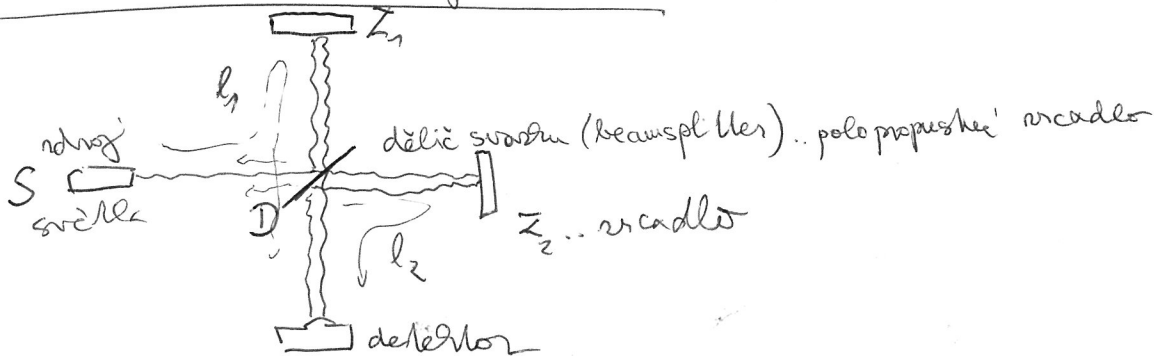


Interference a difrakce .. úvod

interf. #1

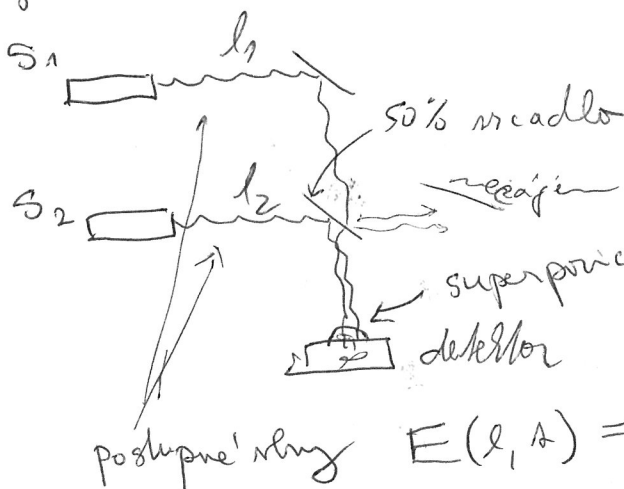
- linearita Maxw. rci' $\leftrightarrow$ princip superpozice
- obvykle měníme ne amplitudu, ale intenzitu (prohodit ampl.)
- terminologie: interference [interference .. dvě nebo více vln
difrakce (ohyb světla)
.. skládání spojitelných množství vln
• vliv koherence na viditelnost interf./difr. obrazů

Michelsonův interferometr



l_1, l_2 .. ~~dráhy~~ délka dráh, po kterých paprsky šly

nebo bychom si mohli představit např.:



$$S_1: E_1(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$S_2: E_2(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

postupně šly $E(l, t) = E_0 \cos(\omega t - kl + \varphi)$

superpozice v detektoru $E_D(t) = E_1(l_1, t) + E_2(l_2, t)$

$$E_D(t) = E_1 \cos(\omega t - kl_1 + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega t - kl_2 + \varphi_2)$$

měříme intenzity

$$I_D = \langle E_D^2(t) \rangle_{t_n} = \langle E_1^2 \cos^2(\dots) \rangle + \langle E_2^2 \cos^2(\dots) \rangle + 2E_1 E_2 \langle \cos(\omega t - kl_1 + \varphi_1) \cos(\omega t - kl_2 + \varphi_2) \rangle$$

↑
rozhodovací doba detektoru

$$I_i = \frac{1}{2} E_i^2$$

$$E_i = \sqrt{2I_i}$$

$$I_D = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \left[\left\langle \frac{1}{2} \cos(2\omega t - k(l_1 + l_2) + \varphi_1 + \varphi_2) \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \cos(k(l_1 - l_2) + \varphi_1 - \varphi_2) \right\rangle \right]$$

ϕ ↓

$$I_D = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\underbrace{k(l_1 - l_2) + \varphi_1 - \varphi_2}_{\Delta\varphi})$$

koherence

~~rozhodovací doba světla~~ laser $\varphi(t) = \text{konst.}$
dobrovolně koherenční $t_{\text{coh}} \rightarrow +\infty$
tepelné řešení $\varphi(t) \sim t_{\text{coh}} \sim 10^{-8} \text{ s}$
 φ je konst. po dobu t_{coh}

po se náhodně mění

~~pro laser~~: $I_D = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\underbrace{k(l_1 - l_2) + \varphi_1 - \varphi_2}_{\Delta\varphi(\Delta l)})$

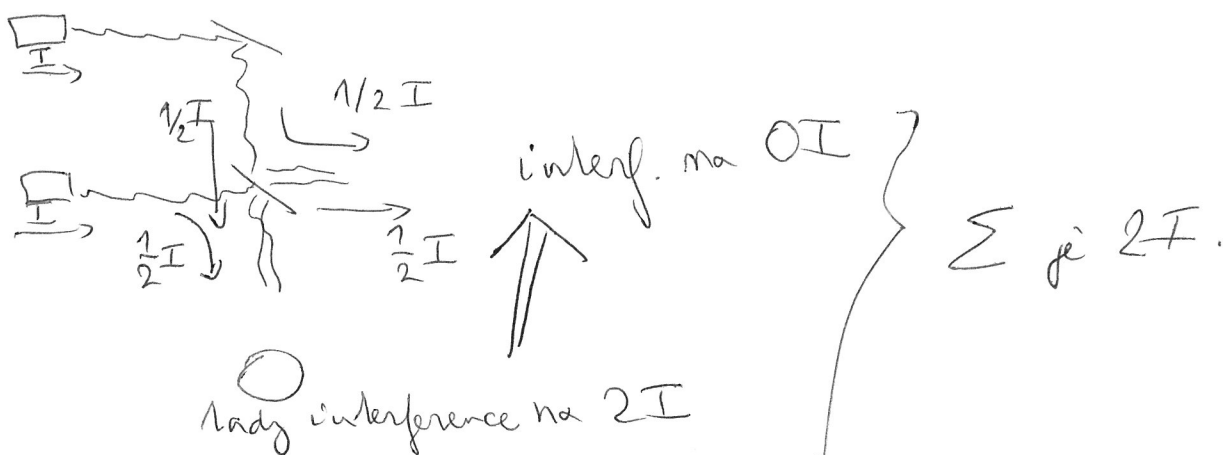
$$\text{platí: } (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \leq I_D(\Delta l) \leq (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

pro $I_1 = I_2 = I$: $I_D(\Delta\varphi) = 2I (1 + \cos \Delta\varphi)$
 $\in \langle 0, 4 \rangle I$

pozn.: $(22E^2!?)$ platí :-)

interf #2

počet do detektoru dopadá



Koherece (Vliv časové koherence na viditelnost interference)

