdeme k $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{17\,l}{18g}}$.

4.20 Kývající se kotouč

Zadání: Plný homogenní kotouč poloměru $r = 10$ cm se kývá kolem osy, která prochází jeho okrajem a je kolmá k **rovině** kotouče. Určete redukovanou délku tohoto kyvadla.

Řešení: Moment setrvačnosti určíme ze Steinerovy věty:

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2,$$

kde $\frac{1}{2}Mr^2$ je moment setrvačnosti kotouče vůči ose kolmé na rovinu kotouče procházející těžištěm. Redukovaná délka je $l_r = \frac{I}{Mx} = \frac{3}{2}r = 15$ cm (x je vzdálenost závěsu od těžiště, zde $x = r$).

Poznámka: V zadání pravděpodobně místo „kolmá k ose kotouče" má být „kolmá k rovině kotouče" (zde zadání s „rovinou"). Pak vyjde výsledek uvedený ve skriptech.

Kapitola 5

Mechanika kontinua

5.1 Deformace tyče

Zadání: Kovová tyč délky $l_0 = 1$ m a průřezu $S = 4$ cm^2 je deformována tahem silou $F = 800$ N. Přitom se prodlouží o $\Delta l = 10^{-5}$ m. Určete Youngův modul materiálu tyče a podle tabulek odhadněte, z jakého materiálu by tyč mohla být.

Řešení: Pro mnohé materiály je (alespoň v oblasti nižších napětí) relativní prodloužení při deformaci tahem lineárně závislé na napětí σ. Konstanta lineární úměrnosti je převrácená hodnota Youngova modulu pružnosti E. Platí tedy

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\sigma \quad \longrightarrow \quad E = \frac{l_0}{\Delta l}\sigma.$$

Napětí v tyči určíme jako $\sigma = \frac{F}{S}$ a dosazením dostaneme

$$E = \frac{F}{S}\frac{l_0}{\Delta l} = 2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa}.$$

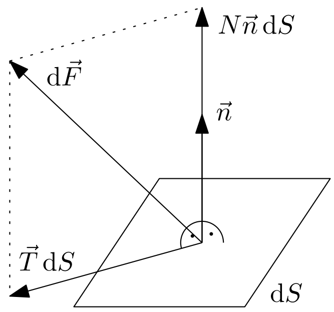
5.2 Tenzor napětí

Zadání: Je dán tenzor napětí v určitém bodě pružného tělesa (údaje v Pa):

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 500 & 500 & 800 \\ 500 & 0 & -750 \\ 800 & -750 & -300 \end{pmatrix}.$$

Určete tečné a normálové napětí působící na plošku s normálou $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Řešení: Tenzor napětí σ_{ij} nám umožňuje vypočítat plošnou sílu $\mathrm{d}\vec{F}$ působící na libovolně orientovanou myšlenou malou plošku $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S$ v daném místě tělesa ($\vec{n}$ je jednotkový normálový vektor k plošce).



Normováním této síly na jednotku plochy dostaneme tzv. *vektor napětí* $\vec{\mathcal{T}} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}S}$. Složky vektoru napětí $\mathcal{T}_i$ a složky plošné síly $\mathrm{d}F_i$ se spočtou

$$\mathcal{T}_i = \sigma_{ij} n_j, \qquad \mathrm{d}F_i = \sigma_{ij} n_j \mathrm{d}S;$$

nebo zapsáno maticově: $\vec{\mathcal{T}} = \sigma\,\vec{n}$, $\mathrm{d}\vec{F} = \sigma\,\mathrm{d}\vec{S}$. V našem konkrétním případě vyjde vektor napětí následovně:

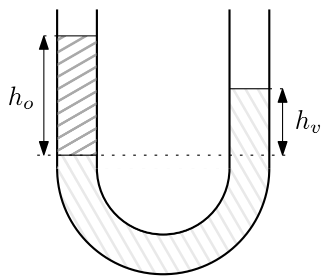
$$\vec{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 500 & 500 & 800 \\ 500 & 0 & -750 \\ 800 & -750 & -300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1066 \\ -280 \\ -187 \end{pmatrix} \text{ Pa.}$$

Napětí ve směru normály k ploše N je pak velikostí průmětu vektoru napětí $\vec{\mathcal{T}}$ do směru daného normálovým vektorem $\vec{n}$ (tedy směru kolmého k plošce). Určíme ho jednoduše pomocí skalárního součinu $N = \vec{\mathcal{T}} \cdot \vec{n} = 260$ Pa. Napětí ve směru tečném na plošku je pak velikost průmětu $\vec{\mathcal{T}}$ do roviny plošky a spočteme ho z Pythagorovy věty jako $T = \sqrt{\mathcal{T}^2 - N^2} = 1087$ Pa.

Normálové napětí N představuje tlak na danou plošku, tečné napětí T představuje smyk plošky – tečné napětí „tahá plošku stranou“.

5.3 Spojené nádoby

Zadání: V jednom rameni spojených nádob je voda s hustotou ρ_v, ve druhém olej. Výška vody nad společným rozhraním obou kapalin je $h_v = 4,5$ cm, oleje $h_o = 5,0$ cm. Určete hustotu oleje ρ_o.



Řešení: Vzorec pro hydrostatický tlak sloupce kapaliny o výšce h a hustotě ρ je $p = \rho h g$. Tlak, kterým působí olej na rozhraní s vodou, je $p_o = \rho_o g h_o$. Dále tlak vody nacházející se nad úrovní rozhraní je $p_v = \rho_v g h_v$. Tyto dva tlaky se musí rovnat:

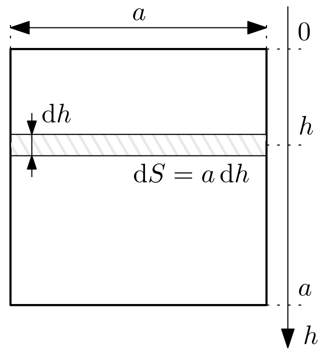
$$p_v = p_o \quad \longrightarrow \quad \rho_v g h_v = \rho_o g h_o.$$

Dostáváme tedy $\rho_o = \frac{h_v}{h_o}\rho_v = 900$ kg.m^{-3}, kde jsme použili hodnotu $\rho_v = 1000$ kg.m^{-3}.

5.4 Akvárium

Zadání: Jakou výslednou silou působí voda na čtvercovou stěnu akvária, je-li délka stěny a?

Řešení: Hydrostatický tlak kapaliny v hloubce h a hustotě ρ je $p = \rho g h$. Z definice tlaku spočteme sílu na působící plochu S jako $F = pS$. Tlak se ovšem s hloubkou mění, rozdělme si tedy stěnu akvária na malé vodorovné pruhy šířky dh.



Tento má plochu d$S = a\,$dh, tedy příspěvek k celkové síle (v závislosti na hloubce h) bude

$$\mathrm{d}F(h) = p(h)\mathrm{d}S = \rho g h\, a \mathrm{d}h.$$

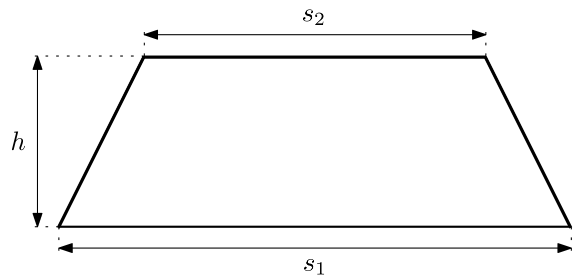
Celkovou sílu určíme integrováním příspěvků síly podél celé stěny akvária:

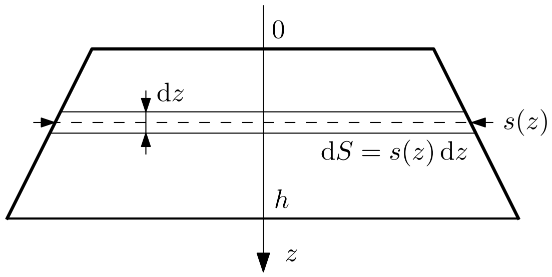
$$F = \int_0^a \mathrm{d}F(h) = \int_0^a \rho g h\, a \mathrm{d}h = \rho g a \int_0^a h\,\mathrm{d}h = \frac{1}{2}\rho g a^3.$$

5.5 Přehrada

Zadání: Jakou výslednou silou působí voda na říční přehradu tvaru lichoběžníka o základnách $s_1 = 10$ m (dolní), $s_2 = 15$ m (horní) a výšce $h = 5$ m. V jaké hloubce leží působiště výsledné síly?

Řešení: Nejprve spočtěme celkovou sílu F působící na stěnu přehrady. Postup bude velmi podobný postupu v příkladu 5.4. Zaveďme souřadnici z směřující svisle dolů s počátkem na vrcholu přehrady; tato souřadnice tedy označuje aktuální hloubku v přehradě. Hydrostatický tlak působící na přehradu pak bude $p(z) = \rho g z$.





Šířka přehrady $s(z)$ s hloubkou lineárně klesá jako

$$s(z) = s_2 - (s_2 - s_1)\frac{z}{h}$$

(určíme z řešení rovnic: $s(z) = ax + b$, $s(0) = s_2$, $s(h) = s_1$). Příspěvek síly $\mathrm{d}F$ působící na proužek přehrady plochy $\mathrm{d}S = s(z)\mathrm{d}z$ v hloubce z vyjádříme jako

$$\mathrm{d}F(z) = p(z)\mathrm{d}S(z) = \rho g z \left(s_2 - (s_2 - s_1)\frac{z}{h}\right)\mathrm{d}z.$$

Celkovou sílu získáme naintegrovaním příspěvků přes celou hloubku přehrady:

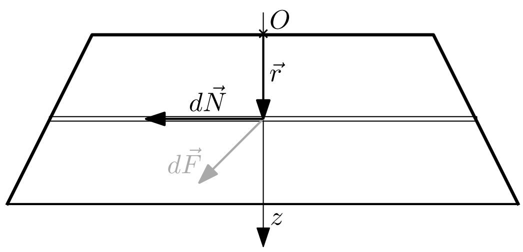
$$F = \int_0^h \mathrm{d}F(z) = \int_0^h \rho g z \left(s_2 - (s_2 - s_1)\frac{z}{h}\right)\mathrm{d}z = \ldots = \frac{1}{6}\rho g h^2 \left(2s_1 + s_2\right).$$

Působiště síly je takové místo v tělese o polohovém vektoru $\vec{R}$ (zde tak neoznačujeme těžiště!), že výsledný moment sil $\vec{N}$ se dá zapsat jednoduše jako $\vec{N} = \vec{R} \times \vec{F}$. V případě, že si pak zvolíme soustavu souřadnou s počátkem v působišti síly, vyjde nám výsledný moment sil vůči tomuto počátku nulový. Pokud tedy těleso „podepřeme" v působišti síly, nebudou mít síly působící na těleso otáčivé účinky.

Spočítejme nyní celkový moment vnějších sil $\vec{N}$. Ten je dán jako součet (integrál) všech dílčích momentů

$$\vec{N} = \int \mathrm{d}\vec{N} = \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}$$

přes jednotlivé části tělesa ($\vec{r}$ jsou polohové vektory kousků tělesa na něž působí malá síla $\mathrm{d}\vec{F}$). Ze symetrie úlohy víme, že příspěvky k momentům sil snažící se otáčet přehradu okolo osy z se všechny vyruší. Zbydou nám pouze momenty otáčející přehradu okolo vodorovné osy. Bude tedy stačit spočítat moment od síly působící na vodorovný pruh přehrady malé šířky a tyto nasčítat.



