



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Modely kvazikrystalu se soběpodobností

Quasicrystal models with self-similarity

Bakalářská práce

Autor: **Jan Mazáč**
Vedoucí práce: **prof. Ing. Zuzana Masáková, PhD.**
Akademický rok: 2016/2017

- Zadání práce -

- Zadání práce (zadní strana) -

Poděkování:

Chtěl bych poděkovat především své školitelce prof. Zuzaně Masákové za vstřícnost, ochotu a trpělivost při vedení mé bakalářské práce. Rovněž jí děkuji za četné komentáře k textu, které výrazně zlepšily čtivost práce. Dále bych chtěl poděkovat prof. Editě Pelantové za cenné připomínky, rady a konzultace při řešení některých problémů, které přispěly k celkové práci. V neposlední řadě patří můj dík mé rodině za její neutuchající podporu a mým přátelům.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 30. června 2017

Jan Mazáč

Název práce:

Modely kvazikrystalu se soběpodobností

Autor: Jan Mazáč

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Ing. Zuzana Masáková, PhD., České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, katedra matematiky

Abstrakt: Uznávaným matematickým modelem pro kvazikrystalu jsou tzv. cut-and-project (C&P) množiny. C&P schéma $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ je dáno mříží \mathcal{L} v \mathbb{R}^s a projekcemi π_1, π_2 na dva vhodně orientované podprostory V_1, V_2 . C&P množina $\Sigma(\Omega)$ je delonovská podmnožina $\pi_1(\mathcal{L})$. V práci odvodíme několik tvrzení popisujících souvislost mezi soběpodobnostními transformacemi mříže \mathcal{L} a transformacemi projekcí $\pi_1(\mathcal{L})$ a $\pi_2(\mathcal{L})$. Popíšeme způsob, jak pomocí požadavků na transformaci mříže \mathcal{L} konstruovat C&P schéma s příslušnou soběpodobností. V případě požadavku 5četné symetrie sestrojíme nedegenerované ireducibilní C&P schéma invariantní na izometrii řádu 5 a srovnáme je s klasickou konstrukcí pomocí Coxeterových grup. Na množině $\pi_1(\mathcal{L})$ zkoumáme další možné soběpodobnosti a ukážeme, že tvoří asociativní algebru nad \mathbb{Z} . Dále zkoumáme 3D C&P množiny vzniklé z 5D mříže. Ukážeme některé jejich překvapivé geometrické vlastnosti.

Klíčová slova: cut-and-project množiny, diskrétní množiny, kvazikrystal, pětičetná symetrie, soběpodobnost

Title:

Quasicrystal models with self-similarity

Author: Jan Mazáč

Abstract: Quasicrystals can be described using cut-and-project (C&P) sets. A C&P scheme $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ is given by a lattice \mathcal{L} in \mathbb{R}^s and by projections π_1, π_2 onto two suitable subspaces V_1, V_2 . A C&P set $\Sigma(\Omega)$ is a Delone subset of $\pi_1(\mathcal{L})$. In this work we derive several propositions describing the relation between transformations of the lattice \mathcal{L} and transformations of its projections $\pi_1(\mathcal{L})$ and $\pi_2(\mathcal{L})$. When requiring five-fold symmetry we construct non-degenerate irreducible C&P scheme invariant under an isometry of order 5 and we compare it to the classical construction of quasicrystals using Coxeter groups. We study other self-similarities on the set $\pi_1(\mathcal{L})$ and prove that they form an associative algebra over \mathbb{Z} . We further investigate 3D C&P sets arising by projection of a 5D lattice. We demonstrate some of their surprising geometric properties.

Key words: cut-and-project sets, discrete sets, five-fold symmetry, quasicrystal, self-similarity

Obsah

Značení	10
Úvod	11
1 Základní pojmy a tvrzení	12
1.1 Teorie čísel	12
1.2 Teorie matic	15
1.3 Diskrétní množiny	17
1.3.1 Cut-and-project množiny	18
1.3.2 1D cut-and-project množiny vzniklé projekcí 2D mříže	22
1.4 Geometrie pravidelného pětiúhelníku	24
1.5 Klasická konstrukce kvazikrystalu s pětičetnou symetrií	26
2 Soběpodobnost kvazikrystalu	30
2.1 Jednodimenzionální kvazikrystal se soběpodobností	30
2.2 Škálovací symetrie kvazikrystalu	32
2.3 Souvislost soběpodobnosti na kvazikrystalu s transformacemi mříže	34
3 Kvazikrystal s pětičetnou symetrií vzniklý projekcí 4D mříže	39
3.1 Konstrukce kvazikrystalu	39
3.2 Srovnání s klasickou konstrukcí	45
3.3 Soběpodobnosti 2D kvazikrystalu s pětičetnou symetrií	46
3.3.1 Příklad netriviální soběpodobnosti	54
4 Kvazikrystal s pětičetnou symetrií vzniklý projekcí 5D mříže	57
4.1 Dvoudimenzionální případ	59
4.2 Třídimenzionální případ	59
4.3 Geometrické vlastnosti 3D kvazikrystalu	61
4.3.1 Násobky vlastních vektorů	62
4.3.2 Další možné soběpodobnosti	63
Závěr	65
Literatura	66

Značení

V celém textu práce se budeme držet následujícího značení:

$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$	číselné množiny
\mathbb{T}	těleso
$\mathbb{T}[x]$	množina všech polynomů v proměnné x s koeficienty v \mathbb{T}
$\mathbb{Q}(\alpha)$	algebraické rozšíření racionálních čísel o číslo α
\mathcal{L}	mříž
π_1, π_2	projekce
Ω	okno
$\Sigma(\Omega)$	kvazikrystal příslušný oknu Ω
$\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}$	vektory
$\text{span}_{\mathbb{T}}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$	lineární obal vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ s koeficienty v \mathbb{T}
$[X]$	$\text{span}_{\mathbb{Z}}\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X\}$
\mathbf{v}_{\parallel}	obraz vektoru \mathbf{v} při projekci π_1
\mathbf{v}_{\perp}	obraz vektoru \mathbf{v} při projekci π_2
A, B, C, F, M, P, V, Y	matice, zobrazení
$\text{diag}\{a, b, \dots, k\}$	diagonální matice rozměru $k \times k$ s prvky a, b, \dots, k na diagonále
\mathbf{x}^*, H^*	hermitovsky sdružený vektor \mathbf{x} , resp. matice H
\mathbf{B}_r	otevřená koule se středem v počátku poloměrem r
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_H$	skalární součin vektorů \mathbf{x}, \mathbf{y} určený maticí H

Úvod

Látky zvané kvazikrystaly, jejich fyzikální vlastnosti a matematické modely těchto struktur se do zájmu vědecké komunity dostaly v roce 1984, kdy Dan Shechtman a jeho tým publikovali přelomový článek týkající se objevu nekystalografického materiálu, který ale vykazoval jisté uspořádání na dlouhou vzdálenost. Od této doby bylo publikováno mnoho výsledků v této oblasti. Díky udělení Nobelovy ceny Danielovi Shechtmanovi v roce 2011 došlo ke zvýšení zájmu o tuto problematiku a téma kvazikrystalů je dnes ve vědecké komunitě živé.