- možovali jsme $\varphi_1, \varphi_2 = \text{konst.}$ (to "platí" pro lasery)
- co když $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$?

ten. zdvoje $\vec{E}_{12}(t) = E_{12} \cos(\omega t + \varphi_{12}(t))$

a vyšetření vlny $\vec{E}_{12}(l_{12}, t) = E_{12} \cos(\omega t - k l_{12} + \varphi_{12}(t))$

relativní čas $t_{11} = t - \frac{l_1}{c}$
 $t_{12} = t - \frac{l_2}{c}$

$t_{\text{koher.}}$.. doba, po kterou "růstají" fázové posuny φ_1, φ_2 konstantní (definice časové koherence)

a) zdvoje S_1 a S_2 jsou koherentní $\Leftrightarrow \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \text{konst.}$

"dvoj" se jako 1 zdvoj

ne znalosti $\varphi_1(t)$ doplníme měří $\varphi_2(t)$

pro jednoduchost $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$

$\Delta\varphi = k(l_1 - l_2) + \varphi_1(t_{11}) - \varphi_2(t_{12}) = k(l_1 - l_2) + \varphi(t - \frac{l_1}{c}) - \varphi(t - \frac{l_2}{c})$

i) pokud $|t_{n1} - t_{n2}| \ll T_{\text{coh}}$

tak $\varphi(t_{n1}) = \varphi(t_{n2}) \Rightarrow$

$$\Delta\varphi = k(l_2 - l_1)$$

interference je stálá

$$\left| A - \frac{l_1}{c} - A + \frac{l_2}{c} \right| = \frac{|l_2 - l_1|}{c} \ll T_{\text{coh}}$$

pro $T_{\text{coh}} \approx 10^{-9}$ s
 $|l_2 - l_1| \ll 30$ cm

laser $T_{\text{coh}} \approx 10^{-4}$ s
maser $T_{\text{coh}} \approx 1$ s

ii) pokud $|t_{n1} - t_{n2}| \gg T_{\text{coh}}$

$\varphi(t_{n1}) - \varphi(t_{n2}) = \delta\varphi$ náhodně se měnící
s periodou T_{coh}

$$\Delta\varphi = k(l_2 - l_1) + \delta\varphi(t)$$

a výsledná interf. intenzita:

$$I_{\text{int}} = 2\sqrt{I_1 I_2} \left\langle \cos \left(k(l_1 - l_2) + \delta\varphi(t) \right) \right\rangle_{T_n}$$

reakční / měřicí
dobu přístroje

1.) $T_n \ll T_{\text{coh}}$ "rychlý přístroj"

$$\Rightarrow I_{\text{int}}(t) = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(t))$$

... pozorujeme změny int. s periodou T_{coh}

2.) $T_n \gg T_{\text{coh}}$ "pomalý přístroj"

$$\Rightarrow I_{\text{int}} = 0 \quad \because \langle I_{\text{int}}(t) \rangle_{T_n} = 0$$

interference vymizí

$$I_D = I_1 + I_2$$

b) zdroje S_1 a S_2 jsou nelohované

(pri-
nelohované zdroje)

$$\Rightarrow \varphi_1(t_{n1}) - \varphi_2(t_{n2}) = \delta\varphi(t)$$

... také náhodně
se mění

náhodně
se mění
s per. T_{coh}

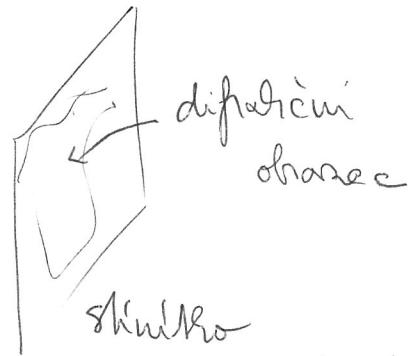
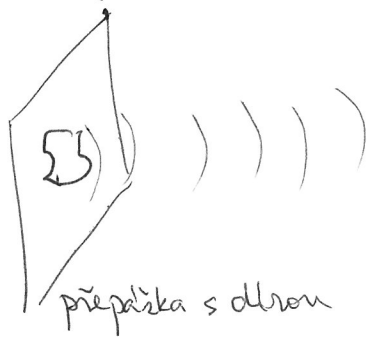
$\Rightarrow$ vede to na případ a) ii) a nemusíme zohledňovat
podmínku $|t_{n1} - t_{n2}| \leq T_{\text{coh}}$

Difrakce (ohyby světla)

diff #1

- typické uspořádání difr. "experimentu"

světlo

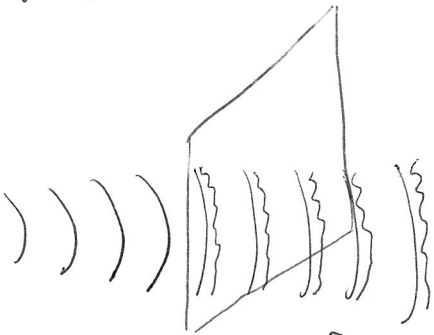


- náš úkol je na základě polohy a tvaru zdroje světla, stínítka a přepážky určit tvar difracčního obrazce (kon. rozložení intenzity světla na stínítku)
- citát: Dom. Křelík: Principles of Optics
"Diffraction problems are amongst the most difficult ones encountered in optics."

