České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Arnowittova-Deserova-Misnerova formulace gravitační dynamiky

Arnowitt-Deser-Misner formulation of gravitational dynamics

Bakalářská práce

Autor: **Daniel Štěrba**

Vedoucí práce: **prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.**

Akademický rok: 2016/2017

- Zadání práce -

- Zadání práce (zadní strana) -

Poděkování:

Rád bych poděkoval svému školiteli prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc. za cenné rady, vstřícnost a ochotu při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 9. července 2017 Daniel Štěrba

Název práce:

Arnowittova-Deserova-Misnerova formulace gravitační dynamiky

Autor: Daniel Štěrba

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze

Abstrakt: Arnowittův-Deserův-Misnerův formalismus je označení pro hamiltonovskou formulaci obecné relativity. Popisuje dynamiku gravitačního pole jako hamiltonovský systém, což umožňuje využívat známých výsledků z oblasti klasické teorie pole a slouží jako základ pro modernější kvantové teorie gravitace. ADM formalismus je založen na rozkladu prostoročasu na třídu prostorupodoných nadploch a převodu geometrické podstaty teorie relativity do řeči těchto řezů, čemuž se věnuje první část práce. Následuje formulace klasické teorie pomocí variačních principů a nalezení vhodné akce pro další postup. Je rozebrána volba vhodné konfigurační variety, zavedení kanonických hybností a proveden přechod od lagrangeovského k hamiltonovskému formalismu. V závěru práce jsou na základě variačního principu odvozeny pohybové rovnice.

Klíčová slova: ADM formalismus, geometrie 3+1, gravitační dynamika, hamiltonovský, variační princip

Title:

Arnowitt-Deser-Misner formulation of gravitational dynamics

Author: Daniel Štěrba

Abstract: Arnowitt-Deser-Misner formalism is a designation for hamiltonian formulation of general relativity. It describes the dynamics of gravitational field as a hamiltonian system which enables utilization of known results in classical field theory and serves as a foundation of modern quantum theories of gravity. ADM formalism is based on foliation of spacetime into spacelike hypersurfaces and describing the geometrical content of the theory of relativity in terms of this setup, which is the focus of the first part of the thesis. Formulation of the classical theory as a variational principle follows and suitable action is found. The choice of configuration space is discussed and canonical momenta are introduced. Transfer from lagrangian to hamiltonian formalism ensues and finally equations of motion are derived.

Key words: ADM formalism, geometry 3+1, gravitational dynamics, hamiltonian, variational principle

Obsah

Úvod

Obecná teorie relativity je jednou z nejelegantnějších a nejúspěšnějších fyzikálních teorií historie. Poprvé byla formulována v podobě polních rovnic již na sklonku roku 1915, přesto její předpovědi i z tohoto období experimentálně potvrzujeme ještě dnes a stále nabízí mnoho nevyřešených otázek. Především je zde otázka jejího kvantování, jež zůstává desitiletí otevřená. Jedním z úspěšnějších pokusů posledních let je Hořavova teorie gravitace z roku 2009 ([1]). Její případné budoucí zkoumání bylo jednou z hlavních motivací věnovat se v této práci tzv. Arnowittově-Deserově-Misnerově (ADM) formulaci, z které Hořavova teorie velkou měrou vychází. ADM formalismus je hamiltonovskou formulací obecné teorie relativity. Přestože možnost odvození polních rovnic z variačního principu byla známa prakticky již od dob první Einsteinovy publikace, první větší krok na cestě k formulaci hamiltonovské učinil až Dirac v padesátých letech, když ve své práci zobecňoval strukturu tohoto formalismu pro potřeby teorie relativity, cestu k plnohodnotné hamiltonovské formulaci publikovali ale až Arnowitt, Deser a Misner roku 1959 ([2]), v rozšířené verzi pak roku 1962 ([3]). Jejich práce byla rozšiřována ještě v osmdesátých a devadesátých letech, především však stála na počátku mnoha dalších teorií a pokusů o kanonické kvantování gravitace, ke kterému hamiltonovský formalismus skýtal aparát.
Základním rysem ADM formulace je opuštění obecné kovariantnosti zákonů obecné relativity, které je nutné za účelem dosažení kanonické formy, je totiž vyžadováno přiznat času mezi souřadnicemi privilegovanou roli. Celý koncept je založen na rozdělení prostoročasu do třídy prostorupodobných nadploch parametrizovaných nějakou globální funkcí času a převedení popisu geometrie prostoročasu na popis vnitřních a vnějších křivostí jeho řezů a způsobu jejich konstrukce. Geometrickému podkladu, který tvoří nezbytný základ ADM formulace, je věnována první kapitola této práce. Začíná zavedením nutné kauzální struktury, jež umožní tento netriviální krok rozřezání variety prostoročasu učinit, následují definice základních objektů a odvození vztahů mezi geometrií nadploch a obklopujícího prostoročasu. Další část se věnuje zmiňované možnosti odvození polních rovnic z variačního principu, je diskutován vhodný tvar akce a předložena lagrangeovská formulace obecné relativity. Následuje přechod od lagrangeovského k hamiltonovskému formalismu, volba vhodné konfigurační variety, zavedení kanonických hybností, Legenderova transformace, věnujeme se problematice hraničních členů. Práce je uzavřena zformulováním Hamiltonových pohybových rovnic popisujích dynamiku prostoročasu.

Konvence a značení

V práci jsou dodržovány následující konvence a značení. Prostoročasem rozumíme dvojici (M, g), kde M je čtyřdimenzionální hladká varieta a g lorentzovská metrika na M se signaturou $(-, +, +, +)$. Afinní konexi na M uvažujeme vždy Levi-Civitovu, kovariantní derivaci definujeme touto konexí.

Značením a formalismem tento text pro snazší orientaci a dohledatelnost dílčích výsledků vychází z konvencí rozšířených v použité literatuře. Pro zápis operací a výpočtů s tensory je užito formalismu Ricciho kalkulu ([4], [5] aj.). Indexy slouží k označení složek tensorů vzhledem k bázi, která však nemusí být explicitně určena, zápis si proto zachovává obecnost. Ve složkách psaná tensorová rovnost představuje sadu rovnic, pro každou konkrétní složku jednu. Horní indexy značí kontravariantní, dolní kovariantní složky (tento charakter na volbě báze nezávisí). Přes dva stejné indexy, jeden horní, jeden dolní, se sčítá v souladu s Einsteinovou sumační konvencí, to odpovídá kontrakci, respektive stopě na tensorovém součinu. Více tensorů napsaných za sebou bez označení operace představuje tensorový součin. Pro libovolné dva tensory T, U (pro jednoduchost řádu jedna)

$$T^\alpha U^\beta \equiv (T \otimes U)^{\alpha\beta}$$

$$T^\alpha U_\alpha \equiv \sum_\alpha T^\alpha U_\alpha \equiv \mathrm{Tr}(T \otimes U)$$

Struktura metriky umožňuje přecházet mezi vektory a příslušnými jednaformami (kontravariantními a kovariantními složkami tensorů) standardními operacemi snižování a zvyšování indexů. Pro dva tensory T, U, specificky vektorová pole u, v

$$T^\alpha \equiv g^{\alpha\beta} T_\beta\,, \quad U_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} U^\beta$$

$$u_\alpha v^\alpha \equiv u^\beta g_{\beta\alpha} v^\alpha \equiv g(u, v)$$

Definováním jednaformy tak automaticky zavádíme příslušné vektorové pole a naopak, stejně pro tensory vyšších řádů. S ohledem na tento fakt nemají vektorová pole, jednaformy, ani tensory vyšších řádů daných kovariantních či kontravariantních charakterů svá preferovaná označení, co se volby abecedy, velikosti, sklonu, tloušťky písma nebo přidaných specifických znaků týče. Řecké indexy nabývají hodnot $\{0, 1, 2, 3\}$, latinské $\{1, 2, 3\}$, není-li řečeno jinak, číslujeme souřadnicovou bázi v tomto vzestupném pořadí. Parciální derivaci značíme standardně čárkou a příslušným indexem, pro kovariantní derivaci danou Levi-Civitovou konexí na M (jinak běžně značenou středníkem) užíváme za účelem zřetelnějšího rozlišení symbolu ∇. Jeho použitím s prostým indexem rozumíme kovariantní gradient. Pro zpřehlednění zápisu se v souladu s rozšířeným značením vynechává závorkování v následujícím smyslu

$$u^\alpha{}_{,\beta} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x^\beta}\right)^\alpha$$

$$\nabla_v u^\alpha \equiv (\nabla_v u)^\alpha \equiv v^\beta \nabla_\beta u^\alpha \equiv \left(u^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} u^\mu \right) v^\beta$$

Stejně pro tensory vyšších řádů.
Až do zavedení ADM souřadnic v kapitole 1.3 lze zápis chápat v obecnějším smyslu Penroseova formalismu abstraktních indexů ([6], [5]), v němž indexy slouží k označení kovariantního či kontravariantního charakteru, nikoli konkrétní složky tensoru v nějaké zvolené bázi. Formálně se tento zápis od Ricciho kalkulu neliší a vzhledem k obecnosti volby báze v námi užité symbolice představuje jen odlišný úhel pohledu.
Lieovu derivaci označujeme symbolem $\mathcal{L}$ s uvedením vektorového pole, podél jehož toku ji vyhodnocujeme, v dolním indexu. Po zavedení časové derivace ji budeme značit tečkou nad daným objektem. Z práce ADM ([2], [3]) přebíráme rozlišování objektů definovaných na M a na třírozměrných podvarietách pomocí horního indexu ^{3} nebo ^{4} předcházejícího danou veličinu, např. ^4R a ^3R rozlišující mezi skalární křivostí na M a nějaké jeho třírozměrné podvarietě Σ. Výjimku tvoří označení 3-metriky a kovariantní derivace, pro něž budou z důvodu jejich častého používání pro přehlednost v rámci definice zavedeny nové symboly.
Případné další značení bude doplněno v průběhu práce vždy při definici nového objektu či operace.

Kapitola 1

Geometrie 3+1

1.1 Nezbytná kauzální struktura

Pro formulaci gravitační dynamiky v hamiltonovském formalismu je nezbytné přiznat času mezi souřadnicemi privilegovanou roli a rozdělit pro popis prostoročas na třídu prostorupodobných nadploch, přechod mezi nimiž bude představovat časový vývoj a zachycovat dynamiku touto cestou vzniklého třírozměrného systému. Aby to bylo obecně možné, je nutné vyžadovat poměrně silnou, ne však nepřirozenou kauzální strukturu, tzv. globální hyperbolicitu.

Definice 1.1. Buď (M, g) prostoročas, prostorupodobnou nadplochu Σ takovou, že libovolná neprodloužitelná (nemající koncový bod) kauzální, tj. časupodobná nebo světlupodobná, křivka protíná Σ, nazveme Cauchyho nadplochou (*Cauchy surface*).

Definice 1.2. Prostoročas připouštějící existenci Cauchyho nadplochy zveme globálně hyperbolickým.

V literatuře ([7], [5]) se lze setkat i s odlišnými, poněkud techničtějšími definicemi, důkaz jejich ekvivalence lze nalézt v [5].

Tvrzení 1.1.1. Buď (M, g) globálně hyperbolický prostoročas. Pak lze zvolit globálně definovanou hladkou funkci t, $t : M \to \mathbb{R}$, tak, že $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$\Sigma_s := \{\forall p \in M, t(p) = s\}$$

je Cauchyho nadplocha. Tedy M lze zapsat jako jednoparametrickou množinu Cauchyho nadploch, potažmo disjunktní sjednocení

$$M = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \Sigma_s$$

a topologie M je $\mathbb{R} \times \Sigma$, kde Σ představuje libovolnou Cauchyho nadplochu. Jednotlivé nadplochy označujeme jako řezy (*leafs or slices of foliation*).

Důkaz. Důkaz k nalezení v [5].

Intuitivně si lze skalární pole t představit jako časovou souřadnici a nadplochy Σ_s jako prostor v daném bodě s souřadnicového času t. Globální hyperbolicita v kontextu obecné relativity říká, že znalost počátečních podmínek na jedné Cauchyho nadploše zaručuje jednoznačnost (maximálního) řešení Einsteinových polních rovnic ([5]). Dává tak vzniknout globálně hyperbolickému prostoročasu M, který je plně určen svými počátečními podmínkami. Zaručuje vlastně prediktivní schopnost teorie, pročež je v kontextu formulace dynamických zákonů přirozeným požadavkem.

1.2 Geometrická struktura globálně hyperbolického prostoročasu

Obsahem této sekce je popis geometrie globálně hyperbolického prostoročasu s využitím jeho rozkladu na jednoparametrickou množinu prostorupodobných nadploch. Za tímto účelem uveďme ještě jedno tvrzení, jež nabídne širší vhled do vnitřní struktury M a poskytne přirozenou motivaci pro definici některých základních geometrických objektů na nadplochách Σ_s.

