



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



# Orbitální moment hybnosti světla

## Orbital Angular Momentum of Light

Bakalářská práce

Autor: **Matyáš Staněk**  
Vedoucí práce: **Ing. Václav Potoček, Ph.D.**  
Akademický rok: 2018/2019

- Zadání práce -

- Zadání práce (zadní strana) -

*Poděkování:*

Chtěl bych zde poděkovat svému školiteli Ing. Václavovi Potočkovi, Ph.D. za odborné konzultace a cenné rady při vedení mé bakalářské práce.

*Čestné prohlášení:*

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 8. července 2019

Matyáš Staněk

*Název práce:*

## **Orbitální moment hybnosti světla**

*Autor:* Matyáš Staněk

*Obor:* Matematické inženýrství

*Zaměření:* Matematická fyzika

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* Ing. Václav Potoček, Ph.D., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

*Abstrakt:* Paraxiální optika je užitečná aproximace Maxwellových rovnic pro práci s lasery. Ze skalární Helmholtzovy rovnice přejdeme k rovnici paraxiální, vypočteme její obecné řešení a představíme Gaussovy svazky jako speciální třídu řešení. Dále ukážeme analogii paraxiální rovnice a kvantové mechaniky, pomocí které odvodíme Laguerre-Gaussovy módy. Ty tvoří ortonormální bázi a navíc nesou jasně definovaný orbitální moment hybnosti (OAM). OAM má na rozdíl od spinového momentu hybnosti, který vzniká kruhovou polarizací, původ ve tvaru vlnoplochy svazku. Skládání obou momentů popíšeme vektorově pomocí Jonesova formalismu. Popíšeme řadu optických prvků pro práci s OAM a na závěr představíme některé jeho možné aplikace.

*Klíčová slova:* Gaussův svazek, Laguerre-Gaussovy módy, orbitální moment hybnosti, paraxiální rovnice

*Title:*

## **Orbital Angular Momentum of Light**

*Author:* Matyáš Staněk

*Abstract:* Paraxial optics is a useful approximation of Maxwell's equations for laser applications. We derive the paraxial equation from the scalar Helmholtz equation, calculate a general solution and introduce Gaussian beams as a special class of solutions. Then we put forward an analogy between the paraxial equation and the Schrödinger equation to aid us in a derivation of Laguerre-Gaussian modes. LG modes form a complete basis set and, additionally, they possess well-defined orbital angular momentum (OAM). OAM in optical beams originates from their helical phase front in contrast to spin angular momentum caused by circular polarization. Combination of both momenta can be described using the Jones calculus. We demonstrate several optical elements for manipulation with OAM and present a selection of possible applications.

*Key words:* Gaussian beam, Laguerre-Gaussian modes, orbital angular momentum, paraxial equation

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>7</b>
<b>1 Úvod do paraxiální optiky</b>	<b>8</b>
1.1 Helmholtzova rovnice . . . . .	8
1.2 Paraxiální rovnice . . . . .	9
1.3 Obecné řešení paraxiální rovnice . . . . .	9
1.4 Analogie paraxiální rovnice a kvantové mechaniky . . . . .	10
<b>2 Gaussovy svazky</b>	<b>12</b>
2.1 Gaussovy svazky . . . . .	12
2.2 Vlnový balík a moment hybnosti . . . . .	14
2.3 Laguerre-Gaussovy módy . . . . .	14
<b>3 Vektorové svazky a spin</b>	<b>19</b>
3.1 Další módy . . . . .	19
3.2 Vektorový popis . . . . .	20
3.3 Spin . . . . .	21
3.4 Celkový moment hybnosti . . . . .	21
<b>4 Optické prvky pro experimentální práci s OAM</b>	<b>24</b>
4.1 Detekce a přímá generace . . . . .	24
4.2 Převod mezi HG a LG módy . . . . .	25
4.3 Spirální fázové destičky . . . . .	26
4.4 Difrakční hologramy . . . . .	27
4.5 q-destičky . . . . .	29
<b>5 Aplikace OAM</b>	<b>30</b>
5.1 Optické pasti . . . . .	30
5.2 Komunikace . . . . .	33
5.3 Další aplikace . . . . .	33
<b>Závěr</b>	<b>35</b>

# Úvod

Orbitální moment hybnosti (OAM) je nová nedávno objevená vlastnost nejen světla, ale obecně každého vlnění, jelikož má původ ve tvaru vlnoplochy. Ve srovnání například se zvukovými nebo dokonce gravitačními vlnami je ale právě elektromagnetické záření prozkoumáno nejlépe a má nejširší aplikační využití.

Pojem momentu hybnosti světla byl znám skoro od samého počátku 20. století, celou dobu byl ale spojován s kruhovou polarizací, tedy spinem. Až v roce 1992 byl světu představen průlomový článek [22], který odhalil další druh momentu hybnosti pocházející z prostorového rozložení vlnoplochy. Šroubovitě svazky byly sice předmětem některých studií i dříve, hlavně kvůli fázové singularitě, ale OAM v nich zůstával bez povšimnutí. V posledních desetiletích se však orbitální moment hybnosti stal středem zájmu řady vědců z nejrůznějších oborů, od optiky počínaje a u kvantové fyziky konče.

Důvodem popularity tématu může být například jeho rozsáhlost, pojem orbitálního momentu hybnosti světla lze totiž uchopit několika způsoby. Na jednu stranu, OAM se dá teoreticky popsat čistě pomocí klasické optiky v jazyce svazků a aproximací Maxwellových rovnic. Na druhou stranu, kvantová teorie pole nabízí detailnější přístup díky kvantování veličin a zavedením částic světla, fotonů.

Z třetí, praktické stránky nabízí OAM nespočet aplikací. Za zmínku stojí navýšení přenosové kapacity v informačních technologiích, zlepšení rozlišovací schopnosti v zobrazovací technice a astronomii, rozšíření experimentálních možností ve výzkumu kvantové provázanosti a zdokonalení optických pinzet široce používaných pro mikromanipulaci v biologii a chemii.

Cílem této práce je představit téma orbitálního momentu hybnosti světla z klasického pohledu, s využitím kvantové mechaniky jako užitečného nástroje. Dále je uveden výčet optických prvků, který má přiblížit praktickou manipulaci s OAM. Na závěr jsou shrnuty některé možné aplikace představující výchozí bod pro případnou navazující vědeckou činnost.

# Kapitola 1

## Úvod do paraxiální optiky

### 1.1 Helmholtzova rovnice

Základním nástrojem pro popis elektromagnetických polí a jejich interakcí s nabitými částicemi jsou Maxwellovy rovnice. Z nich lze odvodit vlnové rovnice popisující chování elektromagnetických vln ve volném prostředí s konstantní dielektrickou permitivitou  $\varepsilon$  a magnetickou permeabilitou  $\mu$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E} &= \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \Delta \mathbf{B} &= \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2},\end{aligned}$$

kteří představují 6 diferenciálních rovnic pro složky elektrického pole  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  a magnetické indukce  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ . Tyto vlny se pohybují s fázovou rychlostí [1, s. 60]

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Jedním z možných řešení vlnové rovnice je koherentní monochromatická vlna, která má všechny složky ve stejném tvaru

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = \tilde{A}(x, y, z) \cos(\omega t - \phi(x, y, z)),$$

což lze zapsat i v podobě komplexní funkce  $\tilde{u}(x, y, z, t) = \text{Re}[u(x, y, z, t)]$  jako

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z) \exp(-i\omega t),$$

kde

$$U(x, y, z) = A(x, y, z) \exp(i\phi(x, y, z)), \quad \tilde{A}(x, y, z) = \text{Re } A(x, y, z).$$

Každá takto komplexně zapsaná složka elektrického pole (respektive magnetické indukce) musí pořád splňovat vlnovou rovnici. Po dosazení získáme časově nezávislou podmínku pro amplitudu  $U(x, y, z)$ ,

$$(\Delta + k^2)U = 0, \tag{1.1}$$

kde definujeme vlnové číslo

$$k = \frac{\omega}{v}.$$

Rovnice (1.1) se nazývá Helmholtzova a musejí ji splňovat jakékoli komplexní amplitudy všech monochromatických vln [2, s. 38].



## 1.2 Paraxiální rovnice

Odvození paraxiální rovnice provedeme stejně jako v [3, s. 627]. Předpokládejme svazek tvořený monochromatickou vlnou šířící se ve směru blízkém ose  $z$ . Hlavní prostorová závislost amplitudy takového svazku je podobně jako u rovinné vlny na  $\exp(ikz)$ . Jinými slovy, porovnáme-li tento člen se zbytkem funkcí amplitudy, ve směru  $z$  jasně dominuje  $\exp(ikz)$ , zatímco profil svazku a jeho rozložení v  $x, y$  se vyvíjí vůči němu pomalu. To nás opravňuje “vytknout”  $\exp(ikz)$  zvlášť a zbylé závislosti zahrnout do funkce  $A(x, y, z)$  tak, že amplituda našeho uvažovaného svazku bude mít tvar

$$U(x, y, z) = A(x, y, z) \exp(ikz). \quad (1.2)$$

Navíc, směr šíření je tak blízko ose  $z$ , že platí následující předpoklad. Změna  $\left| \frac{\partial A}{\partial z} \right|$  na  $z$ -ovém intervalu jedné vlnové délky je zanedbatelně malá v porovnání se samotnou hodnotou  $\left| \frac{\partial A}{\partial z} \right|$ , neboli

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial A}{\partial z} \right|. \quad (1.3)$$

Po dosazení vlny ve tvaru (1.2) do Helmholtzovy rovnice (1.1) a zkrácení členu  $\exp(ikz)$  dostaneme parciální diferenciální rovnici druhého řádu pro  $A(x, y, z)$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0.$$

Použijeme-li předpoklad (1.3) a třetí člen zanedbáme vůči čtvrtému, vyjde nám paraxiální rovnice

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (1.4)$$

ze které budeme v příští sekci vycházet při odvozování Gaussova svazku.

## 1.3 Obecné řešení paraxiální rovnice

Při hledání obecného řešení parciální diferenciální rovnice (1.4) budeme postupovat analogicky jako v [4, s. 266] a využijeme Fourierovu transformaci v proměnných  $x$  a  $y$

$$\tilde{A}(k_x, k_y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} A(x, y, z) \exp[-i(xk_x + yk_y)] dx dy \quad (1.5)$$

a její inverzi

$$A(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{A}(k_x, k_y, z) \exp[i(xk_x + yk_y)] dk_x dk_y. \quad (1.6)$$

Fouriérovou transformací (1.4) dostaneme novou rovnici

$$-(k_x^2 + k_y^2) \tilde{A} + 2ik \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = 0,$$

pro kterou již snadno nalezneme řešení. Vezmeme-li za počáteční podmínku hodnotu funkce  $\tilde{A}(k_x, k_y, z)$  v  $z = 0$ , vyjde nám

$$\tilde{A}(k_x, k_y, z) = \tilde{A}(k_x, k_y, 0) \exp\left[-\frac{iz}{2k}(k_x^2 + k_y^2)\right].$$

Tento výsledek chceme převést pomocí (1.6) zpět do proměnných  $x$  a  $y$ , ale nejdřív potřebujeme vyjádřit počáteční podmínku jako

$$\tilde{A}(k_x, k_y, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} A(x', y', 0) \exp[-i(x'k_x + y'k_y)] dx' dy', \quad (1.7)$$

kterou už můžeme dosadit do

$$A(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{A}(k_x, k_y, 0) \exp\left[-\frac{iz}{2k}(k_x^2 + k_y^2)\right] \exp[i(xk_x + yk_y)] dk_x dk_y.$$

Po prohození integračních proměnných můžeme spočítat vnitřní integrál jako součin dvou integrálů přes  $k_x$  resp.  $k_y$  pomocí vzorce

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-\beta^2 t^2) \exp(-iqt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(\frac{-q^2}{4\beta^2}\right), \quad (\operatorname{Re} \beta > 0). \quad (1.8)$$

Obecné řešení paraxiální rovnice (1.4) je tedy tzv. Fresnelův difrakční vzorec

$$A(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \int_{\mathbb{R}^2} A(x', y', 0) \exp\left(\frac{ik}{2z}[(x-x')^2 + (y-y')^2]\right) dx' dy'. \quad (1.9)$$

Tento tvar (1.9) dostaneme pro libovolnou počáteční podmínku  $A(x, y, 0)$ . Jenže naše odvození probíhalo za předpokladu, že pracujeme se svazky. Proto klademe na počáteční podmínku, respektive její Fourierův obraz (1.7), omezení

$$\left| \tilde{A}(k_x, k_y, 0) \right| \approx 0 \quad \text{pouze pro } k_x^2 + k_y^2 \ll k^2, \quad (1.10)$$

které říká, že hodnota  $\tilde{A}(k_x, k_y, 0)$  je zanedbatelná všude, až na malý kruh v rovině  $k_x, k_y$  o poloměru mnohem menším, než je vlnové číslo  $k$ .

## 1.4 Analogie paraxiální rovnice a kvantové mechaniky

V celé práci se zabýváme elektromagnetickým zářením, které by se správně mělo popisovat pomocí kvantové teorie pole. My však z důvodu, který hned vysvětlíme, budeme s paraxiálními fotony většinou zacházet jako s kvantově mechanickými částicemi.

