České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Symetrie diferenciálních rovnic a kvalitativní chování difuze

Symmetries of differential equations and qualitative behaviour of diffusion

Bakalářská práce

Autor: **Michal Tichý**

Vedoucí práce: **doc. Ing. Václav Klika, PhD.**

Akademický rok: 2016/2017

- Zadání práce -

- Zadání práce (zadní strana) -

Poděkování:
Chtěl bych poděkovat především svému školiteli doc. Václavu Klikovi za ochotu a vstřícnost při vedení mé bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přítelkyni za podporu a v neposlední řadě svým přátelům.

Čestné prohlášení:
Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 3. července 2017 Michal Tichý

Název práce:

Symetrie diferenciálních rovnic a kvalitativní chování difuze

Autor: Michal Tichý

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Ing. Václav Klika, PhD, Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze

Abstrakt: V práci se nejprve seznámíme se symetriemi obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu a ukážeme si, jak je možné jich využít k nalezení řešení těchto rovnic. Poté tuto metodu rozšíříme na obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů ve tvaru $y^{(n)} = \omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$. V další části se budeme zabývat speciálními druhy obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu zmíněných v kurzu Diferenciální rovnice v druhém ročníku základního studia na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské při Českém vysokém učení technickém v Praze. Nakonec se zmíníme o difuzní rovnici, speciálně o nelineární, pro kterou je známa transformace vedoucí k jejímu řešení. V další práci se totiž budeme snažit tuto transformaci získat pomocí metody symetrií pro parciální diferenciální rovnice.

Klíčová slova: Diferenciální rovnice, Difuze, Difúzní rovnice, Fickův zákon, Nelineární difuzní rovnice, Obyčejné diferenciální rovnice, Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, Symetrie, Symetrie obyčejných diferenciálních rovnic

Title:

Symmetries of differential equations and qualitative behaviour of diffusion

Author: Michal Tichý

Abstract: In the beginning of the bachelor thesis the symmetries of first-order ordinary differential equations are studied and it is shown how symmetries can be used to find solutions of these equations. Subsequently this method is extended to higher-order ordinary differential equations having the form of $y^{(n)} = \omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$. In the next part we deal with special types of first-order ordinary differential equations mentioned in course Differential equations in the second year at Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering at Czech Technical University in Prague. Finally the diffusion equation, particularly non-linear diffusion equation, is mentioned, for which a transformation leading to solving this equation is known. In the future we will try to find this transformation by using symmetry method for partial differential equatins.

Key words: Differential equation, Diffusion, Diffusion equation, Fick's law, First-order ordinary differential equation, Non-linear diffusion equation, Ordinary differential diffusion, Symmetries, Symmetries of ordinary differential equations

Obsah

Úvod

V druhém ročníku základního studia na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské při Českém vysokém učení technickém v Praze jsme absolvovali kurz Diferenciální rovnice, kde jsme se seznámili s obyčejnými diferenciálními rovnicemi. V kurzu byly zmíněny například některé teoretické vlastnosti řešení, jako existence a jednoznačnost řešení diferenciální rovnice procházející bodem. Součástí kurzu byl také výčet speciálních typů rovnic, u kterých dokážeme obecně nalézt řešení nebo známe transformaci souřadnic, která k jejich řešení vede. U některých z rovnic nám byly transformace prozrazeny a ukázali jsme, že po převedení diferenciální rovnice skutečně dostáváme rovnici, kterou už dokážeme vyřešit. V této práci bychom rádi tyto diferenciální rovnice obecně vyřešili bez znalosti tvaru řešení a bez znalosti transformací.

S pomocí znalostí získaných po druhém ročníku základního studia se pokusíme vybudovat alternativu k hledání řešení speciálních typů rovnic z kurzu Diferenciální rovnice. Budeme se zabývat symetriemi diferenciálních rovnic, s jejichž pomocí nejen že dokážeme řešit speciální typy rovnic z tohoto kurzu, ale zároveň nám umožní řešit i takové diferenciální rovnice, které mezi tyto typy rovnic nepatří. Vytvoříme tedy obecnější nástroj na hledání řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

Teorii symetrií obyčejných diferencálních rovnic nebudeme studovat jen kvůli vytvoření alternativy k hledání řešení speciálních typů rovnic; tato teorie má mnohem obecnější význam. V klasické fyzice hrají jak obyčejné, tak parciální diferenciální rovnice velkou roli. V mnoha případech není známé řešení těchto rovnic nebo jsou známé jejich transformace. Příkladem je difuze, resp. difuzní rovnice. U nelineární difuzní rovnice je známa transformace, která vede k jejímu řešení. Naším cílem bude použít nástroj symetrií diferenciálních rovnic k nalezení této transformace a systematickému hledání trasformací obdobných parciálních diferenciálních rovnic.

V první kapitole se seznámíme se symetriemi obyčejných diferenciálních rovnic a vytvoříme nástroj pro hledání řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu ve tvaru $y' = \omega(x, y)$. V druhé kapitole tento nástroj rozšíříme pro diferenciální rovnice obecně n-tého řádu tvaru $y^{(n)} = \omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$. V kapitole 3 a 4 nalezneme řešení speciálních typů rovnic řešených v kurzu Diferenciální rovnice. V páté kapitole užijeme nástroj symetrií k nalezení řešení diferenciální rovnice 1. řádu, která nespadá do žádného typu rovnic řešených ve třetí kapitole, a k nalezení řešení diferenciální rovnice 2. řádu. V poslední kapitole se vrátíme k motivaci zkoumání symetrií diferenciálních rovnic, tedy k difuzním rovnicím. Přechod od obyčejných diferenciálních rovnic k parciálním už bude přímočarý a pomůže nám řešit difuzní rovnici a hledat příslušné transformace.

Kapitola 1

Metoda symetrií obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu

V této části si ukážeme, co to jsou symetrie obyčejných diferenciálních rovnic a jak pomocí nich řešit obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu.

1.1 Symetrie rovinných obrazců

Pojem symetrie si můžeme snadno představit na rovinných obrazcích. Symetrie je v tomto případě zjednodušeně řečeno transformace souřadnic T, jejíž akce nechává obrazec nezměněný. Mějme například rovnostranný trojúhelník. Rotací o úhel $\frac{2}{3}\pi$ se trojúhelník nezmění, jedná se tedy o symetrii. Rotace tohoto trojúhelníku o úhel $\frac{4}{3}\pi$ je opět symetrií, a navíc inverzní k předešlé. Rotace o úhel 2π je v tomto případě příkladem tzv. *triviální symetrie,* tedy symetrie, která zanechá všechny body obrazce na stejném místě. Rovnostranný trojúhelník má kromě těchto symetrií ještě další tři, a to zrcadlení podél všech tří os.

Mějme nyní kružnici o poloměru 1, popsanou rovnicí

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Kružnice má na rozdíl od rovnostranného trojúhleníku nekonečně mnoho symetrií:

$$T_\varepsilon : (x, y) \mapsto (\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y)) = (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon), \varepsilon \in (-\pi, \pi].$$

V polárních souřadnicích:

$$T_\varepsilon : (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto (\cos(\theta + \varepsilon), \sin(\theta + \varepsilon)).$$

Jedná se o rotaci o úhel ε okolo středu kružnice. Tato transformace je očividně symetrie a je ihned vidět, že platí

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = x^2 + y^2 = 1.$$

Skutečně:

$$\hat{x}^2+\hat{y}^2 = (x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon)^2+(x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon)^2 = x^2\cos^2(\varepsilon)+y^2\sin^2(\varepsilon)+x^2\sin^2(\varepsilon)+y^2\cos^2(\varepsilon) = x^2+y^2.$$

Mezi symetrie kružnice patří také zrcadlení podle libovolné osy. Každé takovéto zobrazení je však ekvivalentní rotaci o příslušný úhel.

1.2 Symetrie obyčejných diferenciálních rovnic

Definice 1.2.1. *Nechť M, N jsou otevřené podmnožiny v $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Zobrazení $f : M \to N$ zveme **difeomorfismus**, pokud platí:*

1. *f je bijektivní zobrazení,*
2. *f i f^{-1} jsou hladká, tedy třídy $\mathcal{C}^\infty(M)$.*

Poznámka. *Obvykle o zobrazení mluvíme jako o difeomorfismu, resp. q-difeomorfismu, pokud je třídy $\mathcal{C}^1$, resp. třídy $\mathcal{C}^q$. V našem případě však budeme uvažovat hladké funkce.*

Poznámka. *Je-li toto zobrazení třídy $\mathcal{C}^0$, tedy spojité, mluvíme o tzv. **homeomorfismu**.*

Definice 1.2.2. *Buďte M, N otevřené podmnožiny $\mathbb{R}$. Nechť $y : M \to N$, je reálná funkce reálné proměnné, $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(p)}(x)) = 0$, kde $p \in \mathbb{N}$, je obyčejná diferenciální rovice a $\Gamma := \{f(x); f(x)$ je řešením diferenciální rovnice $F\}$. Mějme dále transformaci $T : M \times N \to M \times N : (x, y) \mapsto (\tilde{x}(x, y), \tilde{y}(x, y))$. Označme $\tilde{F}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(p)}(x)) := F(\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x}), \tilde{y}'(\tilde{x}), \ldots, \tilde{y}^{(p)}(\tilde{x}))$ a $T(\Gamma) := \{f(x); f(x)$ je řešením diferenciální rovnice $\tilde{F}\}$. Potom tramsformaci T zveme **symetrie**, když:*

1. *T je difeomorfismus,*
2. *$T(\Gamma) = \Gamma$.*

Poznámka. *Vlastnost č. 2 nazýváme **podmínka symetrie.***

Poznámka. *Pomocí symetrie T vyjadřujeme diferenciální rovnici v nových souřadnicích $(\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y))$.*

Poznámka. *Pokud pro symetrii $T : (x, y) \mapsto (\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y))$ platí, že*

$$(\forall f(x) \in \Gamma, \forall x \in \mathrm{Dom}(f)) \left(T(x, f(x)) = (x, f(x))\right),$$

kde $\mathrm{Dom}(f)$ je definiční obor funkce f, mluvíme o tzv. triviální symetrii.

1.2.1 Množina symetrií jako jednoparametrická lokální Lieova grupa

Definice 1.2.3. *Nechť množina G zvaná nosič vybavená binární operací $m : G \times G \to G$ vyhovuje následujícím třem požadavkům:*

1. *$\forall a, b, c \in G : m(a, m(b, c)) = m(m(a, b), c)$,*
2. *$\exists e \in G; \forall a \in G : m(e, a) = m(a, e) = a$,*
3. *$\forall a \in G; \exists a^{-1} \in G : m(a, a^{-1}) = m(a^{-1}, a) = e$.*

*Potom dvojice (G, m) se nazývá **grupa**.*

Poznámka. *První vlastnost je asociativita operace, druhá vynucuje existenci tzv. jednoty a třetí existenci inverzního prvku.*

Poznámka. *Množina symetrií rotací kružnice tvoří grupu.*

Definice 1.2.4. *Nechť (G, m) tvoří grupu a operace m i $m^{(-1)}$ jsou hladké. Potom mluvíme o tzv. **Lieově grupě**.*

Poznámka. *Obecně je Lieova grupa definovaná jako diferencovatelná varieta G, která vybavená touto operací m tvoří grupu, přičemž operace m i její inverze je hladká. My si však vystačíme s touto zjednodušenou verzí.*

Definice 1.2.5. *Nechť G je grupa vybavená spojitou operací se spojitou inverzí. Potom* ***jednoparametrická podgrupa*** *γ v G je homeomorfismus aditivní grupy $(\mathbb{R}, +)$, tedy grupy vybavené operací sčítání, do grupy G.*

Následující věta vycházející z knihy [1] dává do souvislosti nekonečnou množinu symetrií a výše uvedené pojmy:

Věta 1.2.6. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, má nekonečnou množinu symetrií*

$$T_\varepsilon : x^k \mapsto \tilde{x}^k(x^1, x^2, \ldots, x^n; \varepsilon),\ k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \varepsilon \in \mathbb{R},$$

která splňuje následující podmínky:

1. *T_0 je triviální symetrie, tedy $\tilde{x}^k = x^k$.*
2. *$(\forall \varepsilon \in H_0) : T_\varepsilon$ je symetrií.*
3. *$(\forall \varepsilon, \delta \in H_0) : T_\varepsilon T_\delta = T_{\varepsilon+\delta}$.*
4. *$(\forall \varepsilon \in H_0) : x^k(x^1, \ldots, x^n; \varepsilon) = x^k + \varepsilon \xi^k(x^1, \ldots, x^n) + \mathcal{O}(\xi^2), n \in \mathbb{N}$, tzn. $\tilde{x}^k$ lze v okolí 0 rozvinout do Taylorovy řady.*

Potom množina symetrií T_ε tvoří ***jednoparametrickou lokální Lieovu grupu.***

Poznámka. *V dalším textu budeme používat značení $k \in \hat{n}$ pro $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Poznámka. *Výraz* ***lokální*** *poukazuje na fakt, že symetrie splňují tyto podmínky pouze v nějakém okolí nuly, které obecně závisí na $x^k, k \in \tilde{n}$.*

Tvrzení 1.2.7. *Množina symetrií rotací kružnice tvoří lokální jednoparametrickou Lieovu grupu.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti uvažujme jednotkovou kružnici:

1. Triviální symetrií je v tomto případě rotace o 0 stupňů.
2. T_ε je symetrií kružnice $\forall \varepsilon \in (-\pi, \pi]$.
3. Složíme-li dvě rotace o úhly δ a ε, otočí se kružnice dohromady o $\delta + \varepsilon$. Platí tedy, že $T_\delta T_\varepsilon = T_{\delta+\varepsilon}$. Rovnost je ihned vidět v polárních souřadnicích:
4. $$\tilde{x} = x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon.$$

   Rozvineme funkce $\sin \varepsilon$ a $\cos \varepsilon$ pomocí Taylorova rozvoje v okolí 0 do prvního řádu:

   $$\tilde{x} = x - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = x \cos 0 - y \sin 0 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

   Pro $\tilde{y}$ je postup analogický.

□

Symetrie patřící do jednoparametrické Lieovy grupy závisí spojitě na parametru ε. Jak jsme viděli výše, spousta objektů má také diskrétní symetrie, které však nemohou být reprezentovány pomocí spojitého parametru. Diskrétní symetrie jsou v mnoha ohledech velmi užitečné, při řešení obyčejných diferenciálních rovnic se však zaměříme na jednoparametrickou Lieovu grupu symetrií. Tyto symetrie se snáze hledají a snáze používají k nalezení řešení.

Definice 1.2.8. *Symetrie tvořící lokální jednoparametrickou Lieovu grupu nazýváme Lieovy symetrie.*

Poznámka. *V dalších částech budeme pro označení symetrie* $T_\varepsilon : (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)$ *používat zápis* $(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)$.

1.2.2 Podmínka symetrie pro obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Mějme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{1.1}$$

Všechna řešení této rovnice mají tvar $y(x) = c$, kde $c = \text{konst}$. Jedná se o přímky v rovině (x, y) rovnoběžné s osou x. Transformace $T : (x, y) \mapsto (\hat{x}, \hat{y})$ je symetrií této diferenciální rovnice, pokud zobrazuje tyto přímky na sebe samé. Musí být tedy splněna podmínka symetrie

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{x}} = 0, \text{ pokud } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Protože požadujeme invertibilitu této transformace, musí být splněna podmínka nenulovosti Jakobiánu transformace, tedy

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial y}\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \neq 0.$$

Poznámka. *Pro zkrácení zápisu parciálních derivací, budeme používat následující značení:*

$$\partial_x f(x, y) := \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},$$

$$\partial_y f(x, y) := \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Podmínku nenulovosti Jakobiánu tedy můžeme zapsat následujím způsobem:

$$\partial_x \tilde{x} \partial_y \tilde{y} - \partial_y \tilde{x} \partial_x \tilde{y} \neq 0.$$

Příklad. *Uveďme si nyní několik příkladů symetrií diferenciální rovnice* (1.1):

1. *Jednou z Lieových symetrií je škálování v proměnné* y :

   $$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, e^{\varepsilon} y),\ \varepsilon \in \mathbb{R}$$

   Tato transformace očividně splňuje podmínku symetrie.

2. *Libovolná translace v obou směrech* $(\hat{x}, \hat{y}) = (x+\varepsilon_1, y+\varepsilon_2)$, *kde* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, *je opět symetrií. Položíme-li* $\varepsilon_1 = 0$, *dostáváme jednoparametrickou Lieovu grupu translací v* y. *Jednoparametrickou Lieonu grupu translací v* x *získáme analogicky, položíme-li* $\varepsilon_2 = 0$. *V tomto případě se jedná o triviální symetrii. Translace v obou směrech tedy tvoří dvouparametrickou Lieovu grupu. Na symetrie patřící do R-parametrické grupy se tedy můžeme dívat jako na složení symetrií z R jednoparametrických grup.*

Tato diferenciální rovnice má určitě mnohem více symetrií. Jak je možné je všechny najít? Podívejme se na podmínku symetrie $\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{x}} = 0$:

Máme transformaci souřadnic $(x, y) \mapsto (\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y))$, jejíž funkční identita má tvar

$$y\left(\hat{x}(x, y)\right) = \hat{y}(x, y).$$

Zderivujeme rovnost podle proměnné x :

$$\frac{\mathrm{d}y\left(\hat{x}(x, y)\right)}{\mathrm{d}\hat{x}} \left(\partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{x} y'\right) = \partial_x \hat{y} + \partial_y \hat{y} y'.$$

Poznámka. *Na levé straně vystupuje derivace podle $\hat{x}$, která má význam totální derivace funkce y podle její jediné proměnné vyčíslené v bodě $\hat{x}(x, y)$, tzn.:*

$$\frac{\mathrm{d}y\left(\hat{x}(x, y)\right)}{\mathrm{d}\hat{x}} = \left.\frac{\mathrm{d}y\left(\hat{x}\right)}{\mathrm{d}\hat{x}}\right|_{\hat{x}=\hat{x}(x,y)} = \left.\frac{\mathrm{d}y\left(x\right)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\hat{x}(x,y)}.$$

Z toho tedy plyne, že

$$\frac{\partial_x \hat{y} + \partial_y \hat{y} y'}{\partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{x} y'} = \frac{\mathrm{d}y\left(\hat{x}(x, y)\right)}{\mathrm{d}\hat{x}} = \frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{x}} = 0. \tag{1.2}$$

Dosazením za $y' = 0$ dostáváme podmínku pro symetrii diferenciální rovnice (1.1):

$$\frac{\partial_x \hat{y}}{\partial_x \hat{x}} = 0 \Rightarrow \partial_x \hat{y} = 0$$

Symetrie této diferenciální rovnice mají tedy obecný tvar

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(f(x, y), g(y)\right),$$

kde $\partial_x f \neq 0$ a $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = 0$.

Hledání symetrií pomocí podmínky symetrie má výhodu v tom, že nemusíme dopředu znát řešení diferenciální rovnice.

Podívejme se nyní obecně na obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, která má tvar:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \omega(x, y), \tag{1.3}$$

kde $\omega(x, y)$ je spojitá funkce.

Poznámka. *Nadále budeme vždy předpokládat spojitost fukncí vystupujících v diferenciálních rovnicích prvního řádu. To nám totiž zajistí existenci řešení. Platí totiž následující věta:*

Věta 1.2.9 (Peanova věta o existenci)**.** *Nechť funkce $\omega(x, y)$ je spojitá na oblasti $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ a $(x_0, y_0) \in \Gamma$. Potom existuje alespoň jedno řešení $y(x)$ diferenciální rovnice $y' = \omega(x, y)$ na oblasti Γ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.*

V mnoha případech nelze symetrii nalézt z pouhého zadání diferenciální rovnice nebo z grafu řešení. Použijme tedy podmínku symetrie:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{x}} = \omega(\hat{x}, \hat{y}), \text{ když } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \omega(x, y),$$

$$\frac{\partial_x \hat{y} + \partial_y \hat{y} y'}{\partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{x} y'} = \frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{x}} = \omega(\hat{x}, \hat{y}).$$

Dosazením za y' získáme *podmínku symetrie* pro diferenciální rovnici (1.3):

$$\frac{\partial_x \hat{y} + \omega(x,y)\, \partial_y \hat{y}}{\partial_x \hat{x} + \omega(x,y)\, \partial_y \hat{x}} = \omega(\hat{x}, \hat{y}).$$

Jak z této podmínky získáme symetrie? Jednou z možností je použít tzv. *ansatz*, tedy předpoklad obecného tvaru symetrie.

Příklad. *Mějme následující diferenciální rovnici:*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$$

Dosazením této diferenciální rovnice do podmínky symetrie získáme následující parciální diferenciální rovnici:

$$\frac{\partial_x \hat{y} + \partial_y \hat{y} y}{\partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{x} y} = \hat{y}$$

Použijme nyní ansatz $\hat{y} = y$. Tím se nám podmínka symetrie redukuje na následující parciální diferenciální rovnici a podmínku nenulovosti Jakobiánu:

$$\frac{y}{\partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{x} y} = y \Rightarrow \partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{x} y = 1,$$

a

$$\partial_x \hat{x} \neq 0.$$

Existuje mnoho symetrií splňující tyto dvě podmínky. Například Lieova symetrie $(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \varepsilon, y)$, tedy translace v x.

Poznámka. *Každá obyčejná diferenciální rovnice, ve které explicitně nevystupuje x, má symetrii translaci v x. To samé platí analogicky pro y.*

Jiným příkladem Lieovy symetrie je škálování v y : $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, e^{\varepsilon} y)$, které rovněž vyhovuje podmínce symetrie.

Transformace $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, -y)$ je příkladem diskrétní symetrie.