V práci se budeme zabývat matematickými modely kvazikrystalů. Zatímco pro klasické krystalické struktury jsou vhodným matematickým modelem periodické mřížky, pro popis kvazikrystalických struktur se ukázala být vhodnou tzv. cut-and-project metoda, která spočívá v projekování části mřížky na dvojici vhodně orientovaných podprostorů.

Při studiu dvoudimenzionálních kvazikrystalů se zájem soustřeďuje především na ty, které vykazují 5-, 8-, 10- a 12četnou rotační symetrii. Tyto struktury ale často mají i jiné symetrie než pouze rotace a reflexe. Velmi častou je například škálování iracionálním faktorem nebo afinní symetrie. Podle článku Lagariase [5] například platí, že pokud pro kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ existuje číslo η takové, že $\eta\Sigma(\Omega) \subset \Sigma(\Omega)$, tak pak je číslo η Pisotovo číslo, tedy číslo, k němuž algebraicky sdružená čísla jsou menší než 1. Na druhou stranu není nám znám žádný systematický výzkum afinních symetrií na kvazikrystalech.

V této práci se zaměříme na kvazikrystaly s 5-(10)-četnou symetrií. Po zdefinování a připomenutí základních pojmů, následně představíme maticový způsob zápisu kvazikrystalů a pomocí něj odvodíme vztah mezi transformacemi na projekci mřížky a transformacemi mřížky. V další kapitole nalezneme vhodné cut-and-project schéma $(\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^4, \pi_1, \pi_2)$ takové, že jsme z něj vhodným výběrem okna schopni získat kvazikrystal s desetičetnou symetrií. Provedeme konstrukci pouze za pomoci teorie matic a lineární algebry. Tuto konstrukci poté porovnáme s klasickou konstrukcí kvazikrystalů s desetičetnou symetrií pomocí Coxeterových grup.

V další části se budeme zabývat soběpodobnostmi na tomto schématu. Budeme zkoumat, jaká jsou veškerá možná lineární zobrazení A , která zachovávají množinu $\pi_1(\mathcal{L})$. Bude nás rovněž zajímat, jakou strukturu tato zobrazení formují. Dále budeme zkoumat, jaké jsou podmínky na zobrazení A na množině $\pi_1(\mathcal{L})$ takové, že existuje okno $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ takové, že A je soběpodobností kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$.

V závěrečné kapitole se budeme zabývat projekcí z pětidimenzionální mřížky a takto vzniklému třídimenzionálnímu kvazikrystalu a jeho vlastnostem.

Kapitola 1

Základní pojmy a tvrzení

V následující kapitole zadefinujeme pojmy vyskytující se v textu. Vyslovíme tvrzení, která budeme používat a v textu se na ně odkazovat.

1.1 Teorie čísel

Uvedme některé číselněteoretické pojmy a tvrzení, které budeme v celé práci využívat. Věty vyslovujeme bez důkazů, ty je možné nalézt například v [6].

Definice 1.1. Číslo $\eta \in \mathbb{C}$ nazveme algebraické, jestliže existuje monický polynom, tj. polynom s koeficientem 1 u nejvyšší mocniny, s racionálními koeficienty, jehož je η kořenem, tedy existuje $f \in \mathbb{Q}[x]$, tak, že $f(\eta) = 0$. Množinu všech algebraických čísel budeme označovat \mathbb{A} .

Definice 1.2. Buď $\eta \in \mathbb{A}$. Monický polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ minimálního stupně, jehož je η kořenem, nazveme minimálním polynomem čísla η . Ostatní kořeny polynomu f nazýváme algebraicky sdružená čísla k číslu η . Stupněm algebraického čísla η rozumíme stupeň minimálního polynomu čísla η .

Uvedme příklady algebraických čísel. Typickým příkladem je libovolné racionální číslo $\frac{p}{q}$, protože je kořenem rovnice

$$x - \frac{p}{q} = 0.$$

Tento polynom je zároveň minimálním polynomem čísla $\frac{p}{q}$ a jelikož je jeho stupeň 1, jsou všechna racionální čísla algebraická čísla stupně 1.

Čísla, která nejsou algebraická, jsou například π , e .

Definice 1.3. Buď $\eta \in \mathbb{A}$ algebraické číslo stupně n . Buď dále $f(x) = x^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$ minimální polynom čísla η . Pak definujeme matici společníci $M_\eta \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ k číslu η jako

$$M_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Toto ztotožnění algebraických celých čísel a matic s racionálními koeficienty umožňuje mj. dokázat, že množina \mathbb{A} je číselné podtěleso \mathbb{C} . Matice společnice je z konstrukce taková matice, jejíž charakteristický polynom je právě polynom $f(x)$. Zároveň je možné ukázat, že vlastní vektory zapsané do sloupců tvoří Vandermondeovu matici pro kořeny polynomu $f(x)$.

Definice 1.4. Číslo $\eta \in \mathbb{C}$ se nazývá algebraické celé číslo, jestliže existuje monický polynom $g \in \mathbb{Z}[x]$, jehož je η kořenem. Množina všech algebraických celých čísel se značí \mathbb{B} .

Je zřejmé, že veškerá algebraická celá čísla jsou algebraická čísla. Snadno také nahlédneme, že veškerá celá čísla jsou algebraická celá čísla, neboť libovolné $b \in \mathbb{Z}$ je kořenem rovnice

$$x - b = 0.$$

Například \sqrt{n} je pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, které samo není čtvercem, algebraické celé číslo stupně 2, neboť je kořenem rovnice

$$x^2 - n = 0.$$

Dalším příkladem je tzv. zlatý řez τ , $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, což je větší z kořenů rovnice $x^2 - x - 1 = 0$.

Bez důkazu uvedeme nyní větu, která formuluje nutnou a postačující podmínku pro to, aby číslo bylo algebraickým celým číslem.

Věta 1.5. Číslo $\eta \in \mathbb{A}$ je algebraické celé, právě když koeficienty jeho minimálního polynomu jsou celá čísla.

Definice 1.6. Buď $\eta \in \mathbb{R}$ algebraické celé číslo takové, že $\eta > 1$. Číslo η nazveme Pisotovo (Pisotovo-Vijayaraghavanovo), pokud všechna jeho algebraicky sdružená čísla η' splňují $|\eta'| < 1$.

Definice 1.7. Buď $\eta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ algebraické celé číslo, jehož absolutní hodnota je větší než jedna. Číslo η nazveme komplexní Pisotovo, jestliže jeho algebraicky sdružené kořeny kromě $\bar{\eta}$ jsou menší než jedna.