Základním vztahem kvantové mechaniky popisujícím časový vývoj stavu kvantové částice je Schrödingerova rovnice [5, s. 18]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi.$$

Pokud uvažujeme částici ve dvou rozměrech se stavem  $\psi(x, y, t)$  a Hamiltoniánem bez potenciálu (volná částice), můžeme  $\hat{H}$  rozepsat jako

$$\hat{H} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right). \quad (1.11)$$

Hamiltonián (1.11) lze chápat jako příčnou energii fotonu  $E_{tr}$ . Tu lze odvodit z celkové energie  $E = h\nu$  [6, s. 227] následujícím způsobem. Nejprve přepíšeme  $E$  jako

$$E = \hbar ck = \hbar c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

a  $k_z$  nahradíme  $k_0 + \delta k_z$ , vlnovým číslem  $k_0$  ve směru pohybu (podél osy  $z$ ) a malou odchylkou  $\delta k_z$ . S tímto a malými  $k_x$  a  $k_y$  můžeme dále upravovat

$$\begin{aligned} E &= \hbar c \sqrt{k_0^2 + 2k_0 \delta k_z + O(\delta k_z^2) + k_x^2 + k_y^2} \\ &= \hbar c k_0 \left( 1 + \frac{\delta k_z}{k_0} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_0^2} + O(\delta k_z^2, \frac{1}{k_0^3}) \right). \end{aligned}$$

Poslední člen před zanedbatelným zbytkem označený jako  $E_{tr} = \hbar c \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_0}$  je naší hledanou energií fotonu v příčném směru.

Energie  $E_{tr}$  formálně představuje stejný hamiltonián jako hamiltonián (1.11) zapsaný v hybnostní reprezentaci, kde  $k_j$  odpovídá  $-i \frac{\partial}{\partial x_j}$  a  $k_0 = \frac{mc}{\hbar}$ .

Ze stejného důvodu je i Schrödingerova rovnice pro (1.11) ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{2im}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

formálně ekvivalentní paraxiální rovnici (1.4), kde funkce amplitudy  $A(x, y, z)$  odpovídá stavu  $\psi(x, y, ct)$  (kvůli zjednodušení položíme pro další výpočty  $c = 1$ ). V této analogii pravděpodobnosti  $|\psi|^2$  odpovídá relativní intenzita světla  $|A|^2$ .

## Kapitola 2

# Gaussovy svazky

### 2.1 Gaussovy svazky

Většina běžně používaných laserů pracuje se svazky, jejichž intenzita je soustředěna kolem osy směru šíření. Kolmý profil amplitudy intenzity vypadá jako Gaussova funkce, proto se nazývají Gaussovy svazky. Při odvození jejich tvaru vyjdeme z [4, s. 267] a použijeme počáteční podmínku  $U(x, y, 0) = C \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right)$ , kde  $C$  a  $w_0$  jsou kladné konstanty. V  $z = 0$  je funkce  $U(x, y, 0)$  totožná s funkcí  $A(x, y, 0)$ , proto lze přímo dosadit do obecného řešení (1.9)

$$A(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \int_{\mathbb{R}^2} C \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right) \exp\left(\frac{ik}{2z}[(x-x')^2 + (y-y')^2]\right) dx' dy'.$$

Po malé úpravě dostaneme tvar

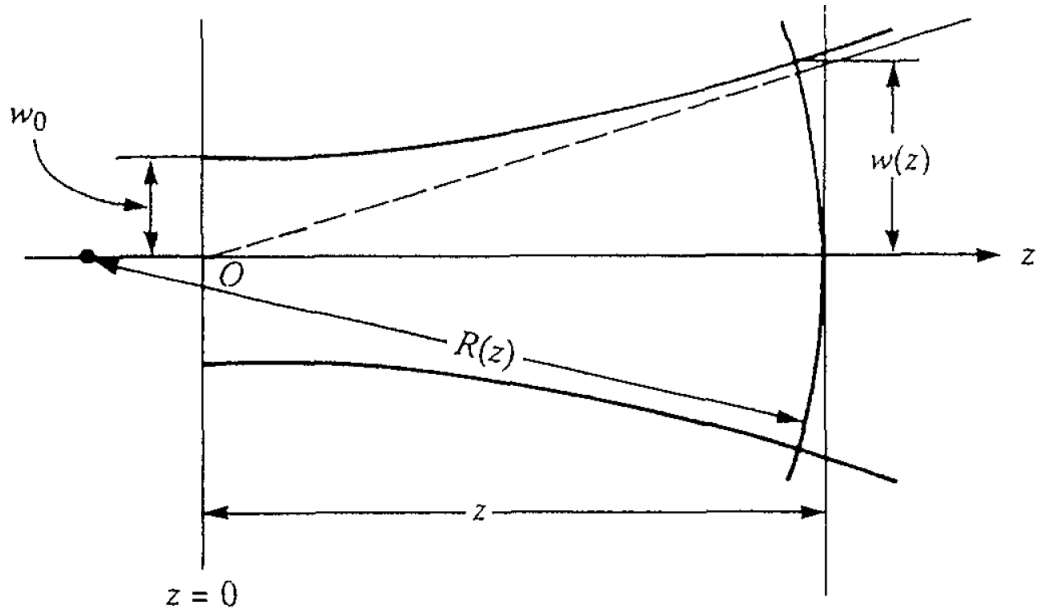
$$A(x, y, z) = -\frac{ikC}{2\pi z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)\right) \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{2ikz+k^2w_0^2}{2ikzw_0^2}(x'^2+y'^2)\right) \times \exp\left(-\frac{ik}{z}(xx'+yy')\right) dx' dy',$$

který je možný rozdělit na součin dvou integrálů a použít vzorec (1.8). Dosazením vzniklého výsledku do (1.2) získáme Gaussův svazek

$$U(x, y, z) = \frac{Ck^2w_0^2}{2ikz+k^2w_0^2} \exp\left(\frac{-k^2(x^2+y^2)}{2ikz+k^2w_0^2}\right) \exp(ikz). \quad (2.1)$$

Většinou se ale Gaussův svazek (2.1) uvádí v podobě, ze které je možné vyčíst i jeho geometrické vlastnosti ilustrované na Obr.2.1. Bude nás zajímat především “šířka” svazku  $w(z)$ , vzdálenost od osy  $z$  do místa, kde velikost amplitudy poklesne na hodnotu  $1/e$  své maximální hodnoty na ose. Dále rozepíšeme fázi svazku tak, aby bylo možné odlišit všechny členy podle jejich různé fyzikální podstaty. Tím získáme tzv. Gouyho fázový posun  $\psi(z)$  a člen, ve kterém vystupuje křivost  $R(z)$ . Při odvozování Gaussova svazku s novými funkcemi  $w(z)$ ,  $\psi(z)$ ,  $R(z)$  začneme tím, že rozepíšeme komplexní funkci figurující ve fázi (2.1) na její reálnou a imaginární část

$$\frac{-k^2}{2ikz+k^2w_0^2} = \frac{-k^2w_0^2}{4z^2+k^2w_0^4} + i\frac{2kz}{4z^2+k^2w_0^4}.$$



Obrázek 2.1: Ilustrace Gaussova svazku. Nejužší místo  $w_0$ , šířka  $w(z)$  a poloměr křivosti  $R(z)$ . Převzato a upraveno z [4].

První sčítanec označíme jako  $-\frac{1}{w(z)^2}$ , druhý jako  $\frac{ik}{2R(z)}$ . Z těchto výrazů můžeme vyjádřit naše hledané funkce

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{kw_0^2}\right)^2}, \quad (2.2)$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left(\frac{kw_0^2}{2z}\right)^2 \right]. \quad (2.3)$$

Zbývá jen určit fázový posun  $\psi(z)$ , který je obsažen ve funkci amplitudy původního svazku (2.1). Tu opět rozepíšeme na komplexní a imaginární část, ale teď ve tvaru exponenciály s využitím již zavedené funkce  $w(z)$

$$\frac{k^2 w_0^2}{2ikz + k^2 w_0^2} = \frac{w_0}{w(z)} \exp(i\psi(z)).$$

Porovnáním reálných částí dostaneme

$$\cos \psi(z) = \frac{w_0}{w(z)},$$

porovnáním imaginárních

$$\sin \psi(z) = -\frac{2z}{kw_0 w(z)}.$$

Dosazením předchozích vztahů do (2.1) získáme nový, běžně používaný tvar Gaussova svazku

$$U(x, y, z) = \frac{Cw_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right) \exp\left[i\left(kz + \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} + \psi(z)\right)\right]. \quad (2.4)$$

Z vyjádření (2.4) je vidět, že s rostoucím  $z$  si svazek zachovává Gaussovský tvar kolmého profilu, jen se postupně rozšiřuje.

Občas se ještě zavádí tzv. Rayleighova vzdálenost  $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{kw_0^2}{2}$ , která udává polohu od nejužšího místa  $w_0$ , kde se svazek rozšíří na dvojnásobnou plochu. Pomocí této veličiny lze pak například zapsat Gouyho fázi v kratší podobě  $\psi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)$  [3, s. 665].

## 2.2 Vlnový balík a moment hybnosti

Z kapitoly 1.4 víme, že paraxiální optika je v jistém smyslu ekvivalentní kvantové mechanice volné 2D částice. Proto pro zkoumání některých vlastností svazků můžeme využít poznatků o kvantových částicích. Každý stav částice lze popsat jako superpozici de Broglieových vln [5, s. 19]

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} t\right)\right] d^3p. \quad (2.5)$$

Gaussův svazek ve tvaru (2.1) je ekvivalentní vlnovému balíku ve 2D, který získáme z počáteční podmínky

$$\psi(x, y, 0) = C \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right).$$

Tu je nejprve potřeba převést do hybnostní reprezentace  $\tilde{\psi}(\mathbf{p}, 0)$ , až pak lze dosadit do (2.5)

$$\psi(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{C\sigma^2}{2\pi\hbar^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\hbar^2}(p_x^2 + p_y^2)\right) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(p_x x + p_y y - \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} t\right)\right] dp_x dp_y.$$

Tento integrál lze spočítat pomocí (1.8). Nakonec se ve výsledku přepíše proměnná  $t$  na  $z$  a tím získáme

$$\psi(x, y, z) = C \frac{2\sigma^2}{2i\frac{\hbar z}{m} + 2\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2i\frac{\hbar z}{m} + 2\sigma^2}\right). \quad (2.6)$$

Místo s Gaussovým svazkem můžeme nyní pracovat s vlnovým balíkem (2.6) a zkoumat jeho vlastnosti z pohledu kvantové mechaniky, například, jestli nemá moment hybnosti. Operátor pro tuto pozorovatelnou je definován pomocí principu korespondence  $\hat{L}_j = \varepsilon_{jkl} \hat{Q}_k \hat{P}_l$  [5, s. 38],  $z$ -ová složka v kartézských souřadnicích pak vypadá

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right). \quad (2.7)$$

Působením operátoru (2.7) na vlnový balík (2.6) zjistíme, že  $\hat{L}_z \psi = 0$ . To znamená, že vlnový balík, respektive Gaussův svazek (2.1, 2.4), nenese žádný moment hybnosti ve směru osy  $z$ .

## 2.3 Laguerre-Gaussovy módy

Pokusme se najít vstav  $\psi(x, y, z)$ , na který operátor  $\hat{L}_z$  nepůsobí triviálně. Přesněji, budeme hledat vlastní funkci  $\hat{L}_z$  ve tvaru podobném Gaussovu svazku. Pomůžeme si kvantovým 2D

izotropním harmonickým oscilátorem [7, s. 73] a jeho vlastními funkcemi  $\Psi$  (mezi které patří právě i Gaussův svazek s vlastním číslem  $\hbar\omega$ ), splňující  $\hat{H}_\omega\Psi = E\Psi$ , s hamiltoniánem

$$\hat{H}_\omega = \frac{\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{X}^2 + \hat{Y}^2).$$

Zapišeme-li hamiltonián v polárních souřadnicích

$$\hat{H}_\omega = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{m\omega^2}{2} r^2, \quad (2.8)$$

můžeme hledat vlastní funkce  $\Psi(r, \varphi)$ . Předpokládejme, že  $\Psi(r, \varphi)$  je zároveň vlastní funkce  $\hat{L}_z$ , a proto ji lze separovat způsobem  $\Psi(r, \varphi) = \chi(r) \exp(il\varphi)$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Působením hamiltoniánu (2.8) na takto separovanou funkci se vypořádáme s druhou derivací podle  $\varphi$ , kterou nahradíme pouze násobením  $-l^2$ , a tím získáme diferenciální rovnici druhého řádu pro  $\chi(r)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi(r)}{dr} - \frac{l^2}{r^2} \chi(r) \right) + \frac{m\omega^2}{2} r^2 \chi(r) = E\chi(r). \quad (2.9)$$

Substitucí  $\xi = \frac{m\omega}{\hbar} r^2$  pro funkci  $\chi(r) = \phi(\xi)$  s derivacemi

$$\frac{d\chi(r)}{dr} = 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \sqrt{\xi} \frac{d\phi(\xi)}{d\xi}, \quad \frac{d^2\chi(r)}{dr^2} = 4\frac{m\omega}{\hbar} \xi \frac{d^2\phi(\xi)}{d\xi^2} + 2\frac{m\omega}{\hbar} \frac{d\phi(\xi)}{d\xi},$$

můžeme rovnici (2.9) převést a upravit do podoby

$$\xi \frac{d^2\phi(\xi)}{d\xi^2} + \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} - \frac{1}{4} \left( \frac{l^2}{\xi} + \xi - \lambda \right) \phi(\xi) = 0, \quad (2.10)$$

kde  $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$ . Další předpoklad je, že řešení (2.10) nalezneme ansatz ve tvaru

$$\phi(\xi) = \xi^{|l|/2} \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \eta(\xi) \quad (2.11)$$

obsahujícím zatím neznámou funkci  $\eta(\xi)$ , kterou nalezneme dosazením (2.11) zpět do rovnice (2.10). Předem si vypočteme derivace