Babinetův princip (aneb vlny s přepážkou)

- jak funguje nepřehledná přepážka?

i)

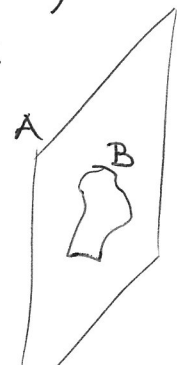


↑ v místě za přepážkou je dopadající vlna přesně vyrušena indukovaným polem vyzařovaným přepážkou: $E_{\text{dop}} + E_{\text{ind}} = 0$ (*) (za přepážkou)

ii) rozdělme přepážku na 2 části: A a B:

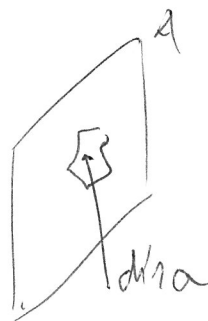
$$E_{\text{ind}} = E_{\text{ind}A} + E_{\text{ind}B} (**)$$

↑
pole indukované částí A, resp. B



iii) odstraníme část přepážky B,

potom pole na přepážce
je $E_{\text{dop}} + E_{\text{ind}A} = ?$



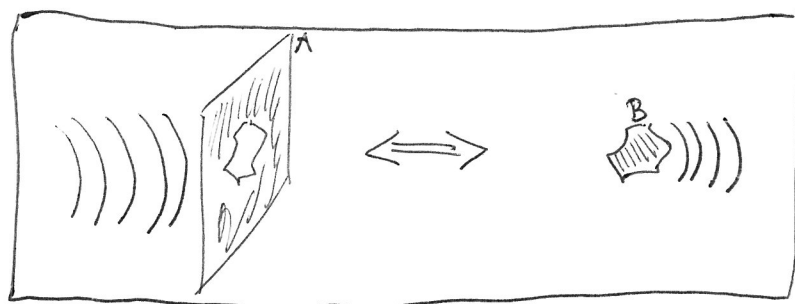
~~Přibližně~~ $(**) \rightarrow (*)$: $E_{\text{dop}} + E_{\text{ind}A} + E_{\text{ind}B} = 0$ (***)

$\Downarrow$

$$E_{\text{dop}} + E_{\text{ind}A} = -E_{\text{ind}B}$$

!!!

$\hookrightarrow$ když by 2 situace jsou ekvivalentní :



(až na znaménko, ale
to se v intenzitě
mění)

přím. ∇ platí pouze přibližně ∇ proč?

- indukovaná pole od částí A a B se navzájem ovlivňují



$$E_{\text{dop}} \text{ ~~indukované~~ pole}$$

$$\swarrow \searrow$$

$$E_{\text{ind}A} \longleftrightarrow E_{\text{ind}B}$$

$\uparrow$ současně a indukované pole

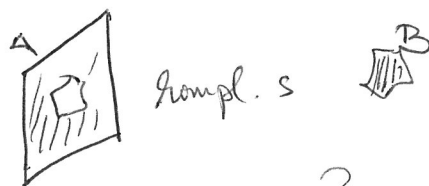
- když po odstranění části B se $E_{\text{ind}A}$ změní a B. princip nemůže platit přesně.
- tento efekt je nejvýraznější na hranici mezi A a B

$\Rightarrow$ část B musí být dostatečně velká, aby šly zanedbat
tyto ohraničovací efekty ($D \gg \lambda$)
"průměr" otvoru

Komplementární světlo

dif #2

def.: A ke B, B ke A jsou komplementární světla



• jak spolu souvisí jejich difr. obrazce?

difr. obrazec od A: $E_{\text{dop}} + E_{\text{indA}} (\equiv E_A)$

difr. obrazec od B: $E_{\text{dop}} + E_{\text{indB}} (\equiv E_B)$

$$E_B = \underbrace{E_{\text{dop}} + E_{\text{indB}}}_{\phi} + \underbrace{(E_{\text{indA}} - E_{\text{indA}})}_{-E_A} + \underbrace{(E_{\text{dop}} - E_{\text{dop}})}_{+E_{\text{dop}}}$$

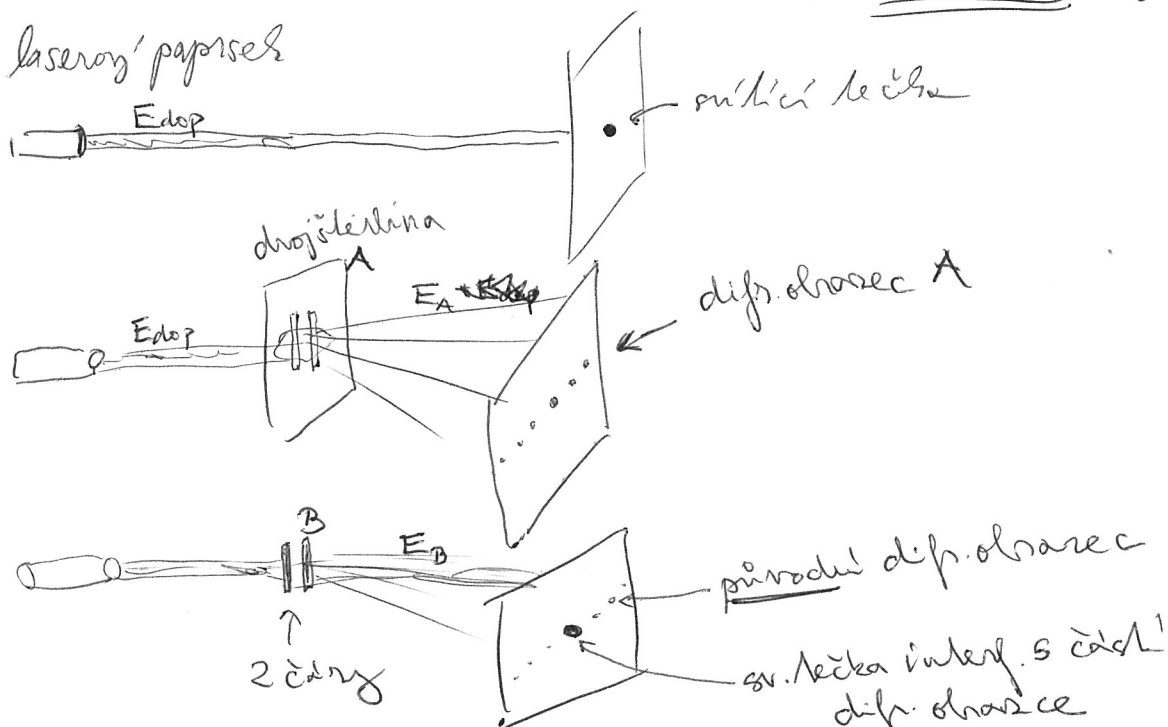
$$\Rightarrow E_B = E_{\text{dop}} - E_A$$

($E_A + E_B = E_{\text{dop}}$ - Balineliův princip)

↓ tam, kde je $E_{\text{dop}} = 0$ pak $E_B = -E_A$

a difr. obrazec
je stejný !