1.2.3 Translační symetrie ve směru y

Mějme obyčejnou diferenciální rovnici ve tvaru (1.3) a předpokládejme, že její symetrie obsahují Lieovu grupu translací ve směru y : $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \varepsilon)$. V tomto případě se podmínka symetrie redukuje na tvar:

$$\omega(x, y) = \omega(x, y + \varepsilon), \ \forall \varepsilon \text{ z nějakého okolí } 0.$$

Zderivování této rovnice podle ε a vyčíslení v 0 nás vede k podmínce:

$$\partial_y \omega(x, y) = 0.$$

Z toho však plyne, že funkce ω závisí pouze na x. Diferenciální rovnice má tedy předpis:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \omega(x).$$

Obecné řešení této rovnice nalezneme zintegrováním:

$$y = \int \omega(x) \mathrm{d}x + c.$$

Poznámka. *Je-li řešení diferenciální rovnice ve tvaru integrálu z nějaké funkce, říkáme, že řešením je* ***kvadratura.***

To tedy znamená, že všechny obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, které mají symetrii translaci v y, jsou snadno řešitelné, problém se redukuje na řešení neurčitého integrálu. Této znalosti můžeme využít i k hledání řešení diferenciálních rovnic 1. řádu, které tuto symetrii nemají, a to vyjádřením v takových souřadnicích, ve kterých už má diferenciální rovnice symetrii translace v jedné z proměnných. Ukažme si to na příkladu převzatém z knihy [1]:

Příklad. *Diferenciální rovnice* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^3+x^2y-y-x}{xy^2+x^3+y-x}$ *nemá symetrii translaci v* y*. Mezi její symetrie však patří Lieovy symetrie rotací:*

$$(\hat{x}(x,y), \hat{y}(x,y)) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon),\ \varepsilon \in (-\pi, \pi]$$

Převedením této diferenciální rovnice do polárních souřadnic: $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ *dostaneme diferenciální rovnici ve tvaru:*

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r(1-r^2).$$

Tato diferenciální rovnice už má symetrii translaci, a to v proměnné θ*. Řešením je tedy kvadratura.*

V další části se tedy budeme snažit najít takové souřadnice, ve kterých mezi symetrie obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu patří translace v y. K hledání těchto souřadnic nám poslouží Lieovy symetrie původní diferenciální rovnice.

1.3 Hledání řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu pomocí Lieových symetrií

V této části si ukážeme, jak je možné využít Lieovy symetrie k hledání řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu ve tvaru $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \omega(x,y)$.

1.3.1 Akce Lieových symetrií v rovině

Definice 1.3.1. *Buďte* f *reálná funkce* n *reálných proměnných* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \boldsymbol{x}$*, kde* $n \in \mathbb{N}$*, a* $Dom(f)$ *definiční obor této funkce. Potom množinu* $\Gamma := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(\boldsymbol{x}))\,; x \in Dom(f)\}$ *nazveme* ***graf funkce*** f*.*

Mějme opět obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu ve tvaru $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \omega(x,y)$. Předpokládejme, že $y = f(x)$ je řešením této rovnice a symetrie T zobrazuje její graf na graf funkce $\hat{y} = \hat{f}(\hat{x})$, která je řešením $\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{x}} = \omega(\hat{x}, \hat{y})$. Funkci $\hat{f}$ získáme pomocí následujícího postupu:

Symetrie T transformuje graf funkce $y = f(x)$ na množinu bodů $(\hat{x}, \hat{y})$, kde

$$\hat{x} = \hat{x}(x, f(x)),$$
$$\hat{y} = \hat{y}(x, f(x)).$$

Toto je graf funkce v rovině $(\hat{x}, \hat{y})$ zapsaný v parametrickém tvaru, kde x je parametr. Nyní z první rovnice vyjádříme x jako funkci od $\hat{x}$ a dosadíme do druhé rovnice pro $\hat{y}$. Dostáváme předpis pro funkci $\hat{f}(\hat{x})$:

$$\hat{f}(\hat{x}) = (x(\hat{x}), f(x(\hat{x})))\,.$$

Poznámka. *Pokud symetrie $T = T_\varepsilon$ je Lieovou symetrií, je $\hat{f}$ funkcí $\hat{x}$ a parametru ε.*

Příklad. *Mějme obyčejnou diferenciální rovnici*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y}{x},$$

jejímž obecným řešením je

$$y = cx^2,$$

kde $c =$ konst. Mezi její symetrie patří i jednoparametrická Lieova grupa škálování

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\varepsilon x, e^\varepsilon y).$$

Použitím výše popsaného postupu nalezneme předpis funkce $y = cx^2$ v těchto nových souřadnicích:

$$x = e^{-\varepsilon}\hat{x} \Rightarrow \hat{f}(\hat{x}) = \hat{y} = c^{-3\varepsilon}\hat{x}^2.$$

Roviny $(\hat{x}, \hat{y})$ a (x, y) obsahují stejnou množinu grafů řešení. Namísto toho, abychom pracovali se dvěma identickými rovinami, je mnohem praktičtější je překrýt, tedy zobrazit jednu na druhou. Na symetrii tedy můžeme nahlížet jako na zobrazení roviny (x, y) samu na sebe. Tomuto zobrazení se říká *akce* symetrie, obecně mluvíme o *akci grupy*:

Definice 1.3.2. *Buďte M množina a G grupa. Zobrazení $A : G \times M \to M$ zveme akcí grupy G na množinu M, pokud splňuje $\forall m \in M$:*

1. *$\forall g_1, g_2 \in G : A(g_1, A(g_2, m)) = A((g_1, g_2), m)$,*
2. *$A(e, m) = m$, kde e je jednotkou v grupě G.*

Graf řešení $y = f(x)$ jako množina bodů v souřadnicích $(x, f(x))$ je tedy akcí Lieovy symetrie zobrazena na množinu bodů v souřadnicích $(\hat{x}, \hat{f}(\hat{x}))$, což je graf funkce $y = \hat{f}(x)$.

Poznámka. *Graf funkce $y = f(x)$ je invariantí vůči symetrii, pokud $\hat{f} = f$. O symetrii řekneme, že je triviální, pokud její akce zanechá všechny grafy řešení invariantní.*

Nyní se podíváme, jak působí akce Lieovy symetrie v nějakém bodě (x, y).

Definice 1.3.3. *Buďte G grupa, $A : G \times M \to M$ akce grupy a $m \in M$. Potom množinu $\mathcal{O}(m) := \{A(g, m); g \in G\}$ nazveme* ***orbitou akce*** *vycházející z bodu m (v bodě m).*

Orbitou grupy symetrií vycházející z bodu (x, y) je tedy množina bodů, do kterých může být tento bod symetrií pro libovolnou volbu ε zobrazen. Souřadnice bodů na orbitě jsou

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y; \varepsilon), \hat{y}(x, y; \varepsilon)),$$

kde

$$(x, y) = (\hat{x}(x, y; 0), \hat{y}(x, y; 0)).$$

Poznámka. *Graf řešení může mít jeden, nebo více tzv. invariantních bodů, které jsou Lieovou symetrií zobrazeny samy na sebe.*

Příklad. *Diferenciální rovnice* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^3+x^2y-y-x}{xy^2+x^3+y-x}$ *má Lieovu symetrii rotací*

$$(\hat{x}(x,y), \hat{y}(x,y)) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon),\ \varepsilon \in (-\pi, \pi],$$

v polárních souřadnicích

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Orbitou bodu $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ *je kružnice* $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ *a bod* $(0,0)$ *je invariantní bod.*

Poznámka. *Akce Lieovy grupy zobrazuje všechny body orbity na stejnou orbitu, tzn. každá orbita je invariantní vůči akci Lieovy grupy.*

Nyní uvažujme orbitu v bodě (x,y), který není invariantní. Tečný vektor orbity v bodě $(\hat{x},\hat{y})$ je $(\xi(\hat{x},\hat{y}), \eta(\hat{x},\hat{y}))$, kde

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \xi(\hat{x},\hat{y}) \text{ a } \frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \eta(\hat{x},\hat{y}).$$

Tečný vektor v bodě (x,y) má tedy tvar

$$(\xi(x,y), \eta(x,y)) = \left(\left.\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \left.\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right).$$

Lieovy symetrie lze také rozepsat do Taylorovy řady. Taylorův rozvoj Lieovy symetrie do 1. řádu v ε má tvar

$$\hat{x} = x + \varepsilon\xi(x,y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$
$$\hat{y} = y + \varepsilon\eta(x,y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Poznámka. *Invariantní body jsou akcí Lieových symetrií zobrazeny samy na sebe. To tedy znamená, že bod* (x,y) *je invariantní právě tehdy, když je tečný vektor v daném bodě nulový, tedy*

$$\xi(x,y) = \eta(x,y) = 0.$$

Definice 1.3.4. *Buďte* $p \in \mathbb{R}^n$ *a* $U \subset \mathbb{R}^n$ *okolí bodu* p*, kde* $n \in \mathbb{N}$*. Vektorové pole je hladké zobrazení* $X : U \to \mathbb{R}^n$*.*

Poznámka. *Existuje obecnější definice vektorového pole, my si však s touto vystačíme.*

Následující věta vychází z knihy [1]:

Věta 1.3.5. *Množina tečných vektorů konkrétní Lieovy symetrie tvoří vektorové pole.*

Příklad. *Pro lepší představu si ukažme příklad vektorového pole. Mějme rovinu, v každém jejím bodě částici a jako proměnnou* ε *uvažujme čas. Tečný vektor v každém bodě představuje rychlost částice. Orbita v bodě určuje trajektorii daného bodu a invariantní body jsou fixní body roviny.*

Poznámka. *Pokud orbita protíná graf funkce* $y(x)$ *příčně v bodě* (x,y)*, potom Lieova symetrie zobrazuje tento bod do bodů, které na grafu funkce neleží. To tedy znamená, že graf funkce je invariantní vůči Lieově symetrii, pokud neprotíná žádnou její orbitu. Ekvivalentně řečeno, tečna v libovolném bodě grafu* (x,y) *je rovnoběžná s tečným vektorem* $(\xi(x,y), \eta(x,y))$*. Tečný vektor k funkci* $y(x)$ *má tvar* $(1, y')$*. Normalizací vektoru* $(\xi(x,y), \eta(x,y))$ *dostaneme vektor* $(1, \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)})$*. Graf funkce* $y(x)$ *je tedy invariantní vůči Lieově symetri, pokud platí rovnost*
$\eta(x,y) - y'\xi(x,y) = 0.$

1.3.2 Kanonické souřadnice

V kapitole (1.2.3) jsme si ukázali, že pokud mezi symetrie obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu patří translace

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \varepsilon), \tag{1.4}$$

její řešení můžeme získat integrací. To znamená, že pokud tato diferenciální rovnice má Lieovu symetrii, která je ekvivalentní této translaci (přechází v ni při změně souřadnic), umíme ji vyřešit přepsáním do těchto nových souřadnic, tzv. *kanonických souřadnic.*

Všechny orbity symetrií (1.4) mají stejný tečný vektor v každém bodě:

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (0, 1).$$

Naším cílem je užitím nějaké Lieovy symetrie zavést souřadnice $(r, s) = (r(x, y), s(x, y))$ tak, aby platilo

$$(\hat{r}, \hat{s}) = (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r, s + \varepsilon).$$

Existují-li takové, je v těchto nových souřadnicích tečný vektor v bodě (r, s) roven $(0, 1)$, neboť platí

$$\left.\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0, \text{ a } \left.\frac{\mathrm{d}\hat{s}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 1.$$

Podívejme se blíže na tyto rovnosti. Pro $\hat{r}$ a $\hat{s}$ platí funkční identity $\hat{r}(x, y) = r(\hat{x}, \hat{y})$ a $\hat{s}(x, y) = s(\hat{x}, \hat{y})$. Zderivujme podle parametru ε a vyčísleme v nule:

$$0 = \left(\left.\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right) = \left(\left.\frac{\partial r}{\partial \hat{x}}\right|_{\varepsilon=0}\right)\left(\left.\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right) + \left(\left.\frac{\partial r}{\partial \hat{y}}\right|_{\varepsilon=0}\right)\left(\left.\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right) = \xi(x, y)\partial_x r + \eta(x, y)\partial_y r,$$
$$1 = \left(\left.\frac{\mathrm{d}\hat{s}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right) = \left(\left.\frac{\partial s}{\partial \hat{x}}\right|_{\varepsilon=0}\right)\left(\left.\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right) + \left(\left.\frac{\partial s}{\partial \hat{y}}\right|_{\varepsilon=0}\right)\left(\left.\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right) = \xi(x, y)\partial_x s + \eta(x, y)\partial_y s.$$

Dostali jsme tedy sadu dvou parciálních diferenciálních rovnic:

$$\xi(x, y)\partial_x r + \eta(x, y)\partial_y r = 0, \tag{1.5}$$
$$\xi(x, y)\partial_x s + \eta(x, y)\partial_y s = 1. \tag{1.6}$$

Protože se jedná o transformaci souřadnic, Jakobián transformace musí být nenulový:

$$\partial_x r \partial_y s - \partial_y r \partial_x s \neq 0.$$

Libovolnou dvojici funkcí $r(x, y), s(x, y)$ splňující tyto podmínky nazýváme kanonické souřadnice.

Poznámka. *Kanonické souřadnice nemohou být definovány v invariantním bodě* (x, y)*, protože* $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$*, a proto není splněna druhá z podmínek pro kanonické souřadnice. Nicméně kanonické souřadnice existují v nějakém okolí každého neinvariantního bodu.*

Poznámka. *Kanonické souřadnice nejsou z těchto podmínek určeny jednoznačně. Pokud například souřadnice* (r, s) *vyhovují těmto podmínkám, je vidět, že jim vyhovují i souřadnice* $(F(r), s + G(r))$*, kde* F *a* G *jsou libovolné hladké funkce a* $F'(r) \neq 0$*.*

Jak hledat funkce splňující podmínky pro kanonické souřadnice? Tento problém si rozdělme na několik případů:

1. $\xi(x,y) = 0:$

   Je-li $\xi(x,y)$ rovna nule, můžeme za r volit proměnnou x. Pro druhou kanonickou souřadnici dostáváme podmínku

   $$\eta(x,y)\partial_y s = \eta(r,y)\partial_y s = 1,$$

   kde r v tomto případě bereme jako parametr. Dostáváme tedy vztah pro souřadnici $s:$

   $$s = \int \frac{\mathrm{d}y}{\eta(r,y)}\bigg|_{r=x}.$$

2. $\eta(x,y) = 0:$

   V tomto případě můžeme naopak volit $r = y$ a analogicky pro druhou souřadnici dostáváme vztah

   $$s = \int \frac{\mathrm{d}x}{\eta(x,r)}\bigg|_{r=y},$$

   kde r bereme jako parametr.

3. $\xi(x,y) \neq 0$ a $\eta(x,y) \neq 0:$

   Předpokládejme, že nalezneme Lieovu symetrii, kde η je lineární v y a ξ je na y nezávislé (takovéto symetrie jsou u obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu docela časté). Z podmínek pro kanonické souřadnice je ihned vidět, že můžeme souřadnice volit tak, aby kanonická souřadnice r byla lineární v y a s na y nezávisela. První podmínka tedy přechází v parciální diferenciální rovnici pouze v proměnné x a souřadnici s získáme ze vztahu

   $$s = \int \frac{\mathrm{d}x}{\xi(x)}.$$

   V případě, že výraz $\frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}$ můžeme separovat, tedy zapsat jako součin funkcí jedné proměnné:

   $$\frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} = F(x)G(y),$$

   můžeme použít následující postup:

   Podmínku (1.5) si přepíšeme do následujícího tvaru:

   $$\partial_x r + \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}\partial_y r = 0,$$

   resp.

   $$\partial_x r + F(x)G(y)\partial_y r = 0.$$

   Tuto podmínku splní taková funkce r, jejíž parciální derivace podle x bude rovna $F(x)$ a parciální derivace podle y výrazu $-\frac{1}{G(y),}$ tedy

   $$r = \int F(x)\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}y}{G(y)},$$

Skutečně:
$$\partial_x r + \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}\partial_y r = F(x) - \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)G(y)} = 0.$$
Nyní si vyslovíme tvrzení, které nám pomůže ucelit postup, jakým můžeme souřadnici r hledat:

Tvrzení 1.3.6. *Buďte $F(x)$ a $G(y)$ spojité funkce a $y' = F(x)G(y)$ diferenciální rovnice. Potom její řešení má tvar:*
$$\int F(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{G(y)} + c,$$
kde $c =$ konst.

Poznámka. *Toto tvrzení je přímým důsledkem tvaru řešení* (3.3) *rovnice se separovanými proměnnými, který si odvodíme v 2. kapitole. Teprve od tohoto odvození budeme používat zmíněný postup pro hledání kanonické souřadnice r. Nedopustíme se tedy toho, že bychom v důkazu tohoto tvrzení používali jeho znění. Navíc si nyní ukážeme metodu, kterou můžeme použít i pro funkce $\xi(x,y)$ a $\eta(x,y)$, jejichž podíl nelze separovat.*

Z toho tvrzení plyne, že kanonickou souřadnici r můžeme získat tak, že vyřešíme obyčejnou diferenciální rovnici
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)},$$
kde po integraci za konstantu c zvolíme právě námi hledanou souřadnici r. Máme-li nalezenou souřadnici r, můžeme snadno nalézt také souřadnici s. Pokud je funkce ξ závislá pouze na x, můžeme uvažovat, že je souřadnice s také závislá jen na x, a po dosazení tohoto ansatzu do podmínky pro kanonické souřadnice ji nalézt ve tvaru kvadratury:
$$s = \int \frac{\mathrm{d}x}{\xi(x)}.$$
Obecně můžeme využít k hledání souřadnice s znalost souřadnice r. Vyjádříme si z jejího předpisu y jako funkci r a x a souřadnici s spočítáme integrací:
$$s = \left(\int \frac{\mathrm{d}x}{\xi(x, y(r,x))}\right)\Bigg|_{r=r(x,y)},$$
kde r bereme jako parametr.

V hledání kanonických souřadnic pro libovolné funkce $\xi(x,y)$ a $\eta(x,y)$ použijeme tzv. *metodu charakteristik*:

1.3.2.1 Metoda charakteristik

Uvažujme parciální diferenciální rovnici 1. řádu se dvěma neznámými proměnnými ve tvaru
$$a(x,y)u(x,y) + \partial_x u(x,y) + c(x,y)\partial_y u(x,y) = g(x,y). \tag{1.7}$$
$\partial_x u + c(x,y)\partial_y u$ můžeme chápat jako směrovou derivaci funkce u ve směru $(c(x,y),1)$ v rovině (x,y). Vektory $(c(x,y),1)$ tvoří v této rovině vektorové pole. Křivky $y = Y(x)$ podél vektorového pole jdou dány obyčejnou diferenciální rovnicí $Y'(x) = c(x, Y(x))$. Těmto křivkám říkáme *charakteristiky*. Charakteristika procházející bodem $(y_0, 0)$ vyhovuje počáteční podmínce $Y(0) = y_0$.

Nechť $u(x, y)$ je řešením naší úlohy. Zúžení tohoto řešení na charakteristiku $Y(x)$ je dáno předpisem $v(x) = u(x, Y(x))$, kde $v(x)$ splňuje podmínku

$$v'(x) = \partial_y u(x, Y(x))Y'(x) + \partial_x u(x, Y(x)) = \partial_y u(x, Y(x))c(x, Y(x)) + \partial_x u(x, Y(x)).$$

Tím jsme převedli parciální diferenciálni rovnici na úlohu řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Shrňme si tento postup:

1. Nalezneme charakteristiku vyřešením diferenciální rovnice $Y'(x) = c(x, Y(x))$ s počáteční podmínkou $Y(0) = y_0$. Řešení označíme $Y_{y_0}(x)$.
2. Nalezneme y_0 počátek charakteristiky pro daný bod (x, y), kterým charakteristika prochází. Řešíme tedy rovnici $Y_{y_0}(x) = y$ pro y_0. Dostáváme $y_0 = y_0(x, y)$.
3. Vyřešíme obyčejnou diferenciální rovnici na charakteristikách z bodu 1, řešíme tedy rovnici $v'(x)+a(x, Y(x))v(x) = g(x, Y(x))$ s počáteční podmínkou $v(0) = u_0(y_0)$. Řešení označíme $v_{y_0}(x)$.
4. Dosadíme správnou charakteristiku: $u(x, y) = v_{y_0}(t)|_{y_0=y_0(x,y)}$.

Dle knihy [2] můžeme pomocí metody charakteristik přepsat parciální diferenciální rovnici ve tvaru

$$a(x, y)u(x, y) + \partial_x u(x, y) + c(x, y)\partial_y u(x, y) = g(x, y)$$

na systém obyčejných diferenciálních rovnic s parametrem t:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 1, \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= c\left(x(t), y(t)\right), \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= a\left(x(t), y(t)\right)u(t) + g\left(x(t), y(t)\right).
\end{aligned}$$

Poznámka. *V případě obecnější parciální diferenciální rovnice 1. řádu ve tvaru*

$$\tilde{a}(x, y)u(x, y) + \tilde{b}(x, y)\partial_x u(x, y) + \tilde{c}(x, y)\partial_y u(x, y) = \tilde{g}(x, y)$$

má první z rovnic tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = b\left(x(t), y(t)\right).$$

Jelikož však uvažujeme případ $\xi(x, y) \neq 0$ a $\eta(x, y) \neq 0$, můžeme podmínky pro obě kanonické souřadnice snadno převést na tvar (1.7).

Před užitím této metody na podmínky pro kanonické souřadnice si zadefinujeme implicitně zadanou funkci:

Definice 1.3.7. *Buď $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Potom řešením rovnice $F(x, y) = 0$ rozumíme každou funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že platí $F\left(x, \varphi(x)\right) = 0, \forall x \in Dom\, \varphi$.*

Poznámka. *Derivací rovnice $F\left(x, y(x)\right) = 0$ podle x dostáváme rovnici*

$$\frac{\mathrm{d}F(x, y(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0,$$

platí tedy

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Nyní uvedeme větu o implicitně zadané funkci z knihy [3]:

Věta 1.3.8 (o existenci a jednoznačnosti). *Buď $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F \in C^q$ a nechť platí:*

I. $\exists (x_0, y_0) \in Dom\, F$ *takové, že* $F(x_0, y_0) = 0$,

II. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Potom existuje $V \subset \mathbb{R}$ okolí bodu x_0 takové, že rovnicí $F(x, y) = 0$ je na V definováno právě jedno řešení $\varphi : V \to \mathbb{R}$, pro které platí:

1. $\varphi(x_0) = y_0$,
2. $\varphi \in C^q(V)$,
3. $F(x, \varphi(x)) = 0$ *na* V.

Podmínku pro kanonickou souřadnici r upravenou na tvar

$$\partial_x r + \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} \partial_y r = 0$$

převedeme pomocí metody charakteristik na systém obyčejných diferenciálních rovnic:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\eta}{\xi},$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Z první rovnice vyplývá, že $x = t$. Druhá rovnice tedy přechází ve tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}.$$

Předpokládejme, že funkce y je zadána implicitně funkcí

$$F(x, y) = c,$$

kde $c =$ konst.