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} &= \xi^{|l|/2} \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \left[ \frac{d\eta(\xi)}{d\xi} + \eta(\xi) \left( \frac{l}{2\xi} - \frac{1}{2} \right) \right], \\ \frac{d^2\phi(\xi)}{d\xi^2} &= \xi^{|l|/2} \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \left[ \frac{d^2\eta(\xi)}{d\xi^2} + 2\frac{d\eta(\xi)}{d\xi} \left( \frac{l}{2\xi} - \frac{1}{2} \right) + \eta(\xi) \left( \frac{l}{2\xi} - \frac{1}{2} \right)^2 - \eta(\xi) \frac{l}{2\xi^2} \right] \end{aligned}$$

a po krátkých úpravách dospějeme k rovnici

$$\xi \frac{d^2\eta(\xi)}{d\xi^2} + (l+1-\xi) \frac{d\eta(\xi)}{d\xi} + p\eta(\xi) = 0, \quad (2.12)$$

kde  $p = \lambda/4 - l/2 - 1/2$  a požadujeme, aby  $p \in \mathbb{N}_0$ . V takovém případě se rovnice (2.12) nazývá zobecněná Laguerrova diferenciální rovnice a jejím řešením jsou zobecněné Laguerrovy polynomy [8, s. 284]

$$L_p^{|l|}(\xi) = \frac{1}{p!} e^\xi \xi^{-|l|} \frac{d^p}{d\xi^p} \left( e^{-\xi} \xi^{p+|l|} \right). \quad (2.13)$$

Nyní již můžeme vše poskládat do hledané vlastní funkce

$$\Psi_{p,l}(r, \varphi) = C \left( \frac{m\omega}{\hbar} r^2 \right)^{\frac{|l|}{2}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2\right) L_p^{|l|} \left( \frac{m\omega}{\hbar} r^2 \right) \exp(il\varphi), \quad (2.14)$$

kde  $C$  je normalizační konstanta.

Už zbývá zjistit jen závislost na  $z$ . Protože svazky mění svůj tvar s postupem v ose  $z$ , potřebujeme najít časový vývoj stavu (2.14) v hamiltoniánu volné částice, abychom poté mohli formálně nahradit proměnnou  $t$  za  $z$  podobně, jako při odvozování svazku v podobě vlnového balíku (2.6). Časový vývoj je opět popsán Schrödingerovou rovnicí

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r, \varphi, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(r, \varphi, t) \quad (2.15)$$

s hamiltoniánem bez potenciálu v polárních souřadnicích

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right].$$

Řešení bude ansatz ve tvaru

$$\Psi(r, \varphi, t) = a(t)r^{|l|} L_p^{|l|}(b(t)r^2) \exp(c(t)r^2) \exp(ild(t)\varphi), \quad (2.16)$$

kde  $a(t), b(t), c(t), d(t)$  jsou zatím neznámé funkce. Určíme je ze Schrödingerovy rovnice (2.15) s počáteční podmínkou

$$\Psi(r, \varphi, 0) = \Psi_{p,l}(r, \varphi). \quad (2.17)$$

Dále popíšeme pouze hlavní myšlenky výpočtu. S většinou kroků si můžeme pomoci nějakým výpočetním softwarem, pro navazující text jsou ale důležité především výsledky.

Ansatz (2.16) dosadíme do (2.15) a vypočteme potřebné derivace. Tímto způsobem získáme komplikovaný výraz obsahující druhou derivaci zobecněného Laguerrova polynomu  $L_p^{|l|}(x)$ , za kterou lze dosadit z rovnice (2.12). Poté můžeme porovnávat koeficienty stojící před stejnými mocninami  $r$  násobené stejnými Laguerrovými polynomy a exponenciálami. Tyto funkce jsou totiž lineárně nezávislé, a proto se koeficient u jednoho takového výrazu z levé strany musí rovnat koeficientu před odpovídajícím součinem na straně pravé. Takto dostaneme soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} ia'(t) - l\varphi d'(t) &= \frac{2\hbar}{m} [pa(t)b(t) - (1 + |l|)a(t)c(t)] \\ ib'(t) &= -\frac{\hbar}{m} [2b(t)^2 + 4b(t)c(t)] \\ ic'(t) &= -\frac{2\hbar}{m} c(t)^2 \\ 0 &= \frac{\hbar^2}{2m} |l|^2 [d(t)^2 - 1], \end{aligned}$$

kteřou řešíme s počátečními podmínkami (2.17). Nakonec vyjde

$$\begin{aligned} a(t) &= C \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{|l|}{2}} (1 + t^2\omega^2)^{-\frac{1+|l|}{2}} \exp[-i(1 + |l| + 2p) \arctan(t\omega)] \\ b(t) &= \frac{m\omega}{\hbar + \hbar t^2\omega^2} \\ c(t) &= \frac{-m\omega}{2\hbar + 2i\hbar t\omega} \\ d(t) &= 1, \end{aligned}$$

kde můžeme formálně zaměnit proměnnou  $t$  za  $z$ . Podobně přejdou i konstanty  $\frac{m}{\hbar}$  na  $k$  a  $\omega$  na  $\frac{2}{k\omega_0}$ . Poslední záměna vyplývá z porovnání hodnoty rozptylu v počáteční podmínce (2.14) s



hodnotou  $\frac{1}{w_0^2}$  použitou na začátku sekce 2.1. Po formálním přejmenování a malé úpravě přejdou naše funkce do podoby

$$\begin{aligned} a(z) &= Cw_0(\sqrt{2})^{|l|} \left( \frac{1}{w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{kw_0^2}\right)^2}} \right)^{|l|+1} \exp \left[ -i(1 + |l| + 2p) \arctan \left( \frac{2z}{kw_0^2} \right) \right] \\ b(z) &= \frac{2k^2 w_0^2}{4z^2 + k^2 w_0^4} \\ c(z) &= \frac{-k^2}{2ikz + k^2 w_0^2} \\ d(z) &= 1, \end{aligned}$$

ve které již vidíme známé funkce  $w(z)$ ,  $R(z)$  a  $\psi(z)$ . Můžeme tedy dosadit zpět do (2.16) abychom získali Laguerre-Gaussovy módy

$$\begin{aligned} \Psi(r, \varphi, z) &= Cw_0 \frac{1}{w(z)} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w(z)^2} \right) \exp \left[ \left( \frac{-1}{w(z)^2} + \frac{ik}{2R(z)} \right) r^2 \right] \\ &\quad \times \exp(i l \varphi) \exp[i(1 + |l| + 2p)\psi(z)]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Prozkoumejme detailněji tento výsledek. Po vynásobení  $\exp(ikz)$  se stane (2.18) funkcí popisující reálný svazek

$$U(r, \varphi, z) = \Psi(r, \varphi, z) \exp(ikz),$$

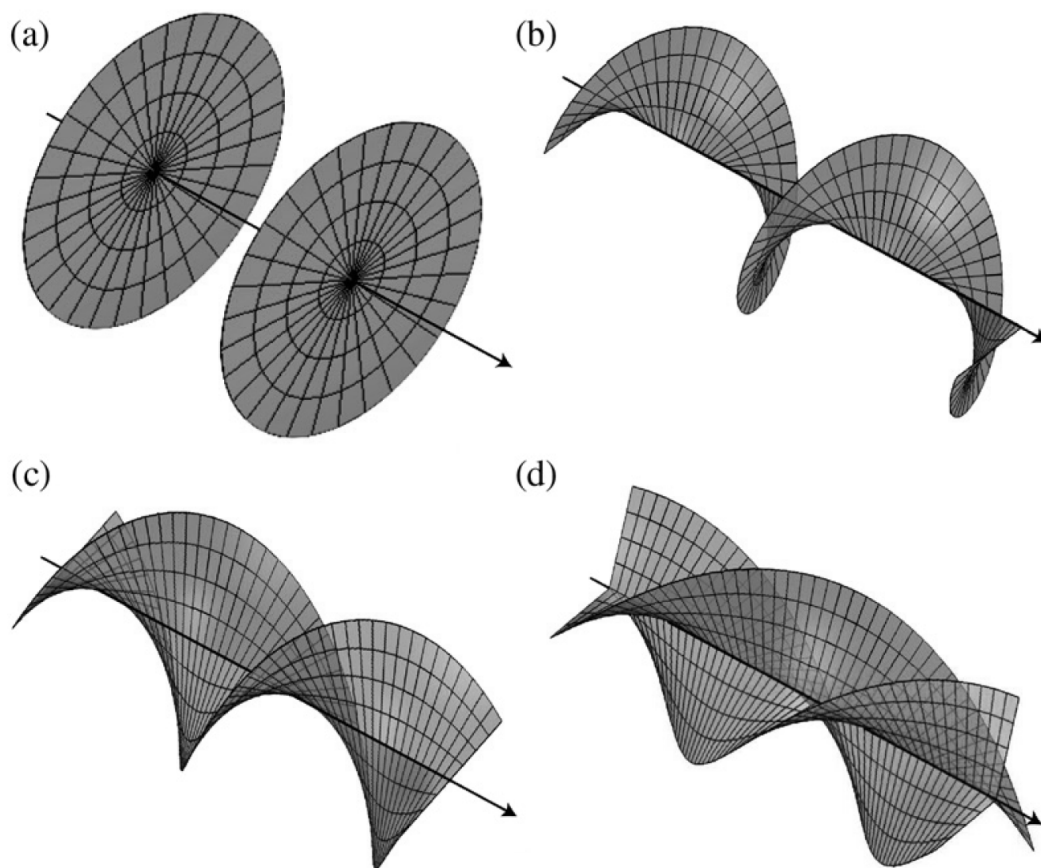
který lze porovnat například Gaussovým svazkem (2.4). K tomu si spočítáme prvních pár zobecněných Laguerrových polynomů (2.13)

$$\begin{aligned} L_0^{|l|}(\xi) &= 1 \\ L_1^{|l|}(\xi) &= -\xi + |l| + 1 \\ L_2^{|l|}(\xi) &= \frac{1}{2}[\xi^2 - 2(|l| + 2)\xi + (|l| + 1)(|l| + 2)]. \end{aligned}$$

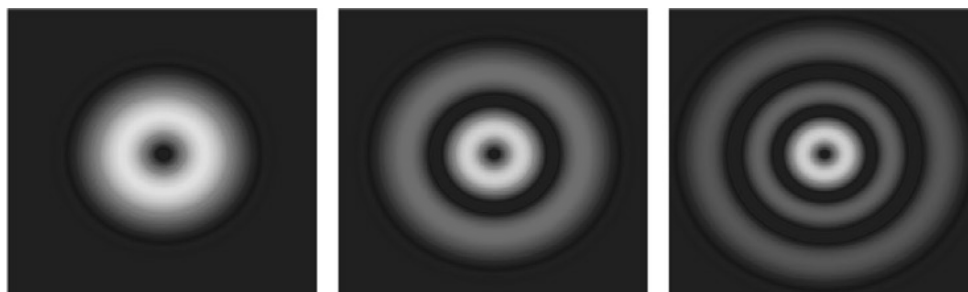
Pro  $p = l = 0$  vyjadřují oba výsledky totéž, jen zapsané v různých souřadnicích. V případě  $p = 0$ ,  $l \in \mathbb{Z} \setminus 0$  je Laguerrov polynom pořadí roven 1, ale přeskákuje se amplituda a posune se Gouyho fáze. Mocnina  $r^{|l|}$  způsobí, že ve centru svazku bude nulová intenzita. Navíc přibude člen  $\exp(i l \varphi)$ , který jsme v řešení požadovali už od počátku. Díky němu má totiž svazek nenulový moment hybnosti  $l\hbar$  na foton způsobený stočením vlnoplochy do šroubovice. Velikost  $l$  udává počet do sebe propletených závitů a znaménko  $l$  jejich orientaci, jak je ukázáno na Obr.2.2.

Číslo  $p$  podobný fyzikální význam nemá. Pokud  $p \in \mathbb{N}$ ,  $l \in \mathbb{Z} \setminus 0$  vyskytnou se v řešení i polynomy  $L_p^{|l|}(\xi)$ , které mění prostorovou geometrii svazku. Na Obr.2.3 je řez svazku v rovině kolmé ke směru šíření podél osy  $z$ , kde  $l = 1$  a  $p$  se postupně zvětšuje. Pro dané  $p$  je vidět, že svazek obsahuje  $p + 1$  mezikruží maxim intenzity [9, s. 170].

Lze ukázat, že po normalizaci tvoří Laguerre-Gaussovy módy (2.18) ortonormální bázi [8, s. 283]. To znamená, že libovolnou funkci splňující paraxiální rovnici (1.4) lze rozložit na lineární kombinaci LG módů (2.18).



Obrázek 2.2: Nákres vlnoploch pro (a)  $l = 0$ , (b)  $l = 1$ , (c)  $l = 2$ , (d)  $l = 3$ . Převzato z [9].



Obrázek 2.3: Nákres intenzit svazků  $LG_0^1$ ,  $LG_1^1$  a  $LG_2^1$  (zleva doprava). Převzato a upraveno z [9].