Tvrzení 1.2.1. Každá Cauchyho nadplocha je vložená $\mathcal{C}^0$ podvarieta M.

Důkaz. Důkaz v [5].

Uvažujme nadále globálně hyperbolický prostoročas (M, g). Dle tvrzení 1.1.1 jej lze rozřezat na Cauchyho nadplochy Σ_s parametrizované globální funkcí t. Každou nadplochu Σ_s danou jako ekviplochu skalárního pole t lze dle 1.2.1 chápat též jako vloženou podvarietu M, tj. jako varietu $\hat{\Sigma}_s$ spolu s vložením Φ_s

$$\Phi_s : \hat{\Sigma}_s \to M$$

$$\Phi_s(\hat{\Sigma}_s) = \Sigma_s \subset M$$

Volba souřadnic (t, x^i) na M takových, že za první z nich bereme skalární funkci t rozdělující M na nadplochy ve smyslu tvrzení 1.1.1 (nebo její libovolné přeškálování), z čehož okamžitě plyne $t(p) = konst., \forall p \in \Sigma_s$ pro libovolné pevné s, umožňuje zavést souřadnice $(\hat{x}^i)$ na $\hat{\Sigma}_s$ předpisem

$$\forall q \in \hat{\Sigma}_s, \quad \hat{x}^i(q) \coloneqq x^i(\Phi_s(q))$$

Z injektivity vložení jsou tyto souřadnice dobře definovány. Lze tedy volit souřadnicové systémy na $\hat{\Sigma}_s$ a M tak, že platí

$$\Phi_s : (\hat{x}^i) \mapsto (t, x^i)$$

Vhodné souřadnice na M v tomto smyslu indukují souřadnicový systém na $\hat{\Sigma}_s$ daný prostým vypuštěním jedné ze souřadnic, v němž má vyjádření vložení Φ_s triviální tvar "identity". To nám umožní sjednotit souřadnicové vyjádření objektů na $\hat{\Sigma}_s$ a Σ_s a identifikovat $\hat{\Sigma}$ s $\Phi_s(\hat{\Sigma}_s) = \Sigma_s$. Vložení podvariety $\Sigma_s = \Phi_s(\hat{\Sigma}_s)$ je díky tvrzením 1.1.1 a 1.2.1 výše ekvivalentní jejímu nahlížení jako ekviplochy skalárního pole t, můžeme proto oba pohledy v následujícím textu kombinovat a užívat vždy toho v dané situaci výhodnějšího.

Poznámka ke značení: Mnohé z následujících úvah budeme provádět pro libovolný jeden řez[1] Σ_s, proto značme $\Sigma_s = \Sigma$ a $\Phi_s = \Phi$ pro $s \in \mathbb{R}$ libovolné, ale pevné. Tam, kde je potřeba uvažovat nadplochy pro nějaké okolí $(s - \epsilon, s + \epsilon)$, bude toto zmíněno a index zachován.

1.2.1 Základní definice

Definice 1.3. Zavádíme n^α jednotkové normálové pole k nadploše Σ, které je přirozeně určeno gradientem skalárního pole t vztahem

$$n^\alpha = -(-\nabla^\mu t \nabla_\mu t)^{-\frac{1}{2}} \nabla^\alpha t$$

[1] Pro některé z geometrických úvah této podkapitoly je struktura řezů celého prostoročasu ve smyslu tvrzení 1.1.1 nadbytečná, postačuje vložená podvarieta kodimenze 1 nenulového charakteru (z důvodu dobře definovaného normálového vektoru), jelikož však budou výsledky těchto úvah nadále využívány pouze pro popis globálně hyperbolických prostoročasů, nebudeme se případnou větší obecností jednotlivých částí zabývat.

kde znaménko pod odmocninou je dáno prostorupodobným charakterem nadplochy Σ, či ekvivalentně časupodobným charakterem pole $\nabla^\alpha t$, a orientace je bez újmy na obecnosti volena ve směru růstu skalárního pole t. Normálové pole přebírá časupodobný charakter

$$n^\alpha n_\alpha = -1$$

Pro konkrétní nadplochu představuje $n^\alpha|_\Sigma$ zobrazení přiřazující každému jejímu bodu jednotkový normálový vektor orientovaný ve směru růstu skalárního pole t, globálně definované skalární pole t však zajišťuje existenci n^α jako vektorového pole na M majícího v každém bodě význam orientované jednotkové normály k nadploše Σ_t procházející daným bodem.

Naším cílem je najít vztah mezi objekty definovanými na podvarietě Σ (respektive $\hat{\Sigma}$) a prostoročase M. Vložení Φ umožňuje chápat libovolnou skalární funkci na M jako funkci na $\hat{\Sigma}$ a naopak, a také přirozeně rozšířit libovolné vektorové pole, respektive libovolný čistě kontravariantní tensor definovaný na $\hat{\Sigma}$ na M pomocí pushforwardu (tečného zobrazení) a přenést libovolnou formu nebo plně kontravariantní tensor z M na $\hat{\Sigma}$ pomocí pullbacku (kotečného zobrazení).

Definice 1.4. Pro libovolné vektorové pole $\hat{v} = \hat{v}^a \frac{\partial}{\partial \hat{x}^a}$ na $\hat{\Sigma}$, jednaformu $u = u_\beta dx^\beta$ na M a funkci f na M klademe $\forall q \in \hat{\Sigma}$ následující definující vztahy

$$\Phi_* : T_q\hat{\Sigma} \to T_{\Phi(q)}M$$

$$(\Phi_*\hat{v})f := \hat{v}(f \circ \Phi)$$

což lze v souřadnicovém vyjádření přepsat jako

$$(\Phi_*\hat{v})^\alpha = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \hat{x}^a}\hat{v}^a$$

pro pushforward a analogicky pro pullback

$$\Phi^* : T^*_{\Phi(q)}M \to T^*_q\hat{\Sigma}$$

$$(\Phi^* u)\hat{v} := u(\Phi_*\hat{v})$$

$$(\Phi^* u)_b = \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial \hat{x}^b}u_\beta$$

Pro tensory vyšších řádů rozšiřujeme aplikací na každou ze složek tensorového součinu. Z faktu, že Φ je vložení, plyne maximální hodnost jakobiánu v každém bodě a injektivita tečného zobrazení, čehož dále využijeme. Abychom přenos doplnili o cestu opačnou a umožnili přenášet i tensory smíšeného charakteru, definujme nové zobrazení plnící roli projekčního operátoru.
Libovolné vektorové pole v lze v každém bodě $p \in M$ rozložit na složku normálovou k Σ (danou normálovým vektorem n^α) a tečnou k Σ procházející daným bodem.

$$T_pM = T_p\Sigma \oplus [n]_\lambda$$

$$v^\alpha = v_\perp n^\alpha + v_\parallel^\alpha$$

kde $[n]_\lambda$ značí jednodimenzionální podprostor T_pM daný normálovým vektorem n.

Definice 1.5. Ortogonální projekcí γ rozumíme zobrazení na tečném prostoru M v libolném bodě $p = \Phi(q) \in \Sigma$ definované

$$\gamma : T_pM \to T_{\Phi(q)}\Phi(\hat{\Sigma}) = T_p\Sigma \subset T_pM$$

$$v \mapsto v + (n \cdot v)n$$

kde tečkou označujeme skalární součin daný prostoročasovou metrikou g. Po složkách lze psát

$$\gamma^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + n^\alpha n_\beta \tag{1.1}$$

Platí pro $\forall u \in T_p\Sigma$, $\gamma(u) = u$ díky $n \perp T_p\Sigma$ a pro $v = \lambda n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\gamma(v) = 0$, neboť z definice $n \cdot n = -1$. Definice se bodově okamžitě rozšiřuje na vektorová pole a aplikací na každou ze složek tensorového součinu lze projekci zavést také pro libovolný plně kontravariantní tensor.
S využitím ortogonální projekce můžeme definovat následující zobrazení.

Definice 1.6. Buď π zobrazení v libovolném bodě $p = \Phi(q) \in \Phi(\hat{\Sigma}) = \Sigma$ definované jako

$$\pi : T_{\Phi(q)}M \to T_q\hat{\Sigma}$$

$$u \mapsto \hat{v} \quad \text{tak, že} \quad \Phi_s{*}\hat{v} = \gamma u$$

Zobrazení π je dobře definováno díky prostotě tečného zobrazení (které je tudíž invertovatelné) a rovnosti oborů hodnot ortogonálního projektoru a pushforwardu daného vložením, tj. $\Phi_*(T_q\hat{\Sigma}) = \gamma(T_{\Phi(q)}M) = T_{\Phi(q)}\Sigma$. Pro každý vektor $u \in T_p$ tak existuje právě jeden vektor $\hat{v} \in T_q\hat{\Sigma}$ splňující definiční vztah výše, naše definice má dobrý smysl. Samotné zobrazení π prosté není, splývají obrazy libovolných dvou vektorů lišících se o násobek normály k Σ. Stejně jako v předchozím případě se definiční obor a obor hodnot zobrazení π bodově rozšiřuje na vektorová pole a kontravariantní tensorová pole.
Přenosu forem a kovariantních tensorů z $\hat{\Sigma}$ do M docílíme analogicky.

Definice 1.7. Buď $\hat{\pi}$ zobrazení v libovolném bodě $q \in \hat{\Sigma}$ pro jednaformu $\hat{u}$ na $\hat{\Sigma}$ a vektorové pole v na M dáno vztahem

$$\hat{\pi} : T^*_q\hat{\Sigma} \to T^*_{\Phi(q)}\Phi(\hat{\Sigma}) = T^*_p\Sigma \subset T^*_pM$$

$$(\hat{\pi}\hat{u})v := \hat{u}(\pi v)$$

Uvedenou definici můžeme pochopitelně rozšířit na libovolný kovariantní tensor. Definice analogická k 1.6 s využitím pullbacku není možná, neboť ten není prostý. Zobrazení $\hat{\pi}$ naproti tomu jednoznačně určuje jednu z možných forem, jejichž pullback je původní argument. Zobrazení π a $\hat{\pi}$ tvoří spolu s pushforwardem Φ_* a pullbackem Φ^* nástroj umožňující přenos tensorů mezi $\hat{\Sigma}$ a M. Tato konstrukce umožňuje zavést přirozenou cestou některé objekty na Σ a při přiznání a zachování vlastní vnitřní struktury je zároveň nahlížet jako objekty na čtyřrozměrném obklopujícím prostoročase M.
Uvažujme libovolný tensor na M v $p \in \Sigma$ splňující

$$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l} = \gamma^{\alpha_1}{}_{\mu_1} \ldots \gamma^{\alpha_k}{}_{\mu_k} \gamma_{\beta_1}{}^{\nu_1} \ldots \gamma_{\beta_l}{}^{\nu_l} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \tag{1.2}$$

kde využíváme toho, že projektor γ jako zobrazení na tečném prostoru M v nějakém bodě p lze interpretovat také jako tensor druhého řádu (výsledkem projekce je vektor, jenž je zároveň

funkcionálem na prostoru forem, projektor je tudíž také jednou kovariantním, jednou kontravariantním tensorem), užít metriky k manipulaci s indexy a faktu, že projektor v plně kovariantním či plně kontravariantním tvaru je z definice symetrický.
Takový tensor T lze chápat rovněž jako tensor na $\hat{\Sigma}$ a naopak libovolný tensor na $\hat{\Sigma}$ jednoznačně určuje tensor na M. Formálně s využitím zobrazení definovaných výše pro T splňující (1.2) klademe

$$\hat{T}(\hat{u}^1, \ldots, \hat{u}^k, \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_l) := T(\hat{\pi}\hat{u}^1, \ldots, \hat{\pi}\hat{u}^k, \Phi_*\hat{v}_1, \ldots, \Phi_*\hat{v}_l) \tag{1.3}$$

pro vektorová pole $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_l$ a formy $\hat{u}^1, \ldots, \hat{u}^k$ na $\hat{\Sigma}$, čemuž je ekvivalentní v souřadniovém zápise působení pullbacku a zobrazení π na složky T

$$\hat{T}^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} := \pi^{a_1}{}_{\mu_1} \ldots \pi^{a_k}{}_{\mu_k} \frac{\partial \Phi^{\nu_1}}{\partial \hat{x}^{b_1}} \ldots \frac{\partial \Phi^{\nu_l}}{\partial \hat{x}^{b_l}} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \tag{1.4}$$

