Cvičení z VOAFu

23. listopadu 2020

1 Střední hodnoty

Mějme funkci $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Její střední hodnota v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ je definována jako

$$\langle f \rangle_{\langle x_1, x_2 \rangle} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx.$$

Lze definovat střední hodnotu přes celé $\mathbb{R}$ limitním přechodem

$$\langle f \rangle \equiv \langle f \rangle_{\langle -\infty, \infty \rangle} = \lim_{x' \to \infty} \frac{1}{2x'} \int_{-x'}^{x'} f(x)\, dx.$$

Pokud je funkce f periodická s periodou L, je její střední hodnota dána jako střední hodnota přes libovolný interval délky L:

$$\langle f \rangle = \langle f \rangle_{\langle x', x'+L \rangle} = \frac{1}{L} \int_{x'}^{x'+L} f(x)\, dx, \qquad x' \in \mathbb{R}.$$

Z definice zjevně platí pravidla

$$\langle cf \rangle = c \, \langle f \rangle, \qquad \langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle.$$

Cvičení 1.1 Vypočítejte $\langle 1 \rangle$, $\langle \cos \omega t \rangle$, $\langle \sin \omega t \rangle$, $\langle \sin(\omega t + \varphi_0) \rangle$, $\langle \cos^2 \omega t \rangle$, $\langle \sin^2 \omega t \rangle$, $\langle \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t \rangle$.

2 Komplexní čísla

Komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ je číslo tvaru $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je komplexní jednotka s vlastností $i^2 = -1$. Sčítání a násobení těchto čísel je definováno „přirozeným způsobem".

Komplexně sdružené číslo $\bar{z}$ je číslo $\bar{z} = a - ib$. Platí vzorec $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. Velikost komplexního čísla je definována jako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, tento výraz je možno zapsat jako $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Reálná a imaginární část. Definujeme funkce $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ a $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ zvané reálná a imaginární část pomocí předpisů

$$\mathrm{Re}\, z = a, \qquad \mathrm{Im}\, z = b$$

(pozor, imaginární část neobsahuje komplexní jednotku!). Pokud je reálná část nulová, nazveme číslo *ryze komplexním*. Funkce Re a Im jsou *reálně* lineární, tzn. platí

$$\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2, \qquad \mathrm{Re}\,(\alpha z) = \alpha\, \mathrm{Re}\, z, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

stejně pro Im. Pozor, $\mathrm{Re}\,(z_1 z_2) \neq (\mathrm{Re}\, z_1)(\mathrm{Re}\, z_2)$ (stejně pro Im). Tyto funkce lze jednoduše vyjádřit pomocí komplexního sdružení:

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Komplexní exponenciála. Uvažujme $z \in \mathbb{C}$. Uvažujme nyní číslo e^z a upravme ho:

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}.$$

První člen je obyčejná reálná exponenciální funkce. Otázkou je, co je exponenciála z ryze komplexního čísla. Odpověď dává Eulerův vzorec[1]:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi,$$

navíc platí $|e^{i\varphi}| = 1$. Můžeme tedy psát $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$. Pro velikost tohoto čísla platí $|e^z| = e^a$.

Goniometrický tvar komplexního čísla. Každé komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ můžeme zapsat ve tvaru $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Číslu φ říkáme *argument* komplexního čísla (toto číslo není dané jednoznačně, lze přičíst libovolný celočíselný násobek 2π). Argument φ je řešením rovnic

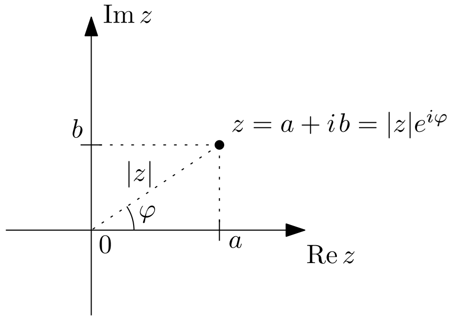
$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}.$$

Tyto rovnice se často formálně[2] sdružují do rovnice

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}.$$

Gaussova (komplexní) rovina. Komplexní čísla můžeme reprezentovat jako body (dvourozměrné) roviny, kde kartézské osy tvoří reálná a imaginární část komplexních čísel.

[1]Jehož speciálním případem je „nejkrásnější matematická identita" $e^{i\pi} = -1$.
[2]V tomto zápisu ztrácíme informaci o tom, zda $\varphi \in \langle 0, \pi)$ anebo $\varphi \in \langle \pi, 2\pi)$.



Obrázek 2.1: Gaussova rovina.

Sčítání komplexních čísel má pak geometrický význam sčítání dvourozměrných vektorů v Gaussově rovině. Číslo $e^{i\varphi}$ představuje číslo na jednotkové kružnici. Intuitivní představa o násobení komplexních čísel se získá z goniometrického zápisu:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Násobení číslem $e^{i\varphi}$ tedy představuje rotaci o úhel φ v komplexní rovině. Násobení číslem $|z|$ představuje škálování v této rovině.

Komplexní zápis goniometrických funkcí. Z Eulerova vzorce přímo plynou následující vztahy:

$$\cos\varphi = \mathrm{Re}\, e^{i\varphi} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \mathrm{Im}\, e^{i\varphi} = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Nahradíme-li $\varphi \in \mathbb{R}$ za obecné $z \in \mathbb{C}$, můžeme předchozími vzorci definovat funkce sinus a kosinus na celé komplexní rovině.

Cvičení 2.1 Nalezněte reálnou a imaginární část čísla

$$w = \frac{a + ib}{c + id}.$$

Cvičení 2.2 Vypočítejte $\mathrm{Re}\,[(C - iD)e^{i\Omega t}]$, kde $C, D, \Omega t \in \mathbb{R}$.

Cvičení 2.3 Ukažte, že platí $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$, speciálně pak $\overline{e^{ib}} = e^{-ib}$.

Cvičení 2.4* Dokažte platnost vztahů

$$\mathrm{Re}\,(iz) = -\mathrm{Im}\, z, \qquad \mathrm{Im}\,(iz) = \mathrm{Re}\, z.$$

Pomocí těchto vztahů ukažte platnost identity

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Cvičení 2.5 Odvoďte součtové vzorce pro siny a cosiny součtu (a rozdílu) úhlů pomocí triviální identity

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Cvičení 2.6 Odvoďte součtové vzorce pro součty sinů a cosinů pomocí následující úpravy výrazu

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} \right).$$

Cvičení 2.7* Dokažte platnost vztahů

$$\sin ix = i \sinh x, \qquad \cos ix = \cosh x, \qquad \sinh ix = i \sin x, \qquad \cosh ix = \cos x.$$

Cvičení 2.8 Uvažujte výraz $c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ a $\omega t \in \mathbb{R}$. Jaké podmínky musí konstanty c_1 a c_2 splňovat, aby byl uvedený výraz reálný pro všechna $t \in \mathbb{R}$?

Cvičení 2.9 Řešení rovnice harmonického oscilátoru lze psát v několika ekvivalentních tvarech:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t + \phi) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = ce^{i\omega t} + \bar{c}e^{-i\omega t},$$

$A, a, b, \varphi, \phi, \omega t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$. Nalezněte vztahy mezi konstantami A, φ, ϕ, a, b a c.

Cvičení 2.10* „Dokažte" Eulerův vzorec pomocí diferenciální identity

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}.$$

Návod: Ukažte, že funkce $f(x) = \cos x + i \sin x$ splňuje diferenciální rovnici pro exponenciálu s příslušnou počáteční podmínkou.

Cvičení 2.11* Zapište výrazy $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, obecně** $\cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$, pouze pomocí funkcí $\cos kx$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Cvičení 2.12 Sečtěte řadu

$$\sum_{m=0}^{N} \cos mx.$$

Cvičení 2.13 Vypočítejte následující určité integrály:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx, \qquad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a > 0.$$

*Vypočítejte i příslušné neurčité integrály (primitivní funkce).