## Kapitola 3

# Vektorové svazky a spin

### 3.1 Další módy

V předchozí kapitole jsme odvodili Laguerre-Gaussovy módy

$$LG_p^l(r, \varphi, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!} \frac{w_0}{w(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w(z)^2}\right) \exp \left[ \left( \frac{-1}{w(z)^2} + \frac{ik}{2R(z)} \right) r^2 \right] \times \exp(il\varphi) \exp[i(1+|l|+2p)\psi(z)], \quad (3.1)$$

$p \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{Z}$ , jako řešení paraxiální rovnice v cylindrických souřadnicích. Podobným způsobem ale v kartézských souřadnicích, separací  $x$  a  $y$ , se dají vypočítat Hermite-Gaussovy módy [3, s. 646]

$$HG_{m,n}(x, y, z) = \sqrt{\frac{1}{\pi 2^{m+n-1} m! n!} \frac{1}{w(z)}} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \times \exp \left[ \left( \frac{-1}{w(z)^2} + \frac{ik}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) \right] \exp[i(1+m+n)\psi(z)], \quad (3.2)$$

s parametry  $m, n \in \mathbb{N}_0$ , kde  $H_k(x)$  jsou Hermitovy polynomy. Obě funkce (3.1,3.2) tvoří různé báze stejného prostoru a lze mezi nimi libovolně přecházet, nicméně z hlediska orbitálního momentu hybnosti jsou HG módy nezájímavé. V praxi, například při práci s lasery, se módy nejčastěji volí podle geometrie aparatury, pro zařízení s kruhovou/válcovou symetrií se lépe hodí LG módy, pro obdélníkovou symetrii naopak HG módy [3, s. 648].

Dalším užitečným řešením vlnové rovnice jsou tzv. Besselovy svazky představené v článku [10]. Jejich význačnou vlastností je kruhová symetrie a malá rozbíhavost, jinými slovy, při postupu v ose  $z$  si zachovávají kolmý profil intenzity  $I(x, y, z = 0) = I(x, y, z \geq 0)$ . Matematicky je lze odvodit jako kombinace rovinných vln s fázovým posunem  $\exp(in\varphi)$ , jejichž normály tvoří kužel [11], a zapsat pro  $z \geq 0$  a způsobem [12]

$$B_n(r, \varphi, z) = C_n J_n(\beta r) \exp(in\varphi) \exp(ik_z z)$$

kde  $C_n$  je konstanta,  $\beta^2 + k_z^2 = k^2$  a  $J_n$  je Besselova funkce prvního druhu řádu  $n$ .

Kvůli tomu, že funkce  $J_n$  není kvadraticky integrabilní, potřebovali bychom k realizaci Besselova svazku nekonečné množství energie. Tuto potíž lze obejít zavedením Bessel-Gaussova svazku

[13], který vznikne z Besselova svazku vynásobením Gaussovou funkcí  $\exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right)$  jako nekonečná superpozice svazků řádu  $n \in \mathbb{Z}$ . Po pár úpravách lze Bessel-Gaussův svazek řádu  $n$  napsat ve tvaru [14]

$$BG_n(r, \varphi, z) = \frac{w_0}{w(z)} J_n\left(\frac{\beta r}{1 + iz/z_r}\right) \exp\left[\frac{ik}{2R(z)}\left(r^2 + \beta^2 \frac{z_r}{k^2}\right)\right] \\ \times \exp\left[iz\left(k - \frac{\beta^2}{2k}\right) - \psi(z) - \frac{1}{w(z)^2}\right] \exp(in\varphi).$$

Oproti Besselovým svazkům, BG svazky jsou nedifrakční jen na omezeném intervalu. Lze si také všimnout, že díky členu  $\exp(in\varphi)$  mají orbitální moment hybnosti. Na rozdíl od LG módů ale netvoří ortonormální bázi, což je hlavní důvod, proč je v této práci zmiňujeme jen okrajově.

## 3.2 Vektorový popis

Na začátku tohoto textu jsme opustili vektorovou podstatu elektromagnetického pole a veškeré výsledky jsme až doposud zapisovali ve tvaru skalárních funkcí. Nyní se vrátíme k vektorovému popisu, což nám umožní prozkoumat další důležitou vlastnost světla, polarizaci.

Pro popis polarizačních stavů využijeme formalismus Jonesových vektorů, které udávají polarizaci v rovině  $x, y$  [15, s. 33]. Z obecné teorie o elektromagnetickém vlnění je známo, že u monochromatických vln stačí počítat s elektrickou intenzitou  $\mathbf{E}$ , zapsanou například v cylindrických souřadnicích jako

$$(E_x, E_y) = \text{Re}[\mathbf{A}(r, \varphi, z) \exp(ikz - i\omega t)], \quad (3.3)$$

vektor magnetické indukce  $\mathbf{B}$  je pak jednoznačně určen [1, s. 71]. Obecný stav polarizace vyjádříme ve speciálním tvaru

$$\mathbf{A}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} a LG_0^{+1} + b LG_0^{-1} \\ c LG_0^{+1} + d LG_0^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad (3.4)$$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , který jsme zvolili z následujícího důvodu. LG módy (3.1) s indexy  $p = 0$  a  $l = \pm 1$  mají velice jednoduchý a navzájem si podobný tvar, proto lze většinu jejich funkcí vytknout dopředu způsobem

$$\mathbf{A} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{r}{w(z)^2} \exp\left[\left(\frac{-1}{w(z)^2} + \frac{ik}{2R(z)}\right)r^2 + 2i\psi\right] \begin{pmatrix} a \exp(i\varphi) + b \exp(-i\varphi) \\ c \exp(i\varphi) + d \exp(-i\varphi) \end{pmatrix},$$

kde poslední člen už představuje Jonesův vektor. Kvůli normalizaci  $\mathbf{A}$  navíc požadujeme, aby koeficienty  $a, b, c, d$  splňovaly

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1.$$

Mohli jsme také vzít  $p \neq 0$  a ve výsledku by se moc nezměnilo, přibyl by navíc Laguerrov polynom. Ale protože ten neovlivňuje polarizaci, zvolili jsme jednodušší zápis s  $p = 0$ . Na druhou stranu index  $l$  je volen se záměrem, abychom dokázali spočítat celkový moment hybnosti. Tomuto výpočtu a případu pro různá  $l$  se budeme věnovat v příštích sekcích.

### 3.3 Spin

Jednou ze zajímavých polarizací je ta kruhová, kterou lze standardně vyjádřit z lineárních polarizací v  $x$  a  $y$  (horizontální a vertikální) jako

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_L &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_R &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Základní vlastností svazků s kruhovou polarizací je jejich spinový moment hybnosti. Foton jako nehmotná kvantová částice má spin 1, který ale může nabývat pouze hodnot  $\pm 1$ . Z tohoto důvodu můžeme projekci spinu do osy  $z$  (směr pohybu fotonu) popisovat v prostoru  $\mathbb{C}^2$  namísto  $\mathbb{C}^3$ . Operátor  $z$ -ové složky spinu zvolíme tak, aby kruhové polarizační stavy  $\mathbf{e}_L, \mathbf{e}_R$  byly jeho vlastní vektory s vlastními čísly  $+\hbar$  pro levotočivou a  $-\hbar$  pro pravotočivou polarizaci, čímž dostaneme maticový operátor v bázi  $(\mathbf{e}_L, \mathbf{e}_R)$

$$\hat{S}_{L,R} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pro praktické počítání však převedeme tuto matici s využitím (3.5) do báze horizontální a vertikální polarizace

$$\hat{S} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Působením operátoru (3.6) na obecný svazek, například (3.4), získáme funkci závislou na poloze. Pokud není svazek ve vlastním stavu  $\hat{S}$  (čistě pravotočivě nebo levotočivě polarizovaný) je nutné k určení spinu počítat střední hodnotu, zapsané v braketovém formalismu [5, s. 73]

$$S = \langle A | \hat{S} | A \rangle.$$

### 3.4 Celkový moment hybnosti

S využitím definice (2.7) orbitálního momentu hybnosti v sekci 2.2 (v cylindrických souřadnicích) a definicí spinu (3.6) z předchozí sekce máme vše připraveno na určení celkového momentu hybnosti  $\hat{J} = \hat{L}_z + \hat{S}$  fotonu při pohybu podél osy  $z$ . Formálně se pohybujeme na Hilbertově prostoru  $L^2(\mathbb{R}^2, d^2x) \otimes \mathbb{C}^2$ , kde máme operátor orbitálního momentu hybnosti

$$\hat{\tilde{L}}_z = \hat{L}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}_S, \quad \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

a operátor spinového momentu hybnosti

$$\hat{\hat{S}} = \hat{\mathbb{1}}_L \otimes \hat{S}, \quad \hat{S} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

kteřé působí na stav tvaru (3.4) následovně

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{L}}_z \begin{pmatrix} a LG_0^{+1} + b LG_0^{-1} \\ c LG_0^{+1} + d LG_0^{-1} \end{pmatrix} &= \hbar \begin{pmatrix} a LG_0^{+1} - b LG_0^{-1} \\ c LG_0^{+1} - d LG_0^{-1} \end{pmatrix}, \\ \hat{\hat{S}} \begin{pmatrix} a LG_0^{+1} + b LG_0^{-1} \\ c LG_0^{+1} + d LG_0^{-1} \end{pmatrix} &= \hbar \begin{pmatrix} -ic LG_0^{+1} - id LG_0^{-1} \\ ia LG_0^{+1} + ib LG_0^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Celkový moment hybnosti pak odpovídá vlastním hodnotám  $\lambda$  operátoru  $\hat{J}$ , vlastní funkce korespondují se stavy, ve kterých tyto hodnoty můžeme naměřit, neboli

$$\hat{J} \begin{pmatrix} a LG_0^{+1} + b LG_0^{-1} \\ c LG_0^{+1} + d LG_0^{-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a LG_0^{+1} + b LG_0^{-1} \\ c LG_0^{+1} + d LG_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Výpočet provedeme na koeficientech  $a, b, c, d$  podle toho, jak se transformují působením operátorů  $\hat{L}_z$  a  $\hat{S}$ . Ze vztahů (3.7) vidíme, že

$$\hat{L}_z \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \\ -d \end{pmatrix}, \quad \hat{S} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} -ic \\ -id \\ ia \\ ib \end{pmatrix}.$$

V tomto zápise tedy řešíme

$$\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Snadno najdeme vlastní čísla  $\lambda_1 = 2\hbar$ ,  $\lambda_{2,3} = 0$ ,  $\lambda_4 = -2\hbar$  a k nim odpovídající vlastní vektory

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Vlastní hodnoty  $\lambda_1$  a  $\mathbf{v}_1$  vyjadřují, že celkový moment hybnosti  $2\hbar$  naměříme na svazku v módu  $LG_0^{+1}$  s levotočivou kruhovou polarizací  $\mathbf{e}_L$ . Naopak  $\mathbf{v}_4$  popisuje stav v módu  $LG_0^{-1}$  s pravotočivou polarizací  $\mathbf{e}_R$ , kde projekce spinu a orbitálního momentu hybnosti mají záporná znaménka a složí se na  $\lambda_4 = -2\hbar$ . Vlastní číslo 0 je degenerovaná hodnota, ke které náleží vlastní vektory z podprostoru  $\text{span}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  popisující stavy s neurčeným spinovým a orbitálním momentem hybnosti nebo s momenty opačných znamének. Například samotný vektor  $\mathbf{v}_2$  je stav s módem  $LG_0^{-1}$ , tedy orbitálním momentem hybnosti  $-\hbar$ , ale s kruhovou levotočivou polarizací a spinem  $\hbar$ , celkový moment tedy vychází 0. Na druhou stranu stav popsany vektorem  $\frac{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3}{\sqrt{2}}$  nemá určený spin ani orbitální moment hybnosti.

Tento svazek má ovšem jinou zajímavou vlastnost. Rozepíšeme-li si jeho Jonesův vektor

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \exp(i\varphi) + 1 \exp(-i\varphi) \\ -i \exp(i\varphi) + i \exp(-i\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)}{2} \\ \frac{\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)}{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

zjistíme, že je pouze jednoduchou kombinací sinů a cosinů od úhlu  $\varphi$ . Proto přejdeme u popisu Jonesových vektorů od kartézských souřadnic do polárních, pomocí přechodových vztahů

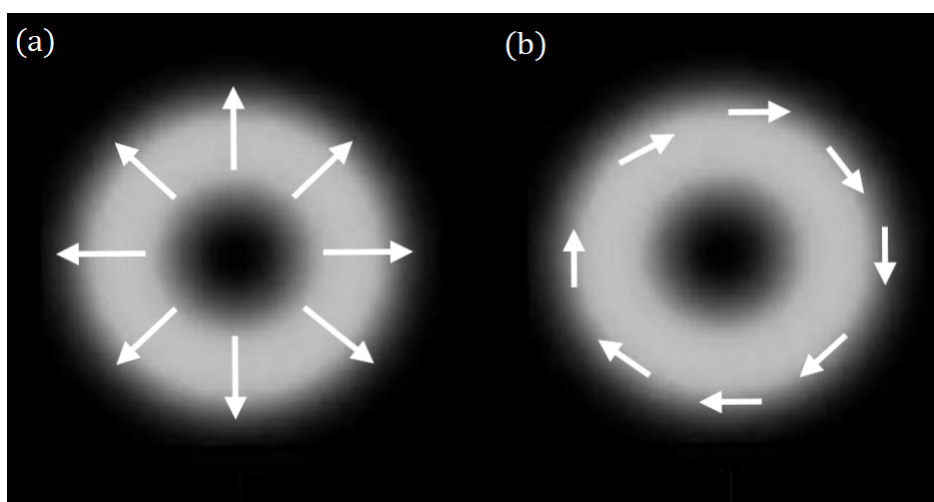
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \end{aligned}$$

tedy od jednotkových vektorů ve směrech os  $x$  a  $y$  k vektorům mířících ve směru radiálním respektive azimutálním (tangenciálním). Touto transformací přejde náš svazek do podoby

$$\mathbf{A}_r = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{r}{w(z)^2} \exp \left[ \left( \frac{-1}{w(z)^2} + \frac{ik}{2R(z)} \right) r^2 + 2i\psi \right] \mathbf{e}_r,$$

ve které snadno vidíme směr lineární polarizace. Ta je v každém místě rovnoběžná s polohovým vektorem, jak je to znázorněno na 3.1(a), a nazývá se radiální polarizace.