Nejznámějším příkladem Pisotova čísla je již zmíněný zlatý řez τ . Jeho hodnota je přibližně $\tau \approx 1,618033\dots$. Hodnota druhého kořene rovnice $x^2 - x - 1$ je $\frac{1}{\tau} \approx -0,618033\dots$. Naproti tomu například číslo \sqrt{n} není Pisotovo pro žádné $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$.

Definice 1.8. Buď $\eta \in \mathbb{R}$ algebraické celé číslo takové, že $\eta > 1$. Číslo η nazveme Salemovo, jestliže všechna jeho algebraicky sdružená čísla η' splňují $|\eta'| \leq 1$ a existuje alespoň jedno takové, že $|\eta'| = 1$.

Salemova čísla jsou předmětem výzkumu a ukazuje se, že všechna Salemova čísla jsou menší než $\frac{13}{10}$. Dále je známé dosud nejmenší Salemovo číslo (stupně 10), tzv. Lehmerovo číslo, $\sigma_1 \approx 1,762808\dots$, které je největším kořenem Lehmerova polynomu $x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$.

Nyní definujeme algebraické rozšíření celých čísel $\mathbb{Q}(\alpha)$. Uvažujme $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom množina

$$\mathbb{Q}(\alpha) := \bigcap \{T : T \text{ je podtěleso } \mathbb{C}, \alpha \in T\}$$

je těleso. Toto lze ekvivalentně přepsat do podoby

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \left\{ \frac{\sum_{i=0}^n a_i \alpha^i}{\sum_{j=0}^n b_j \alpha^j} : n, m \in \mathbb{N}_0, a_i, b_j \in \mathbb{Q}, \sum_{j=0}^n b_j \alpha^j \neq 0 \right\}.$$

Navíc platí následující věta, kterou uvádíme bez důkazu:

Věta 1.9. *Bud' $\alpha \in \mathbb{A}$ a bud' $n \in \mathbb{N}$ stupeň α . Pak*

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} : a_i \in \mathbb{Q}\}.$$

Z této věty také plyne další ekvivalentní přepsání množiny $\mathbb{Q}(\alpha)$, a to následující

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{g(\alpha) : g \in \mathbb{Q}[x], \text{ st } g < n\}.$$

Definice 1.10. *Bud' $\alpha \in \mathbb{A}$. Pak výše definovanou množinu $\mathbb{Q}(\alpha)$ nazýváme číselným tělesem. Dimenze tohoto tělesa je $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ ve smyslu vektorového prostoru nad \mathbb{Q} a nazývá se stupeň číselného tělesa $\mathbb{Q}(\alpha)$.*

Uvažujme nyní číselné těleso $\mathbb{Q}(\alpha)$. Označme α_i algebraická sdružená čísla k číslu α . Pak můžeme definovat zobrazení $\sigma_i : \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha_i)$ předpisem

$$\sigma_i(g(\alpha)) := g(\alpha_i).$$

Toto zobrazení je isomorfismus mezi tělesy $\mathbb{Q}(\alpha)$ a $\mathbb{Q}(\alpha_i)$. Dodejme, že tělesa, pro která platí, že pro všechna i je $\sigma_i(\mathbb{Q}(\alpha)) = \mathbb{Q}(\alpha)$, se nazývají *Galoisova rozšíření racionálních čísel* a zobrazení σ_i jsou označována jako *Galoisovy automorfismy*.

Následující příklad číselného tělesa využijeme později, proto jej nyní rozebereme podrobněji.

Definice 1.11. *Cyklotomické číselné těleso je číselné těleso $\mathbb{Q}(\xi)$, kde $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.*

Číslo ξ je kořenem tzv. *n-tého cyklotomického polynomu* Φ_n , tj. polynomu ve tvaru

$$\Phi_n(x) = \prod_{k \leq n, k \perp n} (x - \xi^k).$$

Stupeň tohoto polynomu je dán počtem čísel menších než n , která jsou s n nesoudělná, což vyjadřuje symbol $k \perp n$. Tuto hodnotu určuje Eulerova funkce φ , proto tedy $\text{st } \Phi_n = \varphi(n)$. Pro tyto polynomy navíc platí, že

$$\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1.$$

Lze o nich navíc ukázat, že veškeré cyklotomické polynomy jsou monické polynomy s celočíselnými koeficienty a jsou nad \mathbb{Q} ireducibilní pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Vidíme tedy, že číslo ξ je algebraické číslo stupně $\varphi(n)$, a proto číselné těleso $\mathbb{Q}(\xi)$ lze zapsat jako

$$\mathbb{Q}(\xi) = \{a_0 + a_1\xi + \cdots + a_{\varphi(n)-1}\xi^{\varphi(n)-1} : a_i \in \mathbb{Q}\}.$$

Zabývejme se případem, kdy $n = p$, kde p je prvočíslo. Potom totiž $\varphi(p) = p - 1$ a číselné těleso přechází do tvaru

$$\mathbb{Q}(\xi) = \{a_0 + a_1\xi + \cdots + a_{p-2}\xi^{p-2} : a_i \in \mathbb{Q}\}.$$

Zároveň víme, že tvar p -tého cyklotomického polynomu bude mít díky prvočíselnosti p tvar

$$\Phi_p(x) = \prod_{j=1}^{p-1} (x - \xi^j),$$

a tedy jeho sdružené kořeny budou mít tvar ξ^j pro všechna $1 \leq j \leq p-1$. Galoisovy automorfismy tedy mají tvar

$$\sigma_j(\xi) = \xi^j \quad \text{pro všechna } 1 \leq j \leq p-1.$$

Na závěr této sekce ještě definujme okruh algebraických celých čísel v číselném tělese.

Definice 1.12. *Bud' $\alpha \in \mathbb{A}$ a $\mathbb{Q}(\alpha)$ číselné těleso. Pak množinu všech algebraických celých čísel v tělese $\mathbb{Q}(\alpha)$ nazýváme okruh celých čísel v $\mathbb{Q}(\alpha)$ a označujeme*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} := \mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{B}.$$

Lze ukázat, že okruh celých čísel v cyklotomickém tělese $\mathbb{Q}(\xi)$ je roven $\mathbb{Z}[\xi]$, tzn. je-li $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, pak

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\xi)} = \mathbb{Z}[\xi] = \left\{ a_0 + a_1\xi + \cdots + a_{\varphi(n)-1}\xi^{\varphi(n)-1} : a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1.2 Teorie matic

V práci budeme hojně využívat některá fakta o maticích, která přesahují rámeček standardního kurzu lineární algebry. Budeme je čerpat z [9].