K tomuto vyjádření využíváme faktu, že $\pi \circ \Phi_* = id|_{T_q\hat{\Sigma}}$ a $\Phi^* \circ \hat{\pi} = id|_{T_q^*\hat{\Sigma}}$, což plyne přímo z definic zobrazení π, $\hat{\pi}$.
A naopak pro tensor $\hat{T}$ na $\hat{\Sigma}$ a vektorová pole $v_1, \ldots, v_l$ a formy $u^1, \ldots, u^k$ na M klademe

$$T(u^1, \ldots, u^k, v_1, \ldots, v_l) := \hat{T}(\Phi^* u^1, \ldots, \Phi^* u^k, \pi v_1, \ldots, \pi v_l) \tag{1.5}$$

nebo ekvivalentně pro složky tensoru

$$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l} := \pi^{m_1}{}_{\beta_1} \ldots \pi^{m_l}{}_{\beta_l} \frac{\partial \Phi^{\alpha_1}}{\partial \hat{x}^{n_1}} \ldots \frac{\partial \Phi^{\alpha_k}}{\partial \hat{x}^{n_k}} T^{n_1 \ldots n_k}{}_{m_1 \ldots m_l} \tag{1.6}$$

Explicitně jsme se určením složek zobrazení π, jichž zde využíváme, ještě nezabývali, proveďme proto krátkou diskusi.
V souřadnicovém zápise je vyjádření složek π náročné, omezme se proto stejně jako dříve na volbu souřadnic na M takovou, že skalární pole t tvoří první z nich. Z definice bychom psali

$$\pi^a{}_\beta = (\Phi_*^{-1})^a{}_\delta \gamma^\delta{}_\beta$$

kde $(\Phi_*^{-1})^a{}_\delta$ označuje složky inverse pushforwardu, ty však nejsou (na rozdíl od samotného zobrazení) určeny jednoznačně. Tečné zobrazení lze maticově reprezentovat prvkem $\mathbb{R}^{4\times 3}$, jakobiánem $\frac{\partial \Phi^\delta}{\partial \hat{x}^a}$, pro nějž platí

$$\frac{\partial \Phi^\delta}{\partial \hat{x}^a} = 0 \quad \text{pro} \quad \delta = 0$$

$$(J_{reg})^{\widetilde{\delta}}{}_a := \frac{\partial \Phi^{\widetilde{\delta}}}{\partial \hat{x}^a}, \quad \widetilde{\delta} \in \{1, 2, 3\} \quad \text{tvoří regulární podmatici} \quad \frac{\partial \Phi^\delta}{\partial \hat{x}^a}$$

Inverzní zobrazení k pushforwardu je proto v souřadnicích vyjádřitelné maticí $\mathbb{R}^{3\times 4}$, jejíž regulární podmaticí je inverze jakobiánu a zbylé tři složky (první sloupec) jsou libovolné. Na svém definičním oboru se tyto složky vždy násobí s nulovou složkou přenášeného vektoru. Složením s projektorem, pro nějž v našich souřadnicích platí

$$\gamma^0{}_\beta = 0$$

se tento problém eliminuje a souřadnicové vyjádření zobrazení π je jednoznačné.

$$\pi^a{}_0 = (J_{reg}^{-1})^a{}_b \gamma^b{}_0 = (J_{reg}^{-1})^a{}_b n^b n_0$$

kde přes b sčítáme od 1 do 3, a

$$\pi^a{}_{\widetilde{\beta}} = (J_{reg}^{-1})^a{}_{\widetilde{\beta}}, \quad \widetilde{\beta} \in \{1,2,3\}$$

Omezíme-li se na obor hodnot pushforwardu, potažmo ortogonální projekce, je do výpočtu obrazu při zobrazení π netriviálně vstupující částí jeho složkového vyjádření pouze inverze regulární podmatice jakobiánu určujícího tečné zobrazení, jak lze z definice očekávat. Zbylé složky jsou dány tvarem ortogonální projekce, vztahem výše.

Vraťme se k převodu tensorů mezi $\hat{\Sigma}$ a M. Předpisem (1.3) lze samozřejmě definovat tensor $\hat{T}$ na $\hat{\Sigma}$ pro libovolný tensor T na M, podmínka (1.2) pouze zaručuje, že nedojde ke ztrátě informace o $T|_\Sigma$. Obecně získáme pouze projekci původního tensoru, pro ty splňující (1.2) se ovšem jedná o bijekci. Každý takový tensor lze ekvivalentně nahlížet jako objekt na $\hat{\Sigma}$, i jako objekt na $\Sigma \subset M$. Tensory $\hat{T}$ na $\hat{\Sigma}$ a $T|_\Sigma$ na $\Sigma \subset M$ splňující (1.2) můžeme pomocí (1.3), (1.5) identifikovat a chápat jako dvě různé reprezentce téhož objektu (speciálním případem je identifikace vektorů na $\hat{\Sigma}$ s jejich pushforwardem a forem na $\Sigma \subset M$ s jejich pullbackem).
Splňuje-li tensor T podmínku dokonce v každém bodě M (pro příslušnou nadplochu jím procházející), je ekvivalentní jednoparametrické třídě tensorů $\hat{T}_s$ na nadplochách $\hat{\Sigma}_s$.
Diskusi, ač ne tolik detailní, tohoto přístupu lze nalézt rovněž v [8], [5]. Rovnocenným přístupem, který však nevystihuje topologickou strukturu globálně hyperbolického prostoročasu a nedává dobré zdůvodnění některým definicím, je uvažování všech objektů na Σ i nadplochy Σ samotné pouze jako definovaných na M, respektive pouze jako podmožiny M.

Definice 1.8. Indukovanou 3-metrikou (první fundamentální formou) $\hat{h}$ na $\hat{\Sigma}$ rozumíme pullback metriky g při vložení Φ

$$\hat{h} := \Phi^* g$$

Pomocí předpisu (1.5) ji reprezentujme jako tensor na Σ v M, pro $\forall p \in \Sigma \subset M, \forall u, v \in T_pM$

$$h(u,v) := \hat{h}(\pi u, \pi v) = \Phi^* g(\pi u, \pi v) = g(\underbrace{\Phi_* \pi}_{=\gamma} u, \underbrace{\Phi_* \pi}_{=\gamma} v) = g(\gamma u, \gamma v)$$

kde využíváme definice zobrazení π. V souřadnicovém zápise

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta \tag{1.7}$$

Z definice i souřadnicového zápisu je zřejmá symetrie $\hat{h}_{ab}$ i $h_{\alpha\beta}$. Indukovaná metrika také jako tensor na $\Sigma \subset M$ splňuje očekávané charakteristické vlastnosti, tj. ortogonalitu k normále ve smyslu

$$h_{\alpha\beta} n^\beta = g_{\alpha\beta} n^\beta + n_\alpha n_\beta n^\beta = n_\alpha - n_\alpha = 0$$

a redukci na 4-metriku pro vektory u, v tečné k Σ

$$h_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = \underbrace{g_{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \hat{x}^a} \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial \hat{x}^b}}_{=\hat{h}_{ab}} \hat{u}^a \hat{v}^b = \hat{h}_{ab} \hat{u}^a \hat{v}^b$$

Z charakteru nadploch Σ je $\hat{h}$ riemannovská (nedegenerovaná se signaturou $(+,+,+)$), její ekvivalent h na M je degenerovaná se signaturou $(3,0,1)$. Pro tensor na M mají dobrý smysl operace zvedání a snižování indexů pomocí metriky, ukažme vztah mezi $h_{\alpha\beta}$ a $h^{\beta\gamma}$.

$$h_{\alpha\beta} h^{\beta\gamma} = (g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta)(g^{\alpha\gamma} + n^\beta n^\gamma) = \delta_\alpha{}^\gamma + n_\alpha n^\gamma$$

Tudíž $h^{\beta\gamma}$ není inverzí $h_{\alpha\beta}$. Je však inverzí při zúžení na kotečný, respektive tečný prostor k Σ. Pro objekty tečné k Σ se $h_{\alpha\beta}$ chová jako metrika $g_{\alpha\beta}$, jak je ukázáno výše, a $h^{\alpha\beta}$ jako inverzní metrika $g^{\alpha\beta}$, obojí plyne triviálně z vyjádření (1.7). Pro takové objekty proto můžeme užít ke zvyšování a snižování indexů h namísto g, což je vlastně ekvivalentní užití indukované metriky $\hat{h}$ pro manipulaci s indexy třírozměrného vyjádření daného tensoru.
Poslední zajímavou vlastnost 3-metriky ukážeme srovnáním (1.7) a (1.1), odkud plyne, že roli ortogonálního projektoru γ hraje 3-metrika h se zvednutým indexem pomocí metriky g.

$$h^{\alpha}{}_{\beta} = \gamma^{\alpha}{}_{\beta}$$

Indukovaná metrika $\hat{h}$ na $\hat{\Sigma}$ s sebou nese rovněž strukturu Levi-Civitovy konexe. To umožňuje užít k popisu vnitřní geometrie nadplochy stejných prostředků jako pro M.

Definice 1.9. Buď $\hat{D}$ operátor kovariantní derivace daný Levi-Civitovou konexí na $\hat{\Sigma}$ s indukovanou metrikou $\hat{h}$ a D ekvivalentní operace na $\Sigma = \Phi(\hat{\Sigma})$ ve smyslu $\forall u, v$ vektorová pole na Σ, $u = \Phi_*\hat{u}$, $v = \Phi_*\hat{v}$, $\hat{u}, \hat{v}$ vektorová pole na $\hat{\Sigma}$,

$$D_u v := \Phi_*(\hat{D}_{\hat{u}}\hat{v}) = \Phi_*(\hat{D}_{\pi u}\pi v)$$

Stejným způsobem definujeme i čtyřrozměrný ekvivalent kovariantní derivace forem, tensorů vyšších řádů a operaci kovariantního gradientu. Pro úplnost ukažme platnost vztahu

$$D = \gamma\nabla \tag{1.8}$$

v tom smyslu, že rozšíření kovariantní derivace libovolného tensoru $\hat{T}$ v $\hat{\Sigma}$ z $\hat{\Sigma}$ na M je rovno projekci kovariantní derivace rozšířeného tensoru T v M. To plyne buď přímo z naší definice s využitím $\Phi_*\pi v = \gamma v$ a $(\hat{\pi}\Phi^* u)v = u(\gamma v)$ pro vektorové pole v a formu u na M, nebo z jednoznačnosti Levi-Civitovy konexe. Skutečně $\gamma\nabla$ přebírá definující vlastnosti konexe (linearitu, chování podle Leibnizova pravidla, komutaci s kontrakcemi i redukci na gradient pro skalární funkci), zůstává beztorzní a stačí tedy ukázat kompatibilitu s metrikou

$$\gamma(\nabla h) = h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}h^{\rho}{}_{\gamma}\nabla_{\rho}h_{\mu\nu} = h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}h^{\rho}{}_{\gamma}(\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} + n_{\nu}\nabla_{\rho}n_{\mu} + n_{\mu}\nabla_{\rho}n_{\nu}) = 0$$

z kompatibility konexe ∇ a platnosti $h^{\mu}{}_{\alpha}n_{\mu} = 0$.
Indukovaná metrika nahlížená jako vlastní charakteristika nadplochy Σ a s ní spojená struktura afinní konexe umožňují popis její vnitřní křivosti bez ohledu na způsob vložení do M. Za účelem charakterizace tohoto způsobu vložení Σ, tedy chování vůči struktuře definované přirozeně na M, musíme zavést další objekt, který nám umožní popsat geometrii Σ ve vztahu ke geometrii obklopujícího prostoročasu. Motivace takový objekt definovat je zřejmá také z možnosti vyjádření metriky a kovariantní derivace na Σ pomocí ortogonální projekce, která nutně zahazuje část informace o objektech a struktuře variety M.