Podobným způsobem by se z vektoru  $\frac{-iv_2 + iv_3}{\sqrt{2}}$  získal i svazek s azimutální polarizací, u kterého je vektor elektrické intenzity kolmý na polohový vektor daného bodu, podobně jako na Obr.3.1(b) [16, s. 58].



Obrázek 3.1: Znázornění (a) radiální, (b) azimutální polarizace. Převzato a upraveno z [17].

## Kapitola 4

# Optické prvky pro experimentální práci s OAM

### 4.1 Detekce a přímá generace

Pro experimentální ověření výše uvedené teorie orbitálního momentu hybnosti musíme nejdřív mít světlo s touto vlastností k dispozici. Následně je vhodné se přesvědčit o tom, že náš svazek je skutečně v LG módu a má šroubovitou vlnoplochu. Nejprve představíme metodu detekce pomocí interference. Další způsob, konkrétně přenos momentu hybnosti na látku, uvedeme později.

Detekce interferencí je skládání dvou a více elektromagnetických vln a následný vznik interferenčních obrazců maxim a minim intenzity. Pro ukázkou budeme uvažovat interferenci svazku  $LG_0^{+1}$  s rovinnou vlnou, která je v paraxiální aproximaci pouze konstantou  $E_0 \in \mathbb{R}$ . Potom intenzita složeného pole vyjde

$$\begin{aligned} I &= |LG_0^{+1} + E_0|^2 \\ &= |LG_0^{+1}|^2 + |E_0|^2 + 2 \operatorname{Re}(LG_0^{+1} E_0) \\ &= I_1 + I_2 + \frac{4E_0 r w_0}{\pi w(z)^2} \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}\right) \cos\left(\frac{k}{2R(z)} r^2 + \varphi + 2\psi(z)\right) \end{aligned}$$

Konstruktivní interference nastane, když v posledním členu bude platit  $\cos\left(\frac{k}{2R} r^2 + \varphi + 2\psi\right) = 1$ . Tím získáme rovnici

$$r = \pm \sqrt{\frac{2R}{k}(2\pi n - \varphi - 2\psi)}, \quad (4.1)$$

kteřá udává výskyt interferenčních maxim podobně jako na Obr.4.1 [18].

Stejným způsobem se dají vypočítat interferenční obrazce pro různé kombinace svazků. Například pokud bychom interferovali 2 paprsky s rozdílnými  $l$ , dostali bychom obrazce s počtem propletených spirál odpovídajícím rozdílu hodnot  $l$  [19].

Způsobů generace svazků se šroubovitou vlnoplochou je mnoho. Jednou z možností je připravit svazek v LG módu přímo uvnitř dutiny laseru. U některých laserů vysílajících svazky s kruhovým rozdělením intenzity byla objevena fázová singularita, která je důsledkem právě šroubové vlnoplochy [20]. Nicméně v praxi se tento způsob moc často nepoužívá. Důvodem je, že většina laserů pracuje v HG módech a pro generaci cylindrických svazků se musejí speciálně upravit. Navíc je velmi obtížné dosáhnout čistých LG módů, například s  $p = 0$  a  $l = 1$ . Většinou je totiž výsledný svazek kombinací mnoha módů s vyššími indexy [19].

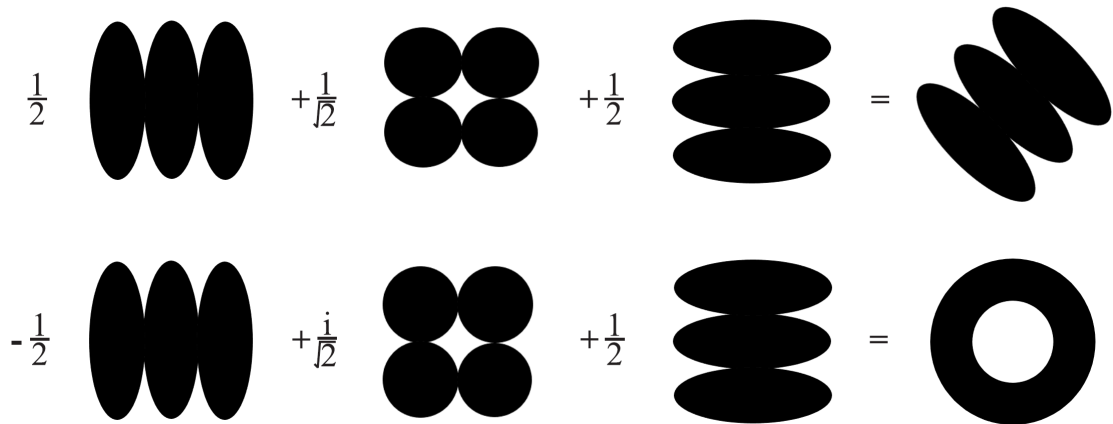




Obrázek 4.1: Interferenční obrazec svazku  $LG_0^1$  a rovinné vlny. Vykresleno z rovnice (4.1) pro  $n = 0$ ,  $\psi = 0$  a  $k = 2R$ .

## 4.2 Převod mezi HG a LG módy

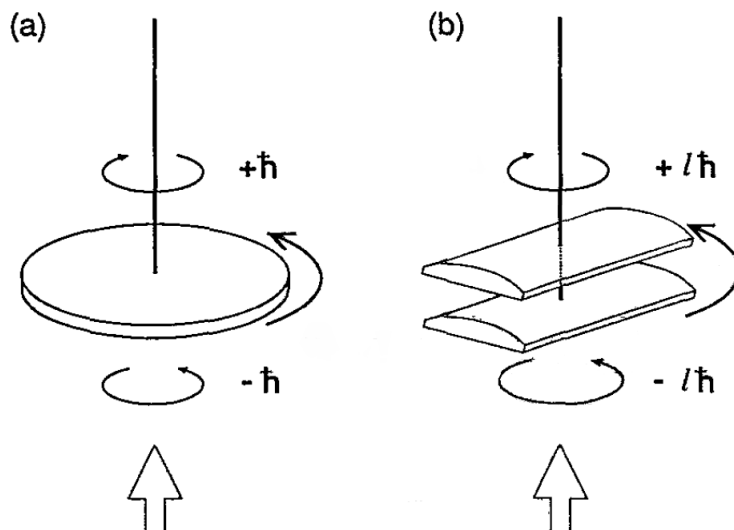
Jak již bylo zmíněno dříve, u laserů jsou běžnější HG módy, které tvoří podobně jako LG módy bázi. Proto se dá očekávat, že kombinací jistých HG svazků dostaneme LG svazek. Samotná kombinace módů ovšem nestačí. Jednotlivé svazky se musejí také shodovat ve fázi, čehož se dosáhne posunem Gouyho fáze válcovými čočkami. Příklad je uveden na Obr.4.2, kde jsou znázorněny dvě stejné kombinace HG módů s různým výsledkem, který je ovlivněn rozdílnými fázemi [21].



Obrázek 4.2: Módy  $HG_{02}$ ,  $HG_{11}$  a  $HG_{20}$  s různými fázemi vytvoří buď znovu HG mód otočený o  $45^\circ$  nebo  $LG_0^2$ .

Na stejném principu funguje i druhý způsob detekce orbitálního momentu hybnosti, totiž interakce s hmotou. Použije se podobné optické zařízení s válcovými čočkami, jen s jinak nastavenou vzdáleností mezi nimi. Tento aparát je pak schopen měnit orientaci šroubové vlnoplochy, tedy  $LG_p^l$  na  $LG_p^{-l}$ . Samotný experiment se provede stejně jako ověření spinového momentu hybnosti u svazku pohybující se  $\lambda/2$ -destičkou, jak je znázorněno na Obr.4.3(a). Svazek s předem určeným orbitálním momentem hybnosti se zespoda pošle do soustavy válcových čoček, které jsou upevněny na torzních vahách. Při průchodu soustavou se svazek obrátí orientace šroubové vlnoplochy.

Čočky tedy každému fotonu změni moment hybnosti o  $2l\hbar$ , což je uvede do měřitelného pohybu. Schéma experimentu je na Obr.4.3(b) [22].



Obrázek 4.3: Schéma experimentů měření momentů hybnosti světla. (a)  $\lambda/2$ -destička na torzních vahách převádí pravotočivé kruhově polarizované světlo na levotočivé a tím se destička uvede do pohybu. (b) Soustava válcových čoček určená k transformaci svazku s pravotočivou šroubovitou vlnoplochou na svazek s levotočivou vlnoplochou, což dodá soustavě točivý moment. Převzato z [22].

### 4.3 Spirální fázové destičky

Pokud k experimentu nepotřebujeme svazek v čistém LG módu, ale zajímá nás pouze šroubovitá vlnoplocha, můžeme ke generaci použít například spirální vlnovou destičku. Ta je vyrobená tak, aby její jedna strana odpovídala co nejpřesněji jednomu závitů šroubovice požadovaného svazku, viz Obr.4.4. Gaussovský svazek při průchodu tímto optickým elementem získá fázové zpoždění závislé na azimutálním úhlu  $\varphi$

$$\phi = \frac{\Delta n h}{\lambda} \varphi,$$

kde  $\Delta n$  je rozdíl indexů lomu materiálu destičky a okolního prostředí,  $h$  je výška schodu závitů na destičce a  $\lambda$  je vlnová délka použitého svazku. Výška  $h$  se volí tak, aby byl fázový posun, podobně jako v LG módu, celočíselný ( $k \in \mathbb{Z}$ ), tedy [24]

$$h = \frac{k\lambda}{\Delta n}. \quad (4.2)$$

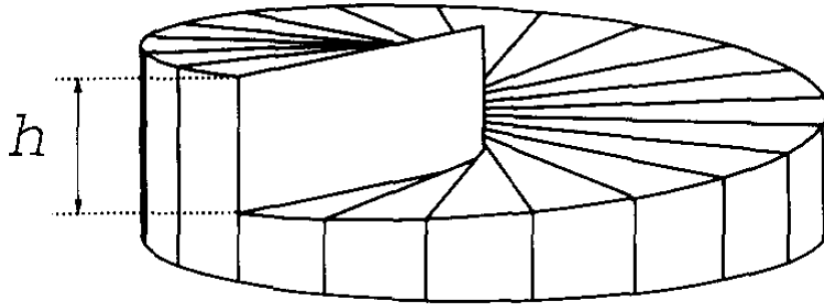
Z rovnosti (4.2) jsou hned vidět technologické potíže při výrobě fázových destiček. Pro lasery pracující se světlem ve viditelném spektru (stovky nanometrů) se musí výška schodu pohybovat v podobném měřítku. Schod reálně vyrobené spirální fázové destičky může mít rozměr například  $5 \mu m$  [25].

Alternativně (nebo zároveň) lze v (4.2) co nejvíce snížit rozdíl indexů lomu  $\Delta n$ . Toho se docílí ponořením destičky do speciální kapaliny s indexem lomu blízkým materiálu destičky. Index lomu kapaliny také závisí na teplotě, kterou lze podle potřeb nastavit [23].

Zajímá-li nás “čistota” svazku vycházejícího z destičky, můžeme se pokusit vypočítat, jaké zastoupení v něm jednotlivé módy mají. Využijeme k tomu vzorec rozkladu módu  $LG_p^l$  pozmeněného o  $\exp(-ik\phi)$  do báze. Procentuální zastoupení jednotlivých módů je pak vyjádřeno pomocí

$$I_{st,pl} = \left| \langle LG_s^t | \exp(-ik\phi) | LG_p^l \rangle \right|^2.$$

Pro zajímavost uvedeme, že zastoupení módu  $LG_0^1$  ( $s = 0, t = 1$ ) ve svazku vzniklého z Gaussovského svazku ( $p = 0, l = 0$ ) pomocí destičky s  $k = 1$  je přibližně 78 %. Další hodnoty jsou uvedeny v [23].