Definice 1.13. *Bud' A čtvercová $n \times n$ matice nad tělesem \mathbb{T} . Potom funkci*

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_n)$$

označujeme jako *charakteristický polynom matice A* . Symbolem I_n rozumíme čtvercovou diagonální matici řádu n s jedničkami na diagonále. Pokud je řád z kontextu jasný, index n vynecháváme. Rovnici $\chi_A(x) = 0$ nazýváme *charakteristickou rovnicí matice A* .

Věta 1.14 (Hamilton, Cayley). *Bud' $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ matice. Potom je A kořenem svého charakteristického polynomu, tj. $\chi_A(A) = 0$.*

Definice 1.15. *Bud' $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ matice. Minimálním polynomem $\mu_A(x)$ matice A nad tělesem \mathbb{T} rozumíme monický polynom (nad \mathbb{T}) nejnižšího stupně takový, který splňuje rovnost $\mu_A(A) = 0$.*

Označíme-li $\mathcal{F} = \{f(x) : f(A) = 0\}$ množinu všech polynomů, jež A nuluje, pak minimální polynom μ_A matice A je monický polynom nejmenšího stupně z množiny \mathcal{F} .

Věta 1.16. *Bud' A matice nad tělesem \mathbb{T} . Pak minimální polynom $\mu_A(x)$ nad tělesem \mathbb{T} této matice dělí libovolný polynom $f(x) \in \mathbb{T}[x]$, který splňuje $f(A) = 0$.*

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení se provede sporem. Předpokládejme tedy, že $\mu_A(x)$ nedělí $f(x)$. Pak ale existuje polynom $q(x)$ a polynom $r(x)$ stupně menšího než $\mu_A(x)$ takové, že

$$f(x) = q(x)\mu_A(x) + r(x).$$

Jelikož ale $0 = f(A) = q(A)\mu_A(A) + r(A) = r(A)$, tedy A musí nulovat polynom $r(x)$, což je ale spor s minimalitou polynomu $\mu_A(x)$, protože stupeň r je ostře menší než stupeň μ_A . \square

Důsledek 1.17. *Minimální polynom dané matice dělí její charakteristický polynom nad tělesem \mathbb{T} .*

Definice 1.18. *λ -matice je taková matice, jejíž prvky jsou polynomy s koeficienty z \mathbb{T} v proměnné λ .*

Příkladem takové matice nad \mathbb{C} je

$$\begin{pmatrix} 1 + \lambda & \lambda^3 - 2i & 1 \\ 0 & i & \lambda^2 - \sqrt{2} \\ 1 + \lambda + \lambda^2 & 5 & -\lambda + i \end{pmatrix}.$$

Pro λ -matice můžeme stejně jako pro číselné matice definovat základní operace jako výměna řádků a sloupců nebo sčítání matic. Jediný rozdíl je v operaci násobení matice skalárem. Roli skalárů zde hrají nenulové polynomy. Jelikož jsou prvky matice polynomy, není rovněž přípustné dělení nenulovým nekonstantním polynomem. Obdobně jako je u číselných matic možné provedení elementární operace reprezentovat jako pronásobení jistou elementární maticí, je toto možné i pro λ -matice. Stejně jako je možné čtvercové číselné matice pomocí elementárních operací převést do diagonálního tvaru s jedničkami nebo nulami na diagonále, je podle [9] λ -matice možné převést do tzv. *standardní formy*.

Definice 1.19. Řekneme, že čtvercová λ -matice $D(\lambda)$ řádu n je ve standardní formě, právě když má tvar

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & d_k(\lambda) & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

kde pro všechna $1 \leq i \leq k \leq n$ jsou $d_i(\lambda)$ monické polynomy (nebo konstantně 1) takové, že pro všechna $1 \leq i \leq k - 1$ platí, že $d_i(\lambda)$ dělí $d_{i+1}(\lambda)$.

Buď nyní M číselná čtvercová matice řádu n . Pak $M(\lambda) = M - \lambda I$ je λ -matice. Tuto matici je dle předešlé poznámky možné převést do standardní formy, kde $k = n$. Toto vyplývá z faktu, že matice $M - \lambda I$ má nenulový determinant a tedy nemá lineárně závislé ani sloupce, ani řádky. Tedy standardní forma matice $M(\lambda)$ má tvar $\text{diag}\{d_1(\lambda), \dots, d_n(\lambda)\}$.

Definice 1.20. Buď $M \in \mathbb{T}^{n \times n}$ čtvercová matice řádu n a $M(\lambda) = \lambda I - M$. Prvky standardní formy matice $M(\lambda)$ nazýváme *invariantními faktory matice M* .

Následující věta umožňuje snadno určit minimální a charakteristický polynom zadané matice.

Věta 1.21. Buď $M \in \mathbb{T}^{n \times n}$ čtvercová matice řádu n a $\chi_A(x)$, $\mu_A(x)$ její charakteristický, resp. minimální polynom. Buďte dále $d_1(x), \dots, d_n(x)$ invariantní faktory matice M . Pak platí

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^n d_i(x),$$

a navíc

$$d_n(x) = \mu_A(x).$$

Důsledek 1.22. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořenem minimálního polynomu matice právě tehdy, když je kořenem charakteristického polynomu téže matice.

Důkaz. Dokážeme dvojici implikací:

\Rightarrow : Tato implikace je zřejmá, neboť minimální polynom matice dělí charakteristický polynom.

\Leftarrow : Buď λ kořenem charakteristického polynomu. Ten je dle předešlé věty zapsatelný jako součin invariantních faktorů dané matice. Číslo λ musí tedy být kořenem jednoho z invariantních faktorů, označme jej d_i . Jelikož je dle definice invariantních faktorů každý invariantní faktor násobkem předešlého, je dle věty výše minimální polynom matice násobkem všech invariantních faktorů dané matice. Proto je λ jeho kořenem. □

Důsledek 1.23. *Jestliže je minimální polynom matice ireducibilní nad tělesem \mathbb{T} , pak je její charakteristický polynom mocninou minimálního polynomu.*

Důkaz. Nechť je minimální polynom ireducibilní nad \mathbb{T} . Dle předešlé věty musí být násobkem invariantních faktorů. Odtud již plyne, že tyto invariantní faktory jsou buď 1, nebo minimální polynom samotný. Proto je charakteristický polynom mocninou polynomu minimálního. □

1.3 Diskrétní množiny

Definice 1.24. *Řekneme, že množina $X \subset \mathbb{R}^n$ je diskrétní, jestliže pro každý bod $\mathbf{x} \in X$ existuje okolí $U_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ takové, že*

$$U_{\mathbf{x}} \cap X = \{\mathbf{x}\}.$$

Jinými slovy množina je diskrétní, jestliže jsou všechny její body izolované. Toto je možné si intuitivně představit tak, že ke každému bodu z X existuje otevřená koule, ve které existuje pouze tento jediný bod.