3 Malé kmity a metoda módů

Kuchařka metody módů

1. Zavedu souřadnice $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, které odměřují výchylku z rovnovážné polohy.

2. Napíši pohybové rovnice ve tvaru $\mathbb{T}\ddot{\vec{x}} + \mathbb{U}\vec{x} = 0$, kde $\mathbb{T}, \mathbb{U} \in \mathbb{R}^{n,n}$ jsou konstantní matice.

3. Předpokládám řešení ve tvaru $\vec{x}(t) = A\,\vec{a}\cos(\omega t + \varphi)$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ je konstantní vektor poměrů amplitud.

4. Dosadím do pohybových rovnic a požaduji netrivialitu řešení, tzn. $A \neq 0$ a $\vec{a} \neq 0$. Dostanu $\left(\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}\right)\vec{a} = 0$. Tyto podmínky vedou na tzv. sekulární rovnici $\left|\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}\right| = 0$.

5. Sekulární rovnice je polynom n-tého stupně v ω^2. Najdu příslušné kořeny ω_k^2. K nim najdu příslušné vlastní vektory $\vec{a}_k$ jako řešení rce $\left(\mathbb{U} - \omega_k^2\mathbb{T}\right)\vec{a}_k = 0$.

6. Obecné řešení pohybu je pak tvaru

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k\vec{a}_k\cos(\omega_k t + \varphi_k)\,.$$

Malé kmity

V Taylorově rozvoji funkce potenciálu $U(\vec{x})$ je první nenulový člen právě druhý řád rozvoje. Označíme-li si $\mathbb{U}_{ij}$ jako

$$\mathbb{U}_{ij} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\vec{x}=0}, \tag{1}$$

máme rozvoj funkce $U(\vec{x})$ ve tvaru

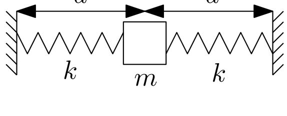
$$U(\vec{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\mathbb{U}_{ij}x_i x_j + \dots \tag{2}$$

Zanedbáním všech vyšších řádů dostaneme přibližné vyjádření

$$U_{\text{malé}}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\mathbb{U}_{ij}x_i x_j = \frac{1}{2}\vec{x}^T\,\mathbb{U}\,\vec{x}, \tag{3}$$

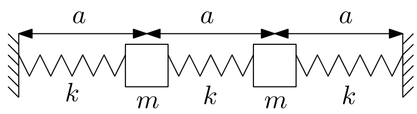
které je přesně tvaru, který potřebujeme do metody módů.

Cvičení 3.1 Sestavte potenciál pro podélné a příčné kmity závaží na pružinách jako na obrázku. Délka nenatažených pružin je a_0.



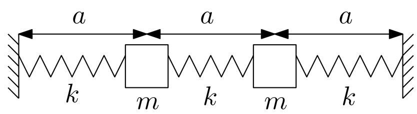
Nalezněte tvary těchto potenciálů v aproximaci malých kmitů.

Cvičení 3.2 Sestavte pohybové rovnice pro podélné kmity soustavy na obrázku. Délka nenatažených pružin je a_0.



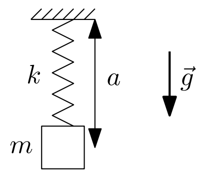
Nalezněte jejich řešení metodou módů.

Cvičení 3.3 Napište potenciál pro příčné kmity soustavy na obrázku. Délka nenatažených pružin je a_0.

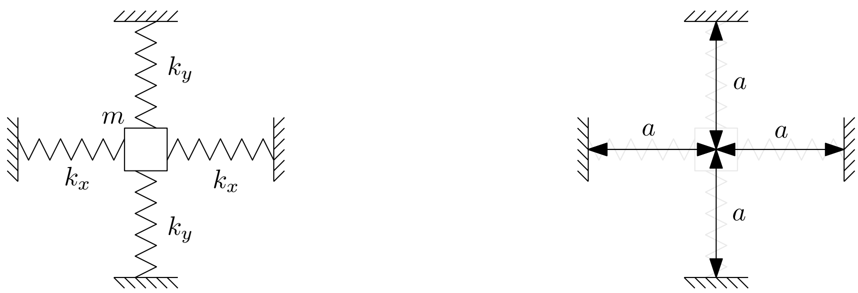


Nalezněte jeho tvar v aproximaci malých kmitů. Jak se liší od potenciálu pro podélné kmity?

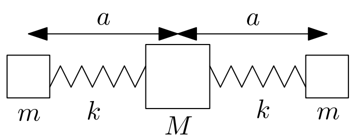
Cvičení 3.4 Nalezněte potenciál pružinového kyvadla (viz obrázek) v aproximaci malých kmitů. Kyvadlo může vykonávat 2D pohyb ve svislé rovině.



Cvičení 3.5* Nalezněte potenciál pružinového kyvadla (viz obrázek) v aproximaci malých kmitů. Kyvadlo může vykonávat 2D pohyb ve svislé rovině.



Cvičení 3.6 Nalezněte řešení pohybových rovnic následující mechanické soustavy pomocí metody módů. Povolený je pouze podélný pohyb.



Je nalezené řešení úplné? „Kde se stala chyba?“

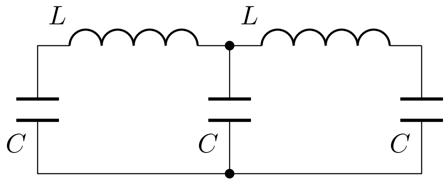
Cvičení 3.7 Uvažujte obecné řešení pohybu systému ve tvaru

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Nalezněte konkrétní řešení pro počáteční podmínky

$$x_1(0) = A \neq 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0.$$

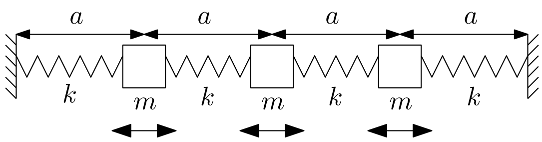
Cvičení 3.8* Nalezněte obecné řešení pro proudy v jednotlivých větvích v následujícím LC obvodu.



Další příklady na domácí procvičování:

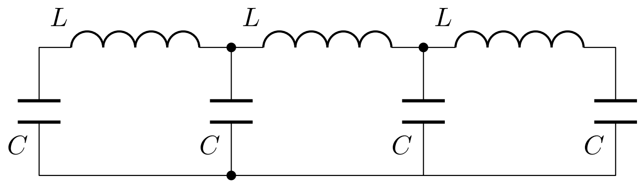
Cvičení 3.9 Pohybové rovnice. Nalezněte pohybové rovnice a k nim příslušné matice $\mathbb{T}$ a $\mathbb{U}$, definované pomocí $\mathbb{T}\ddot{\vec{x}} + \mathbb{U}\vec{x} = 0$.

a) Sestavte pohybové rovnice pro tři podélně kmitající závaží na čtyřech pružinkách.



Obrázek 3.2: Podélné kmity třech závaží na čtyřech pružinkách.

b) Sestavte rovnice pro proudy v následujícím trojitém LC obvodu.



Obrázek 3.3: Trojitý LC obvod.