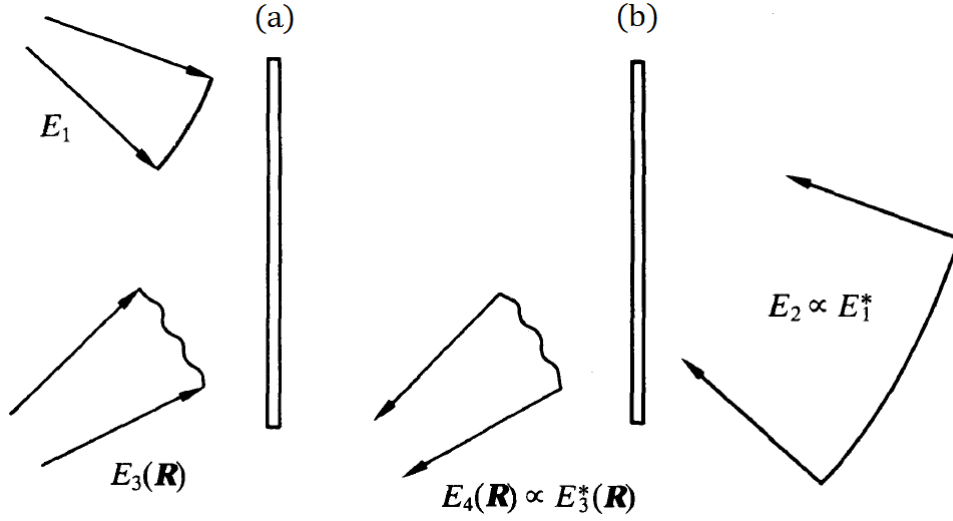
Obrázek 4.4: Nákres spirální fázové destičky s výškou schodu  $h$ . Převzato z [23].

## 4.4 Difrakční hologramy

Další způsob generace svazku se šroubovitou vlnoplochou je založen na principu optické fázové konjugace. Pokud máme koherentní monochromatickou vlnu  $E = E_0 \exp(i\phi)$ , pak vlna k ní konjugovaná má fázi s opačným znaménkem  $E^* = E_0 \exp(-i\phi)$ . Samotný princip využívá interference jednoho testovacího svazku ( $E_3(\mathbf{R})$ ) a jednoho referenčního svazku ( $E_1$ ), jejichž interferenční obrazec vygeneruje tzv. hologram, Obr.4.5(a). K rekonstrukci konjugovaného testovacího svazku ( $E_4(\mathbf{R}) \propto E_3^*(\mathbf{R})$ ) pak stačí do hologramu vyslat konjugovaný referenční svazek ( $E_2 \propto E_1^*$ ), znázorněno na Obr.4.5(b) [26, s. 5].

V reálných experimentech se využívá takový referenční svazek, jehož konjugaci dokážeme lehce vytvořit, například sférické nebo rovinné vlny. I samotný hologram se většinou nevyrábí přímo interferencí, ale obrazce se většinou numericky spočítají. V dnešní době je již také možné používat počítačem ovladatelné hologramy tzv. SLM (Spatial Light Modulator) [27].

V našem případě chceme získat svazek v LG módu ( $LG_0^1$ ), který vytvoříme pomocí rovinné vlny  $u = E_0 \exp(ik_z z + ik_x x)$  puštěné pod malým úhlem ( $\alpha = \arcsin(\frac{k_x}{k})$ ). Interferenční obrazce spočítáme v nejužším místě, kde  $z \rightarrow 0$  ( $R \rightarrow \infty, w(z) \rightarrow w_0, \psi(z) \rightarrow 0$ ), podobným způsobem



Obrázek 4.5: Schéma optické fázové konjugace. (a) Záznam testovací vlny  $E_3(\mathbf{R})$  pomocí referenční vlny  $E_1$ . (b) Zpětná rekonstrukce testovací (konjugované) vlny  $E_4(\mathbf{R})$  pomocí konjugované referenční vlny  $E_2$ . Převzato z [26].

jako výše, tedy

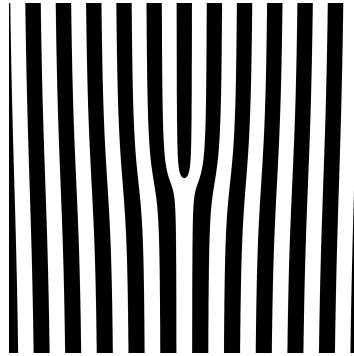
$$\begin{aligned}
 I &= |LG_0^1 + E_0 \exp(ik_x x)|^2 \\
 &= I_1 + I_2 + \frac{4E_0 r}{\pi w_0} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \cos(k_x x + \varphi).
 \end{aligned}$$

Odtud dostaneme rovnici obrazce

$$r = \frac{2\pi n + \varphi}{k_x \cos \varphi}, \quad (4.3)$$

ze kterého lze vytvořit hologram podobný difrakční mřížce s jedním dodatečným proužkem v horní polovině, jak je ukázáno na Obr.4.6 [28].

Pro svazek s opačnou orientací vlnoplochy bychom použili stejný hologram jen vertikálně převrácený. Hologramy pro generaci svazků s vyšším  $l$  mají více dodatečných proužků [29].



Obrázek 4.6: Hologram pro generaci  $LG_0^1$  z rovinné vlny. Vykresleno z rovnice (4.3) pro  $n = 0$ ,  $k_x = 1$ .

## 4.5 q-destičky

Poslední optický prvek, který v tomto přehledu uvedeme, je tzv. q-destička. Poprvé byla představena v článku [30], jehož obsah zde shrneme. Destička je schopná převádět kruhově polarizovanou vlnu na vlnu s opačnou polarizací a šroubovou vlnoplochou. Přesněji, každý foton po průchodu q-destičkou změni své znaménko spinového momentu hybnosti a přičte si určitou hodnotu ( $2q\hbar$ ) k orbitálnímu momentu hybnosti.

q-destička je vyrobena z dvojlomného materiálu, jehož optická osa v rovině destičky  $(x, y)$  závisí na poloze podle předpisu

$$\alpha(r, \varphi) = q\varphi + \alpha_0,$$

kde  $\alpha(r, \varphi)$  udává úhel mezi optickou osou a osou  $x$ ,  $q$  a  $\alpha_0$  jsou konstanty (podle  $q$  se destička i jmenuje). Příklady q-destiček pro různé konstanty jsou znázorněny na Obr.4.7. Působení destičky na svazek lze matematicky vyjádřit v Jonesově formalismu prostřednictvím Jonesovy matice ve tvaru

$$M(\alpha) = R(-\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix},$$

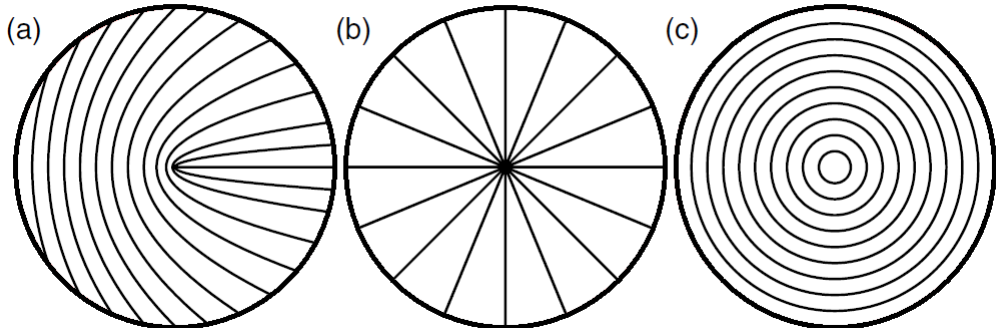
kde  $R(\alpha)$  je standardní matice rotace v  $\mathbb{R}^2$ . Příchozí kruhově polarizovaná rovinná vlna, například levotočivá, lze zapsat pomocí (3.5) jako

$$\mathbf{E}_1 = E_0 \mathbf{e}_L = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Po průchodu q-destičkou se vlna (4.4) změni na

$$\mathbf{E}_2 = M(\alpha(r, \varphi)) \mathbf{E}_1 = E_0 \exp(i2\alpha(r, \varphi)) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = E_0 \exp(i2q\varphi + i2\alpha_0) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

což je pravotočivě polarizovaná vlna s azimutálním členem  $\exp(i2q\varphi)$  zodpovědným za šroubovitou vlnoplochu. Jednotlivé fotony tedy změnil svůj spin z  $+\hbar$  na  $-\hbar$  a navíc získaly orbitální moment hybnosti  $2q\hbar$ . Pro  $q = 1$  proběhne výměna momentů hybnosti pouze mezi jeho dvěma typy, v ostatních případech ( $q \neq 1$ ) se část momentu hybnosti předá i mezi vlnou a destičkou.



Obrázek 4.7: Příklady q-destiček. Optická osa je v každém bodě tečnou k černým (tenkým) čarám. (a)  $q = 1/2$ ,  $\alpha_0 = 0$ , (b)  $q = 1$ ,  $\alpha_0 = 0$ , (c)  $q = 1$ ,  $\alpha_0 = \pi/2$ . Převzato a upraveno z [30].

## Kapitola 5

# Aplikace OAM

### 5.1 Optické pasti

V minulé kapitole jsme nastínili některé z možností ověření výskytu orbitálního momentu hybnosti ve svazcích. Dalším samozřejmým důkazem existence šroubovitě vlnoplochy je přímé pozorování předání momentu hybnosti částicím. Než přistoupíme k samotným experimentům, je užitečné vysvětlit způsob zachycení a stabilizace pozorovatelných částic pomocí tzv. optických pastí.

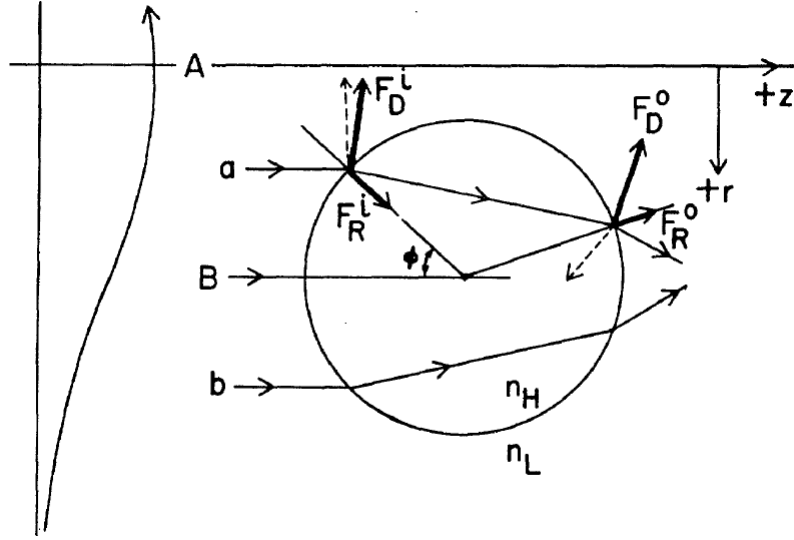
Revoluční využití tlaku záření bylo poprvé představeno v [31] při zkoumání zrychlení mikročástic pod vlivem laserového světla. Průhledná sféra (z latexu) o průměru úměrném vlnové délce použitého světla byla zachycena Gaussovským svazkem ve vodou naplněné experimentální komoře. Jak se očekávalo, vlivem tlaku záření byla sféra posouvána ve směru šíření svazku. Byl pozorován ale další překvapivý efekt, kdy se sféry pohybovaly do místa s největší intenzitou ve středu svazku.

Vysvětlení tohoto jevu je založeno na změně hybnosti světla způsobené lomem na rozhraní. Pro ilustraci uvažujme sféru umístěnou mimo osu  $z$  a dva paprsky  $a, b$  jako na Obr.5.1. Při průchodu mezi rozhraními se paprsky z části odrazí a z části zlomí. Při každé změně směru působí paprsek na sféru v důsledku zákona zachování hybnosti reaktivní silou. Pro paprsek  $a$  jsou tyto síly označeny jako  $F_D^i$  síla způsobená lomem při vstupu,  $F_R^i$  síla způsobená odražením při vstupu a podobně  $F_D^o$ ,  $F_R^o$  síly způsobené lomem a odražením při výstupu ze sféry. Složení těchto sil míří ve směru  $+z$  a ve směru  $-r$  (k ose  $z$ ). Podobné síly působí i od paprsku  $b$ , ale ve směru  $+z$  a  $+r$  (od osy  $z$ ). Rozdíl je v tom, že intenzita paprsku  $b$  a tedy i velikost sil jsou ve srovnání s paprskem  $a$  menší. Proto výslednice všech sil posouvá sféru dopředu ( $+z$ ) a do místa s největší intenzitou ( $-r$ ).

Výsledný pohyb objektu závisí také na rozdílu indexů lomu materiálu ( $n_H$ ) a okolního prostředí ( $n_L$ ). Pokud by platilo  $n_H < n_L$  (například vzduchová bubliny v glycerolu), pak by výsledná síla naopak vytlačovala objekt ze středu svazku.

Výše zmíněná optická past efektivně zachycuje částice ve dvou směrech, ale pořád je posouvá ve směru světla. Tomu lze zabránit buď mechanicky (částicím se do cesty postaví překážka) nebo například využitím druhého Gaussova svazku puštěného naproti prvnímu. Oba svazky zachytí částici na společné ose a síly působící ve směru šíření světla se navzájem vyruší.