Definice 1.25. *Buď X diskrétní množina v \mathbb{R}^n . Řekneme, že množina X je delonovská, když jsou splněny následující podmínky:*

1. *Existuje $r > 0$ takové, že každá otevřená koule v \mathbb{R}^n o poloměru r obsahuje nejvýše jeden bod z množiny X . Tuto vlastnost nazýváme stejnoměrná diskrétnost.*
2. *Existuje $R > 0$ takové, že v každé uzavřené kouli v \mathbb{R}^n o poloměru R je obsažen alespoň jeden bod z množiny X . Tuto vlastnost nazýváme relativní hustota.*

V řeči výše zmíněné množiny $X \subset \mathbb{R}^n$ první vlastnost znamená, že existuje taková otevřená koule v \mathbb{R}^n o poloměru r , pomocí které jsme schopni každé dva body z množiny X od sebe oddělit. Supremum parametrů r ze stejnoměrné diskrétnosti lze za jistých předpokladů interpretovat jako *minimální vzdálenost*. Na druhou vlastnost lze nahlížet tak, že existuje taková uzavřená koule v \mathbb{R}^n o poloměru R , která jsouc umístěna do všech bodů množiny X tvoří uzavřené pokrytí \mathbb{R}^n . Poloměr R se někdy nazývá *pokrývací poloměr*.

Definice 1.26. *Buď X delonovská množina v \mathbb{R}^n . Pak řekneme, že*

1. *X je konečně generovaná, když je konečně generovaná abelovská grupa*

$$[X - X] = \text{span}_{\mathbb{Z}} \{\mathbf{x} - \mathbf{y} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X\}.$$

2. *X je meyerovská množina, když $X - X$ je delonovská podmnožina \mathbb{R}^n .*

Definice 1.27. *Buď X delonovská množina. Definujeme rank (X) jako minimální počet generátorů abelovské grupy*

$$[X] = \text{span}_{\mathbb{Z}} \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X\}.$$

1.3.1 Cut-and-project množiny

V této sekci definujeme cut-and-project množinu a vyslovíme některá tvrzení, která se k ní vážou. Zavedeme pojmy, které budeme v práci používat, když budeme mluvit o těchto množinách.

Definice 1.28. *Mříž (ev. mřížkou) v \mathbb{R}^s budeme rozumět konečně generovanou aditivní abelovskou grupu \mathcal{L} , která je generována právě s lineárně nezávislými vektory nad \mathbb{R} .*

Pro ilustraci uvedme několik příkladů mříží, se kterými se postupně budeme setkávat. Mříží v \mathbb{R}^s je například množina \mathbb{Z}^s . V \mathbb{R}^2 je mřížkou například množina

$$\mathcal{L} = \left\{ p \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} : p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Než definujeme korektně cut-and-project množinu, zmiňme ve zkratce dva standardní přístupy, které se pro jejich konstrukce používají. Principem cut-and-project metody jsou projekce částí mříže na direktní součet dvou podprostorů. Buď se jako mříž (v \mathbb{R}^s) bere vždy \mathbb{Z}^s a volí se obecné podprostory, nebo se volí obecná mříž \mathcal{L} a projektuje se na podprostory generované vektory standardní báze prostoru \mathbb{R}^s . My budeme používat druhý přístup. Je ale zřejmé, že obě metody dávají v principu stejné výsledky.

Definice 1.29. *Buď $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ mřížka. Označme dále $\mathbb{R}^n = \text{span}_{\mathbb{R}} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ a $\mathbb{R}^m = \text{span}_{\mathbb{R}} \{\mathbf{e}_{n+1}, \mathbf{e}_{n+2}, \dots, \mathbf{e}_{n+m}\}$. Budte dále $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ projekce na jednotlivé podprostory. Uspořádanou trojici $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ nazveme cut-and-project schématem.*

Řekneme, že cut-and-project schéma je nedegenerované, když je zobrazení $\pi_1|_{\mathcal{L}}$ prosté. Řekneme, že je ireducibilní, když je množina $\pi_2(\mathcal{L})$ hustá v \mathbb{R}^m .

Pokud nyní přidáme požadavek na množinu, ve které má ležet druhá projekce, získáme cut-and-project množinu. Formálně tedy:

Definice 1.30. *Buď $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ nedegenerované ireducibilní cut-and-project schéma. Pak při značení stejném jako výše definujeme cut-and-project množinu $\Sigma(\Omega)$ jako*

$$\Sigma(\Omega) := \{ \pi_1(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \pi_2(\mathbf{x}) \in \Omega \}, \quad (1.1)$$

kde Ω je omezená množina s neprázdným vnitřkem, která se nazývá okno.

Dimenzí cut-and-project množiny rozumíme dimenzi prostoru \mathbb{R}^n , tj. prostoru, do kterého zobrazuje projekce π_1 .

V literatuře, např. [3], se pro množiny vytvořené pomocí okna z ireducibilního cut-and-project schematu používá často označení *modelové množiny*. V literatuře rovněž nepanuje shoda na definici pojmu okno. Někteří autoři, jako například Lagarias [5], požadují, aby tato množina byla jen otevřená a omezená. Naproti tomu např. Cotfas [3] požaduje kompaktnost množiny Ω společně s $\text{int}(\Omega) \neq \emptyset$. Moody [7] klade jedinou podmínku, a to $\Omega \subset \text{int}(\Omega)$.

Zmiňme také již tradiční notaci používanou pro popis kvazikrystalu, především pro přechody z prostoru \mathbb{R}^n , tedy z prostoru, kde leží kvazikrystal (někdy též *fyzikální prostor*), do prostoru \mathbb{R}^m , tedy prostoru, kde je umístěno okno Ω . Tento prostor se někdy označuje jako *vnitřní prostor*. Označíme-li $L = \pi_1(\mathcal{L})$, můžeme definovat zobrazení

$$* : L \rightarrow \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^* = \pi_2(\pi_1|_{\mathcal{L}}^{-1}(\mathbf{x})).$$

Toto zobrazení je zjevně homomorfismus aditivních grup $\pi_1(\mathcal{L})$ a $\pi_2(\mathcal{L})$. V řeči tohoto značení je pak cut-and-project množina (1.1) vyjádřitelná jako

$$\Sigma(\Omega) = \{\mathbf{x} \in L : \mathbf{x}^* \in \Omega\}.$$

Neřekneme-li jinak, budeme odteď vždy uvažovat cut-and-project množiny obsahující $\mathbf{0}$. Tento požadavek není nikterak omezující. Kdykoliv totiž cut-and-project množina X nulu neobsahuje, je možné posunout okno tak, aby v něm ležel bod $\mathbf{0} \in \mathcal{L}$, díky tomu bude bod $\pi_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ obsažen v transformované cut-and-project množině X' . Tu pak stačí opět zpětně přetransformovat. Tato vlastnost je přesněji vyjádřena v následujícím tvrzení.