Poznámka. *V definici implicintě zadané funkce nám sice žádná konstanta nevystupuje, místo ní však můžeme uvažovat novou funkci $G(x, y) = F(x, y) - c$, která již s touto definicí souhlasí.*

Pro takto zadané funkce dostáváme vztah

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Platí tedy

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}.$$

Vyřešíme-li rovnici $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}$, z které dostaneme implicitní zadání funkce y ve tvaru $F(x,y) = c$, můžeme kanonickou souřadnici r volit jako

$$r = c = F(x,y).$$

Skutečně:

$$\partial_x r + \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}\partial_y r = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Poznámka. *Hledání souřadnice r pomocí metody charakteristik je tedy zobecněním metody, kterou jsme uvedli pro případy, kdy lze podíl $\frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}$ separovat.*

Poznámka. *Jak bylo řečeno v poznámce výše, splňuje-li r první podmínku pro kanonické souřadnice, lze jako první kanonickou souřadnici brát také její libovolnou hladkou funkci. V některých případech je to výhodnější a zjednoduší nám to další postup.*

Kanonickou souřadnici s po nalezení souřadnice r můžeme opět hledat ve tvaru kvadratury

$$s = \left(\int \frac{\mathrm{d}x}{\xi(x, y(r,x))}\right)\Bigg|_{r=r(x,y)},$$

kde r bereme jako parametr.

Příklad. *Uvažujme funkce $\xi(x,y) = x$, $\eta(x,y) = y$. Nalezněme pomocí výše uvedených metod kanonické souřadnice r a s :*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + c$$
$$r = c = \ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

Jak již bylo řečeno, lze jako kanonickou souřadnici brát libovolnou hladkou funkci nalezené funkce r splňující podmínku (1.5)*, zvolme tedy*

$$\tilde{r} = e^r = \frac{y}{x}.$$

Kanonická souřadnice s má tvar

$$s = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x.$$

1.3.3 Hledání řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu pomocí kanonických souřadnic

Předpokládejme, že známe netriviální Lieovu symetrii diferenciální rovnice $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \omega(x,y)$. To znamená, že $\eta(x,y) \neq \omega(x,y)\xi(x,y)$. Diferenciální rovnici můžeme v kanonických souřadnicích vyřešit integrací. Nalezněme tedy tvar této diferenciální rovnice v těchto souřadnicích. Pro vyjádření $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}$ v původních souřadnicích použijeme vztah (1.2):

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial_x s + \omega(x,y)\partial_y s}{\partial_x r + \omega(x,y)\partial_y r}. \tag{1.8}$$

Poznámka. *Díky netrivialitě Lieovy symetrie bude jmenovatel nenulový.*

Převedením původní diferenciální rovnice do nových souřadnic dostaneme novou diferenciální rovnici ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \Omega(r, s).$$

Vyjádříme-li výraz (1.8) v proměnných (r, s), získáme tím předpis pro funkci $\Omega(r, s)$. Dostáváme tedy konkrétní tvar původní diferenciální rovnice v kanonických souřadnicích. Jelikož v těchto souřadnicích má diferenciální rovnice symetrii translaci v s, má tvar:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \Omega(r).$$

Integrací dostáváme obecné řešení:

$$s = \int \Omega(r)\mathrm{d}r + c,$$

kde $c =$ konst. Převedením do původních souřadnic získáme obecné řešení původní diferenciální rovnice.

Poznámka. *V případě triviální Lieovy symetrie platí rovnost $\eta(x, y) = \omega(x, y)\xi(x, y)$. Při hledání kanonické souřadnice r je jedním z dílčích kroků vyřešení diferenciální rovnice*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}.$$

To ale kvůli rovnosti zmíněné výše znamená, že řešíme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \omega(x, y),$$

tedy rovnici původní. Triviální symetrie jsou při této metodě řešení obyčejných diferenciálních rovnic nepoužitelné.

Příklad. *Mějme diferenciální rovnici $y' = \frac{y-x}{y+x}$. Její Lieovou symeterií je škálování v obou argumentech $(\hat{x}, \hat{y}) = (e^{\varepsilon}x, e^{\varepsilon}y)$. Příslušný tečný vektor je $(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (x, y)$. Jako kanonické souřadnice můžeme volit $r = \frac{y}{x}$ a $s = \ln x$. Nalezneme tvar této diferenciální rovnice v nových souřadnicích:*

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial_x s + \omega(x, y)\partial_y s}{\partial_x r + \omega(x, y)\partial_y r} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{y-x}{(y+x)x}} = \frac{1}{-\frac{y}{x} + \frac{y-x}{y+x}} = \frac{x(y+x)}{-y^2 - x^2} = -\frac{1 + \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = -\frac{1+r}{1+r^2} \Rightarrow s = -\arctan(r) - \frac{1}{2}\ln(1 + r^2)$$

Řešením původní diferenciální rovnice je

$$-\ln x = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right).$$

1.3.4 Linearizovaná podmínka symetrie

Již jsme ukázali, jak řešit obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu tvaru $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \omega(x, y)$ pomocí Lieových symetrií. V některých případech jsme schopni symetrii tzv. „uhodnout". U složitějších případů je to často velmi obtížné a neintuitivní. V této části si ukážeme, jak můžeme obecně Lieovy symetrie nalézt.

Připomeňme si tvar podmínky symetrie:

$$\frac{\partial_x \hat{y} + \omega(x, y)\, \partial_y \hat{y}}{\partial_x \hat{x} + \omega(x, y)\, \partial_y \hat{x}} = \omega(\hat{x}, \hat{y}).$$

Jedná se o nelineární parciální diferenciální rovnici o dvou neznámých $\hat{x}, \hat{y}$, kterou je obecně velmi komplikované vyřešit. Budeme však schopni z mnohem jednodušší podmínky nalézt tečné vektorové pole $(\xi(x, y)), \eta(x, y)$, ze kterého dokážeme zrekonstruovat Lieovu symetrii pomocí vztahů

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y}) \text{ a } \frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y}), \tag{1.9}$$

a počátečních podmínek

$$\hat{x}(\varepsilon = 0) = x,$$
$$\hat{y}(\varepsilon = 0) = y.$$

Lieovy symetrie takovéto diferenciální rovnice jsme schopni napsat pomocí Taylorova rozvoje:

$$\hat{x} = x + \varepsilon \xi(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$
$$\hat{y} = y + \varepsilon \eta(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Dosazením těchto rozvojů do (1.9) dostáváme podmínku symetrie v následujícím tvaru:

$$\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \varepsilon \partial_x \eta(x, y) + \omega(x, y)(1 + \varepsilon \partial_y \eta(x, y)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \partial_x \xi(x, y) + \omega(x, y)\varepsilon \partial_y \xi(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} = \omega\left(x + \varepsilon \xi(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), y + \varepsilon \eta(x, y)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Zlomek upravíme a utřídíme podle mocnin ε. Pro zkrácení výrazu dále nebudeme psát závislost funkcí ξ, η a ω.

$$\frac{\omega + \varepsilon(\partial_x \eta + \omega \partial_y \eta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon(\partial_x \xi + \omega \partial_y \xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} = \omega\left(x + \varepsilon \xi(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), y + \varepsilon \eta(x, y)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Nyní uděláme Taylorův rozvoj tohoto výrazu okolo $\varepsilon = 0$ do prvního řádu:

$$\left(\omega + \varepsilon(\partial_x \eta + \omega \partial_y \eta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)\left(-\varepsilon(\partial_x \xi + \omega \partial_y \xi)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \omega + \varepsilon(\xi \partial_x \omega + \eta \partial_y \omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\omega + \varepsilon\left(\partial_x \eta + (\partial_y \eta - \partial_x \xi)\omega - \partial_y \eta \omega^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \omega + \varepsilon(\xi \partial_x \omega + \eta \partial_y \omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Tato podmínka je nutně splněna v $\varepsilon = 0$, což koresponduje s triviální symetrií $(\hat{x}, \hat{y} = (x, y))$. Porovnáním členů řádu chyby $\mathcal{O}(\varepsilon)$ získáme *linearizovanou podmínku symetrie*:

$$\partial_x \eta + \omega \partial_y \eta - \omega \partial_x \xi - \omega^2 \partial_y \xi = \xi \partial_x \omega + \eta \partial_y \omega.$$

K řešení této lineární parciální diferenciální rovnice o dvou neznámých funkcích je potřeba užít ansatzu. Ukažme si užití této podmínky na konkrétním příkladu:

Příklad. *Mějme diferenciální rovnici*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln\frac{x}{y}.$$

Napišme si linearizovanou podmínku symetrie této rovnice:

$$\partial_x\eta + \ln\left(\frac{x}{y}\right)\partial_y\eta - \ln\left(\frac{x}{y}\right)\partial_x\xi - \ln^2\left(\frac{x}{y}\right)\partial_y\xi = \frac{1}{x}\xi - \frac{1}{y}\,\eta.$$

Předpokládejme následující závislost funkcí ξ a η :

$$\xi = \xi(x) \text{ a } \eta = \eta(x,y)$$

a nechť $\eta(x,y) = yf(x)$, kde f je libovolná funkce. Dosaďme tento ansatz do linearizované podmínky symetrie:

$$yf'(x) + \ln\left(\frac{x}{y}\right)f(x) - \ln\left(\frac{x}{y}\right)\xi' = \frac{1}{x}\xi - f(x).$$

Ze závislosti na funkci y vyplývá:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 1.$$

Dosazením do linearizované podmínky symetrie dostáváme rovnici:

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \ln\left(\frac{x}{y}\right)\xi' = \frac{1}{x}\xi.$$

Zvolíme-li $\xi(x) = x$, bude tato podmínka splněna. Příslušné vektorové pole má tedy tvar:

$$(\xi(x,y), \eta(x,y)) = (x,y).$$

Toto vektorové pole koresponduje s Lieovou symetrií škálování v obou argumentech, což je symetrií této diferenciální rovnice.
Skutečně:

Symetrie škálování má tvar $(\hat{x},\hat{y}) = (e^{\varepsilon}x, e^{\varepsilon}y)$. Ověříme, že se jedná o symetrii této diferenciální rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{x}} = \frac{\mathrm{d}(e^{\varepsilon}y)}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}(e^{\varepsilon}x)}{x}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$\ln\frac{\hat{x}}{\hat{y}} = \ln\frac{e^{\varepsilon}x}{e^{\varepsilon}y} = \ln\frac{x}{y}.$$

Zbývá ověřit, že námi nalezené vektorové pole koresponduje s touto symetrií:

$$(\xi(x,y), \eta(x,y)) = \left(\left.\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \left.\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right) = \left(\left.\frac{\mathrm{d}(e^{\varepsilon}x)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \left.\frac{\mathrm{d}(e^{\varepsilon}y)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right) = (x,y).$$

1.3.5 Postup řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu tvaru $y' = \omega(x,y)$

Shrňme si nyní celý postup hledání řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu tohoto tvaru:

1. Odhalíme Lieovu symetrii diferenciální rovnice, ze které zjistíme příslušné vektorové pole, nebo toto vektorové pole nalezneme pomocí linearizované podmínky symetrie

$$\partial_x\eta + \omega\partial_y\eta - \omega\partial_x\xi - \omega^2\partial_y\xi = \xi\partial_x\omega + \eta\partial_y\omega.$$

2. Nalezneme příslušné kanonické souřadnice ze vztahů

$$\xi(x,y)\partial_x r + \eta(x,y)\partial_y r = 0,$$
$$\xi(x,y)\partial_x s + \eta(x,y)\partial_y s = 1.$$

3. Převedeme diferenciální rovnici do kanonických souřadnic pomocí vztahu

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial_x s + \omega(x,y)\partial_y s}{\partial_x r + \omega(x,y)\partial_y r}.$$

4. Diferenciální rovnici $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \Omega(r)$ vyřešíme integrací a řešení převedeme do původních souřadnic.

Kapitola 2

Metoda symetrií obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů

V této části rozšíříme metodu řešení obyčejných diferenciálních rovnic pro vyšší řády.

2.1 Infinitezimální generátor

V první kapitole jsme se zabývali výhradně obyčejnými diferenciálními rovnicemi 1. řádu tvaru $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \omega(x, y)$ a jejich řešením pomocí symetrií. Nyní tuto metodu rozšíříme na obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů. V této části zavedeme kompaktní značení, které bude snadné rozšířit pro řešení diferenciálních rovnic libovolného řádu s libovolným počtem závislých i nezávislých proměnných.

Předpokládejme, že obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu má Lieovu symetrii, jejíž tečný vektor v bodě (x, y) je $(\xi(x, y), \eta(x, y))$. Potom parciální diferenciální operátor

$$X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$$

nazveme *infinitezimální generátor* Lieovy grupy. S tímto generátorem jsme se již setkali u podmínek pro kanonické souřadnice:

$$\begin{aligned} \xi(x, y)\partial_x r + \eta(x, y)\partial_y r &= 0, \\ \xi(x, y)\partial_x s + \eta(x, y)\partial_y s &= 1. \end{aligned}$$

Tyto podmínky můžeme zapsat pomocí infinitezimálního generátoru:

$$Xr = 0,$$

$$Xs = 1.$$

Nyní se podíváme, jak tento generátor působí na obecné souřadnice $(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y))$. Nechť $F = F(\hat{x}, \hat{y})$ je libovolná hladká funkce. Potom infinitezimální generátor působí na tuto funkci následovně:

$$\begin{aligned} XF(\hat{x}, \hat{y}) = XF(\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y)) = \xi(x, y) \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{x}} \partial_x \hat{x} + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} \partial_x \hat{y} \right) + \\ + \eta(x, y) \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{x}} \partial_y \hat{x} + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} \partial_y \hat{x} \right) = (X\hat{x}) \frac{\partial F}{\partial \hat{x}} + (X\hat{y}) \frac{\partial F}{\partial \hat{y}}. \end{aligned}$$

Jelikož funkce F je libovolná, infinitezimální generátor má v nových souřadnicích tento tvar:

$$X = (X\hat{x})\partial_{\hat{x}} + (X\hat{y})\partial_{\hat{y}}.$$

Poznámka. *Konkrétně pro kanonické souřadnice platí:*

$$X = (Xr)\partial_r + (Xs)\partial_s = \partial_s.$$

Tečný vektor v kanonických souřadnicích má tvar $(0, 1)$, *což koresponduje s tímto infinitezimálním generátorem.*

Nechť $\{\partial_x, \partial_y\}$ je formální báze prostoru tečných vektorových polí. Potom na X můžeme nahlížet jako na vektorové pole v proměnných (x, y). Toto vektorové pole nám charakterizuje akci Lieových symetrií na funkce.

Poznámka. *V dalších částech budeme o infinitezimálním generátoru mluvit jako o vektorovém poli.*

Předpokládejme, že funkce $G = G(r, s)$ je hladká funkce, kde r, s jsou kanonické souřadnice, a nechť

$$F(x, y) = G(r(x, y), s(x, y)).$$

V libovolném netriviálním bodě (x, y) Lieova symetrie působí na funkci $F(x, y)$ následujícím způsobem:

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = G(\hat{r}, \hat{s}) = G(r, s + \varepsilon).$$

Nyní uděláme rozvoj této funkce do Taylorovy řady v okolí bodu $\varepsilon = 0$:

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{\partial^k G}{\partial s^k}(r, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k G(r, s).$$

Nyní přejdeme zpět k původním souřadnicím:

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k(x, y) F(x, y).$$

Pokud tato řada konverguje, zveme ji *Lieova řada funkce F v okolí bodu* (x, y).

Poznámka. *Lieovu řadu můžeme definovat i v invariantních bodech. Vektorové pole X je v těchto bodech rovno nule a Lieova řada má jen první sčítanec, což je právě původní funkce $F(x, y)$. Rovnost je tedy splněna.*

Poznámka. *Lieova řada se také často píše v následujícím zkráceném tvaru:*

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = e^{\varepsilon X} F(x, y).$$

Speciálně: $\hat{x} = e^{\varepsilon X} x$ a $\hat{y} = e^{\varepsilon X} y$. Z toho vyplývá rovnost

$$F(e^{\varepsilon X} x, e^{\varepsilon X} y) = e^{\varepsilon X} F(x, y).$$

Nyní tyto poznatky zobecníme do libovolného počtu proměnných. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n; n \in \mathbb{N}$ jsou proměnné s Lieovou symetrií:

$$\hat{x}_k(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \varepsilon \xi_k(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{O}^2(\varepsilon), k \in \hat{n}.$$

Potom infinitezimální generátor, resp. vektorové pole jednoparametrické Lieovy grupy má tvar:

$$X = \xi_k(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Poznámka. *Používáme Einsteinovu sumační konvenci, vektorové pole X tedy musíme chápat jako sumu členů $\xi_k(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_k}$, kde $k \in \hat{n}$.*

Opět můžeme udělat rozvoj Lieovy symetrie do Lieovy řady:

$$\hat{x}_k = e^{\varepsilon X} x_k; k \in \hat{n}.$$

Pro libovolnou hladkou funkci F má Lieova řada tvar:

$$F(e^{\varepsilon X} x_1, \ldots, e^{\varepsilon X} x_n) = e^{\varepsilon X} F(x_1, \ldots, x_n).$$

Tyto výsledky se nám budou hodit při studiu obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů.

2.2 Podmínka symetrie pro obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů

V této části se pokusíme některé myšlenky z první kapitoly o obyčejných diferenciálních rovnicích 1. řádu rozšířit i pro vyšší řády. Předpokládejme obyčejnou diferenciální rovnici ve tvaru

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{2.1}$$

kde $y^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$, $\forall k \in \hat{n}$, $n \in \mathbb{N}$ a ω je lokálně hladká funkce ve všech svých argumentech. Nechť

$$T : (x, y) \mapsto (\hat{x}, \hat{y})$$

je Lieova symetrie rovnice (2.1), která zobrazuje její řešení $y = f(x)$ na řešení $\hat{y} = \hat{f}(\hat{x})$. Funkce f tedy splňuje

$$f^{(n)}(x) = \omega(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)).$$

Protože T je symetrie, musí také platit

$$\hat{f}^{(n)}(\hat{x}) = \omega(\hat{x}, \hat{f}(\hat{x}), \hat{f}'(\hat{x}), \ldots, \hat{f}^{(n-1)}(\hat{x})). \tag{2.2}$$

Tato podmínka musí být splněna pro všechna řešení $y = f(x)$ rovnice (2.1). Uvažujme $(n+2)$ dimenzionální Euklidův prostor s proměnnými $(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$. Tento prostor se nazývá *n-tý jet space* $\mathcal{J}^n$. Obyčejná diferenciální rovnice (2.1) tvoří nadplochu $\mathcal{S}$ v $\mathcal{J}^n$.

Poznámka. *V případě obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, $y' = \omega(x, y)$ je reprezentována jako plocha v $\mathcal{J}^1$, což je prostor se souřadnicemi (x, y, y').*

Každá hladká funkce $y = f(x)$ v rovině je reprezentována v $\mathcal{J}^n$ jedinečným grafem

$$(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = (x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)).$$

Tento graf v souřadnicích (x, y) jednoznačně určuje původní graf v ploše, tedy funkci f. To znamená, že symetrii T můžeme rozšířit do $\mathcal{J}^n$:

$$T : (x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \ldots, \hat{y}^{(n)}),$$

kde $\hat{y}^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k \hat{y}}{\mathrm{d}\hat{x}^k}$, $\forall k \in \hat{n}$. Rozšíření akce symetrie T do všech derivací do řádu n se nazývá *n-tá prolongace T.*

Poznámka. *Grafu* $(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ *budeme říkat* ***prolongovaný graf****, resp.* ***n-krát prolongovaný graf*** *v případě* $\mathcal{J}^n$.

Pokud funkce $y = f(x)$ je řešením rovnice (2.1), leží její n-krát prolongovaný graf v nadrovině $\mathcal{S}$. Naopak leží-li prolongovaný graf funkce f v nadrovině $\mathcal{S}$, je f řešením rovnice (2.1).

N-tá prolongace symetrie T zobrazuje nadrovinu $\mathcal{S}$ na nadrovinu $\hat{\mathcal{S}}$, jejíž rovnice má tvar

$$\hat{y}^{(n)} = \tilde{\omega}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n-1)}).$$

Máme-li tedy řešení $y = f(x)$ rovnice (2.1), které symetrie T zobrazuje funkci $\hat{y} = \hat{f}(x)$, musí n-krát prolongovaný graf funkce $\hat{f}$ ležet v nadrovině $\hat{\mathcal{S}}$, musí tedy platit:

$$\hat{f}^{(n)}(x) = \tilde{\omega}(\hat{x}, \hat{f}(\hat{x}), \hat{f}'(\hat{x}), \dots, \hat{f}^{(n-1)}(\hat{x})).$$

Z podmínky symetrie (2.2) vyplývá, že na množině řešení diferenciální rovnice musí platit $\tilde{\omega} = \omega$. Ekvivalentně $\tilde{\omega} = \omega$ na nadploše $\mathcal{S}$. Z toho dostáváme podmínku

$$\hat{y}^{(n)} = \omega(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n-1)}).$$

Nadplocha $\mathcal{S}$ je tedy n-tou prolongací symetrie T zobrazena sama na sebe, resp. je vůči prolongované symetrii invariantní.

Máme tedy diferenciální rovnici (2.1) a n-tou prolongaci symetrie

$$T : (x, y, y', \dots, y^{(n)}) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n)}).$$

Funkci $\hat{y}^{(k)}$ můžeme dle knihy [1] spočítat pomocí rekurze, která je získatelná z tzv. *řetězového pravidla*:

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{\mathrm{d}\hat{y}^{(k-1)}}{\mathrm{d}\hat{x}} = \frac{\partial_x \hat{y}^{(k-1)} + y' \partial_y \hat{y}^{(k-1)} + \dots + y^{(k)} \partial_{y^{(k-1)}} \hat{y}^{(k-1)}}{\partial_x \hat{x} + y' \partial_y \hat{x} + \dots + y^{(k)} \partial_{y^{(k-1)}} \hat{x}} =: \frac{\mathrm{D}_x \hat{y}^{(k-1)}}{\mathrm{D}_x \hat{x}}, \ \forall k \in \hat{n}, \tag{2.3}$$

kde

$$\mathrm{D}_x = \partial_x + y' \partial_y + y'' \partial_{y'} + \dots$$

Poznámka. *V první kapitole jsme již odvodili řetězové pravidlo pro první derivaci (viz.* (1.2)*).*

Jak již víme, podmínka symetrie diferenciální rovnice (2.1) má tvar

$$\hat{y}^{(n)} = \omega(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n-1)}). \tag{2.4}$$

Tato podmínka obecně není lineární. Pokusíme se proto tuto podmínku linearizovat v okolí $\varepsilon = 0$ jako u obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu.