Definice 1.10. Tensor vnější křivosti (druhou fundamentální formu) $\hat{K}$ na $\hat{\Sigma}$ definujeme jako zobrazení

$$\hat{K} : T_q\hat{\Sigma} \times T_q\hat{\Sigma} \to \mathbb{R}$$

$$\hat{K}(\hat{u}, \hat{v}) := -(\Phi_*\hat{u}) \cdot \nabla_{\Phi_*\hat{v}} n$$

kde tečka značí skalární součin na M. Ekvivalentní rozšíření na M v souladu s (1.5) je tensor

$$K : T_{\Phi(q)}M \times T_{\Phi(q)}M \to \mathbb{R}$$

$$K(u,v) = -(\gamma u)\cdot\nabla_{\gamma v} n$$

čemuž odpovídá v indexové notaci

$$K_{\alpha\beta} = -h^{\gamma}{}_{\alpha} h^{\delta}{}_{\beta} g_{\delta\epsilon} \nabla_{\gamma} n^{\epsilon} = -h^{\gamma}{}_{\alpha} h^{\delta}{}_{\beta} \nabla_{\gamma} n_{\delta}$$

Znaménko v definici je voleno dle konvence [4], [8], např. [5] volí znaménko opačně. Tensor vnější křivosti je symetrický, buď BÚNO $u = \gamma u$, $v = \gamma v$ dvě vektorová pole na M, potom

$$K(u,v) = -u\cdot\nabla_v n = -\nabla_v(\underbrace{u\cdot n}_{=0}) + n\cdot\nabla_v u = n\cdot([v,u] + \nabla_u v) =$$

$$= \underbrace{n\cdot[v,u]}_{=0} + \nabla_u(\underbrace{n\cdot v}_{=0}) - v\cdot\nabla_u n = K(v,u)$$

s využitím nulovosti torze Levi-Civitovy konexe a toho, že komutátor polí tečných k Σ je pole tečné k Σ, což plyne triviálně z možnosti tato pole nahlížet jako objekty na $\hat{\Sigma}$ (alternativně v [8] užitím Frobeniova teorému).
Druhá fundamentální forma charakterizuje, jak je nadplocha Σ zakřivena v M pomocí variace vnější normály při transportu podél vektorového pole na Σ, neboli odchylku vektoru tečného k Σ při paralelním přenosu v M. Pro libovolná dvě vektorová pole v, u na Σ, splňující $u \perp n$ a $v \perp n$, můžeme z definice K a pomocí (1.8) rozložit kovariantní derivaci ∇ do tečné a normálové složky

$$\nabla_u v = D_u v - K(u,v) n$$

Druhá fundamentální forma měří odchylku kovariantních derivací D a ∇.

1.2.2 Rozklad Riemannova tensoru

Riemannův tenzor budeme rozkládat na jeho projekce, normálové a tečné složky k Σ. Vícero obdobných postupů s různou mírou podrobnosti lze nalézt např. v [5], [8] a [4], a z této literatury také tato podkapitola vychází.
Za tímto účelem i v dalších výpočtech je výhodnější pracovat s 3-metrikou, tensorem vnější křivosti i kovariantní derivací na Σ v jejich vyjádření v podobě tensorů, respektive operace na M, stejně tak tomu je i u tensoru křivosti a jeho kontrakcí. Proto budeme tyto definovat rovnou jako objekty na M a pro rozlišení tensorů křivosti Σ a M užívat horních indexů ^{3} a ^{4}.

K zavedení Riemannova tensoru na Σ využijeme Ricciho identity. Pro libovolné vektorové pole v na Σ

$$^3R^{\gamma}{}_{\mu\alpha\beta} v^{\mu} = (D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha) v^{\gamma} \tag{1.9}$$

Vyjádřeme nejprve část pravé strany (1.9) dosazením z (1.8) a s využitím definice druhé fundamentální formy

$$D_\alpha(D_\beta v^\gamma) = h^{\delta}{}_{\alpha} h^{\epsilon}{}_{\beta} h^{\gamma}{}_{\kappa} \nabla_\delta (h^{\iota}{}_{\epsilon} h^{\kappa}{}_{\tau} \nabla_\iota v^\tau) =$$

$$= h^{\delta}{}_{\alpha} h^{\epsilon}{}_{\beta} h^{\gamma}{}_{\kappa} \left[\nabla_\gamma (g^{\iota}{}_{\epsilon} + n^\iota n_\epsilon) h^{\kappa}{}_{\tau} \nabla_\iota v^\tau + h^{\iota}{}_{\epsilon} \nabla_\delta (g^{\kappa}{}_{\tau} + n^\kappa n_\tau) \nabla_\iota v^\tau + h^{\iota}{}_{\epsilon} h^{\kappa}{}_{\tau} \nabla_\delta \nabla_\iota v^\tau\right] =$$

$$= -h^{\gamma}{}_{\tau} n^\iota K_{\alpha\beta} \nabla_\iota v^\tau + h^{\iota}{}_{\beta} K_{\alpha}{}^{\gamma} (-n_\tau \nabla_\iota v^\tau) + h^{\delta}{}_{\alpha} h^{\iota}{}_{\beta} h^{\gamma}{}_{\tau} \nabla_\delta \nabla_\iota v^\tau =$$

$$= -h^{\gamma}{}_{\tau} n^\iota K_{\alpha\beta} \nabla_\iota v^\tau - K_{\alpha}{}^{\gamma} K_{\beta\tau} v^\tau + h^{\delta}{}_{\alpha} h^{\iota}{}_{\beta} h^{\gamma}{}_{\tau} \nabla_\delta \nabla_\iota v^\tau$$

kde jsme v poslední rovnosti využili $-n_\tau \nabla_\iota v^\tau = v_\tau \nabla_\iota n^\tau$, protože $v^\tau n_\tau = 0$. Zaměníme $\alpha \leftrightarrow \beta$ a odečteme. První člen symetrický v α,β se vyruší, tvar druhého ponecháme, třetí členy při záměně indexů a odečtení představují projekci Ricciho identity pro Riemannův tensor na M určený konexí ∇. Vztah (1.9) tak přechází v tzv. Gaussovu rovnici obvykle uváděnou ve tvaru

$$h^\delta{}_\alpha h^\iota{}_\beta h^\gamma{}_\sigma h^\mu{}_\tau {}^4R^\sigma{}_{\mu\delta\iota} = {}^3R^\gamma{}_{\tau\alpha\beta} + (K_\alpha{}^\gamma K_{\beta\tau} - K_\beta{}^\gamma K_{\alpha\tau}) \tag{1.10}$$

Kontrakcemi můžeme vyjádřit rovněž vztahy pro Ricciho tensor a Ricciho skalár, jmenovitě kontrakcí v α,γ získáme

$$h^\mu{}_\tau h^\iota{}_\beta (g^\delta{}_\sigma + n^\delta n_\sigma)^4R^\sigma{}_{\mu\delta\iota} = {}^3R_{\tau\beta} + (K_\alpha{}^\alpha K_{\beta\tau} - K_\beta{}^\alpha K_{\alpha\tau})$$

Díky (1.7) jsme na pravé straně rovnice obdrželi skutečně kontrakci Riemannova tensoru v plné čtyřrozměrné podobě, a nikoli pouze kontrakci jeho projekce. Označíme $K = K^\alpha{}_\alpha$ stopu tensoru vnější křivosti. Kontrahovaná Gaussova rovnice přejde na tvar

$$h^\mu{}_\tau h^\iota{}_\beta {}^4R_{\mu\iota} + h^\mu{}_\tau h^\iota{}_\beta n^\delta n_\sigma {}^4R^\sigma{}_{\mu\delta\iota} = {}^3R_{\tau\beta} + (KK_{\beta\tau} - K_\beta{}^\alpha K_{\alpha\tau}) \tag{1.11}$$

Vztah pro Ricciho skalár získáme další kontrakcí, a to v τ,β. Po úpravách

$${}^4R + 2n^\delta n^\sigma {}^4R_{\delta\sigma} = {}^3R + K^2 - K^{\alpha\tau} K_{\alpha\tau} \tag{1.12}$$

Tento vztah dávající do souvislosti vnitřní křivost charakterizovanou Ricciho skalárem a vnější křivost popsanou druhou fundamentální formou je mj. někdy popisován jako zobecnění Gaussova slavného Theorema egregium[2] ([8]).
Další z projekcí Riemannova tensoru získáme aplikováním Ricciho identity na normálový vektor n^γ a následnou projekcí na Σ.

$$\begin{aligned} & h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta h^\gamma{}_\xi \nabla_\mu \nabla_\nu (g^{\xi\rho} n_\rho) = \\ &= h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta h^\gamma{}_\xi g^{\xi\rho} \nabla_\mu (g_\nu{}^\sigma g_\rho{}^\tau \nabla_\sigma n_\tau) = \\ &= h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta h^\gamma{}_\xi \nabla_\mu (-K_\nu{}^\xi - n_\nu a^\xi) \\ &= -D_\alpha K_\beta{}^\gamma + K_{\alpha\beta} a^\gamma \end{aligned}$$

Kde jsme opět využili (1.7) a označili $a^\tau = n^\sigma \nabla_\sigma n^\tau$. Platí $a \perp n$, protože $0 = \nabla_n (n \cdot n) = (a \cdot n + n \cdot a)$. n jako jednotkový časupodobný vektor lze interpretovat jako čtyřrychlost a a jako příslušné čtyřzrychlení. Záměnou $\alpha \leftrightarrow \beta$ (nebo ekvivalentně $\mu \leftrightarrow \nu$) a odečtením získáváme s využitím symetrie druhé fundamentální formy tzv. Codazziho (v literatuře někdy také jako Codazziho-Mainardiho) rovnici)

$$h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta h^\gamma{}_\xi n^\rho {}^4R^\xi{}_{\rho\mu\nu} = D_\beta K_\alpha{}^\gamma - D_\alpha K_\beta{}^\gamma \tag{1.13}$$

Obdobně jako u Gaussovy rovnice provedeme ještě kontrakci v α,γ

$$h^\nu{}_\beta n^\rho {}^4R_{\rho\nu} = D_\beta K - D_\alpha K_\beta{}^\alpha \tag{1.14}$$

[2]Pro vložení dvourozměrné plochy do třírozměrného Eukleidovského prostoru je levá strana identicky nulová (jeho křivost je nulová) a pravou lze zjednodušit diagonalizací druhé fundamentální formy. Po úpravách přejde na tvar $R = 2\kappa_1\kappa_2$ (κ_i značící hlavní křivosti).

Posledním bodem projekce je dvojnásobná projekce Riemannova tensoru podél normály n ve druhém a čtvrtém indexu a projekce na Σ v ostatních. Opět vyjdeme z Ricciho identity a využijeme stejných vztahů a značení jako výše.

$$n^\mu n^\beta h^\gamma{}_\delta h^\epsilon{}_\alpha {}^4R^\delta{}_{\mu\epsilon\beta} =$$
$$= n^\beta h^\gamma{}_\delta h^\epsilon{}_\alpha \left[\nabla_\epsilon(-K_\beta{}^\delta - n_\beta a^\delta) - \nabla_\beta(-K_\epsilon{}^\delta - n_\epsilon a^\delta)\right] =$$
$$= -K_\alpha{}^\sigma K_\sigma{}^\gamma + D_\alpha a^\gamma + a_\alpha a^\gamma + h^\gamma{}_\delta h^\epsilon{}_\alpha n^\beta \nabla_\beta K_\epsilon{}^\delta$$

kde jsme v druhé rovnosti využili $n^\beta K_\beta{}^\delta = 0$. Pro vyjádření posledního členu v elegantnějším tvaru využijeme projekce Lieovy derivace K podle n.

$$\mathcal{L}_n K_\alpha{}^\gamma = h^\gamma{}_\delta h^\epsilon{}_\alpha n^\beta \nabla_\beta K_\epsilon{}^\delta$$

Výsledná rovnice bývá (např. [8], v odlišném, ale ekvivalentním tvaru) označována jako Ricciho.

$$n^\mu n^\beta h^\gamma{}_\delta h^\epsilon{}_\alpha {}^4R^\delta{}_{\mu\epsilon\beta} = \mathcal{L}_n K_\alpha{}^\gamma - K_\alpha{}^\sigma K_\sigma{}^\gamma + D_\alpha a^\gamma + a_\alpha a^\gamma \tag{1.15}$$

Kontrací a úpravou přechází na tvar

$$n^\mu n^\beta {}^4R_{\mu\beta} = K^2 - K_\alpha{}^\sigma K_\alpha{}^\sigma + \nabla_\alpha a^\alpha - \nabla_\alpha(n^\alpha \nabla_\beta n^\beta) \tag{1.16}$$

Díky symetriím Riemannova tensoru tvoří Gaussova (1.10), Codazziho (1.13) a Ricciho (1.15) rovnice úplný rozklad Riemannova tensoru. Skutečně, průmět podle normálové složky n v libovolných třech indexech je z antisymetrie tensoru křivosti v prvních dvou a posledních dvou indexech identicky nulový, díky symetrii vůči záměně prvního a druhého s třetím a čtvrtým indexem a zmíněným antisymetriím se pak ostatní projekce jednou, potažmo dvakrát podle n buď liší od pravé strany Gaussovy, potažmo Codazziho rovnice nejvýše o znaménko, nebo jsou identicky rovny nule. Závěrem je, že křivost prostoročasu M reprezentovaná Riemannovým tensorem je plně popsána vnitřní geometrií jednotlivých prostorupodobných řezů Σ_s a tensorem vnější křivosti K každého z nich.