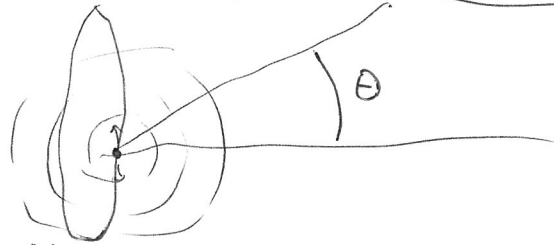
pr.: laserový paprsek



Huygens - Fresnelův princip

• k čemu je Bab. princip dobrý?

• jednotlivé částice vyzařující E ind B vyzařují sférické vlny

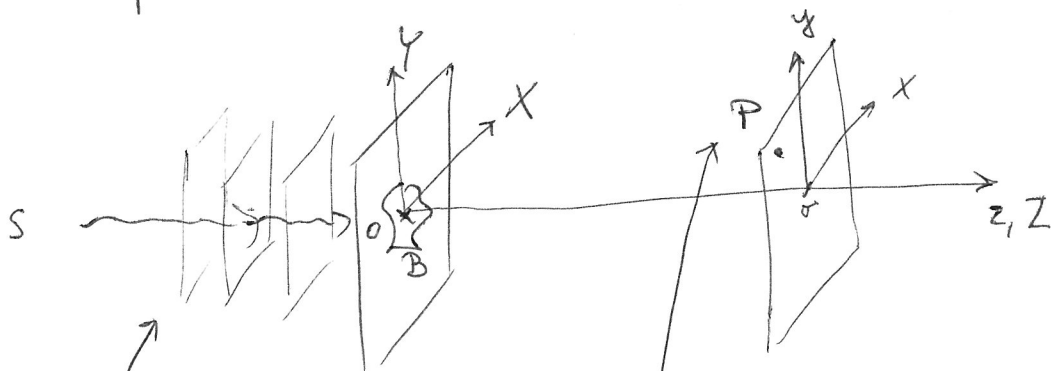


- aproximace: rovnoběžné směrovost vyzařování
naše formule bude platit pro malé úhly θ
(blíže osy dle)

Huygens - Fresnelův princip:

jednotlivé body ohrom jsou zdrojem sférických vln a jejich superpozici získáme výsledné pole

- aproximace: ~~roz~~ zdroj světla je velmi vzdálen $\Rightarrow$ dopadající rovinná vlna



rovninné vlny
holno na
rovinnu přepážku

bod P na stínítku .. jale je tam pole

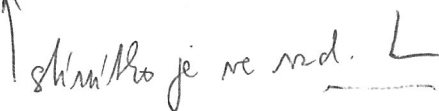
$$E_P(x, y) = E_0 \cdot \int_B \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS \quad (*)$$

amplituda na jednotkovou plochu
ampl. sf. vlny
úhlová se vzd.

postupná sférická vlna

! r je funkce $r = r(x, y, X, Y)$!

∴ $\text{rate of } \alpha^2 \propto \gamma$



unhofova d'p'ice
jeste rasedeme rozdlenost R

$$X^2 \ll X \qquad Y^2 \ll Y$$

$$X^2 - 2X_x \quad Y^2 - 2Y_y$$

$$\approx R \cdot \left(1 + \frac{\overbrace{(X-x)^2 - x^2} + \overbrace{(Y-y)^2 - y^2}}{2R^2} \right)$$

$$(R \geq L)$$

$$(\text{parallel } L)$$

$$\mathbb{Z} \cong \mathbb{R}$$
$$E(x,y) = \frac{E_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \int_B e^{i \frac{k(x+y)}{R}} dx dy$$

↑ Fraunhofer difracției integral

pozn.: proč vedeme více typů aproximací?
(v exponenciále je r měřeno $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ pro $\lambda \times 10^{-9}$ m (vid. stránka 1))
(amplitudní frekvence ~~amplitud~~ posunů)
benzene bohužel aproximace, které ještě podléhají dif. úpravě :-)

pozn.: kritérium Fraunhoferovy difrakce (kv. přibližení vzdáleného pole)

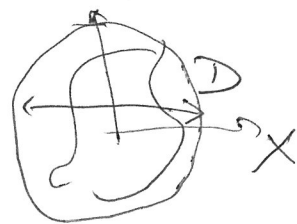
musejí být zanedbatelné vyšší řády $k \frac{x^2 + y^2}{2R} \ll 1$

"průměr" otvor

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2R} \approx$$

$$\frac{D^2}{\lambda L} \ll 1$$

$$L \gg \frac{D^2}{\lambda}$$



pozn.: pokud člen $k \frac{x^2 + y^2}{2R}$ nelze zanedbat $\Rightarrow$ Fresnelova difrakce

$\Downarrow$ pozn.: pokud zdroj světla nelze považovat za rovinné vlny $\Rightarrow$ Fresnelova difrakce
Fresnelův difrakční integrál

pozn.: ozn. $u = \frac{kx}{R}$, $v = \frac{ky}{R}$

$$E(u, v) \propto \int_B e^{i(ux + vy)} dx dy$$

.. 2D Fourierova transformace

$\Rightarrow$ "difrakční obrazec je Fourierova transformace vlnného otvoru"

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{... bod otvoru} \\ 0 & \text{... bod překážky} \end{cases}$$

$$E(u, v) \propto \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{i(ux + vy)} dx dy$$