Jako jsme u diferenciálních rovnic 1. řádu dělali Taylorův rozvoj Lieových symetrií, uděláme to samé pro jejich n-tou prolongaci:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \varepsilon \xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \hat{y} &= y + \varepsilon \eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \hat{y}^{(k)} &= y^{(k)} + \varepsilon \eta_{(k)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), k \geq 1. \end{aligned}$$

Tyto vztahy dosadíme do rovnice symetrie (2.4):

$$\hat{y}^{(n)} = \omega\left((x + \varepsilon \xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2)), (y + \varepsilon \eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2)), \dots, (y^{(n-1)} + \varepsilon \eta_{(n-1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2))\right),$$

a rozvineme pomocí Taylorova rozvoje do řádu chyby $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$y^{(n)}+\varepsilon\eta_{(n)}+\mathcal{O}(\varepsilon^2) = \omega(x,y,y',\dots,y^{(n)})+\varepsilon(\xi\partial_x\omega+\eta\partial_y\omega+\eta_{(1)}\partial_{y'}\omega+\dots+\eta_{(n-1)}\partial_{y^{(n-1)}}\omega)+\mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Použitím původní diferenciální rovnice (2.1) dostáváme vztah pro $\eta_{(n)}$:

$$\eta_{(n)} = \xi\partial_x\omega + \eta\partial_y\omega + \eta_{(1)}\partial_{y'}\omega + \dots + \eta_{(n-1)}\partial_{y^{(n-1)}}\omega. \tag{2.5}$$

Dosadíme Taylorův rozvoj funkce $\hat{y}'$ do rovnice (2.3) a rozvineme v okolí $\varepsilon = 0$ do řádu chyby $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$\hat{y}' = \frac{\mathrm{D}_x\hat{y}}{\mathrm{D}_x\hat{x}} = \frac{\mathrm{D}_x(y+\varepsilon\eta+\mathcal{O}(\varepsilon^2))}{\mathrm{D}_x(x+\varepsilon\xi+\mathcal{O}(\varepsilon^2))} = \frac{y'+\varepsilon\mathrm{D}_x\eta+\mathcal{O}(\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\mathrm{D}_x\xi+\mathcal{O}(\varepsilon^2)} = y' + \varepsilon(\mathrm{D}_x\eta - y'\mathrm{D}_x\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \eta_{(1)} = \mathrm{D}_x\eta - y'\mathrm{D}_x\xi.$$

Stejný postup aplikujeme na $\hat{y}^{(k)}$ pro libovné $k \in \hat{n}$:

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{y^{(k)}+\varepsilon\mathrm{D}_x\eta_{(k-1)}+\mathcal{O}(\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\mathrm{D}_x\xi+\mathcal{O}(\varepsilon^2)} \Rightarrow \eta_k(x,y,y',\dots,y^{(k)}) = \mathrm{D}_x\eta_{(k-1)} - y^{(k)}\mathrm{D}_x\xi.$$

V předchozí části jsme si definovali infinitezimální generátor $X = \xi\partial_x+\eta\partial_y$. Jedná se o generátor Lieovy symetrie. Pro n-tou prolongaci Lienovy symetrie zavedeme *prolongovaný infinitezimální generátor*

$$pr^{(n)}X = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_{(1)}\partial_{y'} + \dots + \eta_{(n)}\partial_{y^{(n)}}.$$

Jelikož koeficient u členu $\partial_{(y^{(k)})}$ je roven $\frac{\mathrm{d}\hat{y}^{(k)}}{\mathrm{d}\varepsilon}$, můžeme vektor $(\xi,\eta,\eta_{(1)},\dots,\eta_{(n)})$ chápat jako tečný vektor ke grafu $(\hat{x},\hat{y},\hat{y}',\dots,\hat{y}^{(n)})$ a prolongovaný infinitezimální generátor $X^{(n)}$ jako vektorové pole v $\mathcal{J}^n$, tedy *prolongované vektorové pole* X. Prolongované vektorové pole použijeme k přepsání linearizované podmínky symetrie. Platí totiž následující tvrzení:

Tvrzení 2.2.1. *Buď $y^{(n)} = \omega(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})$ obyčejná diferenciální rovnice řádu n, kde $n \in \mathbb{N}$ a T je její Lieova symetrie. Potom platí následující rovnost:*

$$pr^{(n)}X(y^{(n)} - \omega(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})) = 0,$$

kde $pr^{(n)}X$ je n-tá prolongace vektorového pole X korespondujícího s Lieovou symetrií T.

Důkaz. Rovnost vyplývá ze vztahu (2.5):

$$\begin{aligned}pr^{(n)}X(y^{(n)} - \omega(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})) &= X^{(n)}(y^{(n)}) - X^{(n)}(\omega(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})) = \\ &= \eta_{(n)} - \Big(\xi\partial_x\omega + \eta\partial_y\omega + \eta_{(1)}\partial_{y'}\omega + \dots + \eta_{(n-1)}\partial_{y^{(n-1)}}\omega\Big) = 0.\end{aligned}$$

□

Poznámka. *Pro lineární diferenciální rovnici 1. řádu jsme měli linearizovanou podmínku ve tvaru:*

$$\partial_x\eta + \omega\partial_y\eta - \omega\partial_x\xi - \omega^2\partial_y\xi = \xi\partial_x\omega + \eta\partial_y\omega.$$

Zkoumejme, co dostaneme užitím předchozího tvrzení na diferenciální rovnici $y' = \omega(x,y)$:

$$pr^{(1)}X(y' - \omega(x,y)) = \eta_1 - \xi\partial_x\omega - \eta\partial_y\omega.$$

Jelikož platí

$$\eta_1 = \mathrm{D}_x\eta - y'\mathrm{D}_x\xi = \partial_x\eta + y'\partial_y\eta - y'\partial_x\xi - (y')^2\partial_y\xi,$$

dosazením za $y' = \omega(x,y)$ dostáváme následující rovnost:

$$pr^{(1)}X(y' - \omega(x,y)) = \partial_x\eta + \omega\partial_y\eta - \omega\partial_x\xi - \omega^2\partial_y\xi - \xi\partial_x\omega - \eta\partial_y\omega = 0.$$

Vidíme tedy, že linearizovaná podmínka symetrie pro obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu z předchozí kapitoly koresponduje s podmínkou pro obyčejné diferenciální rovnice libovolného řádu n, kde $n \in \mathbb{N}$.

K hledání Lieových symetrií obyčejných diferenciálních rovnic n-tého řádu, kde $n \in \mathbb{N}$, tedy budeme používat podmínku nulovosti n-té prolongace příslušného vektorového pole X na funkci $F = y^{(n)} - \omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$. Z této podmínky dostaneme obecně komplikovanou parciální diferenciální rovnici o dvou neznámých. Jelikož však víme, že funkce ξ a η závisí pouze na x a y, budeme porovnávat členy u různých mocnin derivací funkce y. Tím dostaneme soustavu parciálních diferenciálních rovnic, které už bude snažší vyřešit. Díky této metodě nebudeme muset používat metodu anzatsu. Ukažme si to na konkrétním příkladě:

Příklad. *Mějme diferenciální rovnici $y'' = 0$. K hledání symetrií této rovnice použijeme podmínku nulovosti prolongovaného vektorového pole. K tomu potřebujeme znát tvar výrazu $\eta_{(2)}$:*

$$\begin{aligned}
\eta_{(2)} &= \mathrm{D}_x\eta_{(1)} - y''\mathrm{D}_x\xi = \mathrm{D}_x\left(\partial_x\eta + y'\partial_y\eta - y'\partial_x\xi - (y')^2\partial_y\xi\right) - y''\partial_x\xi - y''y'\partial_y\xi \\
&= \partial^2_{xx}\eta + \partial^2_{yx}\eta y' + \partial_y\eta y'' + \partial^2_{xy}\eta y' + \partial^2_{yy}\eta y'^2 - \partial_x\xi y'' - \partial^2_{xx}\xi y' - \partial^2_{yx}\xi y'^2 - \\
&\quad - 2\partial_y\xi y'y'' - \partial^2_{xy}\xi y'^2 - \partial^2_{yy}\xi y'^3 - \partial_x\xi y'' - \partial_y\xi y''y' \\
\eta_{(2)} &= \partial^2_{xx}\eta + (2\partial^2_{xy}\eta - \partial^2_{xx}\xi)y' + (\partial^2_{yy}\eta - 2\partial^2_{xy}\xi)y'^2 - \partial^2_{yy}\xi y'^3 + (\partial_y\eta - 2\partial_x\xi - 3\partial_y\xi y')y''
\end{aligned}$$

Poznámka. *Počet členů výrazů $\eta_{(k)}$ exponenciálně roste s k, řešení diferenciálních rovnic vyšších řádů je tedy dost početně náročné. Budeme se tedy dále zabývat především obyčejnými diferenciálními rovnicemi 2. řádu, postupy u vyšších řádů budou platit obdobně.*

Podívejme se, jak působí druhá prolongace vektorového pole na na funkci $F = y''$:

$$pr^{(2)}X(y'') = \eta_{(2)} = \partial^2_{xx}\eta + (2\partial^2_{xy} - \partial^2_{xx}\xi)y' + (\partial^2_{yy}\eta - 2\partial^2_{xy}\xi)y'^2 - \partial^2_{yy}\xi y'^3 = 0.$$

Z této podmínky porovnáním členů u různých mocnin funkce y' dostáváme soustavu parciálních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}
\partial^2_{xx}\eta &= 0, \\
2\partial^2_{xy} - \partial^2_{xx}\xi &= 0, \\
\partial^2_{yy}\eta - 2\partial^2_{xy}\xi &= 0, \\
\partial^2_{yy}\xi &= 0.
\end{aligned}$$

Z poslední rovnice dostáváme obecný tvar pro funkci ξ :

$$\xi(x,y) = A(x)y + B(x),$$

kde A a B jsou libovolné funkce proměnné x. Z třetí rovnice dostáváme obecný vztah pro η :

$$\partial^2_{yy}\eta = 2\partial^2_{xy}\xi = 2A(x) \Rightarrow \eta(x,y) = A'(x)y^2 + C(x)y + D(x),$$

kde C a D jsou opět libovolné funkce proměnné x. Nyní tyto funkce dosadíme do prvních dvou rovnic, které musí být rovněž splněny:

$$\partial^2_{xx}\eta = A'''(x)y^2 + C''(x)y + D''(x) = 0$$

$$2\partial^2_{xy} - \partial^2_{xx}\xi = 3A''(x)y + C'(x) - B''(x) = 0$$

Z těchto rovnic porovnáním členů u různých mocnin funkce y dostaneme následující podmínky pro neznámé funkce:

$$\begin{aligned} 2A''(x) = 0 \Rightarrow A(x) = c_1x + c_2, \\ C''(x) = 0 \Rightarrow C(x) = c_3x + c_4, \\ D''(x) = 0 \Rightarrow D(x) = c_5x + c_6, \\ B''(x) = 2C'(x) = 2c_3 \Rightarrow B(x) = c_3x^2 + c_7x + c_8, \end{aligned}$$

kde $c_1, \ldots, c_8 \in \mathbb{R}$. Z těchto vztahů dostáváme obecné tvary funkcí ξ a η :

$$\begin{aligned} \xi(x,y) = c_8 + c_7x + c_3x^2 + c_2y + c_1xy, \\ \eta(x,y) = c_6 + c_5x + c_4y + c_3xy + c_1y^2. \end{aligned}$$

Obecné vektorové pole příslušné Lieově symetrii má tvar:

$$X = \sum_{i=1}^{8} c_iX_i,$$

kde

$$X_1 = xy\partial_x + y^2\partial_y, X_2 = y\partial_x, X_3 = x^2\partial_x + xy\partial_y, X_4 = y\partial_y,$$

$$X_5 = x\partial_x, X_6 = \partial_y, X_7 = x\partial_x, X_8 = \partial_x.$$

Tato vektorová pole charakterizují Lieovy symetrie této diferenciální rovnice, z nichž jsme již schopni všechny ostatní nakombinovat.

Označme $\mathcal{L}$ množinu všech infinitezimálních generátorů Lieových symetrií obyčejné diferenciální rovnice alespoň druhého řádu. Linearizovaná podmínka symetrie je lineární v ξ a η, platí tedy:

$$X_1, X_2 \in \mathcal{L} \Rightarrow c_1X_1 + c_2X_2 \in \mathcal{L}, \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Množina $\mathcal{L}$ tedy tvoří vektorový prostor. Dimenze R tohoto vektorového prostoru určuje počet libovolných konstant, které se objevují v obecném řešení linearizované podmínky symetrie. Všechny infinitezimální generátory $X \in \mathcal{L}$ mohou být zapsány jako

$$\sum_{i=1}^{R} c_iX_i, c_i \in \mathbb{R},$$

kde $\{X_1, \ldots . X_R\}$ je báze vektorového prostoru $\mathcal{L}$.

2.3 Symetrie lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Mějme lineární diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru

$$F = y'' - p(x)y' - q(x)y = 0,$$

kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou spojité funkce. Pokusíme se nalézt její symetrie pomocí nulovosti druhé prolongace příslušného vektorového pole X :

$$\begin{aligned} pr^{(2)}X(F) = \xi p'(x)y' - \xi q'(x)y - \eta q(x) - \partial_x\eta p(x) - \partial_y\eta p(x)y' + \partial_x\xi p(x)y' + \partial_y\xi p(x)y'^2 + \\ + \partial^2_{xx}\eta + 2\partial^2_{xy}\eta y' - \partial^2_{xx}\xi y' + \partial^2_{yy}\eta y'^2 - 2\partial^2_{xy}\xi y'^2 - \partial^2_{yy}y'^3 + \partial_y\eta p(x)y' + \partial_y\eta q(x)y - \\ - 2\partial_x\xi p(x)y' - 2\partial_x\xi q(x)y - 3\partial_y\xi p(x)y'^2 - 3\partial_y\xi q(x)yy' = 0. \end{aligned}$$

Nyní porovnáme členy u různých mocnin funkce y':

- Členy u y'^3 :

  $$\partial^2_{yy}\xi = 0 \Rightarrow \xi(x,y) = A(x)y + B(x),$$

  kde $A(x), B(x)$ jsou libovolné funkce od x.

- Členy u y'^2 :

  $$\partial^2_{yy}\eta = 2\partial^2_{xy}\xi + 2\partial_y\xi p(x) = 2A'(x) + 2A(x)p(x) \Rightarrow \eta(x,y) = \big(A'(x) + A(x)p(x)\big)\, y^2 + C(x)y + D(x),$$

  kde $C(x), D(x)$ jsou libovolné funkce. Z porovnání členů u dalších mocnin funkce y' dostaneme dodatečné podmínky na tyto čtyři funkce od x :

- Členy u y' :

  $$\begin{aligned} & - \xi p'(x) - \partial_y\eta p(x) + \partial_x\xi p(x) + \partial^2_{xy}\eta - \partial^2_{xx}\xi + \partial_y\eta p(x) - 2\partial_x\xi p(x) - 3\partial_y\xi q(x)y = \\ & = -A(x)p'(x)y - B(x)p'(x) - 2p(x)(A'(x) + A(x)p(x))y - p(x)C(x) + p(x)A'(x)y + p(x)B'(x) + \\ & + 4(A''(x) + (A(x)p(x))')y + 2C'(x) - A''(x)y - B''(x) + 2p(x)(A'(x) + A(x)p(x))y + C(x)p(x) - \\ & - 2A'(x)p(x)y - 2B'(x)p(x) - 3A(x)q(x)y = 0. \end{aligned}$$

  Porovnáním členů u různých mocnin funkce y dostáváme následující 2 podmínky:

  $$\begin{aligned} A''(x) + (A(x)p(x))' - A(x)q(x) = 0, \\ B''(x) + (B(x)p(x))' - 2C'(x) = 0. \end{aligned}$$

- Členy nezávislé na funkci y' :

  $$\begin{aligned} & - \xi q'(x)y - \eta q(x) - \partial_x\eta p(x) + \partial^2_{xx}\eta + \partial_y\eta q(x)y - 2\partial_x\xi q(x)y = \\ & = -A(x)q'(x)y^2 - B(x)q'(x)y - (A'(x) + A(x)p(x))y^2 - C(x)q(x)y - D(x)q(x) - C'(x)p(x)y - D'(x)p(x) + \\ & + (A'''(x) + (A(x)p(x))'')y^2 + C''(x)y + D''(x) + 2(A'(x) + A(x)p(x))q(x)y^2 + C(x)q(x)y - \\ & - 2A'(x)q(x)y^2 - 2B'(x)q(x)y = 0. \end{aligned}$$

Opět porovnáme členy u různých mocnin funkce y, z čehož dostaneme tyto podmínky:

$$
\begin{aligned}
D''(x) - D'(x)p(x) - D(x)q(x) &= 0,\\
C''(x) - C'(x)p(x) - 2B'(x)q(x) - B(x)q'(x) &= 0,\\
\big(A''(x) + (A(x)p(x))' - A(x)q(x)\big)' - p(x)\big(A''(x) + (A(x)p(x))' - A(x)q(x)\big) &= 0.
\end{aligned}
$$

Třetí z těchto podmínek je automaticky splněna díky první podmínce pro funkci $A(x)$, nemusíme se jí tedy zabývat. Jelikož podmínka pro neznámou funkci $D(x)$ je opět lineární diferenciální rovnice 2. řádu, nejsme schopni ji vyřešit. Je tedy vidět, že symetrie této diferenciální rovnice nejsme schopni touto metodou bez znalosti řešení nalézt. Předpokládejme tedy, že známe obecné řešení této diferenciální rovnice, které má tvar

$$y = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x),$$

kde $k_1, k_2 =$ konst. Dle knihy [1] mají neznámé funkce A, B, C, D splňující podmínky uvedené výše následující tvar:

$$
\begin{aligned}
A(x) &= (c_4 y_1(x) + c_5 y_2(x))e^{-\int p(x)\mathrm{d}x},\\
B(x) &= (c_6 y_1^2(x) + 2c_7 y_1(x)y_2(x) + c_8 y_2^2(x))e^{-\int p(x)\mathrm{d}x},\\
C(x) &= c_1 + (c_6 y_1(x)y_1'(x) + c_7(y_1'(x)y_2(x) + y_1(x)y_2'(x)) + c_8 y_2(x)y_2'(x))e^{-\int p(x)\mathrm{d}x},\\
D(x) &= c_2 y_1(x) + c_3 y_2(x).
\end{aligned}
$$

Vektorový prostor infinitezimálních generátorů je tedy osmidimenzionální s následující bází:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= y\partial_y,\\
X_2 &= y_1(x)\partial_y,\\
X_3 &= y_2(x)\partial_y,\\
X_4 &= e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(y_1(x)y\partial_x + y_1'(x)y^2\partial_y),\\
X_5 &= e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(y_2(x)y\partial_x + y_2'(x)y^2\partial_y),\\
X_6 &= e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(y_1^2(x)\partial_x + y_1(x)y_1'(x)y\partial_y),\\
X_7 &= e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(2y_1(x)y_2(x)\partial_x + (y_1'(x)y_2(x) + y_1(x)y_2'(x))y\partial_y),\\
x_8 &= e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(y_2^2(x)\partial_x + y_2(x)y_2'(x)y\partial_y).
\end{aligned}
$$

Kromě prvního vektorového pole jsou všechna závislá na předem známém obecném řešení této diferenciální rovnice, není proto obecně možné nalézt všechny symetrie této rovnice bez znalosti tohoto řešení.

2.4 Redukce řádu obyčejných diferenciálních rovnic pomocí kanonických souřadnic

V této části si ukážeme, jak můžeme pomocí Lieových symetrií snižovat řád obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů. Mějme diferenciální rovnici ve tvaru

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2.6}$$

a její Lieovu symetrii s příslušným vektorovým polem X. Nechť (r, s) jsou kanonické souřadnice korespondující s tímto vektorovým polem. Platí tedy

$$X = \partial_s.$$

Přepíšeme obyčejnou diferenciální rovnici (2.6) do těchto souřadnic:

$$s^{(n)} = \Omega\left(r, s, \dot{s}, \ldots, s^{(n-1)}\right),$$

kde $\dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}$ a $s^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k s}{\mathrm{d}r^k}$. Jako v první kapitole, díky invariantnosti této diferenciální rovnice vůči translaci v s platí

$$\partial_s \Omega = 0.$$

Diferenciální rovnice (2.6) v kanonických souřadnicích má tedy tvar

$$s^{(n)} = \Omega\left(r, \dot{s}, \ldots, s^{(n-1)}\right).$$

Definujme si novou funkci $u(r) = \dot{s}(r)$. Pro tuto funkci dostáváme diferenciální rovnici

$$u^{(n-1)} = \Omega(r, u, \ldots, u^{(n-2)}),$$

kde $u^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}r^k}$.

Předpokládejme obecné řešení redukované diferenciální rovnice ve tvaru

$$u(r) = f(r; c_1, \ldots, c_{n-1}), c_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \widehat{n-1}$$

Obecné řešení původní rovnice v původních souřadnicích má tvar:

$$s(x, y) = \int^{r(x,y)} f(r; c_1, \ldots, c_{n-1}) \mathrm{d}r + c_n.$$

Poznámka. *V některých případech je vhodnější zvolit u jako nějakou funkci od $\dot{s}$ a r. Po získání obecného řešení $u(r)$ vyjádříme funkci $\dot{s}$ jako*

$$\dot{s} = \dot{s}(r, u).$$

Obecné řešení má potom tvar

$$s(x, y) = \int^{r(x,y)} \dot{s}(r, u(r; c_1, \ldots, c_{n-1})) \mathrm{d}r + c_n.$$

Tento postup můžeme aplikovat opakovaně, dokud se nedostaneme k diferenciální rovnici 1. řádu, kterou již umíme řešit pomocí postupu popsaného v první kapitole.