Cvičení 3.10 Módy systému. Nalezněte módy a obecné řešení tvaru

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \vec{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

pro systémy popsané následujícími maticemi $\mathbb{T}$ a $\mathbb{U}$:

a)
$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 6k \end{pmatrix};$$

b)
$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 3m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 5k \end{pmatrix};$$

c)
$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 4k \end{pmatrix};$$

d)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 6k \end{pmatrix};$$

e)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 4k & -2k \\ 0 & -2k & 5k \end{pmatrix};$$

Nápověda: Jedna z vlastních frekvencí je $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

f)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}.$$

Nápověda: Jedna z vlastních frekvencí je $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

g)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 4k \end{pmatrix}.$$

Nápověda: Jedna z vlastních frekvencí je $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

h)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 3m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 4k & -3k \\ 0 & -3k & 6k \end{pmatrix}.$$

Nápověda: Jedna z vlastních frekvencí je $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

Cvičení 3.11 Malé kmity. Nalezněte matice $\mathbb{U}$ pro následující funkce potenciální energie U:

a)

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k\left[x_1^2 + 2\left(x_2 - x_1\right)^2 + 4x_2^2\right],$$

b)

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}k\left[x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2\right],$$

c)

$$U(y) = k\left[\sqrt{a^2 + y^2} - a_0\right]^2$$

d)

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{\left(a + l\sin\frac{x_2}{l} - l\sin\frac{x_1}{l}\right)^2 + l^2\left(\cos\frac{x_2}{l} - \cos\frac{x_1}{l}\right)^2} - a\right]^2 - \\ mgl\left(\cos\frac{x_1}{l} + \cos\frac{x_2}{l}\right).$$

4 Kmity struny a Fourierovy řady

Struna s pevnými konci. Struna délky L s pevnými konci v bodech $z = 0$ a $z = L$ má řešení v podobě následující superpozice módů

$$\psi(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(k_m z) \sin(\omega_m t + \varphi_m), \tag{4}$$

kde

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\, k, \qquad k_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Tedy úhlová frekvence ω a vlnové číslo k splňuje disperzní vztah a vlnové délky módů jsou dané diskrétním výčtem vlnových čísel k_m.

Okrajové podmínky. Uvažujme $z_0 \in \{0, L\}$. Okrajová podmínka pevného konce: $\psi(z_0, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, okrajová podmínka volného konce: $\frac{\partial \psi(z_0,t)}{\partial z} = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Fourierovy řady. Mějme periodickou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s periodou $2L$. Pak Fourierovou řadou f_F funkce f nazveme následující funkci

$$f_F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi z}{L} + b_m \sin \frac{m\pi z}{L} \right), \tag{6}$$

kde koeficienty a_m a b_m jsou dané vztahy:

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(z) \cos \frac{m\pi z}{L}\, dz, \quad m \in \mathbb{N}_0; \qquad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(z) \sin \frac{m\pi z}{L}\, dz, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Pro sudé funkce ($f(x) = f(-x)$), resp. liché funkce ($f(x) = -f(-x)$), se Fourierova řada (6) a vzorce pro koeficienty a_m a b_m (7) zjednoduší. Pro **sudé funkce** dostaneme

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \cos \frac{m\pi z}{L}\, dz, \qquad b_m = 0, \qquad f_F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos \frac{m\pi z}{L}. \tag{8}$$

Pro **liché funkce**:

$$a_m = 0, \qquad b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin \frac{m\pi z}{L}\, dz, \qquad f_F(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin \frac{m\pi z}{L}. \tag{9}$$

Počáteční podmínky. Počáteční podmínky jsou tvořeny počáteční polohou struny a počáteční rychlostí struny (pro jednoduchost volíme, že jsou zadané v čase $t = 0$). Tyto jsou zadané funkcí počáteční polohy $f : \langle 0, L \rangle \to \mathbb{R}$ (musíme zadat počáteční výchylku každého bodu struny) a funkcí počáteční rychlosti $g : \langle 0, L \rangle \to \mathbb{R}$ (to samé pro počáteční rychlost každého bodu struny). Naše hledané konkrétní řešení tedy musí splňovat:

$$\psi(z, 0) = f(z), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(z, 0) = g(z), \quad \forall z \in \langle 0, L \rangle. \tag{10}$$

Abychom tohoto dosáhli, máme k dispozici integrační konstanty A_m a φ_m, jejichž hodnotu chceme určit.

Rozepsané počáteční podmínky. Rozepišme levé strany rovnic (10), tzn. dosaďme čas $t = 0$ do obecného řešení (4) a jeho časové derivace:

$$\psi(z,0) = \sum_{m=1}^{+\infty} (A_m \sin\varphi_m) \sin\frac{m\pi z}{L} = f(z),$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(z,0) = \sum_{m=1}^{+\infty} (A_m\omega_m \cos\varphi_m) \sin\frac{m\pi z}{L} = g(z). \tag{11}$$

Liché prodloužení funkcí f a g. Nyní bychom potřebovali napsat funkce f a g jako Fourierovy řady, které budou obsahovat pouze funkce $\sin\frac{m\pi z}{L}$. Toho snadno dosáhneme, pokud si spočítáme řady funkcí f a g v **lichém prodloužení**:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} f_m \sin\frac{m\pi z}{L}, \qquad g(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} g_m \sin\frac{m\pi z}{L}, \tag{12}$$

kde koeficienty f_m a g_m jsou dané následujícími vzorci:

$$f_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(z)\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)dz, \qquad g_m = \frac{2}{L}\int_0^L g(z)\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)dz. \tag{13}$$

Výsledné rovnice pro koeficienty A_m, φ_m. Vlastní rovnice pro koeficienty A_m a φ_m získáme porovnáním řad (11) a (12) člen po členu:

$$A_m \sin\varphi_m = f_m, \qquad A_m\omega_m\cos\varphi_m = g_m. \tag{14}$$

Cvičení 4.1 Zkrátíme-li strunu o $\Delta l = 10\,\mathrm{cm}$ zvýší se její kmitočet na $\alpha = 150\%$. Vypočítejte délku struny L. Předpokládejte, že napětí struny zůstane stejné.

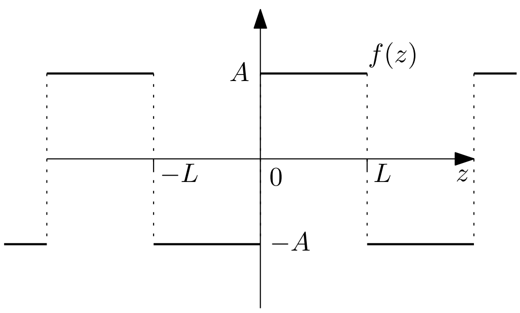
Cvičení 4.2 Klavírní struna dlouhá $L = 1\,\mathrm{m}$ má průměr $d = 0,5\,\mathrm{mm}$ a vydává základní tón C o frekvenci $f = 256\,\mathrm{Hz}$. Hustota této struny je $\rho_{obj} = 9\,\mathrm{g/cm}^3$. Jakou silou T je struna napjata?

Cvičení 4.3 Nalezněte tvary módů pro strunu délky L (nataženou na $z \in \langle 0, L\rangle$) pro volné konce. Předpokládejte řešení ve tvaru módu (stojaté vlny) $\psi(z,t) = X(z)\cos(\omega t + \varphi)$ (resp. komplexifikaci $\hat{\psi}(z,t) = X(z)e^{i\omega t}$). Zapište obecné řešení jako superpozici těchto módů. Nechybí v řešení něco?

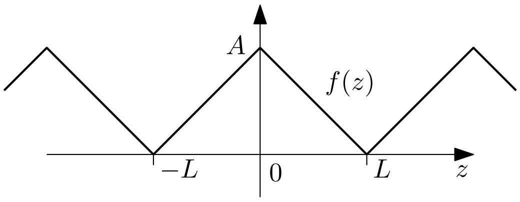
Cvičení 4.4* Stejné zadání jako předchozí příklad s tím rozdílem, že nyní uvažujete jeden konec pevný a druhý volný.

Cvičení 4.5 Vypočtěte Fourierovy řady následujících funkcí f s periodou $2L$.

a) Obdélníkové kmity .



b) *Pilovité kmity .



Cvičení 4.6 Uvažujte strunu s pevnými konci. Nalezněte konkrétní řešení jejího pohybu, jestliže jí necháte kmitat tak, že v čase $t = 0$ je v klidu a má tvar $\psi(z, 0) = A$, kde A je konstanta.

Cvičení 4.7 Uvažujte strunu s pevnými konci. Nalezněte konkrétní řešení jejího pohybu, jestliže je v čase $t = 0$ v rovnovážné poloze a zároveň do ní udeříte kladívkem tak, že úseku struny délky Δz vystředovanému okolo bodu $L/2$ udělíte rychlost v_0.