Všechny příspěvky $\mathrm{d}\vec{N}$ budou mířit stejným směrem (dle pravidla pravé ruky, viz obrázek), stačí nám tedy nasčítat velikosti těchto příspěvků

$$N = \int \mathrm{d}N, \quad \text{kde} \quad \mathrm{d}N = |\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}| = |\vec{r}|\,|\mathrm{d}\vec{F}| = z\,\mathrm{d}F,$$

kde jsme nahradili $|\vec{r}| = |(0,0,z)| = z$. Vlastní integrál pak je

$$N = \int_0^h \mathrm{d}N(z) = \int_0^h z\,\mathrm{d}F(z) = \int_0^h \rho g z^2 \left(s_2 - (s_2 - s_1)\frac{z}{h}\right) \mathrm{d}z = \ldots = \frac{1}{12}\rho g h^3 (3s_1 + s_2).$$

Jak už bylo řečeno, ze symetrie úlohy musí působiště ležet ve vodorovném středu přehrady – otáčivé účinky sil od levé a pravé poloviny se vždy přesně vyruší. Označme $\vec{R} = (0,0,z_p)$, potom $N = |\vec{R} \times \vec{F}| = z_p F$ ($\vec{R}$ je kolmé na $\vec{F}$) a poloha působiště pak je

$$z_p = \frac{N}{F} = \frac{3s_1 + s_2}{2s_1 + s_2}\,\frac{h}{2}.$$

A jelikož souřadnice z má počátek na hladině, je z_p hledaná hloubka působiště.

5.6 Archimedes

Zadání: Na plnou kouli působí ve vzduchu tíhová síla 390 N, na tutéž kouli ponořenou do vody síla 340 N. Jaký je objem koule a z jaké látky je koule zhotovena?

Řešení: Vztlaková síla působící na těleso o objemu V ponořené do tekutiny hustoty ρ_k je dána Archimedovým vzorcem $F_{vz} = V\rho_k\,g$. Provedeme výpočet pro obecný případ ponoření tělesa do dvou různých tekutin. V první tekutině bude výsledná síla působící na těleso

$$F_1 = mg - V\rho_1 g = V\rho\,g - V\rho_1 g = Vg(\rho - \rho_1),$$

kde ρ je hustota samotného tělesa a ρ_1 hustota první tekutiny. Analogicky pro druhou tekutinu $F_2 = Vg(\rho - \rho_2)$. Odečtením těchto sil a úpravou pak dostaneme

$$V = \frac{F_1 - F_2}{g(\rho_2 - \rho_1)},$$

a pokud zanedbáme hustotu vzduchu, $\rho_1 = 0$, a uvažujeme hustotu vody $\rho_2 = \rho_v = 1000\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, vztah se zjednoduší na

$$V = \frac{F_1 - F_2}{g\rho_v} = 5{,}1\,\mathrm{l}.$$

Hustota tělesa je $\rho = \frac{m}{V}$, hmotnost tělesa je $m = \frac{F_{12} + V\rho_{12} g}{g}$ (můžeme ji vyjádřit pomocí F_1, ρ_1 anebo F_2, ρ_2), tedy

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{F_{12} + V\rho_{12} g}{g}}{V} = \frac{F_{12}}{gV} + \rho_{12} = \frac{F_{12}}{F_1 - F_2}(\rho_2 - \rho_1) + \rho_{12}.$$

Vybereme-li si nyní vyjádření pomocí F_1 a ρ_1 a opět položíme $\rho_1 = 0$ a $\rho_2 = \rho_2$, máme

$$\rho = \frac{F_1}{F_1 - F_2}\rho_v = 7800\,\mathrm{kg.m^{-3}},$$

což odpovídá například železu (anebo gadoliniu).