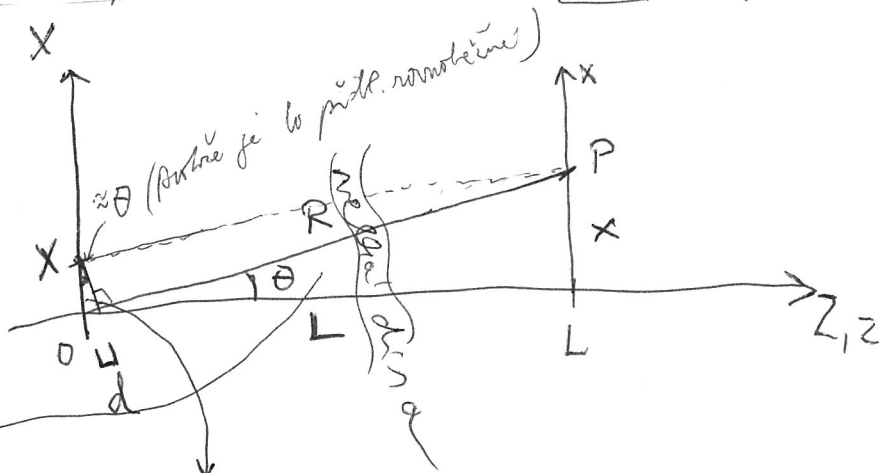
~~Neplatí pro Fraunhoferovu difrakci:~~

~~Youngův pokus~~

geometrická interpretace členů

$$\frac{x_x + y_y}{R}$$

(b)NO 1D:
(resp. 2D)



$$X \cdot \frac{x}{R} = X \cdot \sin \theta = \underline{\underline{d}}$$

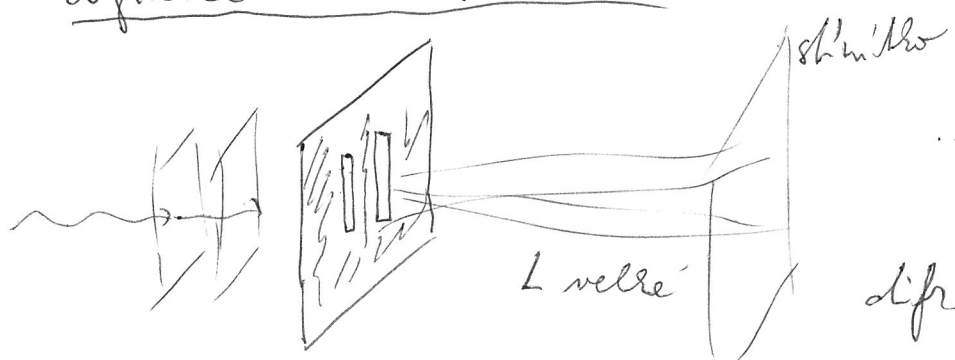
mn. člen $\frac{x_x + y_y}{R}$ představuje dráhový rozdíl jednotkových (fázový posun)

paprsky při malé, že paprsky jsou navzájem rovnoběžné
(aby úhel θ šel přenést do Δ se ved. d)

aplikace Fraunhoferova integrálu:

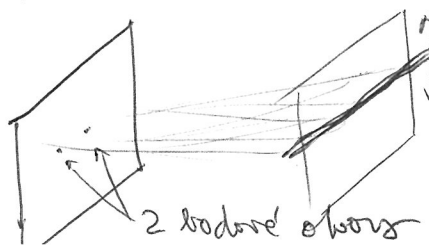
Youngův pokus:

↳ difrakce na dvojštěrbině



... dá se spočítat pomocí Fraunhoferova difr. integrálu

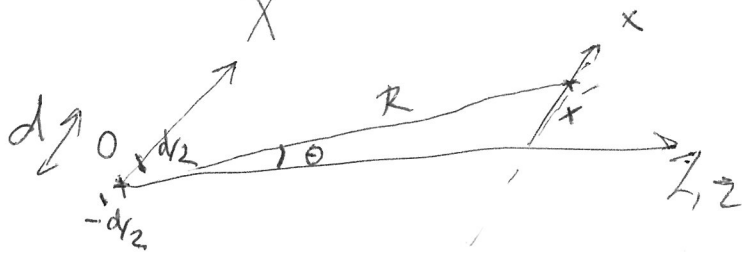
my si vezmeme jednodušší verzi



(rozdílu se co se děje s rovinně
křídlovými
vlnami "stejně")

$S \rightarrow \sum_{2nd\ order} \dots E(x) = E_0 \frac{1}{R} e^{i(\omega t - kR)} \cdot \left(e^{i \frac{k}{R} \frac{d}{2} x} + e^{i \frac{k}{R} (-\frac{d}{2}) x} \right)$

$2 \cos \left(\frac{k}{R} \frac{d}{2} x \right)$
 $\sin \theta$



$y = y = 0$

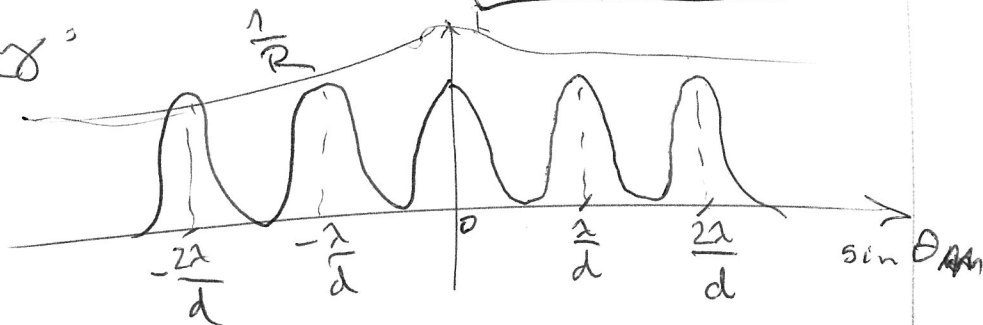
$I \propto \langle (Re E)^2 \rangle_T = \frac{E_0^2}{R^2} \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{1}{2} k d \sin \theta \right)$

interferenční maxima: $\frac{1}{2} k d \sin \theta = m \pi, (m \in \mathbb{Z})$

$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2\pi m$

$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}$

průběh intenzity:



odstavenost interf. proužků:

$x_m = R_m \sin \theta_m \approx L m \frac{\lambda}{d}$

$\Delta x = L \frac{\lambda}{d}$

pro malá m

počet maxim?