Cvičení 4.8* *Počáteční úloha pro strunu s volnými konci.* Modifikujte postup pro hledání konkrétního řešení ze zadaných počátečních podmínek pro strunu délky L s volnými konci. Obecné řešení z metody separace proměnných vyjde například tvaru

$$\psi(z,t) = z_0 + v_0 t + \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \cos k_m z \, \sin(\omega_m t + \varphi_m), \quad \text{kde} \quad k_m = \frac{m\pi}{L} \quad \text{a} \quad \omega_m = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k_m.$$

5 Postupné a stojaté vlny

d'Alembertovo řešení vlnové rovnice je řešení tvaru

$$\psi(z,t) = F(z - vt) + G(z + vt),$$

kde funkce $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ představují postupnou vlnu šířící se v kladném směru osy z, resp. v záporném směru.

Zdroj vlnění umístěný v $z = 0$ kmitající dle předpisu $x(t)$ vysílá do kladného směru osy z postupnou vlnu tvaru

$$\psi(z,t) = x(t_r),$$

kde $t_r = t - \frac{z}{v}$ je tzv. retardovaný čas.

Harmonická postupná vlna je vlna tvaru

$$\psi(z,t) = A\cos(\omega t - kz + \varphi), \qquad \hat{\psi}(z,t) = Ae^{i(\omega t - kz + \varphi)},$$

kde úhlová rychlost ω udává periodu T vztahem $T = \frac{2\pi}{\omega}$, vlnové číslo k udává vlnovou délku λ vztahem $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Tok energie na struně je dán vztahem

$$S = -T\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Cvičení 5.1 Dvě znějící ladičky vydávají 20 rázů za 10 sekund. Jedna ladička má kmitočet 256 Hz. Jaká je frekvence druhé ladičky?

Cvičení 5.2 Jaká je amplituda, perioda, fázová rychlost a vlnová délka vlny, vyjádřené v soustavě SI rovnicí

$$\psi(z,t) = 4.10^{-2}\sin[2\pi(8t + 5z)]\,?$$

Cvičení 5.3 *Superpozice postupných vln stejným směrem je postupná vlna.* Ukažte, že součet

$$A_1\cos(\omega t - kz + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t - kz + \varphi_2)$$

se dá napsat jako $A\cos(\omega t - kz + \varphi)$. Určete hodnoty konstant A a φ.

Cvičení 5.4 *Superpozice proti sobě postupných vln je stojatá vlna.* Ukažte, že součet

$$A\cos(\omega t - kz + \varphi_1) + A\cos(\omega t + kz + \varphi_2)$$

je tvaru $X(z)\cos(\omega t + \varphi)$. Určete tvar funkce $X(z)$ a hodnotu konstanty φ.

Cvičení 5.5 Dva zdroje na ose z v místě $z = -d$ a $z = d$ kmitají dle předpisu $x_1(t) = x_2(t) = A\cos(\omega t)$ a vysílají vlny do obou směrů. Určete výsledné postupné vlny od jednotlivých zdrojů a diskutujte charakter jejich superpozice.

Cvičení 5.6 Mějme homogenní strunu nataženou od $z = 0$ do $z = +\infty$. Struna má délkovou hustotu $\rho = 0,1\,\mathrm{g.cm^{-1}}$ a je napjata silou $T = 400\,\mathrm{N}$. Počátek struny $z = 0$ vykonává harmonický pohyb o frekvenci $f = 100\,\mathrm{Hz}$ s amplitudou $A = 1\,\mathrm{cm}$. Jaká je časová střední hodnota toku energie ve watech?

Cvičení 5.7 Ukažte, že vektor toku energie na struně, po které se šíří proti sobě postupující vlny, je roven součtu toků energií příslušných jednotlivým vlnám.

Návod: Uvažujte d'Alembertovo řešení a využijte vztah mezi derivacemi podle z a t u postupných vln.

Cvičení 5.8 Dvě harmonické postupné vlny se šíří stejným směrem na struně v superpozici. Mají stejnou vlnovou délku a úhlovou frekvenci. Jestliže intenzita (časová střední hodnota toku energie) každé z vln je I, jaký musí být fázový posun těchto vln, aby výsledná intenzita byla 0, I, $2I$, $4I$?

6 Vlnové balíky, relace neurčitosti, grupová rychlost

Fourierova transformace

$$f(t) = \int_0^{+\infty} A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\, d\omega.$$

Spektrální funkce

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt, \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt.$$

Relace neurčitosti

$$\Delta\omega\, \Delta t \geq \pi$$

Grupová rychlost a fázová rychlost

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \qquad v_\varphi = \frac{\omega}{k}.$$

Cvičení 6.1 Nalezněte tvar vlnového balíku $f(t)$ pro spektrum tvaru $B(\omega) = 0$ a

$$A(\omega) = \begin{cases} A_0 & \text{pro } \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ukažte, jak souvisí šířka frekvenčního spektra $\Delta\omega$ s dobou trvání balíku Δt zde definovanou jako vzdálenost prvních nulových bodů amplitudové obálky vlnového balíku.

Cvičení 6.2 Mějte obdélníkový puls $f(t)$ tvaru

$$f(t) = \begin{cases} A_0 & \text{pro } -\frac{\Delta t}{2} \leq t \leq \frac{\Delta t}{2}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete jeho spektrum. Ukažte, jak souvisí doba trvání pulsu Δt s šířkou jeho frekvenčního spektra $\Delta\omega$ zde definovanou jako první nula frekvenčního spektra.

Cvičení 6.3* Uvažujte tlumené kmitání $f(t)$ tvaru

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nalezněte jeho spektrum. Použijte výsledků cvičení 2.13.

Cvičení 6.4 WiFi svým vysíláním zabírá rozsah frekvencí 20 MHz (šířka kanálu). Odhadněte, jakou bude mít přenosovou rychlost. Využijte relace neurčitosti.

Cvičení 6.5* Odhadněte maximální frekvenci trylku[3] f_{trylek} dvou tónů vzdálených o půltón[4] v závislosti na frekvenci jednoho z tónů v trylku f. Využijte relace neurčitosti. Proč se na tubu netrylkuje?

[3] Rychlé střídání dvou blízkých tónů.

[4] Oktáva se dělí do dvanácti půltónů. Posun o oktávu znamená změny frekvence na dvojnásobek nebo polovinu. Posun o půltón pak znamená změnu frekvence faktorem $\sqrt[12]{2}$.

Cvičení 6.6 Lineární disperzní vztah je vztah tvaru $\omega = vk$, kde $v =$ konst.. Takovému prostředí se říká nedisperzní prostředí. Určete fázovou a grupovou rychlost.

Cvičení 6.7 Určete fázovou a grupovou rychlost pro elektromagnetické vlny v plazmatu. Toto prostředí je popsané disperzním vztahem

$$\omega^2 = \omega_{min}^2 + c^2 k^2.$$

Je fázová a grupová rychlost větší nebo menší než rychlost světla? Co to znamená?

Cvičení 6.8 Uvažujte světlo v látce o indexu lomu n, tento je definován jako $n = \frac{c}{v_\varphi}$. Index lomu v látce je pro jednoduchý model elektronů popsán jako

$$n(\omega) = 1 + \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

kde $\alpha > 0$ a uvažujeme pouze $\omega < \omega_0$. Určete grupovou rychlost a ukažte, že je menší než rychlost světla.