Poznámka. *Může se stát, že redukovaná diferenciální rovnice nemá žádnou Lieovu symetrii a není ji tedy možné dále řešit tímto postupem. Tento problém lze občas vyřešit volbou jiného vektorového pole k redukci řádu.*

K redukci řádu jsme využili pouze jedno vektorové pole X, ve spoustě případů však máme takových vektorových polí mnohem více. Při použití vhodného vektorového pole k redukci řádu se může některá ze symetrií zachovat, a proto můžeme následně využít příslušné vektorové pole k opětovnému snížení řádu či k vyřešení příslušné diferenciální rovnice 1. řádu. V opačném případě musíme znovu hledat vektorová pole Lieových symetrií nové rovnice.

Ukažme si to na konkrétním příkladě:

Příklad. *Mějme diferenciální rovnici*

$$y''' = \frac{1}{y^3}.$$

Její Lieovy symetrie jsou translace v x a škálování v obou argumentech generované příslušnými vektorovými poli

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= x\partial_x + \frac{3}{4}y\partial_y. \end{aligned}$$

K redukci řádu této diferenciální rovnice použijeme vektorové pole X_1. Příslušné souřadnice splňující podmínky pro kanonické souřadnice lze volit

$$(r, s) = (y, x).$$

Nyní spočítáme výraz $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial_x s + y'\partial_y s}{\partial_x r + y'\partial_y r} = \frac{1}{y'}.$$

Jako novou funkci u zvolíme $u = \frac{1}{\dot{s}} = y'$ a spočítáme její druhou derivaci:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} &= \frac{y''}{y'} \\ \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} &= \frac{y'''y' - y''^2}{y'^3} = \frac{1}{r^3u^2} - \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)^2 \frac{1}{v}. \end{aligned}$$

Jediná Lieova symetrie této diferenciální rovnice je škálování s příslušným vektorovým polem

$$\tilde{X}_2 = \frac{3}{4}r\partial_r - \frac{1}{4}u\partial_u.$$

Tato symetrie je „zděděná“ z původní rovnice a její nepoužité symetrie s příslušným vektorovým polem X_2. Abychom zjistili, jak toto vektorové pole působí na redukovanou diferenciální rovnici, spočtěme si jeho první prolongaci:

$$pr^{(1)}X_2 = x\partial_x + \frac{3}{4}y\partial_y - \frac{1}{4}y'\partial_{y'}.$$

Vektorové pole $\tilde{X}_2$ získáme z této prolongace, omezíme-li se pouze na proměnné (r, u). V tomto případě je tedy vektorové pole $\tilde{X}_2$ nezávislé na $s = x$ stejně jako redukovaná diferenciální rovnice, jedná se tedy o symetrii této rovnice. Pomocí příslušné Lieovy symetrie jsme schopni opět snížit řád diferenciální rovnice.

Poznámka. *Při použití vektorového pole X_2 ke snížení řádu původní rovnice bychom dle knihy [1] dostali redukovanou diferenciální rovnici ve tvaru*

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} = \frac{16 - 5r^3u}{r^3(3r - 4u)^2} + \frac{4(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r})^2 - 9\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}}{3r - 4u},$$

kde $r = x^{-\frac{3}{4}}y$ a $u = x^{\frac{1}{4}}y'$, která nemá žádné Lieovy symetrie. Bylo tedy výhodné nejprve použít vektorové pole X_1.

2.5 Invariantní řešení

Některé obyčejné diferenciální rovnice nelze kompletně vyřešit pomocí Lieových symetrií. Přesto můžeme být schopni nalézt řešení, které je invariantní vůči konkrétní symetrii. Buď X vektorové pole korespondující s Lieovou symetrií obyčejné diferenciální rovnice (2.1). Potom, jak již víme z první kapitoly, graf funkce $y(x)$ v rovině (x, y) je invariantní vůči této symetrii, pokud platí

$$\eta(x, y) - y'\xi(x, y) = 0. \tag{2.7}$$

Stačí vyřešit tuto diferenciální rovnici a poté ověřit, která z těchto řešení splňují původní diferenciální rovnici. Ukažme si tento postup na konkrétním příkladě:

Příklad. *Mějme diferenciální rovnici*

$$y''' = -yy''.$$

Tato rovnice má symetrii translaci v x a škálování v obou argumentech s příslušnými vektorovými poli

$$X_1 = \partial_x,$$
$$X_2 = x\partial_x - y\partial_y.$$

Dle knihy [1] nám tyto symetrie umožní redukovat tuto rovnici na diferenciální rovnici 1. řádu, kterou však neumíme vyřešit. Zkusme tedy nalézt řešení invariatní vůči těmto symetriím. Užitím vektorového pole X_1 dostáváme z (2.7) rovnici

$$y' = 0,$$

ze které získáme pouze řešení $y = konst.$, které sice skutečně vyhovuje původní diferenciální rovnici, bylo ovšem možné ho nalézt okamžitě ze zadání původní rovnice. Zkusme tedy použít vektorové pole X_2 :

$$-y - xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}.$$

Řešení této diferenciální rovnice je ve tvaru

$$y = \frac{c}{x},\ c = konst.$$

Dosadíme ho tedy do původní diferenciální rovnice:

$$0 = y''' + yy'' = -6\frac{c}{x^4} + 2\frac{c^2}{x^4} \Rightarrow c \in \{0, 3\}.$$

Dostáváme invariatní řešení $y = 0$ a $y = \frac{3}{x}$. K nalezení více invariantních řešení použijeme obecnější Lieovu symetrii této diferenciální rovnice s příslušným vektorovým polem $X = kX_1 + X_2$, kde $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Z (2.7) dostáváme rovnici

$$-y - (x + k)y' = 0.$$

Analogickým postupem zjistíme, že invariatní řešení vycházejí z této podmínky jsou ve tvaru $y = 0$ a $y = \frac{3}{x+k}$.

Kapitola 3

Řešení speciálních tvarů obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu metodou symetrií

V této části budeme řešit speciální tvary obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu z kurzu Diferenciální rovice pomocí symetrií.

3.1 Rovnice se separovanými proměnnými

Definice 3.1.1. *Nechť $P = P(x)$ a $Q = Q(y)$ jsou spojité funkce. Potom* ***rovnice se separovanými proměnnými*** *je rovnice ve tvaru:*

$$F = P(x) + Q(y)y' = 0. \tag{3.1}$$

Budeme předpokládat, že funkce $P(x)$ a $Q(y)$ jsou nenulové. V případě nulovosti funkce $Q(y)$ se nejedná o diferenciální rovnici a dostáváme rovnost $P(x) = 0$. Pokud ale bude nulová funkce $P(x)$, dostáváme z (3.1) rovnici $Q(y)y' = 0$. Za předpokladu nenulovosti funkce $Q(y)$ dostáváme řešení $y = c$ konst. Druhou možností je, že funkce y je rovna kořenu rovnice $Q(y) = 0$.

K řešení použijeme Lieovy symetrie. Nejprve si napišme, jak působí první prolongace vektorového pole $X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$ na F:

$$pr^{(1)}X(F) = \xi P'(x) - \eta P(x)\frac{Q'(y)}{Q(y)} + \partial_x\eta Q(y) - \partial_y\eta P(x) + \partial_x\xi P(x) - \partial_y\xi\frac{P(x)^2}{Q(y)} = 0. \tag{3.2}$$

Předpokládejme následující závislost hledaných funkcí vektorového pole X:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x), \\ \eta &= c = \text{ konst.} \end{aligned}$$

Poznámka. *V případě, kdy jsou obě funkce konstanty, tedy $\xi = a, \eta = b$, má rovnice* (3.2) *následující tvar:*

$$aP'(x) - bP(x)\frac{Q'(y)}{Q(y)} = 0.$$

Ze závislosti na proměnné y je ihned vidět, že rovnice by měla řešení pouze v případě, kdy $\frac{Q'(y)}{Q(y)}$ je rovno 0*, což nemůžeme obecně předpokládat. Stejná podmínka nám vychází i pro funkci $P(x)$.*

Při této závislosti má rovnice (3.2) tvar

$$\xi(x)P'(x) - c\,P(x)\frac{Q'(y)}{Q(y)} + \xi'(x)P(x) = 0.$$

Ze závislosti na y plyne, že $\eta = c = 0$. V tomto případě dostáváme

$$\xi(x)P'(x) + \xi'(x)P(x) = (\xi(x)P(x))' = 0.$$

Této rovnici vyhovuje funkce ξ ve tvaru $\xi(x) = \frac{1}{P(x)}$. Nyní můžeme pomocí funkcí η a ξ najít kanonické souřadnice diferenciální rovnice se separovanými proměnnými:

$$\xi(x,y)\partial_x r + \eta(x,y)\partial_y r = \frac{1}{P(x)}\partial_x r = 0 \Rightarrow r(x,y) = r(y).$$

Zvolíme tedy $r = y$. Souřadnici s získáme snadno integrací:

$$s = \int \frac{1}{\xi(x)}\mathrm{d}x = \int P(x)\mathrm{d}x.$$

Kanonické souřadnice tedy mají následující tvar:

$$(r,s) = \left(y, \int P(x)\mathrm{d}x\right).$$

Nyní můžeme rovnici (3.1) převést do nových souřadnic:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial_x s + y'\partial_y s}{\partial_x r + y'\partial_y r} = \frac{P(x)}{y'}.$$

Dosadíme za $y' = -\frac{P(x)}{Q(y)}$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{P(x)}{-\frac{P(x)}{Q(y)}} = -Q(y) = -Q(r).$$

Řešení této diferenciální rovnice má tvar kvadratury:

$$s = -\int Q(r)\mathrm{d}r + c, \quad c = \text{konst.}$$

Převedením do původních souřadnic (x,y) dostáváme řešení diferenciální rovnice se separovanými proměnnými:

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = c. \tag{3.3}$$

Zkusme nalézt Lieovu symetrii odpovídající vektorovému poli X :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \eta(\hat{x},\hat{y}) = 0 \;\Rightarrow\; \hat{y} = y$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \xi(\hat{x},\hat{y}) = \frac{1}{P(\hat{x})} \;\Rightarrow\; \int_x^{\hat{x}} P(t)\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Tento vztah nám o symetrii obecné separované rovnice v proměnné x moc neřekne. Můžeme alespoň pomocí Taylorova rozvoje nalézt tuto symetrii do řádu chyby $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$\hat{x} = x + \varepsilon\xi(x,y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \approx x + \frac{\varepsilon}{P(x)}.$$

3.2 Separovatelná diferenciální rovnice

Definice 3.2.1. *Nechť $P_1 = P_1(x), Q_1 = Q_1(x), P_2 = P_2(y)$ a $Q_2 = Q_2(y)$ jsou spojité funkce. Potom **separovatelná diferenciální rovnice** je rovnice ve tvaru*

$$F = P_1(x)P_2(y) + Q_1(x)Q_2(y)y' = 0. \tag{3.4}$$

Poznámka. *Stejně jako u rovnice se separovanými proměnnými budeme předpokládat nenulovost funkcí $P_1(x), Q_1(x), P_2(y)$ a $Q_2(y)$.*

První prolongace vektorového pole $X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$ působící na F má v tomto případě tvar:

$$pr^{(1)}X(F) = \xi P_2(y)P_1'(x) - \xi\frac{Q_1'(x)P_1(x)P_2(y)}{Q_1(x)} + \eta P_1(x)P_2'(y) - \eta\frac{Q_2'(y)P_1(x)P_2(y)}{Q_2(y)} +$$
$$+ \left(\partial_x\eta - \partial_y\eta\frac{P_1(x)P_2(y)}{Q_1(x)Q_2(y)} + \partial_x\xi\frac{P_1(x)P_2(y)}{Q_1(x)Q_2(y)} - \partial_y\xi\left(\frac{P_1(x)P_2(y)}{Q_1(x)Q_2(y)}\right)^2\right)Q_1(x)Q_2(y)$$

$$pr^{(1)}X(F) = \xi P_2(y)P_1'(x) - \xi P_1(x)P_2(y)\frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)} + \eta P_1(x)P_2'(y) - \eta P_1(x)P_2(y)\frac{Q_2'(y)}{Q_2(y)} +$$
$$+ \partial_x\eta Q_1(x)Q_2(y) - \partial_y\eta P_1(x)P_2(y) + \partial_x\xi P_1(x)P_2(y) - \partial_y\xi\frac{P_1(x)^2P_2(y)^2}{Q_1(x)Q_2(y)}. \tag{3.5}$$

Při hledání symetrií se inspirujme diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými a předpokládejme stejnou závislost závislost funkcí ξ a η :

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x), \\ \eta &= c = \text{ konst.} \end{aligned}$$

Po dosazení do (3.5) dostáváme následující rovnici:

$$\xi(x)P_2(y)P_1'(x) - \xi(x)P_1(x)P_2(y)\frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)} + c\,P_1(x)P_2'(y) - c\,P_1(x)P_2(y)\frac{Q_2'(y)}{Q_2(y)} + \xi'(x)P_1(x)P_2(y) = 0.$$

Předpokládejme jako u rovnice se separovanými proměnnými, že $c = 0$:

$$\xi(x)P_2(y)P_1'(x) - \xi(x)P_1(x)P_2(y)\frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)} + \xi'(x)P_1(x)P_2(y) = 0.$$

Vydělme rovnici nenulovou funkcí $Q_1(x)$:

$$\begin{aligned} P_2(y)\left(\frac{P_1'(x)\xi(x)}{Q_1(x)} - \frac{P_1(x)Q_1'(x)\xi(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_1(x)\xi'(x)}{Q_1(x)}\right) &= 0 \\ P_2(y)\left(\frac{P_1(x)\xi(x)}{Q_1(x)}\right)' &= 0. \end{aligned}$$

Funkce ξ ve tvaru $\xi(x) = \frac{Q_1(x)}{P_1(x)}$ vyhovuje předešlé rovnici. Nyní můžeme pomocí takto nalezených funkcí ξ a η najít kanonické souřadnice (3.4):

$$\frac{Q_1(x)}{P_1(x)}\partial_x r = 0 \Rightarrow r = y,$$

$$s=\int\frac{1}{\xi(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Hledané kanonické souřadnice separovatelné diferenciální rovnice mají tvar:

$$(r,s)=\left(y,\int\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\mathrm{d}x\right).$$

Převedeme rovnici (3.4) do kanonických souřadnic:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=\frac{\partial_x s+y'\partial_y s}{\partial_x r+y'\partial_y r}=\frac{\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}}{y'}$$

a dosadíme za $y'=-\frac{P_1(x)P_2(y)}{Q_1(x)Q_2(y)}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}&=\frac{\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}}{-\frac{P_1(x)P_2(y)}{Q_1(x)Q_2(y)}}\\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}&=-\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}&=\frac{Q_2(r)}{P_2(r)}.\end{aligned}$$

Funkce s má tedy tvar:

$$s=-\int\frac{Q_2(r)}{P_2(r)}\mathrm{d}r+c.$$

Převedením do původních souřadnic x a y získáme řešení separovatelné diferenciální rovice.

$$\int\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\mathrm{d}y=c.$$

Při rekonstrukci Lieovy symetrie z vektorového pole X dospějeme k podobným výsledkům jako u separované rovnice:

$$\hat{y}=y$$

$$\int_x^{\hat{x}}P(t)\mathrm{d}t=\varepsilon$$

$$\hat{x}\approx x+\frac{\varepsilon}{P(x)}.$$

3.3 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 3.3.1. *Nechť $y=y(x)$ a $p(x)$, $q(x)$ jsou spojité funkce.* ***Lineární diferenciální rovnice 1. řádu*** *je rovnice ve tvaru:*

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{3.6}$$

tedy

$$F=y'+p(x)y-q(x).$$

3.3.1 Nalezení symetrií pomocí linearizované podmínky

K nalezení symetrie, resp. nalezení funkcí $\eta(x, y)$ a $\xi(x, y)$, využijeme podmínku nulovosti první prolongace vektorového pole $X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$ působícího na F, kde

$$pr^{(1)}X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \left(\partial_x\eta + y'\partial_y\eta - y'\partial_x\xi - (y')^2\partial_y\xi\right)\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Dostáváme rovnici:

$$pr^{(1)}X(F) = \xi p'(x)y - \xi q'(x) + \eta p(x) + \partial_x\eta + q(x)\partial_y\eta - p(x)y\,\partial_y\eta - \\ - q(x)\partial_x\xi - q^2(x)\partial_y\xi + 2q(x)p(x)y\partial_y\xi - p^2(x)\,y^2\partial_y\xi = 0. \quad (3.7)$$

Funkce ξ a η jsou obecně závislé na x a y. Předpokládejme nyní následující závislost těchto funkcí:

$$\begin{aligned} \xi &= c = \text{ konst.}, \\ \eta &= \eta(x). \end{aligned}$$

Poznámka. *Při hledání vektorového pole X, tedy funkcí $\xi(x, y)$ a $\eta(x, y)$, používáme ansatz, tedy předpokládáme určitý tvar neznámých funkcí. Stačí nám však pouze jedna dvojice funkcí $\xi(x, y)$ a $\eta(x, y)$ vyhovující rovnici (3.7). Některé volby závislosti funkcí k cíli nevedou a rovnice nemá řešení. Například klademe-li příliš silné předpoklady na funkce ξ a η. Nechť ξ a η jsou pouze konstanty. Po dosazení do (3.7) dostaneme následující rovnici:*

$$\xi p'(x)y - \xi q'(x) + \eta p(x) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že závislý na y je v rovnici pouze jeden člen, musí být nulový. Protože $p(x)$ je obecná funkce závislá na x, musí být $\xi = 0$. Z toho plyne, že $\eta p(x) = 0$, a tedy $\eta = 0$.

Dosazením $\xi = c$ a $\eta = \eta(x)$ do (3.7) získáme tuto rovnici:

$$c\,p'(x)y - c\,q'(x) + \eta(x)p(x) + \eta'(x) = 0.$$

Ze závislosti na y je jasné, že $c = 0$. Dostáváme tedy separovatelnou diferenciální rovnici

$$\eta(x)p(x) + \eta'(x) = 0,$$

jejímž řešením je

$$0 = \int \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} + \int p(x)\mathrm{d}x,$$

tedy

$$\eta = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Podmínky pro kanonické souřadnice jsou:

$$\begin{aligned} \xi\partial_x r + \eta\partial_y r &= 0 \Rightarrow \eta(x)\partial_y r = 0, \\ \xi\partial_x s + \eta\partial_y s &= 1 \Rightarrow \eta(x)\partial_y s = 1. \end{aligned}$$

Z rovnice pro $\partial_y r$ vyplývá, že r závisí pouze na x, zvolme tedy

$$r = x.$$

Z druhé rovnice vyplývá, že

$$s = \frac{y}{\eta(x)} = ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Kanonické souřadnice lineární diferenciální rovnice 1. řádu mají tedy následující tvar:

$$(r, s) = \left(x, ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right).$$

Nyní převedeme rovnici (3.6) do těchto souřadnic:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial_x s + y'\partial_y s}{\partial_x r + y'\partial_y r} = yp(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y'$$

a dosadíme za $y' = q(x) - yp(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = yp(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left(q(x) - yp(x)\right) = q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} = q(r)e^{\int p(r)\mathrm{d}r}.$$

Integrací získáme tvar funkce s:

$$s = \int \left(q(r)e^{\int p(\tilde{r})\mathrm{d}\tilde{r}}\right)\mathrm{d}r.$$

Převedením do původních souřadnic dostáváme řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu:

$$\begin{aligned} y\,e^{\int p(x)\mathrm{d}x} &= \int q(x)e^{\int p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}\mathrm{d}x \\ y &= \left(\int q(x)e^{\int p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}\mathrm{d}x\right)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \end{aligned}$$

Poznámka. *Předchozí volba závislosti funkcí ξ a η není jediná, která vede ke správnému řešení. Další z možností si ukážeme níže.*

Předpokládejme nyní následující závislosti funkcí ξ a η:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x), \\ \eta &= \eta(x, y). \end{aligned}$$

Dosaďme do (3.7):

$$\begin{aligned} pr^{(1)}X(F) = \xi(x)p'(x)y - \xi(x)q'(x) + \eta(x,y)p(x) + \partial_x\eta(x,y) + \\ + q(x)\partial_y\eta(x,y) - p(x)y\partial_y\eta(x,y) - q(x)\xi'(x) + p(x)y\xi'(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Všimněme si, že kromě funkce η se v rovnici objevuje pouze lineární závislost na y. Uvažujme tedy, že funkce η má také lineární závislost na y, tedy $\eta(x, y) = yf(x)$, kde f je libovolná funkce od x. Dostáváme rovnici:

$$\begin{aligned} pr^{(1)}X(F) = \xi(x)p'(x)y - \xi(x)q'(x) + yf(x)p(x) + yf'(x) + \\ + q(x)yf(x) - p(x)yf(x) - q(x)\xi'(x) + p(x)y\xi'(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin y dostaneme soustavu dvou rovnic pro neznámé funkce ξ a f:

$$\xi(x)p'(x) + \xi'(x)\,p(x) = f'(x)p(x), \tag{3.10}$$
$$\xi(x)q'(x) + \xi'(x)\,q(x) = f(x)q(x). \tag{3.11}$$

Nejprve se zabývejme rovnicí (3.10):

$$\begin{aligned}
\xi(x)p'(x)+\xi'(x)\,p(x) &= -f'(x)p(x)\\
(\xi p)'(x)+f'(x) &= 0\\
\xi(x)p(x)+f(x) &= c = \text{ konst.}\\
f(x) &= c-\xi(x)p(x).
\end{aligned}$$

Nyní dosaďme za $f(x)$ do rovnice (3.11) a předpokládejme, že $c=0$:

$$\begin{aligned}
\xi(x)q'(x)+\partial_x\xi\,q(x) &= \xi(x)p(x)q(x)\\
\xi(x)\left(\frac{q'(x)}{q(x)}+p(x)\right)+\partial_x\xi(x) &= 0\\
\int\left(\frac{q'(x)}{q(x)}+p(x)\right)\mathrm{d}x &= -\int\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\\
\ln q(x)+\int p(x)\mathrm{d}x &= -\ln\xi(x)\\
q(x)\xi(x) &= e^{-\int p\mathrm{d}x}\\
\xi(x) &= \frac{1}{q(x)}\,e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

Po dosazení $f(x)=-\xi(x)p(x)$ dostaneme předpis pro $\eta(x,y)$:

$$\eta(x,y) \;=\; -y\frac{p(x)}{q(x)}\,e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Vektorové pole X má tedy následující tvar:

$$X=\left(\frac{1}{q(x)}\,e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial}{\partial x}-\left(y\frac{p(x)}{q(x)}\,e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Nyní můžeme pomocí funkcí ξ a η najít kanonické souřadnice diferenciální rovnice (3.6). Využijeme vztahů, které jsme získali v 1. kapitole užitím metody charakteristik na podmínky kanonických souřadnic:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\eta}{\xi},\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y\,p(x).
\end{aligned}$$