$|\sin \frac{\lambda}{d} \leq 1$

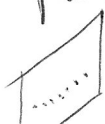
$|\sin| \leq \frac{d}{\lambda}$

Difrakční mřížka aka (Young)^N

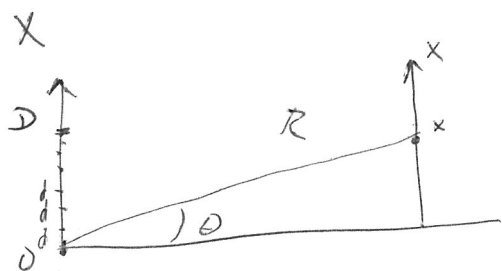


N štěrbin oddělené d (kon. celková šířka je $D = N \cdot d$)
 lepe $D = (N-1)d$

odělné to podobně jednoduše jako u Younga



$$E(x) = \frac{E_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i \frac{k}{R} (j d) x}$$



$$\sum_{k=0}^{N-1} x^k = \frac{x^N - 1}{x - 1}$$

$\left(e^{i \frac{k}{R} dx} \right)^j$
 $\left(e^{i \frac{k}{R} dx} \right)^N$

$$E(x) = \frac{E_0}{R} e^{i(\omega t - kR)}$$

$$\frac{e^{i \frac{k}{R} N d} - 1}{e^{i \frac{k}{R} d} - 1} \cdot \frac{e^{-i \frac{k}{R} x \frac{d}{2}}}{e^{-i \frac{k}{R} x \frac{d}{2}}} \cdot \frac{e^{-i \frac{k}{R} (N d) x \frac{d}{2}}}{e^{-i \frac{k}{R} (N d) x \frac{d}{2}}}$$

$$E(x) = \frac{E_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin\left(\frac{k}{R} (N d) x \frac{d}{2}\right)}{\sin\left(\frac{k}{R} x \frac{d}{2}\right)} \cdot e^{-i \frac{k}{R} (N-1) x \frac{d}{2}}$$

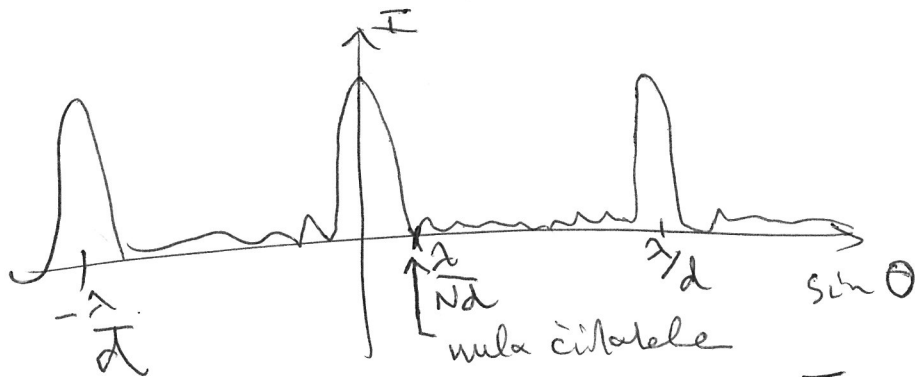
$$I \propto \langle \text{Re } E^2 \rangle = \frac{E_0^2}{R^2} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2} N d \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} d \sin \theta\right)} \right)^2$$

~~interf. maxima~~

interf. maxima? 0 ne jmen. : rose

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}$$

ale průběh:



$$\frac{1}{2} k N d \sin \theta = \pi$$

$\uparrow$
 $\frac{2\pi}{\lambda}$

$\sin \theta = \frac{1}{N} \frac{\lambda}{d}$
 maximum je $\frac{N}{2}$ -krát větší

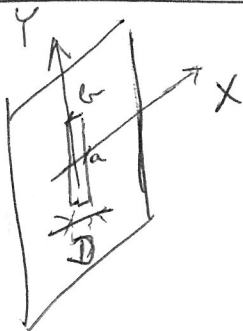
čo když máme "šlepené" (nemonochrom.) světlo?

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda_1}{d} \quad \sin \theta_2 = \frac{\lambda_2}{d}$$

tedy $\left| \frac{\lambda_1}{d} - \frac{\lambda_2}{d} \right| > \frac{\lambda}{Nd}$.. relativně spělň. podmínky
 $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$

~~Nejmenší~~

Štěrčina konečné šířky



$$E \propto \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{i \frac{k}{R} (xX + yY)} dX dY =$$

$$= \left(\int_{-a}^a e^{i \frac{k}{R} x X} dX \right) \cdot \left(\int_{-b}^b e^{i \frac{k}{R} y Y} dY \right)$$

$$= \left[\frac{1}{i \frac{k}{R} x} e^{i \frac{k}{R} x X} \right]_{-a}^a \cdot \left[\frac{1}{i \frac{k}{R} y} e^{i \frac{k}{R} y Y} \right]_{-b}^b$$

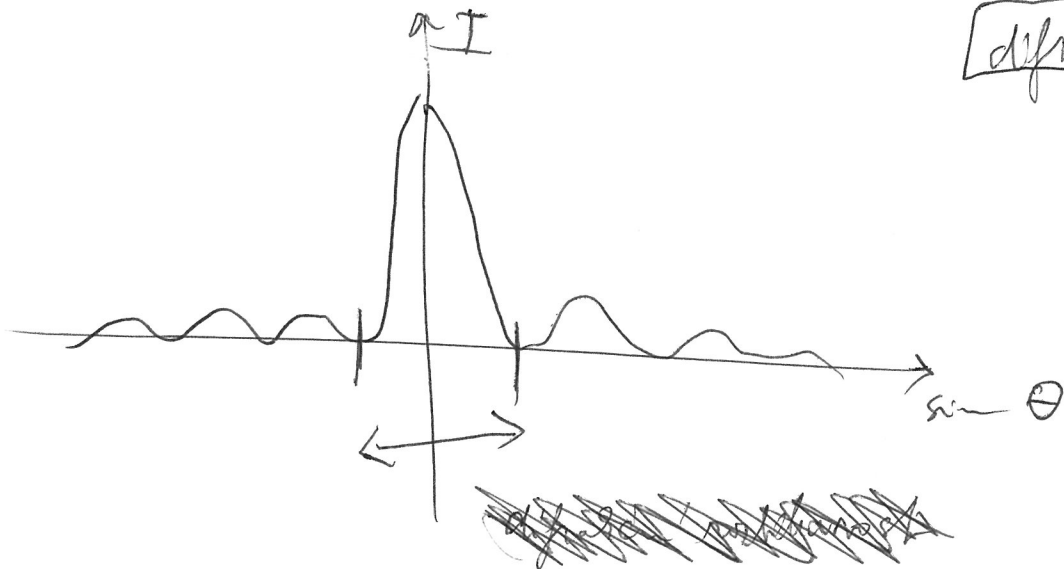
$$= \cancel{2a} \cdot \frac{R^2}{k^2} \frac{1}{xy} 4 \sin\left(\frac{k}{R} ax\right) \sin\left(\frac{k}{R} by\right)$$