Tvrzení 1.31. *Bud' $\Sigma(\Omega)$ cut-and-project množina vzniklá ze schematu $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$. Bud' dále $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$. Pak*

$$\Sigma(\Omega) + \pi_1(\mathbf{x}) = \Sigma(\Omega + \pi_2(\mathbf{x})).$$

Důkaz. Postupně upravujeme

$$\begin{aligned} \Sigma(\Omega) + \pi_1(\mathbf{x}) &= \{\pi_1(\mathbf{y}) + \pi_1(\mathbf{x}) : \mathbf{y} \in L, \pi_2(\mathbf{y}) \in \Omega\} = \{\pi_1(\mathbf{y} + \mathbf{x}) : \mathbf{y} \in \mathcal{L}, \pi_2(\mathbf{y}) \in \Omega\} = \\ &= \{\pi_1(\mathbf{z}) : \mathbf{z} \in \mathcal{L}, \pi_2(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \in \Omega\} = \{\pi_1(\mathbf{z}) : \mathbf{z} \in \mathcal{L}, \pi_2(\mathbf{z}) - \pi_2(\mathbf{x}) \in \Omega\} = \\ &= \{\pi_1(\mathbf{z}) : \mathbf{z} \in \mathcal{L}, \pi_2(\mathbf{z}) \in \Omega + \pi_2(\mathbf{x})\} = \Sigma(\Omega + \pi_2(\mathbf{x})), \end{aligned}$$

přičemž jsme využili faktu, že pro každé $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ je $\mathcal{L} - \mathbf{x} = \mathcal{L}$. □

Z tohoto lemmatu také můžeme vyvodit zajímavý závěr týkající se invariance kvazikrystalu vůči translační symetrii. Vidíme, že pokud by zobrazení $\pi_2|_{\mathcal{L}}$ nebylo prosté, platilo by dle předešlého lemmatu pro všechna $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ taková, že $\pi_2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, že $\Sigma(\Omega) + \pi_1(\mathbf{x}) = \Sigma(\Omega)$. Proto můžeme dokonce definovat mříž

$$\mathcal{L}' = \{\mathbf{x} \in \mathcal{L} : \pi_2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Je zjevné, že se jedná o mříž a navíc $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$. Tato mříž je tedy tvořena vektory, vůči jejíž první projekci je množina $\Sigma(\Omega)$ translačně invariantní.

Tvrzení 1.32. *Pro všechna $\mathbf{x} \in \mathcal{L}'$ je cut-and-project množina $\Sigma(\Omega)$ translačně invariantní vůči posunu o $\pi_1(\mathbf{x})$, tedy*

$$\Sigma(\Omega) + \pi_1(\mathbf{x}) \subset \Sigma(\Omega).$$

Opačnou situaci popisuje následující tvrzení.

Tvrzení 1.33. *Bud' $\pi_2|_{\mathcal{L}}$ prosté zobrazení. Pak $\Sigma(\Omega)$ je aperiodická, tj. nemá žádnou translační symetrii.*

Důkaz. Budeme postupovat sporem. Nechť tedy existuje nenulové \mathbf{x} takové, že $\Sigma(\Omega) + \mathbf{x} = \Sigma(\Omega)$. Nejprve ukážeme, že $\mathbf{x} \in \Sigma(\Omega)$. Jelikož $\mathbf{0} \in \Sigma(\Omega)$, je z invariance i $\mathbf{x} \in \Sigma(\Omega)$. Pak ale $\mathbf{x} \in \pi_1(\mathcal{L})$. Z prostoty zobrazení $\pi_2|_{\mathcal{L}}$ plyne, že $\mathbf{x}^* \in \Omega$ a $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$. Jelikož je množina Ω omezená, existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $(k\mathbf{x})^* = k\mathbf{x}^* \notin \Omega$. Pak ale bod $k\mathbf{x} \notin \Sigma(\Omega)$, což je spor. □

Dále dokážeme další důležitou vlastnost cut-and-project množin. Ukážeme, že tyto množiny jsou delonovské. K důkazu věty použijeme následující lemma pocházející z knihy [7].

Lemma 1.34. *Bud' $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ cut-and-project schéma. Necht' $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Bud' dále $U \subset \mathbb{R}^m$ neprázdná otevřená množina. Pak existuje $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní množina taková, že*

$$\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathcal{L} + (K \times U).$$

Důkaz. Jelikož je \mathcal{L} mřížka, tak určitě existuje kompaktní množina C taková, že $\mathcal{L} + C = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Takovou množinou může být například vícerozměrný rovnoběžnostěn, jehož hrany vycházející z jednoho vrcholu jsou generující vektory mříže \mathcal{L} . Projekcemi π_1 a π_2 získáme jednoznačně kompaktní množiny

$$\begin{aligned} K_1 &:= \pi_1(C), \\ K_2 &:= \pi_2(C). \end{aligned}$$

Přitom určitě platí, že $C \subset K_1 \times K_2$. Proto je také pravda, že

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathcal{L} + (K_1 \times K_2). \quad (1.2)$$

Jelikož je množina $\pi_2(\mathcal{L})$ dle předpokladů hustá v \mathbb{R}^m , je možné vytvořit její otevřené pokrytí pomocí translací množiny U podél bodů této množiny, tj.

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{\mathbf{l} \in \mathcal{L}} (\pi_2(\mathbf{l}) + U).$$

Jelikož je množina $K_2 \subset \mathbb{R}^m$ kompaktní, existuje její konečné podpokrytí. To znamená, že existuje $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ konečná množina taková, že

$$K_2 \subset \bigcup_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}} (\pi_2(\mathbf{f}) + U). \quad (1.3)$$

Položme nyní $K := K_1 - \pi_1(\mathcal{F})$. Tato množina je určitě kompaktní v \mathbb{R}^n .

Bud' nyní $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ libovolný bod. Podle (1.2) existuje $\mathbf{l} \in \mathcal{L}$ tak, že $\mathbf{x} - \mathbf{l} \in K_1 \times K_2$. Zároveň z (1.3) plyne, že existuje $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ tak, že $\pi_2(\mathbf{x} - \mathbf{l}) \in \pi_2(\mathbf{f}) + U$, což je ekvivalentní s tvrzením, že $\pi_2(\mathbf{x} - \mathbf{l} - \mathbf{f}) \in U$. Zároveň $\pi_1(\mathbf{x} - \mathbf{l} - \mathbf{f}) = \pi_1(\mathbf{x} - \mathbf{l}) - \pi_1(\mathbf{f}) \in K_1 - \pi_1(\mathcal{F}) = K$. Proto tedy platí, že

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} + \mathbf{f} + (\mathbf{x} - \mathbf{l} - \mathbf{f}) \in \mathcal{L} + (K \times U).$$

□

Následující věta pochází rovněž z knihy [7].