Cvičení 6.9 Ukažte, že pro světlo v prostředí s indexem lomu $n(\lambda_0)$, kde λ_0 je vlnová délka světla *ve vakuu*, platí

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_\varphi} - \frac{\lambda_0}{c}\frac{dn}{d\lambda_0}.$$

7 Odrazy

Při studiu odrazů pomocí harmonických vln uvažuji dopadající vlnu tvaru

$$\psi_{dop} = Ae^{i(\omega t - k_1 z)}$$

a hledám odraženou a prošlou vlnu tvarů

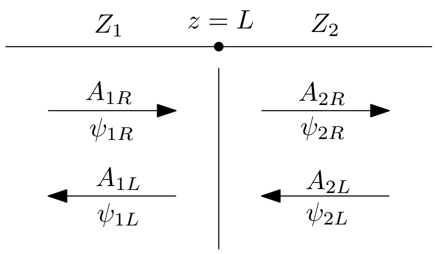
$$\psi_{odr} = ARe^{i(\omega t + k_1 z)}, \qquad \psi_{pr} = ATe^{i(\omega t - k_2 z)}.$$

Koeficienty R a T jsou určené příslušnými podmínkami napojení na rozhraní.

Matice přenosu $\mathbb{D} \in \mathbb{C}^{2,2}$ je definována následující rovnicí:

$$\begin{pmatrix} A_{1R} \\ A_{1L} \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} A_{2R} \\ A_{2L} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

kde A_{iLR} jsou amplitudy vln ψ_{iLR} postupující jako na následujícím obrázku:



Matice $\mathbb{D}$ je daná příslušnými podmínkami napojení vln na rozhraní.

Pro studium odrazu na jednom rozhraní při zadané matici přenosu řeším rovnice

$$\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde R je koeficient odrazu a T je koeficient průchodu.

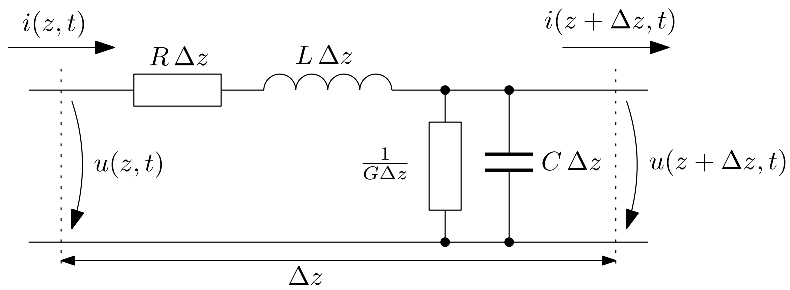
Pro dvě rozhraní (kdy každému z nich přísluší matice přechodu $\mathbb{D}_1$ a $\mathbb{D}_2$) je rovnice pro koeficient průchodu a odrazu následující:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = \mathbb{D}_1 \mathbb{D}_2 \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 7.1* Odvoďte telegrafní rovnice pro napěťové a proudové vlny $u(z,t)$ a $i(z,t)$ na homogenním vedení

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial i}{\partial z} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t},$$

kde L je indukčnost vedení na jednotku délky, $[L] = \mathrm{H.m}^{-1}$, C kapacita, $[C] = \mathrm{F.m}^{-1}$, R je odpor, $[R] = \Omega.\mathrm{m}^{-1}$ a $G = \frac{1}{R'}$ je svodová vodivost, $[G] = \Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$. Rovnice odvoďte analýzou náhradního obvodu vedení délky Δz:



Cvičení 7.2 Uvažujte ideální homogenní vedení, kde $R = 0$ a $G = 0$. Ukažte, že z telegrafních rovnic (viz předchozí cvičení) plynou vlnové rovnice pro funkce $u(z,t)$ a $i(z,t)$. Nalezněte d'Alembertovo řešení splňující původní telegrafní rovnice.

Návod: Uvažujte ansatz v podobě d'Alembertových řešení

$$u(z,t) = F(z - vt) + G(z + vt), \qquad i(z,t) = \alpha_1 F(z - vt) + \alpha_2 G(z + vt).$$

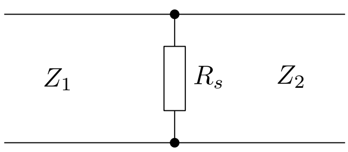
Koeficient úměrnosti mezi napěťovou a proudovou vlnou se nazývá impedance Z („zobecnění Ohmova zákona“).

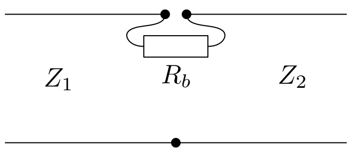
Cvičení 7.3 Homogenní vedení o impendanci Z je zakončeno svodovým odporem velikosti R_s. Nalezněte koeficient odrazu R pro napěťové vlny přicházející po vedení. Diskutujte speciální případy $R_s = 0$ (zkrat) a $R_s = +\infty$ (nezapojený odpor). Použijte harmonických postupných vln.

Cvičení 7.4 Homogenní vedení o impedanci $Z_1 = 50\,\Omega$ je napojeno na vedení o impedanci $Z_2 = 100\,\Omega$. Nalezněte koeficienty průchodu P a odrazu R pro napěťové vlny procházející z prvního vedení na druhé. Pokud na rozhraní dopadá puls o amplitudě 15 V, jaká bude amplituda prošlé a odražené vlny?

Návod: Sestavte příslušné podmínky napojení. Použijte harmonické postupné vlny.

Cvičení 7.5 Homogenní vedení o impedanci $Z_1 = 50\,\Omega$ je napojeno na vedení o impedanci $Z_2 = 100\,\Omega$ následujícími dvěma způsoby:





Nalezněte koeficienty průchodu a odrazu pro napěťové vlny tyto dvě situace. Za jakých podmínek nedochází k odrazu? Použijte harmonické postupné vlny. Zapište podmínky napojení a vyřešte je.

Cvičení 7.6 Uvažujte tři na sebe navazující prostředí prostřednictvím dvou rozhraní, jedno v $z = 0$ a druhé v $z = L$. Označme amplitudové koeficienty průchodu a odrazu jako R_{ij} a T_{ij} představující koeficienty průchodu a odrazu při přechodu z i-tého do j-tého prostředí. Vlnová čísla v jednotlivých prostředích jsou k_1, k_2, k_3. Uvažujte harmonickou dopadající vlnu tvaru $Ae^{i(\omega t - k_1 z)}$. Nalezněte celkový koeficient odrazu $R \in \mathbb{C}$, tzn. celkovou odraženou vlnu tvaru $ARe^{i(\omega t + k_1 z)} = A|R|e^{i(\omega t + k_1 z + \varphi)}$ vzniklou nekonečnou superpozicí odražených vln mezi dvěma rozhraními. Na rozhraních požadujte spojitost funkcí fáze jednotlivých vln.

Na závěr specializujte výsledek, uvažujete-li vztahy $1 + R_{ij} = T_{ij}$ a $R_{ij} = -R_{ji}$.

Cvičení 7.7* Nalezněte celkový koeficient průchodu $T \in \mathbb{C}$, tzn. celkovou prošlou vlnu $ATe^{i(\omega t - k_3 z)} = A|T|e^{i(\omega t - k_3 z + \varphi)}$ pro situaci popsanou v předchozím cvičení.

Cvičení 7.8 Je dána matice přenosu $\mathbb{D}$. Nalezněte koeficienty průchodu T a odrazu R pro vlnu dopadající z prvního (levého) prostředí do druhého (pravého).

Cvičení 7.9 Jsou dány koeficienty průchodu a odrazu, T a R, pro vlnu dopadající z prvního do druhého prostředí, a koeficienty T' a R' pro vlnu dopadající z druhého prostředí do prvního. Nalezněte příslušný tvar matice přenosu $\mathbb{D}$. Specializujte tvar této matice předpokládáte-li, že $R' = -R$ a $1 + R = T$ (a $1 + R' = T'$).

Cvičení 7.10 Uvažujte rozhraní definovaná ve cvičení 7.6. Napište matice přenosu pro jednotlivá rozhraní analýzou odrazů harmonických vln na jednotlivých rozhraní za využití výsledku cvičení 7.9. Tyto matice složte a pomocí výsledku příkladu 7.8 se přesvědčte, že celkový koeficient odrazu R pro dvě rozhraní vyjde stejně jako ve cvičení 7.6.

Cvičení 7.11* To samé jako v předchozím cvičení pro celkový koeficient průchodu T.