$$= \cancel{4ab} \frac{\sin\left(\frac{ka}{R} x\right)}{\frac{ka}{R} x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{kb}{R} y\right)}{\frac{kb}{R} y}$$

$$\rightarrow E(x,0) \propto \frac{\sin\left(\frac{1}{2} k \frac{2a}{d} \sin \theta\right)}{\frac{1}{2} k \frac{2a}{d} \sin \theta}$$

anebo limitou difr. mřížky...

diff #6



$$I \propto \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} k D \sin \theta\right)}{\left(\frac{1}{2} k D \sin \theta\right)^2} \dots \text{nem' to periodicne}$$

interf. minima určena nulovým číslkem

$$\frac{1}{2} k D \sin \theta = m \pi, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\frac{\pi}{\lambda} \sin \theta_m = m \frac{\lambda}{D}$$

$$y_m \approx m L \frac{\lambda}{D}$$

0 je maximum

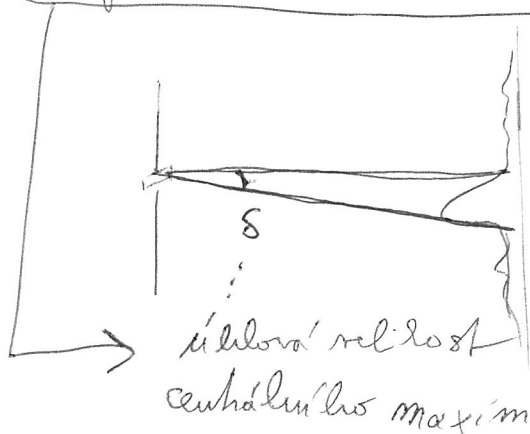
šířka centrálního maxima: $y_1 - y_{-1} = 2L \frac{\lambda}{D}$

často se bere polovina

$$\Delta y = L \frac{\lambda}{D}$$

... to je i vzdálenost minim

def.: difracční rozlihavost



$$\delta = \frac{\theta_1 - \theta_{-1}}{2} \approx \frac{\lambda}{D}$$

pořádání na lince

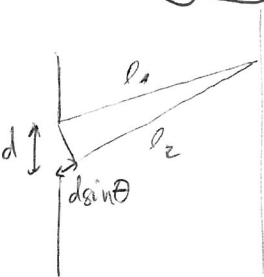
Prostorová koherence Viditelnost difrakce

• co může zabránit pozorování jem. difrakce?

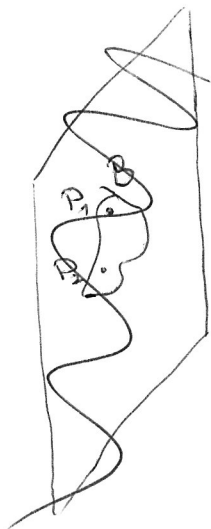
! nekoherentní zdroj světla

• časová koherence? $\Delta t_{\text{coer}} \sim 10^{-8} \text{ s}$, $c \Delta t_{\text{coer}} \sim 30 \text{ cm}$

ne, jelikož rozdíl dráhy jednotlivých vln
je $d \sin \theta \ll c \Delta t_{\text{coer}}$ (pro $d \ll 30 \text{ cm}$)



• prostorová koherence



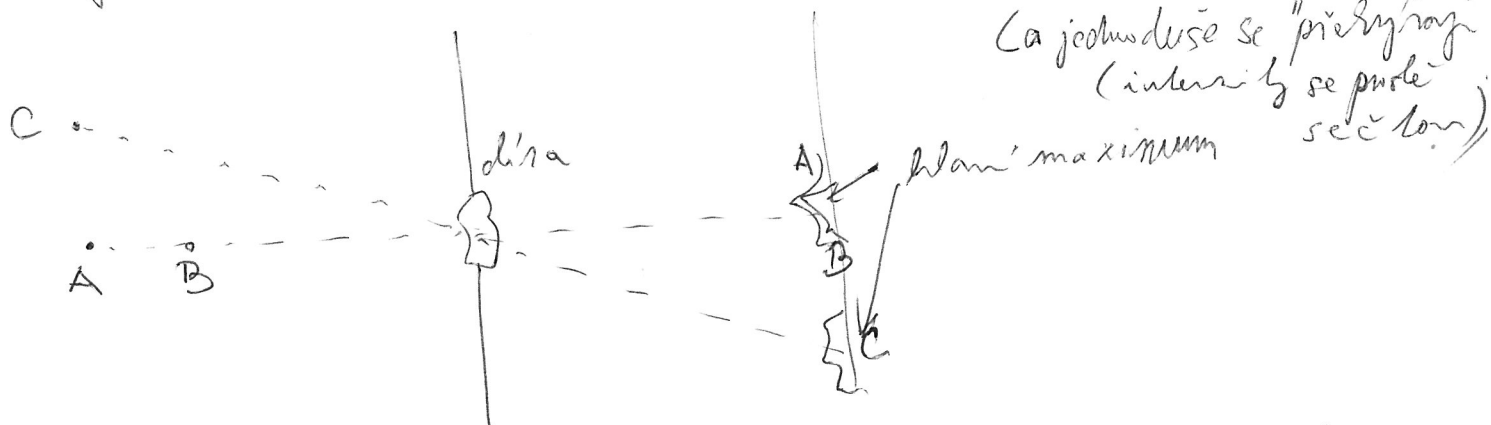
• zdroj světla rozložený v prostoru $\leftrightarrow$ kolektce bodových zdrojů