5.7 Nerovnoramenné váhy

Zadání: Na koncích nerovnoramenné páky jsou zavěšena dvě homogenní tělesa zhotovená a) z téže látky, b) z různých látek. Ve vzduchu jsou obě tělesa v rovnováze. Zůstane rovnováha zachována, ponoříme-li obě tělesa do nádoby s vodou?

Řešení: Jestliže jsou ramena páky na začátku v rovnováze, platí, že momenty sil od jednotlivých těles jsou stejné: $F_1 l_1 = F_2 l_2$, kde $F_1 = m_1 g, F_2 = m_2 g$ jsou tíhové síly a l_1, l_2 délky ramen vah. Zanedbáváme vztlakovou sílu vzduchu. Ponořením do vody se k tíhovým silám přidá síla vztlaková, $F_{vz} = V \rho_k\, g$, a výslednice sil bude

$$F_1' = F_1 - V_1 \rho_v g, \qquad F_2' = F_2 - V_2 \rho_v g,$$

kde ρ_v je hustota vody. Aby byla rovnováha zachována i po ponoření, musí platit:

$$\begin{aligned} F_1' l_1 &= F_2' l_2 \\ F_1 l_1 - V_1 \rho_v g l_1 &= F_2 l_2 - V_2 \rho_v g l_2 \\ -V_1 \rho_v g l_1 &= -V_2 \rho_v g l_2 \\ V_1 l_1 &= V_2 l_2. \end{aligned}$$

Pokud právě získanou rovnicí podělíme s rovnicí $m_1 l_1 = m_2 l_2$ (získanou z $F_1 l_1 = F_2 l_2$ vydělením g), dostaneme $\rho_1 = \rho_2$. Rovnováha tedy zůstane zachována, pouze pokud se rovnají hustoty materiálů, ze které jsou tělesa vyrobena.

5.8 Redukce vážení na vakuum

Zadání: Předmět o hustotě ρ je na vzduchu vyvážen na rovnoramenných váhách mosazným závažím o hmotnosti m_z. Stanovte skutečnou hmotnost předmětu m, je-li hustota mosazi ρ_z a hustota vzduchu v místě a okamžiku vážení ρ_v.

Řešení: Tělesa ve vzduchu jsou nadlehčována vztlakovou silou $F_{vz} = V \rho_v g$, kde V je objem příslušného tělesa. Pro rovnoramenné váhy v rovnováze platí, že výslednice sil působící na tělesa se rovnají:

$$m_z g - V_z \rho_v g = m g - V \rho_v g,$$

kde V_z je objem závaží a V je objem předmětu. Pokud dosadíme za $V_z = \frac{m_z}{\rho_z}$ a $V = \frac{m}{\rho}$, po úpravě dostaneme

$$m = \frac{1 - \frac{\rho_v}{\rho_z}}{1 - \frac{\rho_v}{\rho}} m_z.$$

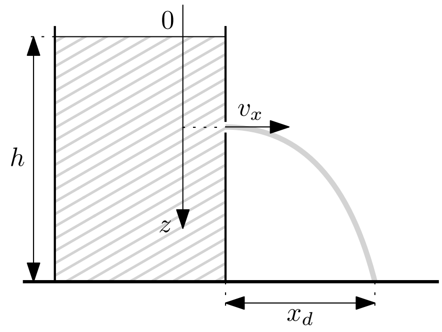
Pokud předpokládáme, že $\rho_v \ll \rho$, můžeme použít přibližný vztah $\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x$, tedy

$$m \simeq \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_z}\right)\left(1 + \frac{\rho_v}{\rho}\right) m_z \simeq \left(1 - \rho_v \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_z}\right)\right) m_z,$$

kde jsme ještě zanedbali člen druhého řádu v poměru hustot, $-\frac{\rho_v^2}{\rho \rho_z}$, jelikož také $\rho_v^2 \ll \rho_v$.