Řešením této separovatelné diferenciální rovnice je

$$\ln y=-\int p(x)\mathrm{d}x+c,$$

kde c je hledaná kanonická souřadnice r:

$$r=ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Podmínka pro kanonickou souřadnici s:

$$\begin{aligned}
s &= \int\frac{1}{\xi(x)}dx\\
s &= \int q(x)e^{\int p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Tímto jsme získali kanonické souřadnice

$$(r,s) = \left(y e^{\int p(x)\mathrm{d}x}, \int q(x)\, e^{\int p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}\, \mathrm{d}x \right),$$

do nichž převedeme diferenciální rovnici (3.6):

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial_x s + y'\partial_y s}{\partial_x r + y'\partial_y r} = \frac{q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}}{yp(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + y'e^{\int p(x)\mathrm{d}x}}$$

a dosadíme $y' = -yp(x) + q(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{q(x)}{yp(x) + q(x) - yp(x)} = 1 \Rightarrow s = r.$$

Převedením do původních souřadnic x a y opět dostaneme předpis pro řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu:

$$\begin{aligned} y\, e^{\int p(x)\mathrm{d}x} &= \int q(x)e^{\int p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}\mathrm{d}x \\ y &= \left(\int q(x)e^{\int p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}\mathrm{d}x \right) e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \end{aligned}$$

3.3.2 Využití lineárnosti diferenciální rovnice k nalezení symetrií

V případě lineární diferenciální rovnice 1. řádu jsme schopni symetrii odhalit bez hledání příslušného vektorového pole X. Vyhneme se tím hledání funkcí $\xi(x,y)$ a $\eta(x,y)$ pomocí nulovosti první prolongace tohoto vektorového pole působící na diferenciální rovnici. Vzhledem k tomu, že se jedná o lineární diferenciální rovnici 1. řádu, tedy o rovnici lineární v proměnné y, předpokládejme novou funkci $\tilde{y}$ jako lineární kombinaci původní funkce y a nějaké nové funkce h, konkrétně $\tilde{y}(x) = y(x) + h(x)$. Podívejme se, jak vypadá derivace této nové funkce:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(y(x) + h(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Transformaci dosadíme do (3.6):

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(x) + p(x)\tilde{y}(x) &= q(x) \\ y'(x) + h'(x) + p(x)y + p(x)h(x) &= q(x). \end{aligned}$$

Z podmínky symetrie dostáváme podmínku pro $h(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} = p(x)h(x).$$

To znamená, že $h(x)$ musí být homogenním řešením rovnice (3.6), tedy této rovnice bez pravé strany. Jelikož se jedná o separovanou diferenciální rovnici, jsme ji schopni vyřešit:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} &= p(x)h(x) \\ \int \frac{\mathrm{d}h}{h} &= \int p(x)\mathrm{d}x \\ \ln h &= \int p(x)\mathrm{d}x \\ h(x) &= e^{-\int p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}. \end{aligned}$$

Ve skutečnosti funkce $h(x)$ může být libovolným ε násobkem funkce $e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$, protože přičtením libovolného počtu homogenních řešení k původní funkci bude podmínka symetrie splněna. $\tilde{y}(x)$ má tedy obecný tvar:

$$\tilde{y} = y + \varepsilon e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Jsme tedy schopni zjistit tvar příslušného vektorového pole X:

$$\begin{aligned}
(\tilde{x}, \tilde{y}) &= (x, y + \varepsilon e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}) \\
\xi &= \left.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \\
\eta &= \left.\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = h(x) = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \\
X &= e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

3.4 Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 3.4.1. *Funkci $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazveme **homogenní funkcí stupně** k (se stupněm homogenity k), pokud platí*

$$(\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}) \Big(F(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big), \textit{kde } k \in \mathbb{R}.$$

Definice 3.4.2. *Nechť $P = P(x, y)$ a $Q = Q(x, y)$ jsou homogenní funkce stupně k. Pak **homogenní diferenciální rovnicí 1. řádu stupně** k nazveme rovnici tvaru*

$$F = P(x, y) + Q(x, y)y' = 0. \tag{3.12}$$

Věta 3.4.3 (Eulerova věta o homogenní funkci)**.** *Buď $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x)$ reálná diferencovatelná funkce. Potom funkce F je homogenní stupně k právě tehdy, když $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} x_i = kF(x)$.*

V tomto případě není nutné hledat symetrii diferenciální rovnice pomocí nulovosti první prolongace působící na F. Díky homogenitě funkcí $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ stupně k má rovnice (3.12) symetrii škálování v x a y. Nyní ověříme tuto skutečnost. Předpokládejme následující transformaci souřadnic:

$$\begin{aligned}
\tilde{y} &= ty, \\
\tilde{x} &= tx,
\end{aligned}$$

kde $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Napišme si funkční identitu:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(\tilde{x}) &= ty(x) \\
\tilde{y}(\tilde{x}(x)) &= ty(x) \\
\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tilde{x}}\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}x} &= t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \\
\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}x} &= t.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy následující rovnost pro derivace:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tilde{x}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Nyní se podíváme, jak vypadají funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ v nových souřadnicích:

$$\begin{aligned}
P(\tilde{x},\tilde{y}) &= P(tx,ty) = t^k P(x,y), \\
Q(\tilde{x},\tilde{y}) &= Q(tx,ty) = t^k Q(x,y).
\end{aligned}$$

Vyjádříme rovnici (3.12) v nových souřadnicích:

$$P(\tilde{x},\tilde{y}) + Q(\tilde{x},\tilde{y})\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tilde{x}} = t^k P(x,y) + t^k Q(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = t^k\left(P(x,y) + Q(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

Vidíme tedy, že škálováním x a y ve stejném poměru se homogenní diferenciální rovnice nezmění:

$$P(\tilde{x},\tilde{y}) + Q(\tilde{x},\tilde{y})\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tilde{x}} = 0 \Leftrightarrow P(x,y) + Q(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Lieova symetrie škálování v obou argumentech má tvar $(\tilde{x},\tilde{y}) = (e^{\varepsilon}x, e^{\varepsilon}y)$. Tvar vektorového pole X získáme užitím vztahů pro $\xi(x,y), \eta(x,y)$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \xi(x,y) \text{ a } \left.\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \eta(x,y) \Rightarrow X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Pomocí funkcí ξ a η získáme kanonické souřadnice rovnice (3.12):

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} \\
y &= Kx = rx \\
r &= \frac{y}{x}, \\
s &= \int \frac{dx}{\xi} \\
s &= \int \frac{dx}{x} \\
s &= \ln x.
\end{aligned}$$

Kanonické souřadnice tedy mají následující tvar:

$$(r,s) = \left(\frac{y}{x}, \ln x\right).$$

Rovnici (3.12) převedeme do nových souřadnic:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + s_y}{r_x + y' r_y} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}},$$

dosadíme za původní proměnné $x = e^s$ a $y = re^s$:

$$\frac{ds}{dr} = -\frac{1}{r + \frac{P(e^s, re^s)}{Q(e^s, re^s)}}$$

a využijeme homogenity funkcí $P(x,y)$ a $Q(x,y)$:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dr} &= -\frac{1}{r+\frac{P(1,r)}{Q(1,r)}}\\ s &= -\int \frac{dr}{r+\frac{P(1,r)}{Q(1,r)}}+c,\end{aligned}$$

kde $c =$ konst. Vyřešením následují kvadratury a převedením do původních souřadnic (x,y) dostaneme řešení homogenní diferenciální rovnice 1. řádu.
Dosazením za funkce ξ a η ověříme, že první prolongace vektorového pole X působícího na F je skutečně rovna nule. První prolongace vektorového pole působí na (3.12) následovně:

$$pr^{(1)}X(F) = \xi\partial_x P(x,y) - \xi\frac{\partial_x Q(x,y)}{Q(x,y)}P(x,y) + \eta\partial_y P(x,y) + \eta\partial_y P(x,y) - \eta\frac{\partial_y Q(x,y)}{Q(x,y)}P(x,y) + \\ + \partial_x\eta Q(x,y) - \partial_y\eta P(x,y) + \partial_x\xi P(x,y) - \partial_y\xi\frac{P(x,y)^2}{Q(x.y)}.$$

Dosadíme za funkce $\xi = x$ a $\eta = y$ a využijeme Eulerovu větu o homogenní funkci:

$$\begin{aligned} pr^{(1)}X(F) &= x\partial_x P(x,y) - x\frac{\partial_x Q(x,y)}{Q(x,y)}P(x,y) + y\partial_y P(x,y) + y\partial_y P(x,y) - y\frac{\partial_y Q(x,y)}{Q(x,y)}P(x,y)\\ pr^{(1)}X(F) &= P(x,y)\left(\frac{\partial_x P(x,y)x + \partial_y P(x,y)y}{P(x,y)} - \frac{\partial_x Q(x,y)x + \partial_y Q(x,y)y}{Q(x,y)}\right)\\ pr^{(1)}X(F) &= P(x,y)\left(k\frac{P(x,y)}{P(x,y)} - k\frac{Q(x,y)}{Q(x,y)}\right) = 0.\end{aligned}$$

Lieovu symetrii škálování jsme tedy opět mohli získat z nulovosti $pr^{(1)}X(F)$, je ale vidět, že v tomto případě by to bylo velmi obtížné. Naopak symetrii bylo snadné odhalit přímo z předpisu diferenciální rovnice.

3.5 Bernoulliho diferenciální rovnice

Definice 3.5.1. *Nechť $p = p(x)$ a $q = q(x)$ jsou spojité funkce a $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Potom* ***Bernoulliho diferenciální rovnici 1. řádu*** *nazveme rovnici ve tvaru*

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{3.13}$$

resp.

$$F = y' + p(x)y - q(x)y^{\alpha}.$$

Opět si nejprve napíšeme, jak působí první prolongace vektorového pole X na funkci F a položíme ji rovnou 0:

$$pr^{(1)}X(F) = \xi p'(x)y - \xi q'(x)y^{\alpha} + \eta p(x) - \eta\alpha q(x)y^{\alpha-1} + \partial_x\eta - \partial_y\eta p(x)y + \partial_y\eta q(x)y^{\alpha} + \\ + \partial_x\xi p(x)y - \partial_x\xi q(x)y^{\alpha} - \partial_y\xi p^2(x)y^2 + \partial_y\xi p(x)q(x)y^{\alpha+1} - \partial_y\xi q^2(x)y^{2\alpha} = 0. \tag{3.14}$$

Bernoulliho diferenciální rovnice je tvarem podobná lineární diferenciální rovnici 1. řádu, zkusme tedy stejně jako u ní předpokládat následující závislost funkcí ξ a η :

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x),\\ \eta &= \eta(x,y).\end{aligned}$$

Poznámka. *U LDR 1. řádu se také jako správná ukázala následující volba funkcí ξ a η :*

$$\begin{aligned}\xi &= c = \textit{konst.},\\ \eta &= \eta(x).\end{aligned}$$

Dosaďme funkce s těmito závislostmi do rovnice (3.14)*:*

$$pr^{(1)}X(F) = cp'(x)y - cq'(x)y^{\alpha} + \eta(x)p(x) - \eta(x)\alpha q(x)y^{\alpha-1} + \partial_x\eta(x) = 0.$$

Porovnáním členů u různých mocnin y zjistíme, že c i $\eta(x)$ se musí rovnat 0.

Předpokládejme, že η má tvar:

$$\eta(x,y) = yf(x),$$

a dosaďme za obě funkce do (3.14):

$$\xi(x)p'(x)y - \xi(x)q'(x)y^{\alpha} + f(x)p(x)y - \alpha f(x)q(x)y^{\alpha} + f'(x) - f(x)p(x)y + f(x)q(x)y^{\alpha} + \xi'(x)p(x)y -$$
$$-\xi'(x)q(x)y^{\alpha} = \xi(x)p'(x)y - \xi(x)q'(x)y^{\alpha} - \alpha f(x)q(x)y^{\alpha} + f'(x) + f(x)q(x)y^{\alpha} + \xi'(x)p(x)y - \xi'(x)q(x)y^{\alpha} = 0.$$

Nyní porovnáme členy u různých mocnin funkce y:

- Členy u y :

$$\begin{aligned}\xi(x)p'(x) + f'(x) + p(x)\xi'(x) &= 0\\ (\xi(x)p(x))' + f'(x) &= 0\\ \xi(x)p(x) + f(x) &= K = \text{ konst.}\end{aligned}$$

  zvolme $K = 0$:

$$f(x) = -\xi(x)p(x).$$

- Členy u y^{α} :

$$\begin{aligned}-q'(x)\xi(x) + (1-\alpha)q(x)f(x) - q(x)\xi'(x) &= 0\\ -q'(x)\xi(x) - q(x)\xi'(x) - (1-\alpha)q(x)p(x)\xi(x) &= 0\\ \left(q'(x) + (1-\alpha)q(x)p(x)\right)\xi(x) + q(x)\xi'(x) &= 0\\ \xi'(x) + \left(\frac{q'(x)}{q(x)} + (1-\alpha)p(x)\right)\xi(x) &= 0\\ \int\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} + \int\left(\frac{q'(x)}{q(x)} + (1-\alpha)p(x)\right)\mathrm{d}x &= 0\\ \ln\left(\xi(x)q(x)\right) + \int(1-\alpha)p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x} &= 0\\ \frac{1}{q(x)}e^{-\int(1-\alpha)p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}} &= \xi(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta(x,y) = yf(x) &= -yp(x)\xi(x)\\ -y\frac{p(x)}{q(x)}e^{-\int(1-\alpha)p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}} &= \eta(x,y).\end{aligned}$$

Nyní nalezneme kanonické souřadnice Bernoulliho diferenciální rovnice:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\eta}{\xi} = -yp(x) \\
\ln y &= -\int p(x)\mathrm{d}x \\
y &= re^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \\
r &= ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}.
\end{aligned}
$$

$$s = \int \frac{\mathrm{d}x}{\xi} = \int q(x)e^{\int(1-\alpha)p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}\mathrm{d}x.$$

Kanonické souřadnice tedy mají následující tvar:

$$(r, s) = \left(ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}, \int q(x)e^{\left(\int(1-\alpha)p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}\right)}\right).$$

Tvar rovnice (3.13) v kanonických souřadnicích je následující:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{s_x + s_y}{r_x + y' r_y} \\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{q(x)\int q(x)e^{\int(1-\alpha)p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}\mathrm{d}x}{yp(x)e^{\int p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}} + y'e^{\int p(x)\mathrm{d}x}} \\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{q(x)\left(e^{\int p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}\right)^{(1-\alpha)}}{y^{\alpha}q(x)e^{\int p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}} \\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \left(ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right)^{-\alpha} \\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= r^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Nyní tuto rovnici můžeme zintegrovat a poté převést do původních souřadnic. Tím získáme obecné řešení Bernoulliho diferenciální rovnice 1. řádu:

$$
\begin{aligned}
s &= \int r^{-\alpha}\mathrm{d}r = \frac{1}{1-\alpha}r^{1-\alpha} \\
\int q(x)e^{\int(1-\alpha)p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{1-\alpha}y^{1-\alpha}e^{\int(1-\alpha)p(x)\mathrm{d}x} \\
y^{1-\alpha} &= (1-\alpha)\left(\int q(x)e^{\int(1-\alpha)p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}\mathrm{d}x\right)e^{-\int(1-\alpha)p(x)\mathrm{d}x}.
\end{aligned}
$$

V případě Bernoulliho diferenciální rovnice nejsme schopni obecně získat z vektorového pole přesný tvar Lieovy symetrie, pouze aproximaci s chybou do řádu $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$\hat{x} \approx x + \frac{\varepsilon}{q(x)}e^{-\int(1-\alpha)p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}},$$

$$\hat{y} \approx y - \varepsilon\frac{yp(x)}{q(x)}e^{-\int(1-\alpha)p(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}.$$

3.6 Diferenciální rovnice tvaru $y'(x) = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

V této části se budeme zabývat diferenciální rovnicí ve tvaru

$$F = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right) - y'(x). \tag{3.15}$$

Poznámka. *Při nulovosti některých z koeficientů proměnné funkce* $f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ *dostaneme tvar rovnice, který už umíme vyřešit:*

1. *Nechť* $a = b = \alpha = \beta = 0:$
$$y'(x) = f\left(\frac{c}{\gamma}\right).$$
Integrací dostaneme tvar řešení:
$$y(x) = f\left(\frac{c}{\gamma}\right)x + K,$$
kde $K = konst.$

2. *Nechť* $b = \beta = 0:$
$$y'(x) = f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right).$$
Integrací opět dostaneme tvar řešení:
$$y'(x) = \int f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right)\mathrm{d}x.$$

3. *Nechť* $a = \alpha = 0:$
$$y'(x) = f\left(\frac{by+c}{\beta y+\gamma}\right).$$
Dostali jsme separovatelnou rovnici, kterou už umíme vyřešit.

4. *Nechť* $c = \gamma = 0:$
$$y'(x) = f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right).$$
Dostali jsme homogenní diferenciální rovnici stupně 0, jejíž řešení už také známe.

Tvar první prolongace vektorového pole X působícího na (3.15) má následující tvar:

$$pr^{(1)}X(F) = \left(\frac{a(\alpha x+\beta y+\gamma) - \alpha(ax+by+c)}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right) f'\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\xi +$$
$$+\left(\frac{b(\alpha x+\beta y+\gamma) - \beta(ax+by+c)}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right) f'\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\eta - \partial_x\eta - f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\partial_y\eta +$$
$$+ f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\partial_x\xi - f^2\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\partial_y\xi = 0$$

$$pr^{(1)}X(F) = \left(\frac{(a\beta-\alpha b)y + a\gamma - \alpha c}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right) f'\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\xi + \\ + \left(\frac{(\alpha b-a\beta)x + b\gamma - \beta c}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right) f'\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\eta - \partial_x\eta - f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\partial_y\eta + \\ + f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\partial_x\xi - f^2\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\partial_y\xi = 0. \quad (3.16)$$

Uvažujme nyní dvě situace:

1. $\alpha b - a\beta = 0$

   V tomto případě má rovnice (3.16) tvar:

$$pr^{(1)}X(F) = \left(\frac{a\gamma - \alpha c}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right) f'\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\xi + \\ + \left(\frac{b\gamma - \beta c}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right) f'\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\eta - \partial_x\eta - f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\partial_y\eta + \\ + f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\partial_x\xi - f^2\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\partial_y\xi = 0.$$

   Předpokládejme, že $\xi(x,y) = \xi = konst.$ a $\eta(x,y) = \eta = konst.$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a\gamma - \alpha c}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right) f'\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\xi + \left(\frac{b\gamma - \beta c}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right) f'\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\eta &= 0 \\ \frac{\xi f'(a\gamma-\alpha c) + \eta f'(b\gamma - \beta c)}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2} &= 0. \end{aligned}$$

   Této rovnici vyhovuje následující volba ξ a η :

$$\begin{aligned} \xi &= 1, \\ \eta &= -\frac{a\gamma-\alpha c}{b\gamma-\beta c}. \end{aligned}$$

   S pomocí těchto funkcí nyní nalezneme kanonické souřadnice této diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \int\left(\frac{\eta}{\xi}\right)\mathrm{d}x = -\int\left(\frac{a\gamma-\alpha c}{b\gamma-\beta c}\right)\mathrm{d}x \\ y &= -\left(\frac{a\gamma-\alpha c}{b\gamma-\beta c}\right)x + K \\ r &= y(b\gamma-\beta c) + x(a\gamma - \alpha c), \\ s &= \int\frac{\mathrm{d}x}{\xi} = x, \end{aligned}$$

$$(r,s) = \left(y(b\gamma-\beta c) + x(a\gamma-\alpha c),\ x\right).$$

   Nyní převedeme diferenciální rovnici do kanonických souřadnic:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{s_x + s_y}{r_x + y' r_y} \\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{1}{(a\gamma-\alpha c) + (b\gamma-\beta c) f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)}. \end{aligned}$$

Vyjádříme zlomek $\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}$ v kanonických souřadnicích:

$$\begin{aligned}\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}&=\frac{as+\left(\frac{b}{b\gamma-\beta c}\right)r-\left(\frac{a\gamma-\alpha c}{b\gamma-\beta c}\right)bs+c}{\alpha s+\left(\frac{\beta}{b\gamma-\beta c}\right)r-\left(\frac{a\gamma-\alpha c}{b\gamma-\beta c}\right)\beta s+\gamma}=\\&=\frac{(ab\gamma-a\beta c-ba\gamma+\alpha bc)s+br+c(b\gamma-\beta c)}{(\alpha b\gamma-\alpha\beta c-a\beta\gamma+\alpha\beta c)s+\beta r+\gamma(b\gamma-\beta c)}=\\&=\frac{(\alpha b-a\beta)cs+br+c(b\gamma-\beta c)}{(\alpha b-a\beta)\gamma s+\beta r+\gamma(\alpha b-a\beta)}=\frac{br+c(b\gamma-\beta c)}{\beta r+\gamma(\alpha b-a\beta)}.\end{aligned}$$

Diferenciální rovnice v nových souřadnicích má tvar:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=\frac{1}{(a\gamma-\alpha c)+(b\gamma-\beta c)f\left(\frac{br+c(b\gamma-\beta c)}{\beta r+\gamma(\alpha b-a\beta)}\right)}.$$

Obecné řešení této diferenciální rovnice v kanonických souřadnicích má tvar:

$$s=\int\frac{\mathrm{d}r}{(a\gamma-\alpha c)+(b\gamma-\beta c)f\left(\frac{br+c(b\gamma-\beta c)}{\beta r+\gamma(\alpha b-a\beta)}\right)}.$$

Jsme také schopni nalézt příslušnou Lieovu symetrii k vektorovému poli X :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\varepsilon}=\eta(\hat{x},\hat{y})=-\frac{a\gamma-\alpha c}{b\gamma-\beta c}\Rightarrow\hat{y}=-\frac{a\gamma-\alpha c}{b\gamma-\beta c}\varepsilon+y,$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\varepsilon}=\xi(\hat{x},\hat{y})=1\Rightarrow\hat{x}=\varepsilon+x.$$