• tyto bodové zdroje jsou prostorově nekoherentní

• kmitající atomy nejsou napříč zdrojem nijak synchronizovány

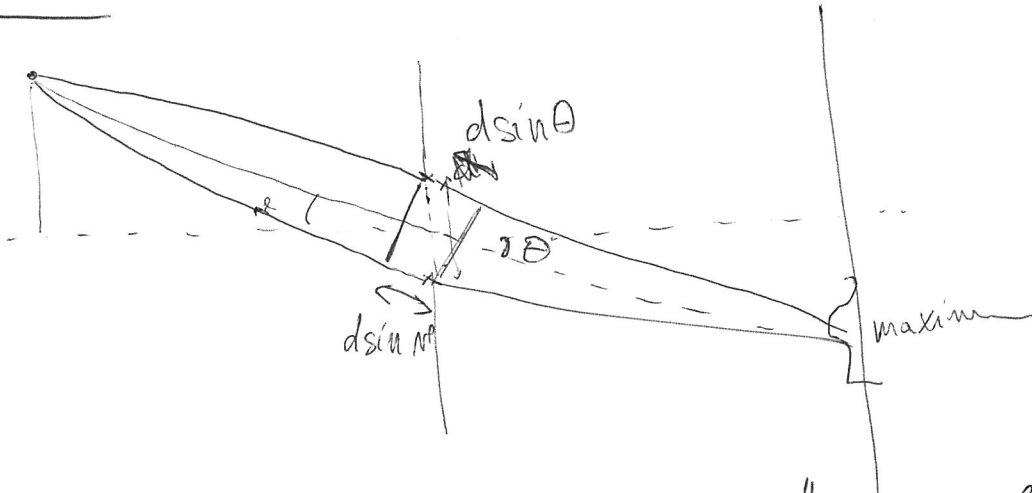
• vlnová $\vec{E}$ od jednoho bodu nemůže být $\vec{E}$ od druhého bodu $\leftrightarrow$ def. prostorové nekoherence

$\Rightarrow$ difrakční obrazce od jednotlivých bodů neinterferují

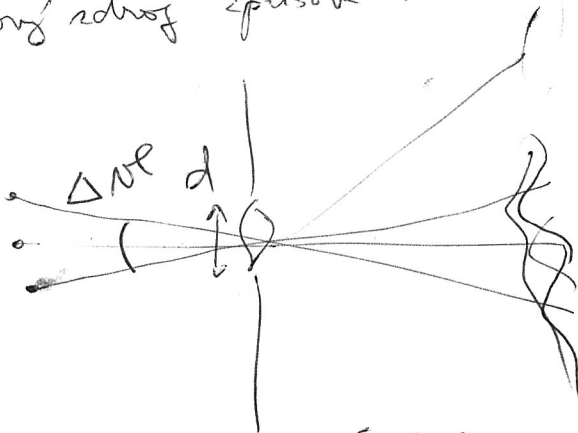


pam: dosud jsme uvažovali pouze rovinné vlny dop. kolmo
pro vlny dopadající pod úhlem se hlavní maximum posune
tak, že spojnice C - d - a - maximum je přímkou

proč?



$\Rightarrow$ bodový zdroj způsobí "rozmazání" interf. obrazce

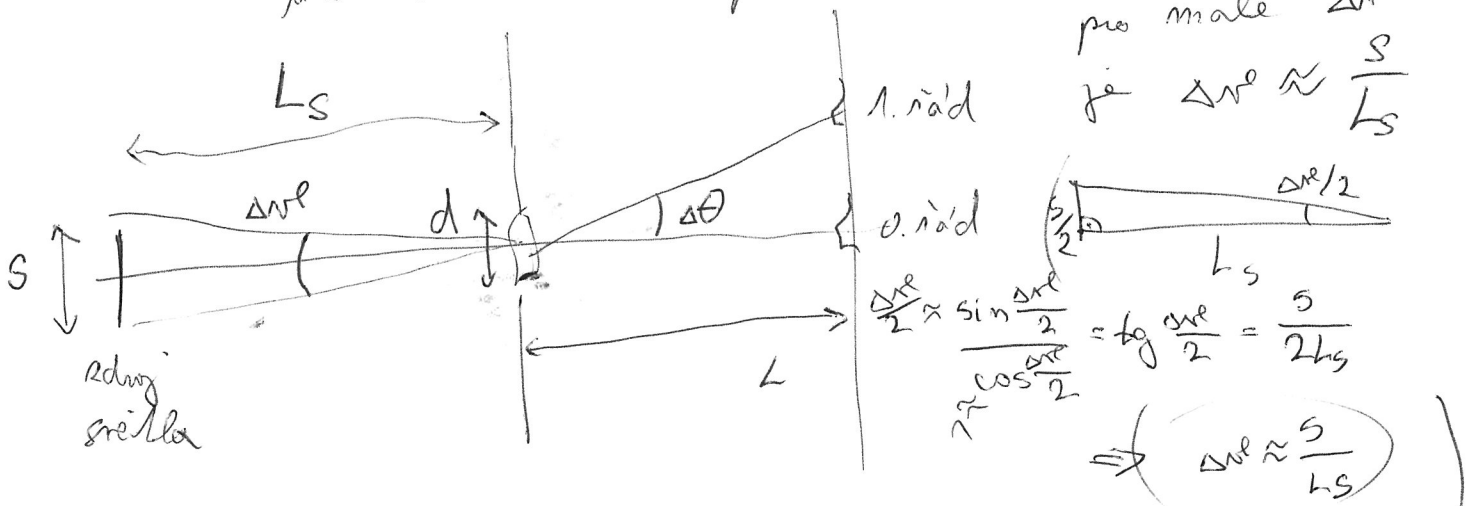


- je třeba, aby rozmazání bylo menší než velikost interf. maximum a minimum

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{d} \gg \Delta\varphi$$

úhlová velikost zdroje světla
(pom. Slunce na obloze $\Delta\varphi \approx 0,5^\circ$
30')

úhlová vzdálenost interf. maximum



počítám z sh. 6:

pro kruhový otvor

$I \propto$

Besselova fce J_1
(J_n)
 $\downarrow$
 $J_1\left(\frac{1}{2}kD \sin \theta\right)^2$
 $\frac{J_1\left(\frac{1}{2}kD \sin \theta\right)^2}{\left(\frac{1}{2}kD \sin \theta\right)^2}$

$$\delta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

rozlišení optických přístrojů