Cvičení 7.12* Uvažujte napojení dvou strun se stejným napětím v $z = L$. Matice přenosu je tvaru

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)e^{i(k_1-k_2)L} & \left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)e^{i(k_1+k_2)L} \\ \left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)e^{-i(k_1+k_2)L} & \left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)e^{-i(k_1-k_2)L} \end{pmatrix}.$$

Nalezněte celkovou matici přenosu pro dvě rozhraní tří strun. Rozhraní jsou na $z = 0$ a $z = L$. Pomocí celkové matice přenosu nalezněte celkový koeficient odrazu R.

8 Vlny v prostoru

3D vlnová rovnice je rovnice tvaru

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \Delta \psi = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right).$$

Δ je Laplaceův operátor, v je konstantní fázová rychlost.

Cvičení 8.1 Ukažte, že harmonická postupná rovinná vlna tvar $\psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ splňuje 3D vlnovou rovnici za předpokladu splnění disperzního vztahu. Nalezněte jej.

Cvičení 8.2 Nalezněte disperzní vztah vlnové rovnice tvarů:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \Delta \psi - \omega_0 \psi, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \Delta \psi - \alpha \Delta(\Delta \psi).$$

Dosaďte harmonickou postupnou vlnu.

Cvičení 8.3 Ukažte, že postupná rovinná vlna tvaru $\psi(\vec{r}, t) = F(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt)$, kde $|\vec{n}| = 1$ a $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je libovolná dvakrát diferencovatelná funkce, splňuje 3D vlnovou rovnici.

Cvičení 8.4* Ukažte, že sférická vlna tvaru $\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)}$ splňuje 3D vlnovou rovnici za předpokladu splnění disperzního vztahu $\omega = vk$.

Cvičení 8.5 Superpozice prostorových vln. Uvažujte dvě rovinné postupné harmonické vlny, mezi jejichž směry postupu je úhel $\Delta\varphi$. Uvažujte rovinné stínítko, které je kolmé na „průměrný směr“ postupu těchto vln. Nalezněte průběh intenzity (tzn. časové střední hodnoty kvadrátu) výsledné superpozice na stínítku. Určete vzdálenost Δy interferenčních maxim.

Cvičení 8.6 Uvažujte rovinné rozhraní dvou transparentních prostředí s indexy lomu n_1 a n_2. Uvažujte dopadající a prošlou harmonickou postupnou vlnu. Vlnové vektory $\vec{k}_1$ a $\vec{k}_2$ leží v rovině kolmé na rovinu rozhraní a s normálovým vektorem svírají úhel ϑ_1, resp. ϑ_2. Na základě podmínky $\vec{k}_{1\|} = \vec{k}_{2\|}$ (tato podmínka plyne z podmínky spojitosti tečných složek elektrického pole na rozhraní, $\vec{E}_{1\|} = \vec{E}_{2\|}$) odvoďte Snellův zákon lomu.

Cvičení 8.7 Mějme stejné zadaní jako v předchozí úloze. Uvažujte nyní rozhraní těchto dvou prostředí: transparentní prostředí o indexu lomu n a ionosféru s plazmovou frekvencí ω_p. Odvoďte příslušný zákon lomu.

Cvičení 8.8 Ukažte, že elektromagnetická stojatá vlna tvaru

$$\vec{E} = (A\cos\omega t \cos kz, 0, 0), \qquad \vec{B} = (0, \tfrac{1}{c} A \sin\omega t \sin kz, 0),$$

kde $\omega = ck$, splňuje Maxwellovy rovnice ve vakuu. Určete hustotu elektrické a magnetické energie a Poyntingův vektor.

Cvičení 8.9 *Larmorova formule.* Ukažte, že integrací Poyntingova vektoru $\vec{S}$ radiačního pole $\vec{E}_{\mathrm{rad}}$ od urychleného náboje,

$$\vec{E}_{\mathrm{rad}}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{c^2} \frac{\vec{a}_\perp(t_r)}{r},$$

přes sféru poloměru r dostanete Larmorovu formuli pro celkový vyzařovaný výkon P vysílané elektromagnetické vlny,

$$P(t, r) = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2(t_r).$$

Retardovaný čas t_r je $t_r = t - \frac{r}{c}$. Poyntingův vektor má tvar $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 \,\vec{n}$, kde $\vec{n}$ je směr šíření kolmý na myšlenou sféru.

Cvičení 8.10 Uvažujte vlnovod obdélníkového průřezu s rozměry $a = 5\,\mathrm{cm}$ a $b = 10\,\mathrm{cm}$. Jakou nejnižší frekvenci f_0 může mít elektromagnetická vlna, aby prošla vlnovodem bez tlumení? Vypočtěte fázovou a grupovou rychlost (jako násobek c), jejíž frekvence je $f = \frac{5}{4} f_0$. Jaký nejvyšší mód m_0 lze vybudit pro šířící se vlnu této frekvence? Pro vlnu s frekvencí $f = \frac{4}{5} f_0$ určete vzdálenost, na níž amplituda vlny poklesne e-krát.

9 Polarizace

Postupná elektromagnetická vlna šířící se ve směru osy z má obecně elektrickou složku v komplexifikovaném tvaru (pro $z = z_0$)

$$\vec{E}(t) = E_{x0}\,\vec{x}\,e^{i(\omega t+\varphi_1)} + E_{y0}\,\vec{y}\,e^{i(\omega t+\varphi_2)} = \begin{pmatrix} E_{x0}e^{i\varphi_1} \\ E_{y0}e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \hat{\vec{E}} e^{i\omega t},$$

kde $\vec{x}$, resp. $\vec{y}$ jsou jednotkové vektory ve směru osy x, resp. y. Obecně hovoříme o elipticky polarizovaném světle.

Polarizátor (lineární polarizátor) je definován svou osou propustnosti $\vec{n}$ a jeho akce je dána

$$\vec{E}_{\text{out}} = (\vec{E}_{\text{in}} \cdot \vec{n})\,\vec{n}, \qquad \hat{\vec{E}}_{\text{out}} = \mathbb{P}_{\vec{n}} \hat{\vec{E}}_{\text{in}},$$

kde $\mathbb{P}_{\vec{n}}$ je projektor na osu $\vec{n}$,

$$\mathbb{P}_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y \\ n_x n_y & n_y^2 \end{pmatrix}.$$

Vlnová destička je charakterizovaná fázovým posunem a osou $\vec{n}_1$ (a k ní kolmou osou $\vec{n}_2$). Je-li vstupující světlo ve tvaru

$$\vec{E}_{\text{in}}(t) = E_1\,\vec{n}_1\,e^{i(\omega t+\varphi_1)} + E_2\,\vec{n}_2\,e^{i(\omega t+\varphi_2)},$$

potom výstupní světlo je dáno jako

$$\vec{E}_{\text{out}}(t) = E_1\,\vec{n}_1\,e^{i(\omega t+\varphi_1+\Delta\varphi)} + E_2\,\vec{n}_2\,e^{i(\omega t+\varphi_2)}.$$

Operátor $\mathbb{D}_{\Delta\varphi}$ definovaný vztahem $\hat{\vec{E}}_{\text{out}} = \mathbb{D}_{\Delta\varphi}\hat{\vec{E}}_{\text{in}}$ je tvaru

$$\mathbb{D}_{\Delta\varphi} = e^{i\Delta\varphi}\,\mathbb{P}_{\vec{n}_1} + \mathbb{P}_{\vec{n}_2}.$$

Intenzita světla je dána vztahem

$$I = \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2}\big(E_{x0}^2 + E_{y0}^2\big).$$

Stokesovy parametry jsou dané vzorci

$$P_1 = \frac{\langle E_x^2\rangle - \langle E_y^2\rangle}{\langle E_x^2\rangle + \langle E_y^2\rangle}, \qquad P_2 = \frac{\langle 2E_xE_y\rangle}{\langle E_x^2\rangle + \langle E_y^2\rangle}, \qquad P_3 = \frac{\langle 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y\rangle}{\langle E_x^2\rangle + \langle E_y^2\rangle}.$$

Cvičení 9.1 Jak se změní intenzita kruhově polarizovaného světla po průchodu polarizátorem?