Věta 1.35. *Při značení výše platí, že*

- (i) *cut-and-project množina $\Sigma(\Omega)$ vzniklá z cut-and-project schématu pomocí omezeného okna $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \overline{\text{int}(\Omega)}$, je delonovská;*
- (ii) *abelovská grupa $[\Sigma(\Omega)]$ generovaná množinou $\Sigma(\Omega)$ splňuje $[\Sigma(\Omega)] = \pi_1(\mathcal{L})$.*

Důkaz. Každé z tvrzení dokážeme zvlášť:

- (i) Abychom dokázali delonovskost množiny, je třeba ukázat, že je množina $\Sigma(\Omega)$ relativně hustá a stejnoměrně diskrétní. Pro důkaz relativní hustoty využijeme předešlého lemmatu, kde položíme $U = -\text{int}(\Omega)$. Podle něj totiž existuje $K \subset \mathbb{R}^m$ kompaktní množina taková, že

$$\mathbb{R}^{n+m} = \mathcal{L} + (K \times (-\text{int}(\Omega))).$$

Pak pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ můžeme schematicky psát

$$(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = (\mathbf{d}, \mathbf{d}^*) + (\mathbf{k}, -\boldsymbol{\omega}),$$

přičemž touto notací rozumíme rozklad vektoru z \mathbb{R}^{n+m} do \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Při tomto značení je pak $\mathbf{d} \in \pi_1(\mathcal{L})$, $\mathbf{k} \in K$ a $\boldsymbol{\omega} \in \text{int}(\Omega)$. Z rovnosti rovněž plyne, že $\mathbf{d}^* = \boldsymbol{\omega} \in \text{int}(\Omega)$. Pak tedy $\mathbf{d} \in \Sigma(\Omega)$ a tudíž libovolné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ lze rozepsat ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{k} \in \Sigma(\Omega) + K$, proto $\mathbb{R}^n = \Sigma(\Omega) + K$, což již znamená, že množina $\Sigma(\Omega)$ je relativně hustá v \mathbb{R}^n .

Pro dokázání stejnoměrné diskrétnosti definujeme pro všechna $r > 0$ množinu

$$K_r := \overline{\mathbf{B}}_r \times (\overline{\Omega} - \overline{\Omega}).$$

Tato množina je určitě kompaktní v \mathbb{R}^{n+m} a symetrická kolem počátku. Navíc pro dostatečně malé r platí, že

$$K_r \cap \mathcal{L} = \{\mathbf{0}\}.$$

Skutečně, kdyby tomu tak nebylo, tak by existoval bod $\mathbf{x} \in (\overline{\Omega} - \overline{\Omega})$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ takový, že by všechny jeho vzory $\pi_2^{-1}(\mathbf{x}) \subset \mathcal{L}$ měly nulovou první projekci, což by byl spor s prostotou zobrazení $\pi_1|_{\mathcal{L}}$. Pro takové r tedy platí, že jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma(\Omega)$ takové, že $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r$, je $(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*) \in K_r$ a tedy $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Proto $(\Sigma(\Omega) - \Sigma(\Omega)) \cap \mathbf{B}_r = \{\mathbf{0}\}$. Toto již ale znamená, že množina $\Sigma(\Omega)$ je stejnoměrně diskrétní, a tudíž je delonovská.

- (ii) Předpokládejme, že Ω generuje prostor \mathbb{R}^m jako grupu, tedy $[\Omega] = \mathbb{R}^m$. Jelikož je množina $(\Sigma(\Omega))^* = \pi_2(\mathcal{L}) \cap \Omega$ hustá v Ω , je množina $[\Sigma(\Omega)]^*$ hustá v \mathbb{R}^m . Buď nyní $\mathbf{x} \in \pi_1(\mathcal{L})$ libovolný bod. Pak množina $\mathbf{x} + [\Sigma(\Omega)]$ je coset podgrupy $[\Sigma(\Omega)]$ v $\pi_1(\mathcal{L})$ a dává vzniknout husté podmnožině $\mathbf{x}^* + [\Sigma(\Omega)]^*$ v \mathbb{R}^m (jedná se jen o posunutí množiny $[\Sigma(\Omega)]^*$). Jelikož je tato množina hustá, určitě obsahuje prvek $\mathbf{x}^* + \mathbf{u}^* \in \Omega$. Pak ale $\mathbf{x} + \mathbf{u} \in \pi_1(\mathcal{L}) + [\Sigma(\Omega)] \subset \pi_1(\mathcal{L})$. Zároveň ale z $\mathbf{x}^* + \mathbf{u}^* \in \Omega$ plyne, že $\mathbf{x} + \mathbf{u} \in \Sigma(\Omega)$ a tedy $\mathbf{x} \in [\Sigma(\Omega)]$. Vzhledem k libovůli $\mathbf{x} \in \pi_1(\mathcal{L})$ pak dostáváme $\pi_1(\mathcal{L}) = [\Sigma(\Omega)]$.

□

Důsledek 1.36. *Cut-and-project množina $\Sigma(\Omega)$ je konečně generovaná.*

Důkaz. Plyne ihned ze druhého bodu předešlé věty.

□

Následující věta, jejíž důkaz lze najít v článku Lagariase [5], dává do souvislosti pojmy meyerovská množina, delonovská množina, konečně generovaná delonovská množina a cut-and-project množina.

Věta 1.37. *Následující výroky o diskrétní množině X v \mathbb{R}^n jsou ekvivalentní:*

(i) X je meyerovská;

(ii) X je delonovská a navíc existuje konečná množina F taková, že

$$X - X \subseteq X + F;$$

(iii) X je konečně generovaná delonovská množina a existuje nedegenerovaná cut-and-project množina X' dimenze nejvýše $\text{rank}(X)$ taková, že

$$X \subseteq X'.$$

Důsledek 1.38. *Speciálně každá cut-and-project množina $\Sigma(\Omega)$ je meyerovská.*

Důkaz. Z důsledku 1.36 plyne, že dimenze $\Sigma(\Omega)$ je konečná. Volbou $X' = \Sigma(\Omega)$ ve třetím bodě věty 1.37 dostáváme již platnost tvrzení. \square

1.3.2 1D cut-and-project množiny vzniklé projekcí 2D mříže

V této části ukážeme, jak je možné zkonstruovat jednorozměrný kvazikrystal, tedy jednodimenzionální cut-and-project množinu. Podrobně rozebereme konstrukci a dokážeme jedno lemma, které později budeme využívat při konstrukcích vícedimenzionálních kvazikrystalů.