2. $\alpha b-a\beta\neq 0$

   V tomto případě se nám nijak rovnice (3.16) nezjednoduší. Zvolíme-li funkce ξ a η jako konstanty, nepodaří se nám splnit podmínka nulovosti první prolongace vektorového pole působícího na F. Předpokládejme tedy $\xi=\xi(x)$ a $\eta=\eta(y)$. Rovnice (3.16) má tvar:

$$\begin{aligned}pr^{(1)}X(F)=&\left(\frac{(a\beta-\alpha b)y+a\gamma-\alpha c}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right)f'\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\xi(x)+\\&+\left(\frac{(\alpha b-a\beta)x+b\gamma-\beta c}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right)f'\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\eta(y)-f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\eta'(y)+\\&+f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\xi'(x)=0.\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u $f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ dostaneme podmínku pro první derivace funkcí $\xi(x)$ a $\eta(y)$:

$$\frac{\mathrm{d}\xi(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\eta(y)}{\mathrm{d}y}.$$

Z této podmínky je vidět, že obě funkce závisí na své proměnné lineárně:

$$\begin{aligned}\xi(x)&=x+K,\\\eta(y)&=y+L,\end{aligned}$$

kde $K, L = \text{konst}$. Funkce v tomto tvaru dosadíme do (3.16):

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(a\beta-\alpha b)y+a\gamma-\alpha c}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right) f'\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)(x+K)+\\
&\qquad+\left(\frac{(\alpha b-a\beta)x+b\gamma-\beta c}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right) f'\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)(y+L)=\\
&\quad=\left(\frac{(a\beta-\alpha b)xy+K(a\beta-\alpha b)y+(a\gamma-\alpha c)x+K(a\gamma-\alpha c)}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right)f'+\\
&\quad+\left(\frac{(\alpha b-a\beta)xy+L(\alpha b-a\beta)x+(b\gamma-\beta c)y+L(b\gamma-\beta c)}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right)f'=0
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\left(K(a\beta-\alpha b)+b\gamma-\beta c\right)y+\left(L(\alpha b-a\beta)+a\gamma-\alpha c\right)x+K(a\gamma-\alpha c)+L(b\gamma-\beta c)}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}\right)f'=0.$$

Z této rovnice získáme konstanty K a L a tím i tvar funkcí $\xi(x)$ a $\eta(y)$:

$$\begin{aligned}
\xi(x) &= x+\frac{b\gamma-\beta c}{\alpha b-a\beta},\\
\eta(y) &= y-\frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha b-a\beta}.
\end{aligned}$$

Nyní můžeme nalézt kanonické souřadnice této diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\eta(y)}{\xi(x)}=\frac{y-\frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha b-a\beta}}{x+\frac{b\gamma-\beta c}{\alpha b-a\beta}}=\frac{(\alpha b-a\beta)y+\alpha c-a\gamma}{(\alpha b-a\beta)x+b\gamma-\beta c}\\
0 &= -\ln\left((\alpha b-a\beta)y+\alpha c-a\gamma\right)+\ln\left((\alpha b-a\beta)x+b\gamma-\beta c\right)+D\\
r &= \frac{(\alpha b-a\beta)y+\alpha c-a\gamma}{(\alpha b-a\beta)x+b\gamma-\beta c},\\
s &= \int\frac{\mathrm{d}x}{\xi(x)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\left(\frac{b\gamma-\beta c}{\alpha b-a\beta}\right)}=\ln\left(x+\frac{b\gamma-\beta c}{\alpha b-a\beta}\right).
\end{aligned}$$

Rovnici (3.15) vyjádříme v nových souřadnicích:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{s_x+s_y}{r_x+y'r_y}\\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{\frac{\alpha b-a\beta}{(\alpha b-a\beta)x+b\gamma-\beta c}}{\left(\frac{(\alpha b-a\beta)y+\alpha c-a\gamma}{((\alpha b-a\beta)x+b\gamma-\beta c)^2}\right)(\alpha b-a\beta)+\frac{(\alpha b-a\beta)}{b\gamma-\beta c}y'}=\frac{1}{r+f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)}.
\end{aligned}$$

Nyní musíme funkci $f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ vyjádřit v kanonických souřadnicích. K tomu využijeme inverzních vztahů pro původní souřadnice:

$$\begin{aligned}
x &= e^s+\frac{\beta c-b\gamma}{\alpha b-a\beta},\\
y &= re^s+\frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha b-a\beta},
\end{aligned}$$

$$\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma} = \frac{ae^s - \frac{a(b\gamma-\beta c)}{(\alpha b-a\beta)} + b\,re^s + \frac{b(a\gamma-\alpha c)}{\alpha b-a\beta} + c}{\alpha e^s - \frac{\alpha(b\gamma-\beta c)}{(\alpha b-a\beta)} + \beta\,re^s + \frac{\beta(a\gamma-\alpha c)}{\alpha b-a\beta} + \gamma} =$$

$$= \frac{a(\alpha b-a\beta)e^s - a(b\gamma-\beta c) + b(\alpha b-a\beta)re^s + b(a\gamma-\alpha c) + c(\alpha b-a\beta)}{\alpha(\alpha b-a\beta)e^s - \alpha(b\gamma-\beta c) + \beta(\alpha b-a\beta)re^s + \beta(a\gamma-\alpha c) + \gamma(\alpha b-a\beta)} =$$

$$= \frac{a(\alpha b-a\beta)e^s + b(\alpha b-a\beta)re^s}{\alpha(\alpha b-a\beta)e^s + \beta(\alpha b-a\beta)re^s} = \frac{a(\alpha b-a\beta) + b(\alpha b-a\beta)r}{\alpha(\alpha b-a\beta) + \beta(\alpha b-a\beta)r}.$$

Obecné řešení rovnice (3.15) má v kanonických souřadnicích tvar:

$$s = \int \frac{\mathrm{d}r}{r + f\left(\frac{a(\alpha b-a\beta)+b(\alpha b-a\beta)r}{\alpha(\alpha b-a\beta)+\beta(\alpha b-a\beta)r}\right)}.$$

Zkusme opět nalézt příslušnou Lieovu symetrii:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \eta(\hat{x},\hat{y}) = \hat{y} - \frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha b-a\beta} \Rightarrow \ln\left(\hat{y} - \frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha b-a\beta}\right) = \varepsilon + L$$

$$\hat{y} - \frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha b-a\beta} = e^{\varepsilon} + L$$

$$\hat{y}(0) - \frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha b-a\beta} = y - \frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha b-a\beta} = e^L \Rightarrow \hat{y} = \left(y - \frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha b-a\beta}\right)e^{\varepsilon} + \frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha b-a\beta},$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \xi(\hat{x},\hat{y}) = \hat{x} + \frac{b\gamma-\beta c}{\alpha b-a\beta} \Rightarrow \ln\left(\hat{x} + \frac{b\gamma-\beta c}{\alpha b-a\beta}\right) = \varepsilon + K$$

$$\hat{x} + \frac{b\gamma-\beta c}{\alpha b-a\beta} = e^{\varepsilon+K}$$

$$\hat{x}(0) + \frac{b\gamma-\beta c}{\alpha b-a\beta} = x + \frac{b\gamma-\beta c}{\alpha b-a\beta} = e^K \Rightarrow \hat{x} = \left(x + \frac{b\gamma-\beta c}{\alpha b-a\beta}\right)e^{\varepsilon} - \frac{b\gamma-\beta c}{\alpha b-a\beta}.$$

3.7 Riccatiho diferenciální rovnice

Definice 3.7.1. *Nechť funkce $a_0(x)$, $a_1(x)$ a $a_2(x)$ jsou spojité.* ***Riccatiho diferenciální rovnice*** *je rovnice ve tvaru:*

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2, \tag{3.17}$$

tedy

$$F = y' - a_0(x) - a_1(x)y - a_2(x)y^2.$$

První prolongace vektorového pole X působící na F má tvar:

$$pr^{(1)}X(F) = -a_0'(x)\xi - a_1(x)'y\xi - a_2(x)'y^2\xi - a_1(x)\eta - 2a_2(x)y\eta + \partial_x\eta + \left(a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2\right)\partial_y\eta -$$
$$- \left(a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2\right)\partial_x\xi - \left(a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2\right)^2\partial_y\xi = 0 \quad (3.18)$$

Pro obecnou Riccatiho diferenciální rovnici nelze jednoduše nalézt funkce ξ a η. Podle článku [4] má však každá Riccatiho rovnice symetrii ve tvaru

$$\xi = F(x),$$
$$\eta = P(x)y + Q(x).$$

Dosazením do (3.18) získáváme opět rovnici obsahující funkci y v kvadrátu a tedy obdobně složitý problém. Ukážeme ale, že ze znalosti konkrétního řešení Riccatiho rovnice jsme schopni nalézt její symetrii.
V článku [4] je rovněž ukázáno, že existuje několik typů Riccatiho rovnice, které jsou obecně řešitelné. Toto ilustrujeme na konkrétním příkladě.

3.7.1 Získání symetrie Riccatiho rovnice ze znalosti jednoho jejího konkrétního řešení

Uvažujme, že máme Riccatiho diferenciální rovnici a funkce $y_1(x)$ tuto rovnici řeší. Zavedeme si nové souřadnice u a t:

$$(u,t) = \left(x, \frac{1}{y - y_1(x)}\right).$$

Převedením rovnice (3.17) do těchto souřadnic získáme lineární diferenciální rovnici 1. řádu ve tvaru:

$$\dot{u}(t) + (a_1(t) + 2a_2(t)y_1(t))\, u(t) = -a_2(t).$$

Tvar kanonických souřadnic pro LDR 1. řádu již známe:

$$(r,s) = \left(t, ue^{\int p(t)\mathrm{d}t}\right) = \left(t, ue^{\int (a_1(t)+2a_2(t)y_1(t))\mathrm{d}t}\right).$$

Převedením do původních souřadnic (x, y) získáváme předpis pro kanonické souřadnice původní rovnice:

$$(r,s) = \left(x, \frac{1}{y - y_1(x)} e^{\int (a_1(x)+2a_2(x)y_1(x))\mathrm{d}x}\right).$$

Užitím podmínek pro kanonické rovnice zjistíme tvar příslušného vektorového pole X určující symetrii Riccatiho rovnice:

$$\begin{aligned} \xi r_x + \eta r_y &= 0, \\ \xi s_x + \eta s_y &= 1. \end{aligned}$$

Dosadíme za r a s:

$$\begin{aligned} \xi(x,y) &= 0, \\ \eta\left(-\frac{e^{\int (a_1(x)+2a_2(x)y_1(x))\mathrm{d}x}}{y - y_1(x)^2}\right) &= 1 \\ (y - y_1(x))^2 e^{-\int (a_1(x)+2a_2(x)y_1(x))\mathrm{d}x} &= \eta(x,y). \end{aligned}$$

Vektorové pole X má tvar:

$$X = \left((y - y_1(x))^2 e^{-\int (a_1(x)+2a_2(x)y_1(x))\mathrm{d}x}\right) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Tvar funkce $\hat{y}$, která také řeší rovnici (3.17) je:

$$\hat{y} = \frac{e^{\int (a_1(x)+2a_2(x)y_1(x))\mathrm{d}x}}{\varepsilon + (y - y_1(x))\, e^{\int (a_1(x)+2a_2(x)y_1(x))\mathrm{d}x}}.$$

Snadno lze ověřit, že skutečně $\eta = \frac{\partial \hat{y}}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$.

Příklad. *Máme následující Riccatiho diferenciální rovnici:*

$$y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^3}y^2. \tag{3.19}$$

Nejprve spočítáme, jak působí první prolongace vektorového pole X na (3.19):

$$pr^{(1)}X(F) = \xi\frac{1}{x^2} + \xi\frac{y}{x^2} + 3\xi\frac{y^2}{x^4} - \eta\frac{1}{x} - 2\eta\frac{y}{x^3} + \partial_x\eta + \partial_y\eta\left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right) -$$
$$- \partial_x\xi\left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right) - \partial_y\xi\left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right)^2 = 0. \tag{3.20}$$

Předpokládejme následující tvar funkcí $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ a dosaďme do (3.20):

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x), \\ \eta &= yf(x), \end{aligned}$$

$$pr^{(1)}X(F) = \frac{\xi(x)}{x^2} + \frac{\xi(x)}{x^2}y + 3\frac{\xi(x)}{x^4}y^2 - \frac{f(x)}{x}y - 2\frac{f(x)}{x^3}y^2 + f'(x)y +$$
$$+ \frac{f(x)}{x} + \frac{f(x)}{x}y + +\frac{f(x)}{x^3}y^2 - \frac{\xi'(x)}{x} - \frac{\xi'(x)}{x}y - \frac{\xi'(x)}{x^3}y^2 = 0.$$

Nyní porovnáme koeficienty u různých mocnin funkce y:

- $y^2 : 3\frac{\xi(x)}{x^4} - \frac{f(x)}{x^3} - \frac{\xi'(x)}{x^3} = \frac{1}{x^4}\left(3\xi(x) - xf(x) - x\xi'(x)\right) = 0 \Rightarrow 3\xi(x) - xf(x) - x\xi'(x) = 0,$
- $y : \frac{\xi(x)}{x^2} + f'(x) - \frac{\xi'(x)}{x} = \frac{1}{x^2}\big(\xi(x) + x^2f'(x) - x\xi'(x)\big) = 0 \Rightarrow \xi(x) + x^2f'(x) - x\xi'(x) = 0,$
- $y^0 : \frac{\xi(x)}{x^2} + \frac{f(x)}{x} - \frac{\xi'(x)}{x} = \frac{1}{x^2}\left(\xi(x) + xf(x) - x\xi'(x)\right) = 0 \Rightarrow \xi(x) + xf(x) - x\xi'(x) = 0.$

Sečteme první a třetí rovnici:

$$\begin{aligned} 4\xi(x) - 2x\xi'(x) &= 0 \\ \xi'(x) &= 2\frac{\xi(x)}{x} \\ \xi(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Nyní za $\xi(x)$ dosadíme do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2f'(x) - 2x^2 &= 0 \\ f'(x) &= 1 \\ f(x) &= x + c, \end{aligned}$$

kde $c =$ konst. Aby funkce $f(x)$ splňovala i ostatní rovnice, musí být konstanta c rovna nule. Vektorové pole X má tvar:

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial_x} + xy\frac{\partial}{\partial_y}.$$

Nyní nalezneme kanonické souřadnice rovnice (3.19) *a vyjádříme ji v těchto souřadnicích:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} \\
\ln y &= \ln x + \tilde{c} = \ln(Kx) \\
r &= \frac{y}{x}, \\
s &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\xi(x)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}, \\
(r, s) &= \left(\frac{y}{x}, -\frac{1}{x}\right), \\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{s_x + y' s_y}{r_x + y' r_y} = \frac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{y}{x^2} + y'\frac{1}{x}} = \frac{1}{y'x - y} \\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{1}{\left(\frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}x - y\right)} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{1 + r^2} \\
s &= \int \frac{\mathrm{d}r}{1 + r^2} = \arctan(r) + c,\ c = \mathit{konst.} \\
-\frac{1}{x} &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c \\
y &= -x \tan\left(\frac{1}{x} + c\right).
\end{aligned}
$$

Kapitola 4

Diferenciální rovnice ve tvaru $x = f(y')$ a $y = g(y')$

V této části budeme řešit následující dvě diferenciální rovnice:

$$x = f(y') \;\text{ a }\; y = g(y'). \tag{4.1}$$

U funkcí $f(y')$ a $g(y')$ přepokládejme, že jsou invertibilní, tedy

$$p(t) = f^{-1}(t),$$

$$q(t) = g^{-1}(t).$$

1. $$x = f(y') \text{ implikuje } y' = p(x).$$

   Tuto rovnici vyřešíme integrací:

   $$y = \int p(x)\mathrm{d}x + c,\; c = \text{konst.}$$

2. $$y = g(y') \;\text{ implikuje }\; y' = q(y).$$

   Tato rovnice je separovatelná, řešení je tedy v následujícím tvaru:

   $$\int \frac{\mathrm{d}y}{q(y)} = x + c,\; c = \text{konst.}$$

Kapitola 5

Použití metody symetrií na konkrétních příkladech

V této části použijeme metodu symetrií na konkrétní příklady, které nespadají mezi speciální typy obyčejných diferenciálních rovnic, kterými jsme se zabývali v předešlých kapitolách.

5.1 Příklad obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Mějme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1}{xy} - \frac{y}{x} + 1, \tag{5.1}$$

resp.

$$F = y' - \frac{1}{xy} + \frac{y}{x} - 1.$$

Nejprve si spočítáme první prolongaci vektorového pole X působící na F:

$$pr^{(1)}X(F) = \frac{1}{x^2y}\xi - \frac{y}{x^2}\xi + \frac{1}{xy^2}\eta + \frac{1}{x}\eta + \partial_x\eta + \left(\frac{1}{xy} - \frac{y}{x} + 1\right)\partial_y\eta - \\ - \left(\frac{1}{xy} - \frac{y}{x} + 1\right)\partial_x\xi - \left(\frac{1}{xy} - \frac{y}{x} + 1\right)^2\partial_y\xi = 0. \tag{5.2}$$

Předpokládejme, že $\xi = \xi(x)$ a $\eta = \eta(x, y) = yf(x)$ a dosaďme do (5.2):

$$\frac{1}{x^2y}\xi(x) - \frac{y}{x^2}\xi(x) + \frac{1}{xy}f(x) + \frac{y}{x}f(x) + yf'(x) + \frac{1}{xy}f(x) - \frac{y}{x}f(x) + f(x) - \frac{1}{xy}\xi'(x) + \frac{y}{x}\xi'(x) - \xi'(x) = 0.$$

Nyní porovnáme koeficinety u různých mocnin funkce y:

- y^{-1} : $\frac{\xi(x)}{x^2} + 2\frac{f(x)}{x} - \frac{\xi'(x)}{x} = 0$,
- y : $\frac{-\xi(x)}{x^2} + f'(x) + \frac{\xi'(x)}{x} = 0$,
- y^0 : $f(x) - \xi'(x) = 0$.

Sečtením první a druhé rovnice dostáváme:

$$f'(x) + 2\frac{f(x)}{x} = 0,$$

tedy

$$f(x) = x^{-2}.$$

Dosazením do třetí rovnice dostáváme tvar funkce $\xi(x)$:

$$x^{-2} - \xi'(x) = 0,$$

tedy

$$\xi(x) = -\frac{1}{x} \ \text{ a } \ \eta(x,y) = \frac{y}{x^2}.$$

Nyní pomocí těchto funkcí získáme tvar kanonických souřadnic:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\eta}{\xi} = -\frac{y}{x} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + c \\
\ln y &= -\ln(xr) \\
r &= \frac{1}{xy} \\
s &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\xi} = -\int x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2.
\end{aligned}$$

Kanonické souřadnice tedy mají následující tvar:

$$(r,s) = \left(\frac{1}{xy}, -\frac{1}{2}x^2\right).$$

Nyní převedeme diferenciální rovnici (5.1) do nových souřadnic a vyřešíme ji:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{\partial_x s + y'\partial_y s}{\partial_x r + y'\partial_y r} = \frac{-x}{-\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{xy^2}\left(\frac{1}{xy} - \frac{y}{x} + 1\right)} \\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{x}{\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x^2y^3} - \frac{1}{x^2y} - \frac{1}{xy^2}} = \frac{1}{\frac{1}{x^3y^3} - \frac{1}{x^2y^2}} \\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{1}{r^3 - r^2} = \frac{1}{r^2(r-1)} \\
s &= \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2(r-1)}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2(r-1)} = \int \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1+r}{r^2}\right)\mathrm{d}r = \ln|r-1| + \frac{1}{r} - \frac{1}{2}\ln r^2$$

$$s = \frac{1}{r} + \ln\frac{|r-1|}{|r|}.$$

Převedením do původních souřadnic dostaneme obecné řešení diferenciální rovnice (5.1):

$$\frac{1}{2}x^2 + xy + \ln|1 - xy| = 0.$$

5.2 Příklad obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu

Mějme diferenciální rovnici

$$y'' = \frac{y'}{y^2}, \tag{5.3}$$

resp.

$$F = y'' - \frac{y'}{y^2}.$$

Použijeme podmínku nulovosti druhé prolongace vektorového pole X působící na F :

$$pr^{(2)}X(F) = 2\frac{y'}{y^3}\eta - \frac{1}{y^2}\left(\partial_x\eta + (\partial_y\eta - \partial_x\xi)y' - \partial_y\xi y'^2\right) + \partial^2_{xx}\eta + \left(2\partial^2_{xy}\eta - \partial^2_{xx}\xi\right)y' +$$
$$+\left(\partial^2_{yy}\eta - 2\partial^2_{xy}\xi\right)y'^2 - \partial^2_{yy}\xi y'3 + \partial_y\eta\frac{y'}{y^2} - 2\partial_x\xi\frac{y'}{y^2} - 3\partial_y\xi\frac{y'^2}{y^2} = 0.$$

Nyní porovnáme členy u různých mocnin funkce y':

- Členy u y'^3 :

  $$\partial^2_{yy}\xi = 0 \Rightarrow \xi(x,y) = A(x)y + B(x),$$

  kde $A(x), B(x)$ jsou libovolné funkce od x.

- Členy u y'^2 :

  $$\partial^2_{yy}\eta = 2\partial^2_{xy}\xi + \frac{1}{y^2}\partial_y\xi = 2A'(x) + 2\frac{A(x)}{y^2} \Rightarrow \eta(x,y) = A'(x)y^2 - 2A(x)\ln y + C(x)y + D(x),$$

  kde $C(x), D(x)$ jsou opět libovolné funkce od x.