Cvičení 9.2 Jak se změní intenzita nepolarizovaného světla po průchodu lineárním polarizátorem?

Cvičení 9.3 Otočení roviny lineárně polarizovaného světlo o 90°. Uvažujte lineárně polarizované světlo $\vec{E} = E_0\vec{x}\cos(\omega t)$. Dejte mu do cesty N polarizátorů, každý s osou propustnosti otočenou o $\frac{\pi}{2N}$ oproti předchozímu (a první oproti rovině dopadajícího světla). Jaká bude intenzita prošlého světla pro $N = 1$, $N = 2$ a obecné $N \in \mathbb{N}$? *Jaká je limita pro $N \to +\infty$?

Cvičení 9.4 Uvažujte obecně elipticky polarizované světlo. Vložíte mu do cesty polarizátor s osou propustnosti $\vec{n} = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Ukažte, že pro intenzitu výstupního světla platí

$$I_{\text{out}} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + I_{xy},$$

kde

$$I_{\text{out}} = \langle E_{\text{out}}^2 \rangle, \qquad I_x = \langle E_x^2 \rangle, \qquad I_y = \langle E_y^2 \rangle, \qquad I_{xy} = \langle E_x E_y \rangle,$$

E_x a E_y jsou složky elektrického pole ve směrech $\vec{x}$ a $\vec{y}$ pro vstupující světlo.

Cvičení 9.5 Indexy lomu krystalického křemene pro světlo o vlnové délce ve vakuu $\lambda_0 = 500\,\text{nm}$ jsou $n_1 = 1,544$ a $n_2 = 1,553$. Určete nejmenší tloušťku čtvrtvlnové destičky vyrobené z tohoto materiálu.

Cvičení 9.6 Zapište matici $\mathbb{D}_{\Delta\varphi}$ pro vlnovou destičku s osami $\vec{n}_1 = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$ a $\vec{n}_2 = \frac{\vec{y}-\vec{x}}{\sqrt{2}}$.

Cvičení 9.7 Otočení roviny lineárně polarizovaného světlo o 90° podruhé. Uvažujte lineárně polarizované světlo $\vec{E} = E_0\vec{x}\cos(\omega t)$. Dejte mu do cesty půlvlnovou destičku s osou orientovanou ve směru $\vec{n} = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Jaký polarizační stav bude mít světlo po průchodu destičkou? Jak se změní intenzita?

Cvičení 9.8 Kruhový polarizátor je (lineární) polarizátor, za kterým následuje čtvrtvlnová destička s osami natočenými o 45° oproti ose propustnosti linárního polarizátoru.

Ukažte, že v závislosti na volbě os vlnové destičky dostaneme levotočivý nebo pravotočivý kruhový polarizátor, který jakékoliv světlo přicházející ze strany lineárního polarizátoru převádí na korespondující kruhově polarizované světlo.

Ukažte, že levotočivě polarizované světlo přicházející ze strany vlnové destičky se pohltí v pravotočivém polarizátoru.

Cvičení 9.9 Do optického přístroje vstupuje lineárně polarizované světlo ve směru osy $\vec{x}$ s intenzitou I_0. Určete intenzitu světla po průchodu přístrojem, skládá-li se po řadě z následujících optických elementů:

- Polarizátor s osou $\vec{n} = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$.
- Půlvlnová destička s osou $\vec{n} = \vec{y}$.
- Polarizátor s osou $\vec{y}$.
- Čtvrtvlnová destička s osou $\vec{n} = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$.

Cvičení 9.10* Jakým hodnotám Stokesových parametrů P_1, P_2 a P_3 odpovídá lineárně polarizované světlo, resp. kruhově polarizované světlo? Výsledky zakreslete.

Cvičení 9.11* Světlo dopadající na lineární polarizátor je směsí lineárně polarizovaného světla a nepolarizovaného světla. Pokud polarizátorem otočíte o 60° oproti natočení s maximální prošlou intenzitou dostanete intenzitu poloviční. Určete poměr intenzit nepolarizovaného a lineárně polarizovaného světla ve směsi.

Cvičení 9.12* Směr polarizace lineárně polarizovaného světla se rychle mění (mnohem rychleji než je rozlišovací doba Vašeho měřícího přístroje) mezi následujícími dvěma stavy: $\vec{n} = (\cos\theta_0, \pm\sin\theta_0)$, kde $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$. Vypočtěte Stokesovy parametry. Určete $|\vec{P}| = |(P_1, P_2, P_3)|$.

10 Interference

Cvičení 10.1* *Fabry-Pérotův etalon.* Uvažujte výsledek cvičení 7.6, tj. koeficient celkového odrazu na dvou rozhraních,

$$R = \frac{R_{12} + R_{23}e^{-2ik_2L}}{1 + R_{12}R_{23}e^{-2ik_2L}},$$

kde R_{12} a R_{23} jsou koeficienty odrazu jednotlivých rozhraní, k_2 je vlnové číslo v prostředí mezi rozhraními a L je vzdálenost mezi rozhraními. Nyní uvažujte, že jsou rozhraní tvořena stejnými polopropustnými zrcadly, tj. $R_{12} = R_{23} = r$. Nalezněte vztah mezi vlnovou délkou λ a vzdáleností mezi zrcadly L, při kterém je celková odrazivost $\mathcal{R} = |R^2|$ nulová.

Cvičení 10.2 *Skleněný klín.* Rovinné povrchy skleněného klínu o indexu lomu $n = 1,5$ svírají velmi malý úhel $\varphi = 0,1'$. Na klín dopadá kolmo světlo o vlnové délce $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$. Vypočtěte vzdálenost interferenčních proužků, které vzniknou v odraženém světle.

Návod: Nalezněte úhel mezi vystupujícími paprsky a použijte výsledek příkladu 8.5.

Cvičení 10.3* *Vzduchový klín.* Vzduchový klín je ohraničen dvěma dokonale rovinnými skleněnými deskami s indexem lomu $n = 1,5$, které svírají velmi malý úhel φ. Tento úhel je dán tím, že mezi skleněné desky byl vložen ve vzdálenosti $L = 10\,\mathrm{cm}$ od jejich dotýkajících se okrajů proužek alobalu tloušťky $d = 0,02\,\mathrm{mm}$. Na klínovou vrstvu dopadá kolmo sodíkové světlo s vlnovou délkou $\lambda = 589\,nm$. Určete vzdálenost interferenčním proužků v a) odraženém a b) prošlém světle.

Návod: Nalezněte úhel mezi vystupujícími paprsky a použijte výsledek příkladu 8.5.

Cvičení 10.4 *Mýdlová blána alias interference na tenké vrstvě.* Máte rovinnou mýdlovou blánu tloušťky d o indexu lomu n. Pozorujete-li odraz světla pod úhlem ϑ na mýdlové bláně, vlivem konstruktivní interference pro určitou vlnovou délku světla λ vidíte blánu zbarvenou. Nalezněte podmínku pro konstruktivní interferenci pro parametry tloušťky blány d, úhlu dopadu (a odrazu) ϑ, vlnovou délkou světla λ (a indexu lomu $\vec{n}$).