5.9 Vytékající voda

Zadání: Nádoba na stole je naplněna vodou do výšky h. Dokažte, že voda z každého otvoru ve stěně nádoby dopadá na stůl se stejnou rychlostí a určete ji. V jaké výšce musí být otvor, aby proud vody z něho vytékající dopadl na stůl nejdále od nádoby?



Řešení: Vodorovná výtoková rychlost vody v okamžiku opuštění nádoby je dána Torricelliho vztahem $v_x = \sqrt{2gz}$, kde z je hloubka, ve které se otvor nachází. Svislá složka rychlosti v_z při dopadu na stůl je dána jako $v_z = gT$, kde T je doba trvání volného pádu z výšky $h - z$. Čas T určíme jednoduše z rovnice volného pádu:

$$\frac{1}{2}gT^2 = h - z \quad \longrightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2(h-z)}{g}}.$$

Pro celkovou velikost rychlosti v momentu dopadu dostáváme

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{2gz + 2g(h-z)} = \sqrt{2gh},$$

nezávisí tedy na výšce místa, ze kterého voda teče. Všimněme si, že $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$, a tedy voda dopadá na stůl s kinetickou energií, která odpovídá vždy potenciální energii na vrchu nádoby. To je dáno tím, že pro tekutinu hlouběji v nádobě se potenciální energie jen přeměňuje na tlakovou energii, která se pak přemění na kinetickou energii tryskající vody z otvoru.

Hledejme maximum uražené vzdálenosti ve vodorovném směru, která je v závislosti na hloubce otvoru z dána jako

$$x_d(z) = v_xT = \sqrt{2gz}\sqrt{\frac{2(h-z)}{g}} = 2\sqrt{z(h-z)}.$$

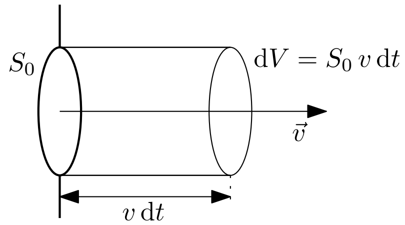
Jelikož je odmocnina prostá funkce, stačí derivovat argument $zh - z^2$ podle z a výsledek položit roven nule, z čehož dostaneme $z = \frac{h}{2}$. Nejdále od nádoby tedy dopadne voda, které vytéká v polovině výšky nádoby.

5.10 Nádoba s dírou ve dně

Zadání: Válcová nádoba je do výšky $h = 70$ cm naplněna vodou. Plocha dna je $S = 600\ \mathrm{cm}^2$. Otvorem ve dně nádoby plochy $S_o = 1\ \mathrm{cm}^2$ voda vytéká. Za jakou dobu se nádoba vyprázdní do poloviny a za jakou úplně?

Řešení: Nechť je počáteční objem vody v nádobě $V_0 = Sh$ a okamžitá výška hladiny měřená ode dna z. Voda bude vytékat z otvoru rychlostí danou Torricelliho vztahem $v = \sqrt{2gz}$ a za malý čas $\mathrm{d}t$ jí tedy vyteče

$$|\mathrm{d}V| = S_o\, v\, \mathrm{d}t = S_o\sqrt{2gz}\,\mathrm{d}t.$$



Mezi výškou hladiny a objemem vody v nádobě platí jednoduchý vztah $V = Sz$. Po dosazení do vztahu pro $\mathrm{d}V$ dostaneme diferenciální rovnici pro funkci objemu vody v nádobě v závislosti na čase $V(t)$:

$$\mathrm{d}V = -S_o\sqrt{2g\frac{V}{S}}\,\mathrm{d}t \quad \longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -S_o\sqrt{2g\frac{V}{S}},$$