1.3 Volba souřadnicového systému

1.3.1 Souřadnice podle ADM

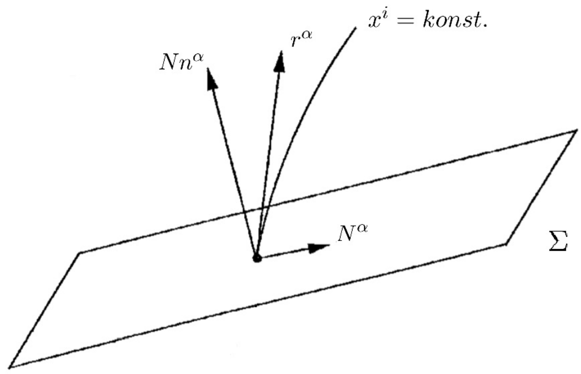
V této podkapitole představíme možnosti volby vhodného souřadnicového systému pro ADM formulaci a odpovídající v literatuře užívané názvosloví. Definicemi a formou budeme pro názornost vycházet primárně z [4], [5], ekvivalence s původním zavedením ADM v [3], [2] bude zdůvodněna.
Zvolme vektorové pole r^α (označované jako pole časového vývoje) splňující $r^\alpha \nabla_\alpha t = 1$. Rozložíme jej na tečnou a normálovou složku k Σ.

Definice 1.11. Nechť je funkce N (*lapse function*) dána vztahem

$$N := -n_\mu r^\mu$$

[pro naši volbu orientace normály $N = (-\nabla t \cdot \nabla t)^{-\frac{1}{2}}$] a vektorové pole posunutí N^α (*shift vector*) vztahem

$$N^\alpha := h^\alpha{}_\mu r^\mu$$



Obrázek 1.1: Funkce N a vektor N^i, převzato z [9] a upraveno.

Můžeme interpretovat t jako časovou souřadnici[3] a r^α jako pole představující tok času. Identifikujeme-li nadplochy Σ_{s_0}, Σ_s pomocí difeomorfismu daného tokem vektorového pole r^α, můžeme na posun podél integrálních křivek r^α nahlížet jako na časovou změnu riemannovské metriky $h_{\alpha\beta}$ na dané prostorupodobné varietě Σ. V této interpretaci představuje globálně hyperbolický prostoročas reprezentaci časového vývoje metriky na fixní prostorupodobné varietě.

S využitím rozkladu $r^\alpha = Nn^\alpha + N^\alpha$ můžeme napsat složky inverzní 4-metriky $g^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta$

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{N^2}\begin{pmatrix} -1 & N^j \\ N^i & h^{ij} - N^i N^j \end{pmatrix}$$

a k ní nalezneme inverzi

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} N_k N^k - N^2 & N_j \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Z Cramerova pravidla plyne okamžitě

$$\det g = -N^2 \det h \tag{1.18}$$

Zde poznamenejme, že původní zavedení N a N^i podle ADM v [3], [2] je právě pomocí složek inverzní metriky $g^{\alpha\beta}$. Rozklad pole r^α lze v tomto případě brát jako definující předpis pro toto pole a oba přístupy zekvivalentnit.
Zvolme libovolně souřadnicovou bázi na Σ a můžeme psát

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -N^2 dt^2 + h_{\alpha\beta}(dx^\alpha + N^\alpha dt)(dx^\beta + N^\beta dt)$$

[3] Neměřící obecně vlastní čas žádného pozorovatele.

Odtud je již patrný fyzikální význam funkce N a pole N^α. Funkce N vyjadřuje vztah mezi přírůstkem souřadnicového času t a vlastního času τ.

$$d\tau = Ndt$$

Vektor posunutí N^α udává, jak se vyvíjí prostorový souřadnicový systém mezi dvěma blízkými nadplochami Σ_s při cestě po normále (škálované funkcí N) namísto integrálních křivek r^α, jeho norma odpovídá přírůstku vlastní vzdálenosti pozorovatele nehybného z hlediska souřadnic na Σ.
Vyjádřili jsme tedy prostoročasovou metriku $g_{\alpha\beta}$ pomocí 3-metrik h_{ij}, funkce N a vektorového pole N^i. Tvar (1.17) se v literatuře obvykle označuje jako ADM dekompozice metriky.

Z definice (1.3) a (1.11) snadno vyjádříme rovněž ještě složky normálového vektoru

$$n = \left(\frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N}\right) \tag{1.19}$$

Na závěr dodejme, že volba funkce N a vektorového pole N^α, jež odpovídá volbě skalárního pole t (tvrzení 1.1.1 pouze garantuje jeho existenci, určeno je nejednoznačně, lze např. libovolně škálovat) a pole časového vývoje r^α, tedy zavedení souřadnicových čar a časové souřadnice t, je v rámci podmínky na prostorupodobný charakter nadploch Σ_s libovolná. Lze říci, že představuje volbu difeomorfismu identifikujícího nadplochy Σ_s.
Zcela ekvivalentními kroky jsou proto volba nějakého souřadnicového systému (t, x^i) na M takového, že nadplochy $t(\Sigma) = konst.$ jsou Cauchyho, a volba funkce N a vektorového pole N^α (na $\Sigma \times \mathbb{R}$) spolu se souřadnicovým systémem na jedné nadploše Σ.

Abychom předešli nejasnostem, uveďme, že budeme nadále pod časovým vývojem libovolné tensorové veličiny rozumět její vývoj podél integrálních křivek vektorového pole r^α. Časovou derivací tak rozumíme Lieovu derivace podle r^α, čemuž ve zvoleném souřadnicovém systému (t, x^i) odpovídá parciální derivace podle t.

1.3.2 Křivost v proměnných (h_{ij}, N, N^i)

Z rozkladu metriky (1.17) je zřejmé, že (h_{ij}, N, N^i) obsahují stejnou informaci jako prostoročasová metrika $g_{\alpha\beta}$. Díky tomu, že pracujeme s Levi-Civitovou konexí, jsou koeficiety afinní konexe jednoznačně určené a vyjádřitelné pomocí derivací metrického tensoru, a pomocí Christoffelových symbolů a jejich derivací lze zase vyjádřit Riemannův tensor křivosti. Za nové proměnné lze tudíž zvolit (h_{ij}, N, N^i) namísto metriky $g_{\alpha\beta}$ a pomocí nich a jejich prvních a druhých časových derivací plně popsat křivost prostoročasu.
Tato přímá cesta je ovšem výpočetně náročná a nenázorná. V kapitole (1.2.2) jsme ukázali, že geometrie prostoročasu je plně popsána přirozenými objekty 3-metrikou h_{ij} a tensorem vnější křivosti K_{ij}. Vyjádřeme proto druhou fundamentální formu v řeči nově zavedených proměnných, a to pomocí Lieovy derivace 3-metriky $h_{\alpha\beta}$ podle normálového pole n^α.

$$\mathcal{L}_n h_{\alpha\beta} = n^\mu \nabla_\mu h_{\alpha\beta} + h_{\mu\beta}\nabla_\alpha n^\mu + h_{\alpha\mu}\nabla_\beta n^\mu =$$
$$= n^\mu \nabla_\mu (n_\alpha n_\beta) + h_{\mu\beta}(-K_\alpha{}^\mu - n_\alpha a^\mu) + h_{\alpha\mu}(-K_\beta{}^\mu - n_\beta a^\mu) =$$
$$= -2K_{\alpha\beta}$$

a tedy platí

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{\alpha\beta} \tag{1.20}$$

Dosazením za $n^\alpha = \frac{1}{N}(r^\alpha - N^\alpha)$ a přepsáním Lieovy derivace pomocí kovariantí získáváme

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2N}\left(-\mathcal{L}_r h_{\alpha\beta} + D_\alpha N_\beta + D_\beta N_\alpha\right) \tag{1.21}$$

Z této rovnice je explicitně patrné, co jsme již ukázali v sekci (1.2.2), a to že druhá fundamentální forma popisuje, jak se prostorová část metriky mění na okolí nadplochy Σ, nebo-li že obsahuje informaci o časovém vývoji metriky na této třírozměrné prostorupodobné varietě[4].

[4] Ve vhodných souřadnicích se dokonce redukuje na její záporně vzatou časovou derivaci.

Kapitola 2

Lagrangeovská formulace

2.1 Variační princip v obecné teorii relativity

V této kapitole se budeme zabývat možností odvození Einsteinových polních rovnic z variačního principu, který v kapitole následující poslouží jako výchozí bod pro přechod k hamiltonovské formulaci. Pro zjednodušení budeme popisovat vakuový prostoročas a neuvažovat kosmologický člen. Vycházet budeme především z [10], obdobné přístupy lze však nalézt v mnoha jiných klasických dílech obecné relativity, jako např. [4], [5] nebo [11], blíže téma rozebírá [12]. Budeme postupovat analogicky ke klasické mechanice, elektromagnetismu aj., a to postulováním principu extremalizace akce. Pro popis čistě geometrie prostoročasu bez přtomnosti hmoty a energie klademe Hilbertovu (též Einsteinovu-Hilbertovu) akci

$$S_H = \int R\sqrt{-g}\, d^4x \tag{2.1}$$

kde $g = \det g$ označuje determinant metriky a $R = {}^4R$ Ricciho skalár (v této kapitole budeme pracovat pouze s $R = {}^4R$ a index ve značení vynechávat).

Jedná se o nejjednodušší volbu vyhovující principu obecné kovariance, Ricciho křivost je jedinečným skalárem sestrojitelným pouze z nejvýše druhých derivací metriky. Motivováni definujícím vztahem $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ uvažujme pro zjednodušení výpočtů namísto variací metriky variace inverzní metriky $\delta g^{\alpha b}$, díky vzájemnému vztahu

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\,\delta g_{\gamma\delta}$$

plynoucímu z nulové variace identity nemá volba mezi metrikou a její inverzí vliv na výsledné pohybové rovnice. Při diskusi hraničních členů budeme pak pro přehlednost pracovat s variacemi Christoffelových symbolů indukovaných variací metriky. V návaznosti na klasickou mechaniku, kde je obvyklé požadovat variaci s pevnými konci, klademe požadavek na nulovou variaci metriky na hranici, tedy Dirichletovy okrajové podmínky.
Označme M prostoročasovou oblast. S využitím

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\beta}$$

můžeme psát

$$\delta S_H = \int_M -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\beta}\,R + \sqrt{-g}R_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\,\delta R_{\alpha\beta}\,d^4x =$$

$$= \int_M \sqrt{-g}\left[\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\right)\delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\,\delta R_{\alpha\beta}\right] d^4x \tag{2.2}$$

První část lagrangiánu vede na vakuové polní rovnice, ukažme, že poslední člen je divergencí. Kontrakcí Ricciho identity zapsané pomocí Christoffelových symbolů vyjádříme Ricciho tensor

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} \tag{2.3}$$

Variací obdržíme

$$\delta R_{\alpha\beta} = \delta\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta\,,\mu} - \delta\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu\,,\beta} + \delta\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\,\delta\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha} - \delta\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}\,\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} \tag{2.4}$$

Zde je důležité, že ačkoli Christoffelovy symboly nejsou tensory, jejich variace ano, kovariantní derivace $\delta\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ je proto dobře definována. Rozdíl dvou konexí je tensorem a variace Christoffelových symbolů odpovídá rozdílu dvou blízkých konexí, netensorový člen objevující se při souřadnicové transformaci koeficientů afinní konexe se při variaci vyruší. Detailnější zdůvodnění lze nalézt např. v [10]. Lze se o tom přesvědčit také explicitním vyjádřením této variace pomocí metriky, vyjdeme z

$$\nabla_\mu\,\delta g_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta\,,\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}\,\delta g_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}\,\delta g_{\alpha\nu}$$

s využitím Leibnizova pravidla a záměnnosti variace s parciální derivací

$$\nabla_\mu\,\delta g_{\alpha\beta} = \delta(\underbrace{g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}}_{\nabla_\mu g_{\alpha\beta}=0}) + \delta\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}\,g_{\nu\beta} + \delta\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}\,g_{\alpha\nu}$$

Permutací indexů α, β, μ, sečtením dvou a odečtením třetí rovnice získáme díky symetrii dané beztorsností vztah pro variaci Christoffelova symbolu, po kontrakci metrikou a úpravě

$$\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\mu}\left(\nabla_\beta g_{\mu\alpha} - \nabla_\mu g_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha g_{\beta\mu}\right) \tag{2.5}$$

S touto znalostí se vraťme k úpravě variace Ricciho tensoru. První, čtvrtý, pátý a šestý člen rovnice (2.4) tvoří dohromady rozepsání kovariantní derivace, stejně tak druhý a třetí. Rovnost přechází do tvaru

$$\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\mu\,\delta\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \nabla_\beta\,\delta\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu}$$

Naším cílem je určit vztah pro kontrakci

$$g^{\alpha\beta}\,\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\mu\left(g^{\alpha\beta}\,\delta\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\right) - \nabla_\beta\left(g^{\alpha\beta}\,\delta\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu}\right) = \nabla_\mu\left(g^{\alpha\beta}\,\delta\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}\,\delta\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}\right)$$