- Členy u y' :

  $$\frac{2}{y^3}\eta - \frac{1}{y^2}\partial_x\xi + 2\partial^2_{xy} - \partial^2_{xx}\xi = \frac{2A'(x)}{y} - \frac{4A(x)\ln y}{y^3} + \frac{2C(x)}{y^2} + \frac{2D(x)}{y^3} - \frac{A'(x)}{y} - \frac{B'(x)}{y^2} +$$
  $$+ 4A''(x)y - \frac{4A'(x)}{y} + 2C'(x) - A''(x)y - B''(x) = 0.$$

- Členy neobsahující funkci y' :

  $$\partial^2_{xx}\eta - \frac{1}{y^2}\partial_x\eta = A''(x)y^2 - 2A''(x)\ln y + C''(x)y + D''(x) - A''(x) + \frac{2A'(x)\ln y}{y^2} - \frac{C'(x)}{y} - \frac{D'(x)}{y^2} = 0.$$

Porovnáním členů u různých mocnin funkcí y a $\ln y$ dostáváme podmínky
$A'(x) = C'(x) = D'(x) = 0$ a tedy

$$A(x) = c_1,$$
$$C(x) = c_2,$$
$$D(x) = c_3,$$

kde $c_1, c_2, c_3 =$ konst. Tyto funkce dosadíme do podmínky získané porovnáním členů u y' :

$$-\frac{4c_1\ln y}{y^3} + \frac{2c_2}{y^2} + \frac{2c_3}{y^3} - \frac{B'(x)}{y^2} - B''(x) = 0.$$

Z této podmínky v důsledku různých závislostí členů na y vyplývá, že $D(x) = 0$ a $B'(x) = 2c_2$, tedy $B(x) = 2c_2x + c_4, c_4 =$ konst. Předpis pro funkce ξ a η :

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= 2c_2x + c_4, \\ \eta(x, y) &= c_2y. \end{aligned}$$

Dostáváme vektorová pole

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= 2x\partial_x + y\partial_y. \end{aligned}$$

Vektorové pole X_1 použijeme k redukci řádu diferenciální rovnice (5.3). Příslušné kanonické souřadnice mají tvar

$$(r, s) = (y, x).$$

Spočtěme derivaci $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{y'}.$$

Definujeme si novou funkci u jako

$$u = \frac{1}{\dot{s}} = y'$$

a spočítáme její derivaci:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{y''}{y'} = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Tato diferenciální má řešení ve tvaru

$$u = -\frac{1}{r} + k_1,$$

kde $k_1 =$ konst. Převedeme toto řešení do původních souřadnic:

$$y' = -\frac{1}{y} + k_1.$$

Jedná se o separovatelnou diferenciální rovnici, jejíž tvar řešení známe z třetí kapitoly:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{k_1 - \frac{1}{y}} = x + k_2,$$

kde $k_2 =$ konst. Zbývá tedy vyřešit integrál na levé straně:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{k_1 - \frac{1}{y}} = \int \frac{y}{yk_1 - 1}\mathrm{d}y = \frac{1}{k_1}\left(\int \frac{y}{y - \frac{1}{k_1}}dy + \int \frac{\frac{1}{k_1}}{y - \frac{1}{k_1}}\mathrm{d}y - \int \frac{\frac{1}{k_1}}{y - \frac{1}{k_1}}\mathrm{d}y\right) = \\ = \frac{1}{k_1}\left(\int \mathrm{d}y + \int \frac{\frac{1}{k_1}}{y - \frac{1}{k_1}}\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{k_1}y + + \frac{1}{k_1^2}\ln\left(y - \frac{1}{k_1}\right). \end{aligned}$$

Obecné řešení diferenciální rovnice (5.3) má tedy tvar implicitně zadané funkce:

$$\frac{1}{k_1}y + \frac{1}{k_1^2}\ln\left(y - \frac{1}{k_1}\right) - x - k_2 = 0.$$

Kapitola 6

Difuzní rovnice, Fickův zákon

V předchozích částech jsme se seznamovali s metodami symetrií obyčejných diferenciálních rovnic a pokusili se sestavit alternativní kurz pro jejich řešení. Využití této metody je však mnohem širší, umožňuje nám systematicky hledat transformace diferenciálních rovnic, které rovnice výrazně zjednoduší nebo umožňují problém studovat a analyzovat. Takovýchto diferenciálních rovnic je v klasické fyzice spousta. Konkrétně se budeme věnovat různým modelům difuze.

6.1 Difuze, Fickův zákon

Difuze je řetězový pohyb molekul nebo atomů z oblasti s vyšší koncentrací (nebo chemického potenciálu) do oblasti s koncentrací nižší. Mějme oblast o celkové hustotě ρ skládající se z n komponent o hustotách ρ_k, kde $k = 1, 2, \dots, n$. Platí tedy $\rho = \sum_{k=1}^{n} \rho_k$. Koncentrace jednotlivých komponent c_k jsou definovány jako

$$c_k = \frac{n_k}{n},$$

kde n_k je počet molů k-té komponenty a n udává celkový počet molů. Platí tedy

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = 1.$$

Každý model difuze je vyjádřen pomocí tzv. *difuzního toku* $\mathcal{J}$. Jedná se o vektorovou veličinu, vystupující v bilanční rovnici pro hmotnost (tzv. rovnice kontinuity)

$$\rho \frac{\mathrm{d}c_k}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{div} \mathcal{J}_k.$$

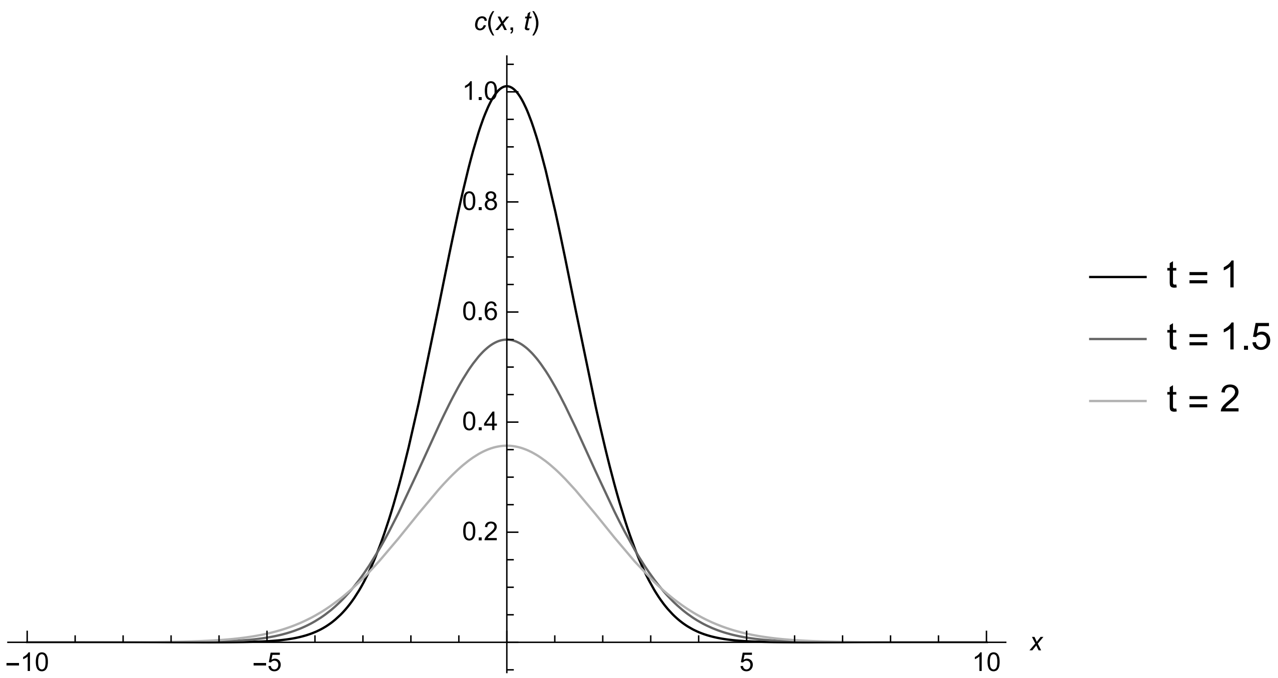
Její závislost na stavových veličinách je obecně neznámá, a proto je předmětem modelování. Z mikroskopického hlediska nám udává, kolik molů (resp. hmotnosti) dané látky projde elementem plochy za jednotku času ve středním směru proudění částic. Existují různé postupy, jak difuzní tok odhadnout. My užijeme dle knihy [5] postup z klasické nerovnovážné termodynamiky. Pro jednoduchost uvažujme nyní izotermální a izobarickou difuzi n neviskózních izotropických komponent, které spolu neinteragují a nepůsobí na ně žádné vnější síly. V tomto případě má difuzní tok tvar

$$\mathcal{J}_k = -D_k \,\mathrm{grad}\, c_k,$$

kde D_k jsou funkce obecně závislé na koncentraci c_k (tzv. *difuzní koeficienty*). V tomto vztahu poznáváme tzv. *Fickův zákon difuze* (původně získaný empiricky). Ten říká, že gradienty koncentrací se v důsledku difuze vyhlazují, a to přesouváním hmoty z míst s vyšší koncentrací do míst s koncentrací nižší. Dosazením tohoto vztahu pro difuzní tok do bilanční rovnice hmoty dostáváme *rovnici difuze:*

$$\rho \frac{\mathrm{d}c_k}{\mathrm{d}t} = \operatorname{div}(D_k \operatorname{grad} c_k). \tag{6.1}$$

6.2 Fickova difuze



Obrázek 6.1: Fickova difuze

Difúzní rovnice (6.1) je obecně nelineární parciální diferenciální rovnice, jejíž obtížnost řešení závisí na volbě difuzních koeficientů D_k. Předpokládejme, že difuzní koeficienty jsou konstanty, tedy nezávisí na jednotlivých koncentracích c_k. Tomuto případu se říká 2. Fickův zákon, nebo také *Fickova difuze.* Jedná se o nejjednodušší a zároveň nejhojněji používaný popis difuze. Hledáme tedy řešení parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = D\Delta c,$$

což je tzv. *rovnice vedení tepla.*

Poznámka. *Pro zjednodušení zápisu budeme v dalších částech uvažovat $\rho = 1$ a zabývat se parciální rovnicí bez označení komponent, protože rovnice jsou pro všechny komponenty stejné.*

Uvažujme počáteční podmínku

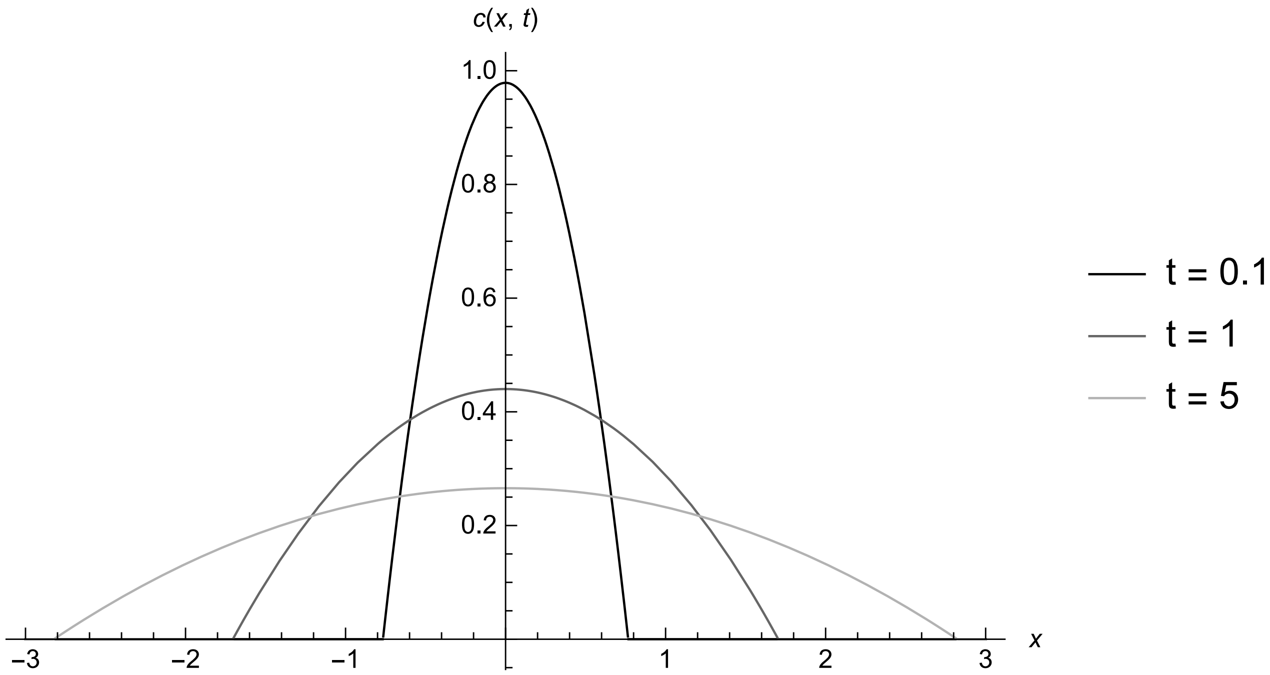
$$c(x,0) = \delta(x),$$

která charakterizuje situaci, kdy je na počátku všechna hmota koncentrována v jednom bodě. Chceme tedy najít fundamentální řešení rovnice vedení tepla, které má dle [6] tvar

$$c(x,t) = \frac{1}{8(\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4Dt}},$$

kde $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}^3$. V tomto řešení se ale hranice nosiče koncentrace šíří nekonečnou rychlostí, což je fyzikálně neuspokojivé (viz obrázek 6.1.).

6.3 Nelineární difuzní rovnice



Obrázek 6.2: Nelineární difuze

Předpokládejme nyní, že koeficient D difuzního toku $\mathcal{J}$ závisí lineárně na koncentraci c, platí tedy

$$\mathcal{J} = c \operatorname{grad} c.$$

Napišme si příslušnou difuzní rovnici v jednom rozměru:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(c \frac{\partial c}{\partial x}\right). \tag{6.2}$$

Tato parciální diferenciální rovnice se dá dle knihy [7, str. 59] řešit speciálními transformacemi souřadnic. Jedná se o tzv. *metodu prodlužování* založenou právě na Lieově teorii symetrií pro diferenciální rovnice. Podívejme se na tento způsob:
Mějme parciální diferenciální rovnici ve tvaru

$$F(x, t, c, \partial_x c, \partial_t c, \partial^2_{xx} c, \partial^2_{xt} c, \partial^2_{tt} c) = 0. \tag{6.3}$$

Předpokládejme jednoparametrický soubor prodlužovacích transformací

$$\hat{x} = \varepsilon^a x,$$
$$\hat{t} = \varepsilon^b t,$$
$$\hat{c} = \varepsilon^d c,$$

kde $a, b, d =$ konst. a ε je reálný parametr z omezeného otevřeného intervalu obsahující $\varepsilon = 1$. O parciální diferenciální rovnici ve tvaru (6.3) řekneme, že je vůči této transformaci invariantní, pokud existuje hladká funkce $g(\varepsilon)$ taková, že platí

$$F(\hat{x}, \hat{t}, \hat{c}, \partial_{\hat{x}}\hat{c}, \partial_{\hat{t}}\hat{c}, \partial^2_{\hat{x}\hat{x}}\hat{c}, \partial^2_{\hat{x}\hat{t}}\hat{c}, \partial^2_{\hat{t}\hat{t}}\hat{c}) = g(\varepsilon)F(x, t, c, \partial_x c, \partial_t c, \partial^2_{xx}c, \partial^2_{xt}c, \partial^2_{tt}c).$$

Invariantní parciální diferenciální rovnici druhého řádu pomocí transformace

$$c = t^{d/b}u(z), \tag{6.4}$$
$$z = \frac{x}{t^{a/b}} \tag{6.5}$$

redukujeme na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu ve tvaru

$$f(z, u, u', u'') = 0.$$

Použijme tuto metodu na nelineární difuzní rovnici (6.2) opět s počáteční podmínkou

$$c(x, 0) = \delta(x).$$

Protože náš systém nemá žádný zdroj částic, ani žádné nemizí, budeme předpokládat podmínku zákona zachování hmoty

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(x, t)\mathrm{d}x = 1 \qquad \text{pro } t > 0, \tag{6.6}$$

která odpovídá původnímu stavu. Navíc budeme předpokládat, že

$$\lim_{x\to\pm\infty} c(x, t) = 0 \qquad \text{pro } t > 0.$$

Abychom mohli použít postup uvedený výše, musíme zajistit, že rovnice (6.2) je invariantní vůči prodlužovacím transformacím

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{t}} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}}\left(\hat{c}\frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{x}}\right) = \varepsilon^{d-b}\frac{\partial c}{\partial t} - \varepsilon^{2d-2a}\frac{\partial}{\partial x}\left(c\frac{\partial c}{\partial x}\right).$$

Aby platila podmínka invariance, musí být splněno

$$d = 2a - b.$$

Z této podmínky a z předpisu pro transformace (6.4) dostáváme vztahy

$$c = t^{2(a-b)/b}u(z),$$
$$z = \frac{x}{t^{a/b}}.$$

Pro určení konstant a a b použijeme podmínku (6.6):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(x,t)\mathrm{d}x = t^{(2a-b)/b}\int_{-\infty}^{+\infty} u\left(\frac{x}{t^{a/b}}\right)\mathrm{d}x = t^{(3a-b)/b}\int_{-\infty}^{+\infty} u(z)\mathrm{d}z = 1.$$

Jelikož má být tato podmínka splněná pro všechna kladná t, musí být nezávislá na čase. Budeme tedy požadovat, aby platilo

$$b = 3a.$$

Z této podmínky dostáváme transformační vztahy nezávislé na konstantách a a b

$$c = t^{-1/3}u(z),$$
$$z = \frac{x}{t^{1/3}}.$$

Nyní transformujeme parciální diferenciální rovnici (6.2) pomocí těchto transformačních vztahů:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(c\frac{\partial c}{\partial x}\right) = -\frac{1}{3}t^{-4/3}u(z) - \frac{1}{3}t^{-5/3}u'(z)x - \frac{\partial}{\partial x}\left(t^{-1}u'(z)u(z)\right) =$$
$$= -\frac{1}{3}t^{-4/3}u(z) - \frac{1}{3}t^{-4/3}u'(z)z - t^{-4/3}\left(u(z)'u(z)\right)' = -\frac{1}{3}t^{-4/3}\left(u(z) + u'(z)z + 3\left(u(z)'u(z)\right)'\right) = 0.$$

Aby byla splněna nulovost této rovnice, musí platit

$$u(z) + u'(z)z + 3\left(u(z)'u(z)\right)' = (u(z)z)' + 3\left(u(z)'u(z)\right)' = 0.$$

Integrací dostáváme diferenciální rovnici

$$3u(z)u'(z) + zu(z) = K,$$

kde $K =$ konst. Jelikož je řešení symetrické, dostáváme podmínku $u'(0) = 0$, zvolíme konstantu $K = 0$. Dostáváme tedy diferenciální rovnici

$$3u(z)u'(z) + zu(z) = 0.$$

Jedná se o separovatelnou diferenciální rovnici, kterou už umíme vyřešit:

$$3u(z) + \int z\mathrm{d}z = B = \text{konst.}$$
$$\frac{2B - z^2}{6} = u(z).$$

Označíme si novou konstantu $A^2 = 2B$. Řešení má tvar

$$u(z) = \frac{A^2 - z^2}{6}.$$

Poznámka. *Jelikož nás nezajímá nulové řešení $u(z) = 0$, mohli jsme rovnici touto funkcí vydělit. Protože navíc koncentrace c není záporná, mohli jsme volit konstantu B jako kvadrát jiné konstanty.*

Pro splnění předpokladu $\lim_{x\to\pm\infty} c(x,t) = 0$ a splnění podmínky nezápornosti koncentrace upravíme řešení do tvaru

$$u(z) = \begin{cases} \frac{A^2-z^2}{6}, & |z| < A, \\ 0, & |z| > A. \end{cases}$$

Pro určení konstanty A použijeme podmínku (6.6):

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(z)\mathrm{d}z = \int_{-A}^{+A} \frac{A^2 - z^2}{6} = \frac{2}{9}A^3 \Rightarrow A = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}.$$

Obecné řešení v původních proměnných má tedy tvar (viz obrázek 6.2)

$$c(x,t) = \begin{cases} \frac{A^2 t^{2/3} - x^2}{6t}, & |x| < At^{1/3}, \\ 0, & |x| > At^{1/3}. \end{cases}$$

U tohoto řešení dokážeme přesně určit hranici nosiče koncentrace

$$x_f = \pm A t^{1/3},$$

která se šíří konečnou rychlostí.

$$\frac{\mathrm{d}x_f}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}At^{-2/3}.$$

Přirozeným pokračováním této práce bude rozšíření studia symetrií i na parciální diferenciální rovnice a s jejich pomocí nalézt tyto užité transformace v těchto a podobných problémech.

Závěr

V této práci se nám podařilo vybudovat nástroj na řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Nejprve jsme se seznámili se symetriemi obyčejných diferenciálních rovnic, poté jsme tyto znalosti využili k nalezení řešení libovolné obyčejné diferenciální rovnice ve tvaru $y^{(n)} = \omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, resp. převedení tohoto problému na problém řešení kvadratury. Dále jsme touto metodou nalezli řešení speciálních typů diferenciálních rovnic z kurzu Diferenciální rovnice, konkrétně řešení separované a separovatelné diferenciální rovnice, lineární diferenciální rovnice 1. řádu, homogenní diferenciální rovnice 1. řádu, Bernoulliho diferenciální rovnice, diferenciální rovnice tvaru $y'(x) = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ a Riccatiho diferenciální rovnice. Vybudovali jsme tím tedy alternativu k této části kurzu na základě znalostí druhého ročníku studentů základního studia Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské při Českém vysokém učení technickém v Praze.
Od obyčejných diferenciálních rovnic už je přímočarý přechod k parciálním diferenciálním rovnicím. V následující práci rozšíříme tento nástroj na parciální diferenciální rovnice a začneme se zabývat difuzní rovnicí, resp. jejími konkrétními typy. U nelineární difuzní rovnice jsou sice transformace vedoucí k řešení známy, my se je však bude snažit nalézt pomocí symetrií a dále se budeme snažit hledat transformace parciálních diferenciálních rovnic systematicky.

Literatura

[1] P. E. Hydon. *Symmetry Methods for Differential Equations.* Cambridge University Press, 2009.

[2] Y. Pinchover and J. Rubinstein. *An Introduction to Partial Differential Equations.* Cambridge University Press, 2005.

[3] W. Rudin. *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Academia Praha, 2003.

[4] Cheb-Terrab E. S. and T. Kolokolnikov. First-order ordinary differential equations, symmetries and linear transformations. *European Journal of Applied Mathematics*, 14(2):231–246, 2003.

[5] J. Casas-Vázquez G. Lebon, D. Jou. *Understanding Non-equilibrium Thermodynamics.* Springer-Verlag Berlin, 2008.

[6] P. Šťovíček. *Metody matematické fyziky I.* České vysoké učení technické, Praha, 2012.

[7] M. Kot. *Elements of mathematical ecology.* Cambridge University Press, 2001.