kde jsme explicitně přidali znaménko minus, jelikož při vytékání vody se objem v nádrži zmenšuje, tedy $\mathrm{d}V < 0$. Tuto rovnici vyřešíme separací proměnných a následnou integrací:

$$\int -S_o\sqrt{\frac{2g}{S}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{V}},$$

$$-S_o\sqrt{\frac{2g}{S}}t = 2\sqrt{V} + C.$$

Hodnotu integrační konstanty C dostaneme z počáteční podmínky $V(0) = V_0$ jako $C = -2\sqrt{V_0}$. Pokud nás zajímá objem vody v nádobě jako funkce času $V(t)$, dostaneme:

$$V(t) = \left(\sqrt{V_0} - \frac{S_o}{2}\sqrt{\frac{2g}{S}}\,t\right)^2.$$

Zajímá-li nás čas, za který bude v nádobě nějaký konkrétní objem, vyjádříme funkci $t(V)$:

$$t(V) = \frac{2}{S_o}\sqrt{\frac{S}{2g}}\left(\sqrt{V_0} - \sqrt{V}\right).$$

Po dosazení konkrétních hodnot $t\left(\frac{V_0}{2}\right) \doteq 66$ s a $t(0) \doteq 227$ s.

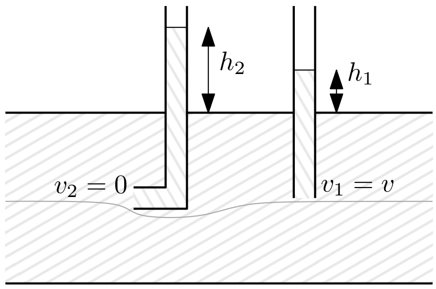
5.11 Proudění v potrubí

Zadání: Z trysky vodotrysku s průřezem $1,5\ \mathrm{cm}^2$ vystřikuje voda rychlostí $24\ \mathrm{m.s}^{-1}$. Jak velká je rychlost proudu v přívodním potrubí, jehož průřez má obsah $18\ \mathrm{cm}^2$?

Řešení: Rovnice kontinuity říká, že průtok nestlačitelné kapaliny skrze potrubí musí být ve všech místech stejný, tzn. $S_1 v_1 = S_2 v_2$, tedy $v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = 2\ \mathrm{m.s}^{-1}$.

5.12 Pitotova trubice

Zadání: Trubici zalomenou do pravého úhlu vložíme do proudící kapaliny. Do jaké výšky h_2 vystoupí kapalina v ohnuté trubici, jestliže v rovné trubici vložené do téhož místa vystoupí do výšky h_1 a jestliže rychlost proudící kapaliny v daném místě je v?



Řešení: Použijeme Bernoulliho rovnici popisující zákon zachování energie v nestlačitelné kapalině

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = \text{konst.},$$

kde ρ je hustota kapaliny, v a p je rychlost a tlak kapaliny v daném místě a z je vertikální souřadnice mířící vzhůru. Rychlosti a tlaky u konců nezalomené trubice v_1 a p_1, resp. u zalomené trubice v_2 a p_2, jsou pak vztaženy

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z + p_2.$$

Ústí trubic uvažujeme ve stejné výšce, na obou stranách tedy dosazujeme stejnou hodnotu vertikální souřadnice z. U ústí nezalomené trubice proudí kapalina nerušeně původní rychlostí v, tzn. $v_1 = v$. U ústí zalomené trubice je ovšem kapalina nucena zastavit, tedy $v_2 = 0$. Z Bernoulliho rovnice pak plynou vztahy mezi tlaky u ústí jednotlivých trubic

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p_1 = p_2.$$

Výšky hladin v trubicích jsou pak takové, aby hydrostatický tlak $p = h\rho g$ byl přesně stejný jako tlak kapaliny, který je u ústí trubic:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + h_1 \rho g = h_2 \rho g.$$