11 Difrakce

Poloha interferenčních maxim na dvou tenkých štěrbinách, difrakční mřížce a štěrbině konečné šířky je dána

$$\sin\theta_m = m\frac{\lambda}{d}, \qquad y_m = mL\frac{\lambda}{d},$$

kde d je vzdálenost štěrbin, resp. vzdálenost sousedních štěrbin v difrakční mřížce, resp. šířka štěrbiny. Úhel θ_m označuje úhel, pod kterým interferenční maximum pozorujeme. Vzdálenost y_m pak představuje vzdálenost od počátku na stínítku. Hodnotu m nazýváme řádem maxima. Vzdálenost jednotlivých maxim pak je (pro malá m)

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{d}, \qquad \Delta y = L\frac{\lambda}{d}.$$

Pro difrakční mřížku je šířka difrakčních maxim (vzdálenost mezi prvními nulami intenzity okolo maxima) zmenšena na

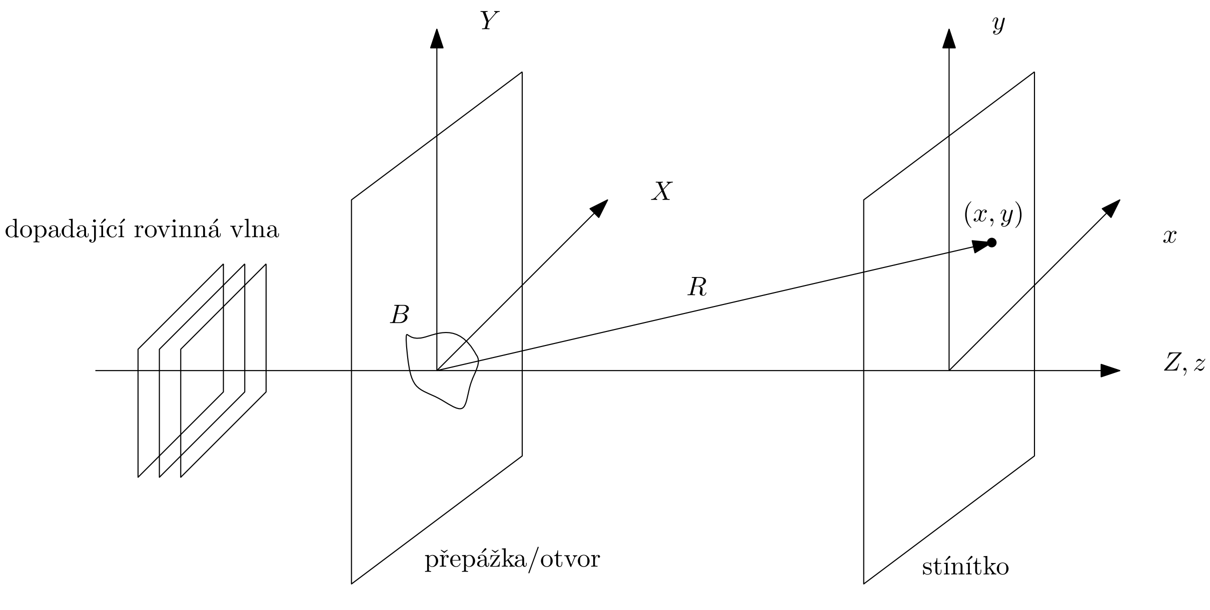
$$\delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd}, \qquad \delta y = \frac{2L\lambda}{Nd},$$

kde N je počet vrypů/štěrbin difrakční mřížky.

Fraunhoferův difrakční integrál

$$E(x,y) = \frac{E_0}{R}e^{i(\omega t - kR)}\int_B e^{i\frac{k}{R}(xX+yY)}\,dX\,dY.$$

Rovina přepážky má kartézské souřadnice X, Y. Rovina stínítka má souřadnice x, y. B představuje překážku/otvor v přepážce (z Babinetova principu jsou tyto situace ekvivalentní), R je vzdálenost od počátku v přepážce/otvoru do místa (x, y) na stínítku, $R = \sqrt{L^2 + x^2 + y^2}$, kde L je kolmá vzdálenost stínítka a přepážky/otvoru.



Cvičení 11.1 Maximum jakého největšího řádu můžete pozorovat v zeleném světle o vlnové délce $\lambda = 550\,\text{nm}$ pro difrakční mřížku s 5000 vrypy na 1 cm?

Cvičení 11.2 Mohou se překrývat spektra 1. a 2. řádu a spektra 2. a 3. řádu vznikající na difrakční mřížce, osvětlíme-li ji bílým světlem složeným z vlnových délek $400 - 700\,\mathrm{nm}$?

Cvičení 11.3* Difrakční mřížka má 500 vrypů na 1 mm. Vypočítejte její tzv. disperzi, tj. veličinu $\frac{d\theta}{d\lambda}$, v okolí zeleného světla ($\lambda = 500\,\mathrm{nm}$) pro první a druhý řád.

Cvičení 11.4 Žluté světlo vyzařované atomy sodíku je dominované tzv. sodíkovým dubletem, jehož vlnové délky jsou $\lambda_1 = 589{,}0\,\mathrm{nm}$ a $\lambda_2 = 589{,}6\,\mathrm{nm}$. Kolik vrypů musí mít difrakční mřížka, aby bylo možné tyto dvě vlnové délky rozlišit ve spektru prvního řádu?

Cvičení 11.5 Laserovému paprsku o vlnové délce $\lambda = 632{,}8\,\mathrm{nm}$ postavíte do cesty vlas průměru d. Na stínítku ve vzdálenosti $L = 6\,\mathrm{m}$ pozorujete difrakční maxima ve vzdálenosti $\Delta l = 3$ cm. Jaký je průměr vlasu?

Cvičení 11.6 *Difrakční obrazec obdélníkové štěrbiny.* Nalezněte difrakční obrazec (tzn. nalezněte průběh intenzity na stínítku) obdélníkové stěrbiny o rozměrech a, b.

Cvičení 11.7 *Difrakční obrazec dvou štěrbin.* Najděte difrakční obrazec dvou štěrbin šířky D, jejichž středy jsou ve vzdálenosti d, pro jednoduchost pouze pro $y = 0$.

Návod: Využijte výsledku předchozího příkladu pro $y = 0$. Ukažte, jak se mění difrakční integrál posunete-li štěrbinu o $\pm\frac{d}{2}$ podél osy X. Sečtěte pole od dvou takto posunutých štěrbin.

Cvičení 11.8* *Difrakční obrazec kruhového otvoru.* Sestavte difrakční integrál pro kruhový otvor průměru D. Výsledek zapište pomocí Besselovy funkce $J_n(x)$, jejíž integrální definice je

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin u - nu)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin u - nu)}du.$$

Návod: Zaveďte polární souřadnice v rovině stínítka i přepážky. Uvědomte si, že výsledek nemůže záviset na hodnotě polárního úhlu v rovině stínítka a položte ho roven vhodné konstantě. Integrujte nejprve podle úhlové proměnné. Použijte rekurentní vztah

$$\frac{d}{dx}[x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x)$$

pro $m = 1$.

12 Výsledky příkladů

12.1 Komplexní čísla

12.2 Střední hodnoty

12.3 Malé kmity

Cvičení 3.9 **Pohybové rovnice**

a)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}$$

b)

Cvičení 3.10 **Módy systému**

a) $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{7k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (2, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 2)$

b) $\omega_1 = \sqrt{\frac{7k}{6m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (3, 4)$, $\vec{a}_2 = (-2, 1)$

c) $\omega_1 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{2})k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{2})k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (1 + \sqrt{2}, 1)$, $\vec{a}_2 = (1 - \sqrt{2}, 1)$

d) $\omega_1 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{2})k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{2})k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (\sqrt{2}, 1)$, $\vec{a}_2 = (-\sqrt{2}, 1)$

e) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{7k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (2, 2, 1)$, $\vec{a}_2 = (-2, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (1, -2, 2)$

f) $\omega_1 = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (1, \sqrt{2}, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, -\sqrt{2}, 1)$

g) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{5k}{2m}}$, $\vec{a}_1 = (2, 3, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (2, -1, 1)$

h) $\omega_1 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (1, \sqrt{5} - 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (-3, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, -\sqrt{5} - 1, 1)$

Cvičení 3.11 **Malé kmity**

a)

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 6k \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}$$

c)

$$\mathbb{U} = \left(2k\left(1 - \frac{a_0}{a}\right)\right)$$

d)

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} k + \frac{mg}{l} & -k \\ -k & k + \frac{mg}{l} \end{pmatrix}$$

Reference

[1] J. Tolar, J. Koníček, *Sbírka řešených příkladů z fyziky, Vlnění*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2005