Díky kompatibilitě konexe s metrikou je poslední část variace hustoty lagrangiánu Hilbertovy akce kovariantní divergencí. Pokračujme však v úpravě dosazením z (2.5), získáváme finální tvar

$$g^{\alpha\beta}\,\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\mu\left[\left(g^{\alpha\beta}g^{\mu\delta} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\delta}\right)\nabla_\alpha\,\delta g_{\beta\delta}\right] \tag{2.6}$$

Variace Hilbertovy akce (2.2) přechází na

$$\delta S_H = \int_M \sqrt{-g}\left[\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\right)\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\mu\left(g^{\alpha\beta}g^{\mu\delta} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\delta}\right)\nabla_\alpha\,\delta g_{\beta\delta}\right] d^4x \tag{2.7}$$

K následující úpravě využijeme speciálního případu Stokesovy věty. Pro oblast M a vektorové pole v^μ na M platí

$$\int_M \sqrt{-g}\;\nabla_\mu v^\mu\;d^n x = \int_{\partial M} \sqrt{h}\;n_\mu v^\mu\;d^{n-1}x$$

kde h je indukovaná metrika na hranici a $n_\mu = n^\nu g_{\nu\mu}$ jednaforma příslušná normálovému vektoru k hranici ∂M orientovanému ven z oblasti. Důkaz pomocí klasické Stokesovy věty pro integraci forem a varianta pro tensor druhého řádu je k nalezení v [13]. Člen kovariantní divergence v (2.7) tak převedeme na integrál přes hranici

$$\delta S_H = \int_M \sqrt{-g}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\right)\delta g^{\alpha\beta}\, sd^4x + \int_{\partial M}\sqrt{h}\; n_\mu\left(g^{\alpha\beta}g^{\mu\delta} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\delta}\right)\nabla_\alpha\,\delta g_{\beta\delta}\, d^3x$$

se zachováním značení výše. Zvednutím indexu u n_μ a rozepsáním metriky pomocí projekce $g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta$ přejde integrál na hranici na

$$\int_{\partial M}\sqrt{h}\left(n^\delta h^{\alpha\beta} - n^\alpha h^{\beta\delta}\right)\nabla_\alpha\,\delta g_{\beta\delta}\, d^3x = \int_{\partial M} -\sqrt{h}\, h^{\beta\delta}n^\alpha\,\delta g_{\beta\delta\,,\alpha} d^3x \tag{2.8}$$

Po dosazení za metriku se členy se třemi normálami odečtou, následně užijeme Dirichletovy okrajové podmínky. Nulová variace metriky na hranici implikuje také nulovost derivací těchto variací v tečném směru k ∂M, což vynuluje první člen, a ze stejného důvodu platí $-\sqrt{h}\, h^{\beta\delta}n^\alpha\nabla_\alpha\,\delta g_{\beta\delta}\,|_{\partial M} = -\sqrt{h}\, h^{\beta\delta}n^\alpha\,\delta g_{\beta\delta\,,\alpha}|_{\partial M}$. Derivace metriky ve směru normály k hranici je však obecně nenulová a předpoklad vymizení také této derivace by odpovídal současnému vyžadování Dirichletových i von Neumannových okrajových podmínek. Což je sice principiálně možné, ale klade na připouštěné variace metriky nadbytečná omezení.

Za daných předpokladů tedy z variace Hilbertovy akce Einsteinovy polní rovnice neplynou, díky přítomnosti okrajového členu není dokonce funkcionál akce ani diferencovatelný ([10]). Proto se obvykle k Hilbertově akci přidává hraniční člen, jehož variace nežádoucí člen eliminuje, jenž ale nijak neovlivní výsledné pohybové rovnice. Možný hraniční člen lze získat kontrakcí a úpravou vyjádření Ricciho skaláru (2.3), konkrétně

$$\begin{aligned}
R &= g^{\alpha\beta}\left({\Gamma^\mu}_{\alpha\beta,\mu} - {\Gamma^\mu}_{\alpha\mu,\beta} + {\Gamma^\mu}_{\mu\nu}{\Gamma^\nu}_{\beta\alpha} - {\Gamma^\mu}_{\beta\nu}{\Gamma^\nu}_{\mu\alpha}\right) = \\
&= \left(g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}\right)_{,\mu} + \left({\Gamma^\alpha}_{\nu\mu}g^{\nu\beta} + {\Gamma^\beta}_{\nu\mu}g^{\alpha\nu}\right){\Gamma^\mu}_{\alpha\beta} - \left(g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\alpha\mu}\right)_{,\beta} - \left({\Gamma^\alpha}_{\nu\beta}g^{\nu\beta} + {\Gamma^\beta}_{\nu\beta}g^{\alpha\nu}\right){\Gamma^\mu}_{\alpha\mu} + \\
&\quad + g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\mu\nu}{\Gamma^\nu}_{\beta\alpha} - g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\beta\nu}{\Gamma^\nu}_{\mu\alpha} = \\
&= \nabla_\mu\left(g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}\right) - \nabla_\beta\left(g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\alpha\mu}\right) + g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\beta\nu}{\Gamma^\nu}_{\mu\alpha} - g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\mu\nu}{\Gamma^\nu}_{\beta\alpha}
\end{aligned}$$

V prvním kroku přepisujeme derivaci pomocí Leibnizova pravidla a za derivaci metriky dosazujeme ${g^{\alpha\beta}}_{,\mu} = -{\Gamma^\alpha}_{\nu\mu}g^{\nu\beta} - {\Gamma^\beta}_{\nu\mu}g^{\alpha\nu}$ díky kompatibilitě metriky s konexí $\nabla_\mu g^{\alpha\beta} = 0$. V druhém kroku využíváme toho, že $g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}$ a $g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\alpha\mu}$ jsou tensory, ačkoli samotné Christoffelovy symboly nikoli. Člen divergence vyšetříme opět pomocí Stokesovy věty. Dosazením derivací metriky za Christoffelovy symboly a úpravami získáme

$$\begin{aligned}
&\int_M \sqrt{-g}\left[\nabla_\mu\left(g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}\right) - \nabla_\beta\left(g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\alpha\mu}\right)\right] d^3x = \\
&= \int_{\partial M}\sqrt{h}\left[n_\mu\left(g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}\right) - n_\beta\left(g^{\alpha\beta}{\Gamma^\mu}_{\alpha\mu}\right)\right] d^3x = \\
&= \int_{\partial M} -\sqrt{h}g^{\alpha\beta}n^\delta g_{\alpha\beta,\delta} + \sqrt{h}n^\delta g^{\alpha\beta}g_{\delta\alpha,\beta}\; d^3x = \\
&= \int_{\partial M} -\sqrt{h}h^{\alpha\beta}n^\delta g_{\alpha\beta,\delta} + \sqrt{h}n^\delta h^{\alpha\beta}g_{\delta\alpha,\beta}\; d^3x
\end{aligned}$$

Odečteme-li tento hraniční člen od Hilbertovy akce, dojde při variaci metriky k odečtení nežádoucího členu (2.8) a zůstanou pouze sčítance závislé na variaci metriky $g_{\alpha\beta}$ a jejích prostorových derivacích, které vymizí díky okrajové podmínce. Akce s odečtenou divergencí

$$S_E = \int_M \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \left(\Gamma^\mu{}_{\beta\nu} \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\mu\nu} \Gamma^\nu{}_{\beta\alpha} \right) \tag{2.9}$$

se v literatuře obvykle označuje jako Einsteinova a její variace vede na vakuové polní rovnice

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0$$

2.2 Gibbonsův-Hawkingův-Yorkův člen a standardní akce

Nevýhoda přidání výše zmíněného členu do Hilbertovy akce za cílem získání akce Einsteinovy tkví v jeho nekovariantnosti vůči souřadnicovým transformacím, pročež se většinou využívá toho, že člen upravující akci na požadované vlastnosti je určen nejednoznačně. Akci je možné stále rozšířit o libovolné další prvky, jejichž variace při Dirichletových okrajových podmínkách vymizí, speciálně o cokoli závisejícího pouze na vnitřní geometrii hranice ∂M, aniž by došlo k ovlivnění výsledných polních rovnic. Jako preferovaný hraniční člen je nejčastěji uváděn tzv. Gibbonsův-Hawkingův-Yorkův člen, mající oproti jiným možnostem konkrétní geometrický význam.

$$S_{GHY} = -2 \int_{\partial M} \sqrt{h} K d^3x \tag{2.10}$$

$K = h^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$ označuje stopu tensoru vnější křivosti. Že se jedná o vhodnou modifikaci Hilbertovy akce ukážeme pomocí (1.20). Rozvinutím

$$\begin{aligned} K = h^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \mathcal{L}_n h_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \mathcal{L}_n g_{\alpha\beta} = \\ &= -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \left(n^\mu g_{\alpha\beta,\mu} + n^\mu{}_{,\alpha} g_{\mu\beta} + n^\mu{}_{,\beta} g_{\alpha\mu} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} n^\mu g_{\alpha\beta,\mu} - h^{\alpha\beta} g_{\beta\mu} n^\mu{}_{,\alpha} \end{aligned}$$

a dosazením zpět do (2.10)

$$S_{GHY} = \int_{\partial M} \sqrt{h} h^{\alpha\beta} n^\mu g_{\alpha\beta,\mu} + 2 h^\alpha{}_\mu n^\mu{}_{,\alpha} d^3x$$

První člen vyruší nežádoucí normálovou derivaci (2.8) a zbytek je funkcí pouze metriky $g_{\alpha\beta}$, bude tedy při variaci vynulován okrajovou podmínkou. Tím jsme ukázali, že Gibbonsův-Hawkingův-Yorkův člen je vhodným hraničním členem. Spolu s Hilbertovou akcí tvoří standardní akci pro popis gravitačního pole $S \coloneqq S_H + S_{GHY}$

$$S = \int_M \sqrt{-g} R d^4x - 2 \int_{\partial M} \sqrt{h} K d^3x \tag{2.11}$$

Kapitola 3

Hamiltonovská formulace

V následujících úvahách zůstaneme omezeni na vakuový prostoročas a nebudeme uvažovat kosmologickou konstantu, vyjdeme stejně jako v případě lagrangeovského formalismu z Hilbertovy akce (2.1).

3.1 Rozklad lagrangiánu

Prvním krokem pro přechod k ADM formulaci je rozklad prostoročasu do prostorové a časové složky, 3+1 formalismu, který jsme připravili v kapitole 1. Začneme rozkladem Hilbertovy akce. Dosazením do kontrahované Gaussovy rovnice (1.12) z kontrakce Ricciho rovnice (1.16) lze vyjádřit skalární křivost ${}^4R$ představující hustotu lagrangiánu ve tvaru

$$ {}^4R = {}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 - 2\nabla_\alpha\left(-n^\alpha\nabla_\beta n^\beta + n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right) \tag{3.1} $$

Až na člen divergence můžeme díky tomu lagrangián rozložit na "potenciální" část reprezentovanou skalární křivostí ${}^3R$ závisející pouze na metrice h_{ab} a jejích prostorových derivacích a na "kinetickou"část kvadratickou v tensoru vnější křivosti K_{ab}, K závisející dle (1.21) na funkci N, vektoru N^i a metrice h_{ab} a jejích derivacích, včetně časové.