Výsledkem pak je

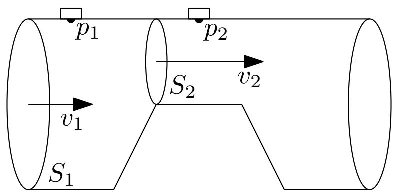
$$h_2 = h_1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}.$$

Poznámka: Pitotova trubice se primárně používá pro určování rychlosti proudících tekutin pomocí rozdílu tlaku $p_2 - p_1$. Nejznámější aplikací je určování rychlosti letadla vůči okolnímu vzduchu, což je jedna z klíčových veličin určujících, jestli se dané letadlo udrží ve vzduchu. Z Bernoulliho rovnice máme

$$v = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}}.$$

5.13 Venturiova trubice

Zadání: Jak velkou rychlostí proudí voda vodorovnou trubicí s průřezem $S_1 = 15\ \mathrm{cm}^2$, jestliže v zúženém místě o průřezu $S_2 = 5\ \mathrm{cm}^2$ se zmenší tlak o 500 Pa?



Řešení: Použijeme Bernoulliho rovnici popisující zákon zachování energie v nestlačitelné kapalině

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = \text{konst.},$$

kde ρ je hustota kapaliny, v a p je rychlost a tlak kapaliny v daném místě a z je vertikální souřadnice mířící vzhůru. Rychlosti a tlaky v normálním a zúženém profilu jsou pak vztaženy jako

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z + p_2.$$

Jelikož je trubice vodorovná, na obou stranách dosazujeme stejnou hodnotu vertikální souřadnice z. V trubici dále platí rovnice kontinuity, která říká, že průtok nestlačitelné kapaliny musí zůstávat konstantní: $S_1 v_1 = S_2 v_2$. Po dosazení za v_2 z rovnice kontinuity do Bernoulliho rovnice a vyjádření v_1 dostaneme výsledek:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}\frac{1}{1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}} = 35\,\mathrm{cm.s^{-1}}.$$

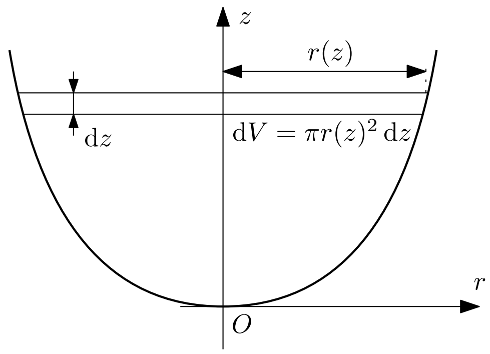
5.14 Speciální nádoba

Zadání: Určete tvar rotační nádoby, aby voda vytékající malým otvorem plochy ΔS ve dně klesala rovnoměrně rychlostí v.

Řešení: Označme aktuální výšku sloupce vody jako z. Potom bude voda vytékat z otvoru ve dně rychlostí $u = \sqrt{2gz}$ a objem vyteklý z nádoby za malý čas dt bude (viz také příklad 5.10)

$$|\mathrm{d}V| = \Delta S\, u \mathrm{d}t = \Delta S \sqrt{2gz}\, \mathrm{d}t.$$

Tvar rotační nádoby je dán funkcí poloměru v závislosti na vzdálenosti ode dna $r(z)$. Při poklesu hladiny o $|\mathrm{d}z|$ pak musel vytéci objem $|\mathrm{d}V| = \pi r(z)^2 |\mathrm{d}z|$.



Porovnáním výrazů pro změnu objemu dV dostaneme

$$\frac{|\mathrm{d}z|}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta S \sqrt{2gz}}{\pi r(z)^2}.$$

Ovšem derivace výšky hladiny z podle času je právě požadovaná rychlost $v = \frac{|dz|}{dt}$. Můžeme tedy vyjádřit potřebný poloměr nádoby ve výšce z jako

$$r(z) = \sqrt{\frac{\Delta S \sqrt{2gz}}{\pi v}}.$$