Je však možné znehybnit částici ve všech směrech za pomoci jediného Gaussova svazku [32]. Metoda optické pinzety využívá silně zaostřený svazek ke 3D stabilizaci částice těsně před nebo za ohniskem. Princip je podobný jako u optické pasti, kde se průhledná sféra chová jako spojná

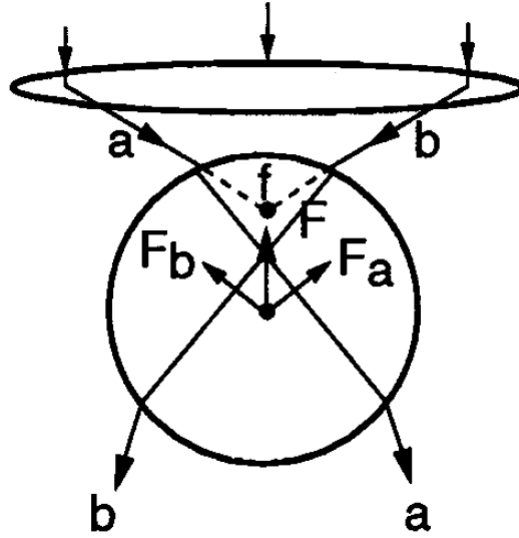


Obrázek 5.1: Princip optické pasti. Průhledná sféra s indexem lomu  $n_H$  je umístěna v prostředí s indexem lomu  $n_L$  mimo optickou osu  $A$  Gaussovského svazku. Výsledná síla se ilustruje na dvou paprscích  $a, b$  symetricky protínajících sféru okolo její osy  $B$ . Paprsek  $a$  se při průchodu do sféry zlomí a z části odrazí, a tím na sféru působí silami  $F_D^L$  (lom) a  $F_R^i$  (odraz), podobně při opouštění sféry ( $F_D^o, F_R^o$ ). Paprsek  $b$  působí na sféru podobně, jen směrem od osy  $z$ . Sféra je výslednicí tlačena dopředu ( $+z$ ) a z důvodu nižší intenzity paprsku  $b$  do místa s vyšší intenzitou ( $-r$ ). Převzato a upraveno z [31].

čočka. Na Obr.5.2 jsou znázorněny dva paprsky  $a, b$  a síly způsobené jejich lomem  $F_a, F_b$ , odraz paprsků je zanedbán. Výslednice  $F$  míří k ohnisku  $f$  a po složení s tlakem záření (v opačném směru než  $F$ ) zadržuje částici na místě.

Nevýhodou této optické pinzety s Gaussovským svazkem je možnost zachytit pouze transparentní objekty. Pro manipulaci s neprůhlednými a absorbujícími objekty je potřeba změnit zachytný svazek na nějaký s intenzitou soustředěnou v mezikruží (viz první náčrt v Obr.2.3) [33]. Lze například použít jakýkoli  $LG_0^l$  mód, který má fázovou singularitu ve svém středu. S touto modifikací je optická pinzeta schopná uvěznit libovolnou částici rozměrově srovnatelnou s šířkou svazku. Větší částice se do tmavého středu “nevejdu” [33], částice mnohem menší než šířka svazku jsou naopak taženy mimo tmavý střed do světlého mezikruží s vyšší intenzitou ze stejného důvodu, jako v případě optické pasti [34]. Navíc se na základě numerických výpočtů ukázalo, že LG módy mají mnohem větší zachytávající sílu než obyčejný Gaussův svazek [35].

Jak již víme, každý LG mód má orbitální moment hybnosti. Optické pinzety s LG svazky jsou proto schopné předávat část momentu zachycené částici a rotovat s ní [36]. Na stejném principu je založen experiment k ověření hodnoty orbitálního momentu hybnosti  $l\hbar$  na foton [34]. Podle výše uvedené teorie má kruhově polarizovaný svazek spinový moment hybnosti  $\pm\hbar$  a  $LG_0^l$  mód má orbitální moment hybnosti  $l\hbar$ . Jako stabilizační svazek byl použit kruhově polarizovaný  $LG_0^1$  mód k zachycení částice z dvojlovného materiálu (teflon). V experimentální soustavě bylo možné přidat nebo odebrat  $\lambda/2$ -destičku, která určovala orientaci kruhové polarizace. Podle očekávání se částice v prvním případě vůbec nepohybovala a po přidání  $\lambda/2$ -destičky začala rotovat. Výsledek odpovídá předpovězené teorii sčítání momentů hybnosti a velikosti orbitálního momentu, kdy



Obrázek 5.2: Princip optické pinzety. Průhledná sféra je chycena pod ohniskem svazku  $f$ . Dva ilustrativní paprsky  $a$ ,  $b$  působí na sféru silami  $F_a$ ,  $F_b$  z důvodu lomu na rozhraní. Výslednice  $F$  míří k ohnisku  $f$ . Převzato a upraveno z [38].

v prvním případě spin  $-\hbar$  se složí s orbitálním momentem na 0 a v druhém případě spin  $\hbar$  a orbitální moment  $\hbar$  dají výsledný moment  $2\hbar$ , který rotuje s částicí.

Rozdílná povaha obou momentů se naopak projeví na částicích chycených mimo osu svazku. Spin je způsoben kruhovou polarizací, která rotuje s částicemi kolem jejich vlastní osy nezávisle na poloze uvnitř svazku. Orbitální moment hybnosti má na druhou stranu původ v šroubovitém zakřivení vlnoplochy. Částice vychýlená mimo střed svazku s OAM bude vystavena síle v azimutálním směru, což ji uvede do pohybu po kružnici [37].

Optické pinzety našly řadu uplatnění v nejrůznějších vědeckých oborech [38]. V biologii je díky silnější stabilizaci i se slabší intenzitou LG laserů možné manipulovat například se živými bakteriemi bez jejich poškození. Velká přesnost pinzety umožnila zkoumání i mnohem menších objektů jako jsou červené krvinky, orgány uvnitř buněk nebo dokonce viry. Další pokusy měřily elasticitou pružnost natažené šroubovice DNA v izolovaných chromozomech, sílu jednotlivých svalových vláken nebo velikost “kroků” mikromotorů kinesinu uvnitř buňky. V chemii našla optická pinzeta využití například v spektroskopii nebo při přesném dodání reakčních látek do polymerizace. Díky dokonalé stabilizaci optické pinzety je také možné “chladiť” atomy na velice nízké teploty (jednotky  $\mu\text{K}$ ), což otevřelo dveře novým fyzikálním pokusům. Jejich výsledkem je například zpřesnění atomárních hodin nebo dosažení Bose-Einsteinova kondenzátu.

Přímé využití našly pinzety s orbitálním momentem hybnosti při konstrukci mikrostrojů [39]. Pomocí dvou chycených rotujících částic byla například sestavena mikroskopická pumpa schopná vytvořit proudění kapaliny v úzkém kanálku. Díky závislosti rychlosti otáčení částic na viskozitě okolní kapaliny lze tuto vlastnost i měřit.



## 5.2 Komunikace

Důležitou vlastností LG módů je jejich vzájemná ortogonalita. Spolu neinteragujících svazků lze využít v komunikačních technologiích k mnohonásobnému zvýšení přenosové kapacity. Již dlouho se využívalo různých modulačních technik k navýšení objemu přenesených dat, například dvou kolmých polarizačních stavů k zakódování dvojnásobného množství informace do jednoho svazku. Objev orbitálního momentu hybnosti světla přinesl další stupeň volnosti k uspokojení stále rostoucích požadavků informačního průmyslu na kapacitu datového spojení.

Jeden z prvních experimentů s OAM v komunikaci ve volném prostoru využíval speciální hologram k rozlišení devíti různých  $LG_0^l$  módů ( $l = -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16$ ) [40]. Vysílač zkombinoval jeden z LG módů (představující jeden symbol z osmi) s “naváděcím” Gaussovským svazkem, který zachytil přijímač a speciální hologram jej rozdělil do devíti samostatných svazků. Přenos proběhl úspěšně, když většina intenzity byla soustředěna pouze na dva svazky, naváděcí Gaussův s  $l = 0$  a ten s  $l$  odpovídající vyslanému symbolu.

Navazující pokusy už využívaly přímého multiplexování svazků (kombinace více signálů do jednoho) s různým momentem hybnosti [41]. Jako nosiče informace byly použity čtyři  $LG_0^l$  módy ( $l = -8, 4, 8, 16$ ) o stejné vlnové délce s dvěma polarizačními stavy, navíc amplitudově a fázově modulované. Vysílač spojil všechny svazky do jednoho a poslal je k přijímači s celkovou přenosovou kapacitou přes  $1300 \text{ GBit s}^{-1}$ . Zde byl jeden svazek demultiplexován za účelem zkoumání čitelnosti a čistoty nesené informace.

Oba zmíněné přenosy proběhly v laboratoři za kontrolovatelných podmínek prostředí šíření. Ukázalo se totiž, že čitelnost informace je velice náchylná na pohyb vzduchu. Jelikož LG módy se od sebe odlišují prostorovým tvarem vlnoploch, i malé turbulence dokáží znehodnotit nosné svazky tak, že při demultiplexování se jednotlivé módy buď překrývají nebo nejsou čitelné vůbec. Přesto se pomocí adaptivní optiky nebo zpracování informace třídícími algoritmy podařilo vysílat v otevřeném prostoru i na vzdálenost desítek kilometrů [42]. Nedávný pokrok v technologii optických vláken naopak představil speciální vlákna se zatočenými mikrokanálky, které zachovávají šroubovitou vlnoplochu vyslaných svazků. Kabele z těchto vláken tedy přináší alternativní možnost pro dálkovou manipulaci s OAM [43].

## 5.3 Další aplikace

OAM našel uplatnění také v oblasti výzkumu kvantové provázanosti. Detailnější popis problematiky přesahuje rozsah této práce, přesto se pokusíme shrnout základní myšlenku. Z jedné vlny je na speciálním krystalu možné vytvořit dvě nízko-energetické vlny o nižších frekvencích splňující zákon zachování energie a při správné konfiguraci (stimulated parametric downconversion) je dosažitelné i zachování hybnosti a momentu hybnosti. Pokud má výchozí foton v Gaussově módu OAM  $l = 0$ , pak dva nové fotony musejí mít momenty  $l_1 = -l_2$  [9]. Naproti běžně používané provázanosti fotonů polarizací má provázanost v OAM velikou výhodu, hodnota orbitálního momentu  $l$  totiž není omezená. Vzniklé fotony jsou tak provázané ve více-dimenzionálních stavech, zatímco doposud používaná polarizace představuje pouze dvou-dimenzionální systém [44].

K důkazu provázanosti obou fotonů je nutné ověřit, zda se nachází v koherentní superpozici. Jako filtry pro určení hodnoty  $l$  byly nejprve použity hologramy a jednovidová optická vlákna. Později se začaly používat dynamické, počítačem řízené, hologramy (SLM), což umožnilo zkoumání provázanosti i jiných módů nesoucích OAM, například Besselových svazků [45].

Spirální fázové destičky mají naopak využití v astronomii. Každý svazek s fázovou závislostí  $\exp(il\varphi)$  má ve svém středu singularitu. Této oblasti s malou intenzitou je možné využít k zesílení slabšího signálu schovaného v záři silnějšího zdroje. Experimentální aparatura se skládá ze spirální destičky, spojné čočky a desky s malým otvorem za sebe poskládané v ose silného zdroje (např. hvězdy). Příchozí světlo od hlavního zdroje projde spirální fázovou destičkou a rozprostře se do mezikruží s nulovou intenzitou uprostřed. Zastínění mezikruží deskou s otvorem umožní detekci slabšího zdroje lokalizovaného mimo optickou osu. Nastavení soustavy (jako třeba hodnota  $l$  fázové destičky nebo šířka otvoru) závisí na mnoha faktorech, především na koherenci obou zdrojů, rozdílu jejich intenzit nebo pod jakým úhlem oba zdroje pozorujeme [46].

Z teorie uvedené v dřívějších kapitolách je jasné, že orbitální moment hybnosti pochází z prostorového rozložení vlnoplochy nezávisle na původu vlnění, a proto se podobný jev dá očekávat i u elementárních částic. Výčet možných aplikací OAM tedy zakončíme nikoli u elektromagnetického vlnění, jemuž jsme se věnovali v celé práci, ale představíme elektronové svazky s fázovými singularitami.

V elektronovém mikroskopu je běžně možné připravit svazek elektronů jako rovinnou vlnu, které lze do cesty postavit nějaký optický element. První pokusy s orbitálním momentem hybnosti elektronů využívaly spirální fázové destičky z grafitového filmu, jenže ty se ukázaly být příliš náročné na výrobu. Pro vlnovou délku elektronů v řádu pikometrů musela mít destička velikost schodu nejvýše 100 nm [47]. V navazujících experimentech se už elektronové singulární svazky generovaly pomocí difrakčních mřížek vyřezaných z platinové fólie iontovým svazkem [48]. Implementace OAM do elektronových mikroskopů by měla zvýšit jejich skenovací přesnost a magnetickou sensitivitu. Další uplatnění by měly elektrony s orbitálním momentem hybnosti najít v částicové fyzice.

# Závěr

V práci jsme se věnovali problematice orbitálního momentu hybnosti světla a jeho matematickému popisu. Ze skalární Helmholtzovy rovnice jsme přešli do paraxiální aproximace Maxwellových rovnic a odvodili obecné řešení paraxiální rovnice.

Následně byla představena formální analogie paraxiální rovnice a kvantové mechaniky jako užitečný nástroj pro budoucí výpočty. Za pomoci vlastních funkcí dvourozměrného kvantového harmonického oscilátoru jsme poctivě vypočetli Laguerre-Gaussovy módy představující ortonormální bázi řešení paraxiální rovnice.

Na prostorovém rozložení šroubovitě vlnoplochy LG módů jsme ukázali původ orbitálního momentu hybnosti a jeho rozdíly se spinovým momentem hybnosti. Z pohledu různých polarizačních stavů jsme v Jonesově formalismu demonstrovali skládání obou momentů.