Poslední člen je kovariantní divergencí a při výpočtu akce se použitím Stokesova teorému redukuje na integrál přes hranici. Zde je nutné se na chvíli zastavit u toho, co vlastně tvoří hranici ∂M. V literatuře častým přístupem je zjednodušení v podobě požadavku, aby nadplochy Σ byly uzavřenými varietami nemajícími hranici (připomeňme, že $M = \Sigma \times \mathbb{R}$). Hranice ∂M se tím omezí pouze na počáteční a koncovou nadplochu Σ_p, Σ_k a veškeré kovariantní divergence na Σ objevující se dále ve výpočtech mohou být zanedbány, díky Stokesově větě přechází na integrál přes prázdnou množinu, respektive integrál takové divergence je identicky nulový. V tomto případě platí pro okrajový člen

$$ -2\int_M \sqrt{-g}\nabla_\alpha\left(-n^\alpha\nabla_\beta n^\beta + n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right)d^4x = $$

$$ = 2\int_{\Sigma_p}\sqrt{h}n_\alpha\left(-n^\alpha\nabla_\beta n^\beta + n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right)d^3 - 2\int_{\Sigma_k}\sqrt{h}n_\alpha\left(-n^\alpha\nabla_\beta n^\beta + n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right)d^3x = $$

$$ = 2\int_{\partial M}\sqrt{h}Kd^3x $$

s využitím $n_\alpha n^\beta\nabla_\beta n^\alpha = \frac{1}{2}n^\beta\nabla_\beta(n_\alpha n^\alpha) = 0$ a toho, že normálový vektor k hranici ∂M je normálovým vektorem k nadplochám Σ. Rozepsání integrace je zde uvedeno pro vyjasnění situace se znaménky, záporné znaménko dané tím, že na nadploše Σ_p vnější normála z hlediska M míří opačným směrem než definovaný normálový vektor mířící ve směru růstu časové souřadnice, odpovídá orientaci této nadplochy při integraci přes ∂M. Člen divergence v lagrangiánu je po redukci na integrál přes hranici roven záporně vzatému Gibbonsovu-Hawkingovu-Yorkovu členu (2.10) představenému v předchozí kapitole. To je další motivací pro jeho zavedení a uvažování standardní akce $S = S_H + S_{GHY}$ namísto Hilbertovy, hraniční integrály se potom vzájemně vyruší. Dále proto klademe akci (2.11). Za objemový element $\sqrt{-g}$ dosazujeme z (1.18). Výsledek, označovaný někdy také jako Arnowittova-Deserova-Misnerova akce, je tvaru

$$S_{ADM} = \int \sqrt{-g}\left({}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2\right) d^4x = \int L\, ds = \int \mathscr{L} d^4x \tag{3.2a}$$

Pro parametrizaci nadploch užíváme proměnné s namísto tradičního t označujícího časovou souřadnici, abychom zachovali konzistentnost značení s první kapitolou. Odpovídající lagrangián

$$L_{ADM} = \int \sqrt{h}N\left({}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2\right) d^3x \tag{3.2b}$$

potažmo jeho hustota

$$\mathscr{L}_{ADM} = \sqrt{h}N\left({}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2\right) \tag{3.2c}$$

Je však možné volit obecnější přístup (jako např. [12], [9]), tedy připustit kromě počáteční a koncové nadplochy ještě existenci propojující časupodobné hranice H, rozdělené řezy Σ_s na dvourozměrné plochy $S_s = \partial\Sigma_s$. Označme[1] $\mathscr{K}$ tensor vnější křivosti na H, $\mathscr{h}_{\alpha\beta}$ indukovanou metriku tamtéž, e^α normálové vektorové pole k H směřující ven z M a $\sigma_{\alpha\beta}$ indukovanou metriku na S. Člen divergence v (3.1) nyní přispívá do akce navíc integrálem

$$\begin{aligned} -2\int_H \sqrt{-\mathscr{h}}\;\; e_\alpha\left(-n^\alpha\nabla_\beta n^\beta + n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right) d^3x &= \\ = -2\int_H \sqrt{-\mathscr{h}}\;\; e_\alpha n^\beta \nabla_\beta n^\alpha d^3x &= \\ = 2\int_H \sqrt{-\mathscr{h}}\;\; n^\alpha n^\beta \nabla_\beta e_\alpha d^3x & \end{aligned}$$

s využitím $\partial^2 = 0$ a rovnosti $e_\alpha n^\alpha = 0$ díky ortogonalitě Σ a n^α. Upravíme integrand s použitím vztahů

$$\mathscr{h}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - e_\alpha e_\beta$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - e_\alpha e_\beta = \mathscr{h}_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta$$

$$\sqrt{-\mathscr{h}} = N\sqrt{\sigma}$$

$$\mathscr{K} = \mathscr{h}^{\alpha\beta}\mathscr{K}_{\alpha\beta} = \mathscr{h}^{\alpha\beta}\nabla_\beta e_\alpha$$

a sečteme s příspěvkem Gibbonsova-Hawkingova-Yorkova členu.

$$2\int_H \sqrt{-\mathscr{h}}\left(-\mathscr{K} + n^\alpha n^\beta \nabla_\beta e_\alpha\right) d^3x =$$

[1] Tyto pojmy se definují stejně jako v kapitole 1 pro nadplochy Σ, pouze s tím rozdílem, že indukované metriky jsou nyní lorentzovské.

$$= 2\int_H \left[\left(\not{h}^{\alpha\beta} + n^\alpha n^\beta\right)\nabla_\beta e_\alpha\right] N\sqrt{\sigma}\; d^3x =$$

$$= -2\int_H N\sqrt{\sigma}\; k\; d^3x = -2\int ds \int_{S_s} N\sqrt{\sigma}\; k\; d^2x$$

kde jsme označili $k = \sigma^{\alpha\beta}k_{\alpha\beta}$ stopu tensoru vnější křivosti na S. Připuštění nenulové hranice nadploch Σ má tedy za následek dodatečný hraniční člen v akci a lagrangiánu. Celková akce $S = S_H + S_{GHY}$ je potom rovna

$$S = \int \sqrt{-g}\left({}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2\right) d^4x - 2\int_H N\sqrt{\sigma}\; k\; d^3x \tag{3.3}$$

a příslušný lagrangián

$$L = \sqrt{h}N\left({}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2\right) - 2\int_S N\sqrt{\sigma}\; k\; d^2x \tag{3.4}$$

Jako konfigurační prostor volíme pro práci v 3+1 formalismu namísto složek 4-metriky $g_{\alpha\beta}$ prostor složek 3-metriky h_{ij} a čtveřice funkcí N, N^i. Jak jsme dříve ukázali, obsahují h_{ij}, N, N^i stejnou informaci jako $g_{\alpha\beta}$, např. díky vyjádření (1.17), představují proto dobrou volbu konfiguračního prostoru. Připomeňme, že přechodem k 3+1 formalismu přecházíme ekvivalentně k popisu časového vývoje metriky na třírozměrné prostorupodobné varietě, jak je rozebráno v kapitole 1.

3.2 Legenderova transformace, hamiltonián

Pokračujme, stejně jako v případě hamiltonovské formulace mechaniky pro klasickou částici, přechodem z tečného na kotečný bundle konfigurační variety zavedením konjugovaných kanonických hybností π^{ij}, π_N a $\pi_{N^i} \equiv \pi_i$. Protože hraniční integrál v lagrangiánu na časové derivaci žádné z proměnných nezávisí, budeme pracovat s hustotou lagrangiánu $\mathscr{L} \equiv \mathscr{L}_{ADM}$, tento člen sehraje roli až při konstrukci hamiltoniánu.

$$\pi^{ij} := \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} \tag{3.5a}$$

$$\pi_N := \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{N}} = 0, \qquad \pi_i := \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{N}^i} = 0 \tag{3.5b}$$

Neb lagrangián L (hustota lagrangiánu $\mathscr{L}$) na časových derivacích funkcí N, N^i explicitně nezávisí, příslušné kanonické hybnosti jsou identicky nulové. To ukazuje, že N, N^i nejsou dynamickými proměnnými, nýbrž hrají roli Lagrangeových multiplikátorů[2]. S využitím (1.21) provedeme výpočet hybností π^{ij}

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} = N\sqrt{h}\left(\frac{\partial\, {}^3R}{\partial \dot{h}_{ij}} + \frac{\partial\left(K_{ij}K^{ij}\right)}{\partial \dot{h}_{ij}} - \frac{\partial K^2}{\partial \dot{h}_{ij}}\right) =$$

[2] S ohledem na to, že funkce N, N^i specifikují volbu řezů prostoročasu M a představují volbu souřadnic, se jedná o očekávatelný výsledek.

$$= N\sqrt{h}\left(0 - \frac{1}{N}K^{ij} + \frac{1}{N}Kh^{ij}\right)$$

jelikož ^3R jakožto vnitřní charakteristika nadplochy Σ je funkcí pouze prostorových derivací metriky h^{ij}. Rovnost přechází na

$$\pi^{ij} = -\sqrt{h}(K^{ij} - Kh^{ij}) \tag{3.6}$$

Dalším krokem je vyjádření časových derivací původních proměnných pomocí zobecněných hybností, to lze učinit určením stopy (3.6) a zpětným dosazení do téhož vztahu. Po snížení indexů

$$K_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi h_{ij}\right) \tag{3.7}$$

Případně, abychom byli v našem postupu přesní, můžeme vyjádřit explicitně časovou derivaci metriky (která je zvolenou konfigurační proměnnou)

$$\dot{h}_{ij} = \frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi h_{ij}\right) + D_i N_j + D_j N_i \tag{3.8}$$

Vztah pro kanonické hybnosti dynamických proměnných je tudíž invertovatelný, lze provést Legenderovu transformaci a přejít k nové sadě proměnných $(h_{ij}, \pi^{ij}, N, N^i)$. V těchto proměnných má hustota lagrangiánu tvar

$$\mathscr{L} = \sqrt{h}N\left[{}^3R + \frac{1}{h}\left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\right]$$

Ve své původní práci [3], [2] využívají ADM nových proměnných $(h_{ij}, \pi^{ij}, N, N^i)$ a jejich prvních derivací k přepsání lagrangiánu Hilbertovy akce. Tento krok vyžaduje opětovné odstranění Gibbonsova-Hawkingova-Yorkova členu, nebo-li přidání divergence $2\nabla_\alpha\left(-n^\alpha\nabla_\beta n^\beta + n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right)$ a její přepsání za pomoci vztahu

$$\sqrt{-g}\,\nabla_\mu v^\mu = (\sqrt{-g}\,v^\mu)_{,\mu}$$

pro vektorové pole v^μ, jak ukazuje např. [11], [13]. Ve zmíněném případě konkrétně

$$-2\sqrt{-g}\nabla_\alpha\left(-n^\alpha\nabla_\beta n^\beta + n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right) = -2\left[\sqrt{-g}\,(n^\alpha K + a^\alpha)\right]_{,\alpha}$$

Rozdělením časové a prostorových složek derivace a s využitím vztahů (1.21), (1.18) a (1.19) lze po řadě úprav dojít ke kanonickému tvaru lagrangiánu

$$\mathscr{L}_H = -h_{ij}\dot{\pi}^{ij} - NR^0 - N_i R^i - (2\pi^{ij}N_j - \pi N^i + 2D^i N\sqrt{h})_{,i} \tag{3.9a}$$

$$R^0 = -\sqrt{h}{}^3R + \frac{1}{\sqrt{h}}\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2\sqrt{h}}\pi^2 \tag{3.9b}$$

z nějž ADM po vypuštění divergence $(2\pi^{ij}N_j - \pi N^i + 2D^i N\sqrt{h})_{,i}$ získávají variací jednotlivých proměnných pohybové rovnice a vazbové podmínky. Podrobný výpočet zde neuvádíme, k výsledku dospějeme ekvivalentní cestou dále v této kapitole. Za zmínku stojí, že z (3.9a) je také možné identifikovat N, N^i jako Lagrangeovy multiplikátory.

Vraťme se k přechodu k hamiltonovskému formalismu, pracujíce pouze s "objemovou" částí, definujeme hustotu hamiltoniánu (pro úplnost uvádíme i členy nulové díky (3.5b))

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H} &:= \pi^{ij}\dot{h}_{ij} + \pi_N \dot{N} + \pi_i \dot{N}^i - \mathscr{L} = \\
&= N\sqrt{h}\left[-{}^3R + \frac{1}{h}\left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\right] + 2\pi^{ij}D_i N_j = \\
&= N\sqrt{h}\left[-{}^3R + \frac{1}{h}\left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\right] - 2N_j D_i \pi^{ij} + \sqrt{h}D_i\left(2\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ij}N_j\right)
\end{aligned}
$$

Poslední člen je kovariantní divergencí a ve vyjádření hamiltoniánu se redukuje užitím Stokesovy věty na integrál přes hranici $\partial\Sigma$, jmenovitě

$$\int_\Sigma \sqrt{h}D_i\left(2\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ij}N_j\right)d^3x = \int_{\partial\Sigma}\sqrt{\sigma}e_i\left(2\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ij}N_j\right)d^2x$$

S přidáním ještě okrajového členu z lagrangiánu můžeme psát celkový hamiltonián

$$
\begin{aligned}
H = \int_\Sigma \sqrt{h}\left\{N\left[-{}^3R + \frac{1}{h}\left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\right] - N_i 2D_j\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ij}\right)\right\}d^3x + \\
+2\int_{\partial\Sigma}\left(N\sqrt{\sigma}\ k + e_i\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ij}N_j\right)d^2x
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Hustota lagrangiánu (3.9a) je tudíž tvaru $\mathscr{L} = \pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \mathscr{H}$ s přepsáním časové derivace a vztahy, které bychom získali variací podle h_{ij} a π^{ij} s Dirichletovými okrajovými podmínkami, jsou Hamiltonovy pohybové rovnice.