Pro detekci svazků se šroubovitou vlnoplochou jsme představili metodu interference a vypočetli příklad vzniklého obrazce. Dále jsme prezentovali výběr optických prvků pro experimentální práci s OAM, do kterého patří spirální fázové destičky, difrakční hologramy nebo q-destičky převádějící mezi spinovým a orbitálním momentem.

OAM má řadu využití, my jsme se zaměřili hlavně na stabilizaci mikroskopických objektů pomocí tzv. optických pinzet. Její fungování jsme vysvětlili na základě klasické optiky a mechaniky a uvedli jsme její využití v biologii a dalších oborech. Na závěr jsme stručně shrnuli aplikace OAM v komunikačních technologiích, ve výzkumu kvantové provázanosti a v astronomii.

Navazující práce by se mohly zabývat detailnějším vektorovým popisem orbitálního momentu s využitím Poyntingova vektoru nebo z pohledu kvantové teorie pole. Další možností je korektní odvození principu fungování optické pinzety na základě interakce OAM s atomy dipólovou silou a případné zdokonalení optického chlazení. Také se nabízí rozvoj tématu navýšení kapacity přenosových komunikačních kanálů s možností komerčního využití. V neposlední řadě by se dalo navázat na problematiku kvantově provázaných částic s OAM.

# Literatura

- [1] TOLAR, Jiří. *Vlnění, optika a atomová fyzika*. Praha, 2017. Dostupné také z: <https://physics.fjfi.cvut.cz/files/predmety/02VOAF/VOAF2017.pdf>
- [2] GOODMAN, Joseph W. *Introduction to Fourier optics*. 3rd ed. Englewood, Colo.: Roberts & Company Publishers, c2005. ISBN 09-747-0772-4.
- [3] SIEGMAN, A. E. *Lasers*. Mill Valley, Calif.: University Science Books, c1986. ISBN 09-357-0211-5.
- [4] MANDEL, Leonard a Emil WOLF. *Optical coherence and quantum optics*. New York: Cambridge University Press, 1995. ISBN 05-214-1711-2.
- [5] HLAVATÝ, Ladislav a Matrin ŠTEFAŇÁK. *Slabikář kvantové mechaniky*. Praha, 2018. Dostupné také z: <https://physics.fjfi.cvut.cz/files/predmety/02KVAN/02KVAN.pdf>
- [6] ŠTOLL, Ivan, Jiří TOLAR a Igor JEX. *Klasická teoretická fyzika*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2017. ISBN 978-80-246-3545-3.
- [7] PAULI, Wolfgang a Charles P. ENZ. *Wave mechanics*. Vol.5. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. ISBN 04-864-1462-0.
- [8] ANDREWS, George E., Richard ASKEY a Ranjan ROY. *Special functions*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1999. ISBN 05-216-2321-9.
- [9] YAO, Alison M. a Miles J. PADGETT. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Advances in Optics and Photonics*. 2011, **3**(2), 161-204. DOI: 10.1364/AOP.3.000161. ISSN 1943-8206.
- [10] DURNIN, J., J. J. MICELI a J. H. EBERLY. Diffraction-free beams. *Physical Review Letters*. 1987, **58**(15), 1499-1501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.1499. ISSN 0031-9007.
- [11] GORI, F., G. GUATTARI a C. PADOVANI. Bessel-Gauss beams. *Optics Communications*. 1987, **64**(6), 491-495. DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8. ISSN 00304018.
- [12] VASARA, Antti, Jari TURUNEN a Ari T. FRIBERG. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms. *Journal of the Optical Society of America A*. 1989, **6**(11), 1748-1754. DOI: 10.1364/JOSAA.6.001748. ISSN 1084-7529.
- [13] BAGINI, V., F. FREZZA, M. SANTARSIERO, G. SCHETTINI a G. Schirripa SPAGNOLO. Generalized Bessel-Gauss beams. *Journal of Modern Optics*. 1996, **43**(6), 1155-1166. DOI: 10.1080/09500349608232794. ISSN 0950-0340.

- [14] DOSTER, Timothy a Abbie T. WATNIK. Laguerre-Gauss and Bessel-Gauss beams propagation through turbulence: analysis of channel efficiency. *Applied Optics*. 2016, **55**(36), 10239-10246. DOI: 10.1364/AO.55.010239. ISSN 0003-6935.
- [15] FOWLES, Grant R. *Introduction to modern optics*. 2nd ed., Dover ed. New York: Dover Publications, 1975. ISBN 04-866-5957-7.
- [16] ANDREWS, David L. a Mohamed BABIKER. *The angular momentum of light*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2013. ISBN 978-1-107-00634-8.
- [17] ZHAN, Qiwen. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications. *Advances in Optics and Photonics*. 2009, **1**(1), 1-57. DOI: 10.1364/AOP.1.000001. ISSN 1943-8206.
- [18] HECKENBERG, N. R., R. MCDUFF, C. P. SMITH a A. G. WHITE. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms. *Optics Letters*. 1992, **17**(3), 221-223. DOI: 10.1364/OL.17.000221. ISSN 0146-9592.
- [19] HARRIS, M., C.A. HILL a J.M. VAUGHAN. Optical helices and spiral interference fringes. *Optics Communications*. 1994, **106**(4-6), 161-166. DOI: 10.1016/0030-4018(94)90314-X. ISSN 00304018.
- [20] VAUGHAN, J. M. a D. V. WILLETTS. Temporal and interference fringe analysis of TEM<sub>01</sub>\* laser modes. *Journal of the Optical Society of America*. 1983, **73**(8), 1018-1021. DOI: 10.1364/JOSA.73.001018. ISSN 0030-3941.
- [21] BEIJERSBERGEN, M.W., L. ALLEN, H.E.L.O. VAN DER VEEN a J.P. WOERDMAN. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum. *Optics Communications*. 1993, **96**(1-3), 123-132. DOI: 10.1016/0030-4018(93)90535-D. ISSN 00304018.
- [22] ALLEN, L., M. W. BEIJERSBERGEN, R. J. C. SPREEUW a J. P. WOERDMAN. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Physical Review A*. 1992, **45**(11), 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185. ISSN 1050-2947.
- [23] BEIJERSBERGEN, M.W., R.P.C. COERWINKEL, M. KRISTENSEN a J.P. WOERDMAN. Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate. *Optics Communications*. 1994, **112**(5-6), 321-327. DOI: 10.1016/0030-4018(94)90638-6. ISSN 00304018.
- [24] TURNBULL, G.A., D.A. ROBERTSON, G.M. SMITH, L. ALLEN a M.J. PADGETT. The generation of free-space Laguerre-Gaussian modes at millimetre-wave frequencies by use of a spiral phaseplate. *Optics Communications*. 1996, **127**(4-6), 183-188. DOI: 10.1016/0030-4018(96)00070-3. ISSN 00304018.
- [25] OEMRAWSINGH, S. S. R., J. A. W. VAN HOUWELINGEN, E. R. ELIEL, J. P. WOERDMAN, E. J. K. VERSTEGEN, J. G. KLOOSTERBOER a G. W. -T HOOFT. Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths. *Applied Optics*. 2004, **43**(3), 688-694. DOI: 10.1364/AO.43.000688. ISSN 0003-6935.
- [26] ZEL'DOVICH, B.Ya., N.F. PILIPETSKY a V.V. SHKUNOV. *Principles of Optical Conjugation*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985. ISBN 978-3-662-13573-0.

- [27] OHTAKE, Yoshiyuki, Taro ANDO, Norihiro FUKUCHI, Naoya MATSUMOTO, Haruyasu ITO a Tsutomu HARA. Universal generation of higher-order multiringed Laguerre-Gaussian beams by using a spatial light modulator. *Optics Letters*. 2007, **32**(11), 1411-1413. DOI: 10.1364/OL.32.001411. ISSN 0146-9592.
- [28] HECKENBERG, N. R., R. MCDUFF, C. P. SMITH, H. RUBINSZTEIN-DUNLOP a M. J. WEGENER. Laser beams with phase singularities. *Optical and Quantum Electronics*. 1992, **24**(9), S951-S962. DOI: 10.1007/BF01588597. ISSN 0306-8919.
- [29] BAZHENOV, V.Yu., M.S. SOSKIN a M.V. VASNETSOV. Screw Dislocations in Light Wavefronts. *Journal of Modern Optics*. 2007, **39**(5), 985-990. DOI: 10.1080/09500349214551011. ISSN 0950-0340.
- [30] MARRUCCI, L., C. MANZO a D. PAPARO. Optical Spin-to-Orbital Angular Momentum Conversion in Inhomogeneous Anisotropic Media. *Physical Review Letters*. 2006, **96**(16), 1-4. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.163905. ISSN 0031-9007.
- [31] ASHKIN, A. Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure. *Physical Review Letters*. 1970, **24**(4), 156-159. DOI: 10.1103/PhysRevLett.24.156. ISSN 0031-9007.
- [32] ASHKIN, A., J. M. DZIEDZIC, J. E. BJORKHOLM a Steven CHU. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. *Optics Letters*. 1986, **11**(5), 288-290. DOI: 10.1364/OL.11.000288. ISSN 0146-9592.
- [33] HE, H., N.R. HECKENBERG a H. RUBINSZTEIN-DUNLOP. Optical Particle Trapping with Higher-order Doughnut Beams Produced Using High Efficiency Computer Generated Holograms. *Journal of Modern Optics*. 1995, **42**(1), 217-223. DOI: 10.1080/09500349514550171. ISSN 0950-0340.
- [34] SIMPSON, N. B., K. DHOLAKIA, L. ALLEN a M. J. PADGETT. Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: -an optical spanner. *Optics Letters*. 1997, **22**(1), 52-54. DOI: 10.1364/OL.22.000052. ISSN 0146-9592.
- [35] SIMPSON, N. B., L. ALLEN a M. J. PADGETT. Optical tweezers and optical spanners with Laguerre-Gaussian modes. *Journal of Modern Optics*. 1996, **43**(12), 2485-2492. DOI: 10.1080/095003496154392. ISSN 0950-0340.
- [36] HE, H., M. E. J. FRIESE, N. R. HECKENBERG a H. RUBINSZTEIN-DUNLOP. Direct Observation of Transfer of Angular Momentum to Absorptive Particles from a Laser Beam with a Phase Singularity. *Physical Review Letters*. 1995, **75**(5), 826-829. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.826. ISSN 0031-9007.
- [37] O'NEIL, A. T., I. MACVICAR, L. ALLEN a M. J. PADGETT. Intrinsic and Extrinsic Nature of the Orbital Angular Momentum of a Light Beam. *Physical Review Letters*. 2002, **88**(5), 053601(1)-053601(4). DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.053601. ISSN 0031-9007.
- [38] ASHKIN, A. Optical trapping and manipulation of neutral particles using lasers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 1997, **94**(10), 4853-4860. DOI: 10.1073/pnas.94.10.4853. ISSN 0027-8424.
- [39] PADGETT, Miles a Richard BOWMAN. Tweezers with a twist. *Nature Photonics*. 2011, **5**(6), 343-348. DOI: 10.1038/nphoton.2011.81. ISSN 1749-4885.

- [40] GIBSON, Graham, Johannes COURTIAL, Miles J. PADGETT, Mikhail VASNETSOV, Valeriy PAS'KO, Stephen M. BARNETT a Sonja FRANKE-ARNOLD. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. *Optics Express*. 2004, **12**(22), 5448-5456. DOI: 10.1364/OPEX.12.005448. ISSN 1094-4087.
- [41] WANG, Jian, Jeng-Yuan YANG, Irfan M. FAZAL, et al. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing. *Nature Photonics*. 2012, **6**(7), 488-496. DOI: 10.1038/nphoton.2012.138. ISSN 1749-4885.
- [42] WILLNER, Alan E., Yongxiong REN, Guodong XIE, et al. Recent advances in high-capacity free-space optical and radio-frequency communications using orbital angular momentum multiplexing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2017, **375**(2087), 1-18. DOI: 10.1098/rsta.2015.0439. ISSN 1364-503X.
- [43] RUSSELL, P. St.J., R. BERAVAT a G. K. L. WONG. Helically twisted photonic crystal fibres. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2017, **375**(2087), 1-18. DOI: 10.1098/rsta.2015.0440. ISSN 1364-503X.
- [44] DADA, Adetunmise C., Jonathan LEACH, Gerald S. BULLER, Miles J. PADGETT a Erika ANDERSSON. Experimental high-dimensional two-photon entanglement and violations of generalized Bell inequalities. *Nature Physics*. 2011, **7**(9), 677-680. DOI: 10.1038/nphys1996. ISSN 1745-2473.
- [45] KRENN, Mario, Mehul MALIK, Manuel ERHARD a Anton ZEILINGER. Orbital angular momentum of photons and the entanglement of Laguerre—Gaussian modes. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2017, **375**(2087), 1-21. DOI: 10.1098/rsta.2015.0442. ISSN 1364-503X.
- [46] SWARTZLANDER, Grover A. Peering into darkness with a vortex spatial filter. *Optics Letters*. 2001, **26**(8), 497-499. DOI: 10.1364/OL.26.000497. ISSN 0146-9592.
- [47] UCHIDA, Masaya a Akira TONOMURA. Generation of electron beams carrying orbital angular momentum. *Nature*. 2010, **464**(7289), 737-739. DOI: 10.1038/nature08904. ISSN 0028-0836.
- [48] VERBEECK, J., H. TIAN a P. SCHATTSCHEIDER. Production and application of electron vortex beams. *Nature*. 2010, **467**(7313), 301-304. DOI: 10.1038/nature09366. ISSN 0028-0836.