3.3 Pohybové rovnice a vazby

Pro úplnost formalismu definujeme klasickým předpisem dle [5], [14] Poissonovu závorku, jmenovitě pro dva funkcionály $F(h_{ij}, \pi^{ij}, N, N^i, h_{ij,k}\pi^{ij}{}_{,k}, N_{,k}, N^i{}_{,k}, \dot{h}_{ij}, \dot{\pi}^{ij})$ a $G(h_{ij}, \pi^{ij}, N, N^i, h_{ij,k}\pi^{ij}{}_{,k}, N_{,k}, N^i{}_{,k}, \dot{h}_{ij}, \dot{\pi}^{ij})$ klademe

$$\{F, G\} := \int\left[\left(\frac{\delta F}{\delta g_{ij}}\frac{\delta G}{\delta \pi^{ij}} - \frac{\delta F}{\delta \pi^{ij}}\frac{\delta G}{\delta g_{ij}}\right) + \left(\frac{\delta F}{\delta N^i}\frac{\delta G}{\pi_i} - \frac{\delta F}{\delta \pi_i}\frac{\delta G}{\delta N^i}\right) + \left(\frac{\delta F}{\delta N}\frac{\delta G}{\delta \pi_N} - \frac{\delta F}{\delta \pi_N}\frac{\delta G}{\delta N}\right)\right]d^3x$$

Posledním krokem je výpočet variací hamiltoniánu (3.10). Při variaci akce v lagrangeovském formalismu jsme kladli Dirichletovy okrajové podmínky, nebo-li nulovou variaci metriky $g_{\alpha\beta}$ na hranici, ekvivalentně tomu vyžadujeme i zde vymizení variace metriky h_{ij} a funkcí N, N_i na $\partial\Sigma = S$.

$$\delta h_{ij} = \delta N = \delta N_i = 0 \quad \text{na } \partial\Sigma$$

Z podmínek (3.5b) plyne pro variace podle N a N_i

$$0 = \dot{\pi}_N = \{\pi_N, H\} = \frac{\delta H}{\delta N} = -\sqrt{h}\left[{}^3R + \frac{1}{h}\left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\right] \tag{3.11}$$

a

$$0 = \dot{\pi}_{N_i} = \left\{\pi_{N_i}, H\right\} = \frac{\delta H}{\delta N_i} = -2D_j\pi^{ij} \tag{3.12}$$

Tyto rovnice představují vazbové podmínky pro fázovou varietu, tedy omezení na počáteční podmínky a řešení pohybových rovnic. Mají svůj přímý protějšek v tradičních polních rovnicích, rozkladem s využitím kontrahované Codazziho rovnice (1.14) a kombinace Gaussovy a Ricciho rovnice ze začátku této kapitoly (3.1) lze ukázat ([3], [10]), že představují čtyři z Einsteinových rovnic, jmenovitě

$$^4R_{0\mu} - \frac{1}{2}Rg_{0\mu} = 0$$

Podmínky (3.11), (3.12) mají však ještě hlubší význam, zaručují, že hodnota hamiltoniánu pro libovolné řešení pohybových rovnic je až na hraniční členy nulová. Pro uzavřené variety je gravitační hamiltonián vždy triviální. S ohledem na význam hamiltoniánu v jiných oblastech fyziky lze očekávat, že jeho hodnota bude spojena s celkovou energií systému a např. [9], [8], [5], [3] skutečně předkládají, jak pro případ asymptoticky plochých prostoročasů možnou definici energie nalézt. Získané rovnice (3.11), (3.12) tak mj. zdůrazňují, že uvedené hraniční členy nejsou v gravitačním hamiltoniánu obecně zanedbatelné, přestože výsledné pohybové rovnice, jak bude patrné z postupu dále, neovlivňují.
Vraťme se ale k formulaci zmíněných pohybových rovnic a pokračujme variací podle π^{ij}. Platí

$$\delta H = \int_\Sigma \frac{N}{\sqrt{h}}\left(2\pi_{ij} - \pi h_{ij}\right)\delta\pi^{ij} + 2D_i N_j\,\delta\pi^{ij}\,d^3x - \delta\int_{\partial\Sigma} 2e_i\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ij}N_j + \delta\int_{\partial\Sigma} 2e_i\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ij}N_j$$

kde jsme použili kovariantní verzi per partes, tj. přepsání derivace jako divergence bez jiné derivace a užití Stokesov věty. Hraniční členy se odečtou a získáváme tak

$$\dot{h}_{ij} = \left\{h_{ij}, H\right\} = \frac{\delta H}{\delta\pi^{ij}} = \frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi h_{ij}\right) + D_iN_j + D_jN_i \tag{3.13}$$

což je pouze (3.8), tj. inverze explicitně určené definující rovnice pro π^{ij}. Až variací podle h_{ij} získáme pohybové rovnice, rozepišme jednotlivé členy

$$-\delta|_h\int_\Sigma N\sqrt{h}^3Rd^3x = \int_\Sigma\left(-\frac{1}{2}N\sqrt{h}Rh^{ij} + N\sqrt{h}R^{ij}\right)\delta h_{ij} - N\sqrt{h}h^{ij}\delta|_hR_{ij}d^3x =$$

využijeme vztahu (2.6) odvozeného dříve

$$= \int_\Sigma\left(-\frac{1}{2}N\sqrt{h}Rh^{ij} + N\sqrt{h}R^{ij}\right)\delta h_{ij} - N\sqrt{h}D_k\left[\left(h^{ij}h^{kl} - h^{ik}h^{jl}\right)D_i\,\delta h_{jl}\right] =$$

$$= \int_\Sigma\left(-\frac{1}{2}N\sqrt{h}Rh^{ij} + N\sqrt{h}R^{ij}\right)\delta h_{ij} - \sqrt{h}D_iD_kN\left(h^{ij}h^{kl} - h^{ik}h^{jl}\right)\delta h_{jl} -$$

$$-\int_{\partial\Sigma} e_kN\sqrt{\sigma}\left(h^{ij}h^{kl} - h^{ik}h^{jl}\right)D_i\,\delta h_{jl} - e_i\sqrt{\sigma}\left(h^{ij}h^{kl} - h^{ik}h^{jl}\right)\delta h_{jl} =$$

kde jsme dvakrát integrovali per partes. Užijeme okrajové podmínky $\delta h_{ij} = 0$ na $\partial\Sigma$ k vynulování posledního členu a třírozměrné analogie (2.8).

$$= \int_\Sigma\left[\sqrt{h}\left(h^{lm}D_iD^iN - D^mD^lNs\right)\delta h_{lm} + \left(-\frac{1}{2}N\sqrt{h}Rh^{ij} + N\sqrt{h}R^{ij}\right)\delta h_{ij}\right] + \int_{\partial\Sigma} N\sqrt{\sigma}e^ih^{jl}\,\delta h_{jl,i}$$

Pro další člen hamiltoniánu

$$\delta|_h\int_\Sigma N\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right) =$$

$$= \int_\Sigma \left[-\frac{1}{2\sqrt{h}} h^{ij} \left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^2 \right) + \frac{N}{\sqrt{h}} \left(2\pi^i{}_k \pi^{kj} - \pi\pi^{ij} \right) \right] \delta h_{ij}$$

a třetí výraz

$$\delta|_h \int_\Sigma -2N_i D_j \pi^{ij} = \delta \int_{\partial\Sigma} -2e_j \frac{1}{\sqrt{h}} N_i \pi^{ij} + 2 \int_\Sigma \pi^{ij} \delta|_h \left(D_j N_i \right) =$$

Variace prvního integrálu je nulová díky okrajovým podmínkám, pro úpravu druhého využijeme (2.5).

$$= 2 \int_\Sigma \pi^{ij} D_j N^k \, \delta h_{kj} + \int_\Sigma \pi^{il} N^m D_m \, \delta h_{il} =$$
$$= 2 \int_\Sigma \pi^{ij} D_j N^k \, \delta h_{kj} - \int_\Sigma D_m \pi^{il} N^m \, \delta h_{il}$$

V druhém kroku jsme opět integrovali per partes. Zbývá pouze variace hraničních integrálů. O druhé části jsme již ukázali, že je nulová, stačí určit

$$\delta|_h \, 2 \int_{\partial\Sigma} N\sqrt{\sigma} \, k = - \int_{\partial\Sigma} N\sqrt{\sigma} e^i h^{jl} \, \delta h_{jl,i}$$

analogicky jako v kapitole 2 při zavedení Gibbonsova-Hawkingova-Yorkova členu, opět je nenulová pouze variace derivace metriky ve směru vnější normály.
Poskládáme-li všechny tyto členy dohromady, získáme variaci celého hamiltoniánu. Členy obsahující integrál přes hranici se vzájemně odečtou, jejich neuvažování by vedlo na totožné rovnice, byť za méně obecných předpokladů.

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ij} = \left\{ \pi^{ij}, H \right\} = -\frac{\delta H}{\delta h_{ij}} = \\ = N\sqrt{h} \left({}^3R^{ij} - \frac{1}{2} R h^{ij} \right) + \sqrt{h} \left(h^{ij} D_k D^k N - D^i D^j N \right) + \\ + \frac{2N}{\sqrt{h}} \left(\pi^i{}_k \pi^{kj} - \frac{1}{2} \pi\pi^{ij} \right) - \frac{N}{2\sqrt{h}} h^{ij} \left(\pi_{kl}\pi^{kl} - \frac{1}{2}\pi^2 \right) + \\ + 2\pi^{ik} D_k N^j - D_k \left(\pi^{ij} N^k \right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Tato sada rovnic představuje pohybové rovnice popisující dynamiku našeho systému a jejich formulací jsme završili hamiltonovskou formulaci obecné relativity.

Závěr

V práci jsme se věnovali vybudování hamiltonovské formulace obecné relativity. Nejprve byla zavedena potřebná kauzální struktura a prostoročas byl rozdělen na třídu prostorupodobných nadploch parametrizovaných globální funkcí času. Zavedli jsme potřebné pojmy a ukázali souvislosti mezi vnitřní a vnější geometrií řezů a geometrií obklopujícího prostoročasu. Pro účely hamiltonovské formulace jsme nalezli vhodné souřadnice a převedli problém nalezení prostoročasového řešení na hledání časového vývoje metriky na prostorupodobné třírozměrné varietě. Ukázali jsme, jak lze z variačního principu odvodit klasické vakuové polní rovnice a diskutovali vhodný tvar akce jak pro lagrangeovský, tak pro hamiltonovský formalismus. S využitím geometrického rozkladu prostoročasu vybudovaného v první kapitole jsme provedli přechod od lagrangeovské k ADM (hamiltonovské) formulaci, začali jsme vhodnou volbou konfiguračního prostoru, identifikací dynamických proměnných a Lagrangeových multiplikátorů, nalezli jsme kanonické hybnosti k zvoleným dynamickým proměnným a provedli Legenderovu transformaci. Po konstrukci hamiltoniánu jsme se krátce věnovali problematice okrajových členů a jejich možnému významu. Nalezli jsme vazbové podmínky a srovnali výsledky s klasickou teorií. Práce byla zakončena odvozením a formulací Hamiltonových pohybových rovnic.

Literatura

[1] HOŘAVA P. Quantum gravity at a lifschitz point. Phys. Rev. D.79.084008. 2009.

[2] ARNOWITT R., DESER S., and MISNER C. W. Dynamical structure and definition of energy in general relativity. *Physical Review*, 116(5):1322 – 1330, December 1959.

[3] ARNOWITT R., DESER S., and MISNER C. W. *The Dynamics of General Relativity. In Gravitation: An Introduction to Current Research. WITTEN, L.*, chapter 7, pages 227 – 264. John Wiley @ Sons, New York, 1962. ISBN: 978-1114291669.

[4] MISNER Ch. W., THORNE K. S., and WHEELER J. A. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973. ISBN: 0-7167-0344-0.

[5] WALD R. M. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago 60637, 1984. ISBN: 0-226-87033-2.

[6] PENROSE R. *Collected Works, Volume 2, 1968 - 1975*. Oxford University Press, Oxford, United Kingdom, 2010. ISBN: 9780199219377.

[7] HAWKING S. W. and ELLIS G. F. R. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1973. ISBN: 0 521 09906-4.

[8] GOURGOULHON É. *3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity, Lecture notes*. LUTH, CNRS, Observatoire de Pris, Université de Paris 7. [online]. 2007. Dostupné z: arXiv:gr-qc/0703035.

[9] POISSON E. *A Relativist's Toolkit, The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004. ISBN: 0 521 83091 5.

[10] BLAU M. *Lecture Notes on General Relativity*. Albert Einstein Center for Fundamental Physics, Institut für theoretische Physik Universität Bern. 8. 8. 2016. [online]. DOstupné z: http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf, Bern.

[11] BOJOWALD M. *Canonical Gravity and Applications*. Cambridge University Press, New York, 2011. ISBN: 978-0-521-19575-1.

[12] DETWEILER S. *Notes on the Lagrangian formulation of General Relativity*. Department of Physics, University of Florida. [online]. Dostupné z: http://www.phys.ufl.edu/det/6607/publichtml/grNotesVarPrin.pdf, 2005.

[13] CARROLL S. *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, San Francisco, 2004. ISBN: 0-8053-8732-3.

[14] J. E. MARSDEN, R. MONTGOMERY, P. J. MORRISON, and W. B. THOMPSON. Covariant poisson brackets for classical fields. *Annals of Physics*, 169.