Provedeme projekci z mříže \mathcal{L} v \mathbb{R}^2 na prostor \mathbb{R} . Uvažujme proto mřížku $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ definovanou následujícím způsobem

$$\mathcal{L} := \left\{ p \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} \eta \\ 1 \end{pmatrix} : p, q \in \mathbb{Z} \right\},$$

kde ε a η jsou zatím nedefinovaná čísla. Volba nejednotkové první složky ve druhém vektoru bude opodstatněna na následujících řádcích. Uvažujme následující cut-and-project schéma $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2 & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

Zobrazení π_1 a π_2 jsou přitom projektory na osy x a y . Klademe na ně následující požadavky:

1. $\pi_1|_{\mathcal{L}}$ je prosté zobrazení;
2. $\overline{\pi_2(\mathcal{L})} = \mathbb{R}$.

Tyto požadavky už vynucují jinou než racionální volbu čísel η a ε . Nejprve ale dokážeme jedno lemma, na které se v průběhu textu budeme vícekrát odkazovat.

Lemma 1.39. *Množina $\mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$ pro $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je hustá v \mathbb{R} .*

Důkaz. Je zřejmé, že množina $\mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$ je uzavřená vůči sčítání a odčítání. Každé číslo z množiny $b \in \mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$ je možné rozepsat do tvaru $a + x$, kde $a \in \mathbb{Z}$ a $x \in (0, 1)$. Stačí totiž volit $a = [b]$ a $x = b - [b]$. Stačí tedy ukázat, že množina

$$\{m\xi - [m\xi] : m \in \mathbb{N}\} \tag{1.4}$$

je hustá v $(0, 1)$.

Proto je třeba dokázat, že

$$(\forall \alpha \in (0, 1)) (\forall \varepsilon > 0) (\exists m \in \mathbb{N}) (|\alpha - m\xi + \lfloor m\xi \rfloor| < \varepsilon).$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ pevné. Pak existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$. Pomocí tohoto k můžeme rozdělit interval $(0, 1)$ na k podintervalů $(0, \frac{1}{k}), (\frac{1}{k}, \frac{2}{k}), \dots, (\frac{k-1}{k}, 1)$. Uvažujme nyní prvních $k+1$ prvků množiny (1.4): $\xi - \lfloor \xi \rfloor, 2\xi - \lfloor 2\xi \rfloor, \dots, k\xi - \lfloor k\xi \rfloor, (k+1)\xi - \lfloor (k+1)\xi \rfloor$. Podle Dirichletova principu pak existují čísla i, j taková, že $0 < j < i \leq k+1$ tak, že

$$|i\xi - \lfloor i\xi \rfloor - j\xi + \lfloor j\xi \rfloor| < \frac{1}{k} \leq \varepsilon.$$

Odtud plyne, že

$$(i-j)\xi + (\lfloor j\xi \rfloor - \lfloor i\xi \rfloor) < \frac{1}{k} \leq \varepsilon.$$

Protože je množina $\mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$ uzavřená na sčítání a odčítání, vidíme, že $x := (i-j)\xi + (\lfloor j\xi \rfloor - \lfloor i\xi \rfloor) \in \mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$. Z uzavřenosti na násobení celým číslem máme $x\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$. Tímto jsme pokryli celé \mathbb{R} množinou bodů, které jsou od sebe vzdáleny o ε . Nyní pro libovolné číslo $\alpha \in (0, 1)$ a libovolné $\delta > 0$ najdu dle předešlého číslo $x \in \mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$ takové, že $|x| < \delta$. Pak stačí najít číslo $n \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$nx \leq \alpha < (n+1)x.$$

Tedy číslo α leží mezi dvěma body množiny $\mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$, jejichž vzdálenost je menší než ε . Tímto jsme tedy ukázali, že množina (1.4) je hustá v $(0, 1)$ a z úvahy o rozkladu na počátku důkazu tudíž plyne, že je v \mathbb{R} hustá celá množina $\mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$. \square

Věta 1.40. *Cut-and-project schéma* $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ pro $\mathcal{L} = \left\{ p \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} \eta \\ 1 \end{pmatrix} : p, q \in \mathbb{Z} \right\}$,

$\pi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\pi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je

(i) *nedegenerované, právě když* $\eta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

(ii) *ireducibilní, právě když* $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Důkaz. Nejprve ukážeme nedegenerovanost. Budeme postupovat sporem. Kdyby totiž bylo $\eta \in \mathbb{Q}$, tak bychom jej mohli napsat jako $\eta = \frac{r}{s}$, kde $r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}$. Pak $\pi_1(\mathcal{L}) = \{p + q\frac{r}{s} : p, q \in \mathbb{Z}\}$. Volbou $p = -r$ a $q = s$ dostaneme nulu. Toto je ale spor s prostotou zobrazení $\pi_1|_{\mathcal{L}}$, protože jsme našli nenulovou kombinaci bodů z mříže dávající nulovou projekci. Na druhou stranu, kdyby zobrazení $\pi_1|_{\mathcal{L}}$ nebylo prosté, tak existují čísla $p, q \in \mathbb{Z}$ různá od nuly taková, že $p + \eta q = 0$. Pak ale odtud plyne, že $\eta = -\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, což je opět spor.

Nyní ukážeme, že když je množina $p\varepsilon + q : p, q \in \mathbb{Z}$ hustá v \mathbb{R} , tak pak je $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Budeme opět postupovat sporem. Předpokládejme, že $\varepsilon = \frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Pak pro všechna $x, y \in \pi_2(\mathcal{L})$ je $|x - y| \geq \frac{1}{n}$. Tedy množina $\pi_2(\mathcal{L})$ je diskrétní.

Obrácenou implikaci jsme dokázali v předešlém lemmatu. \square

Tímto jsme tedy dokázali, že pro volbu $\eta, \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je cut-and-project schéma $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ nedegenerované a ireducibilní. Nyní uvažujme množinu $\Omega \subset \mathbb{R}$ takovou, že $\text{int}(\Omega) \neq \emptyset$. Pro tuto množinu definujeme kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$:

$$\Sigma(\Omega) = \{p + q\eta : p\varepsilon + q \in \Omega, p, q \in \mathbb{Z}\}.$$

Tímto jsme zkonstruovali nejjednodušší příklad jednodimenzionálního kvazikrystalu.

Tvrzení 1.41. *Nechť $\eta, \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a buď dále $\Omega \subset \mathbb{R}$ taková, že $\overline{\text{int}(\Omega)} \neq \emptyset$. Pak množina*

$$\Sigma(\Omega) = \{p + q\eta : p\varepsilon + q \in \Omega, p, q \in \mathbb{Z}\}$$

je nedegenerovaná a ireducibilní cut-and-project množina.

1.4 Geometrie pravidelného pětiúhelníku

V následující sekci odvodíme některé geometrické vlastnosti pravidelného pětiúhelníku. Pro potřeby následujícího textu nyní rozebereme vlastnosti kořenů polynomů $x^5 - 1$ a $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Kořeny obou z nich leží na jednotkové kružnici, tedy formují pravidelný pětiúhelník. Označme kořeny prvního z polynomů

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= e^{\frac{i2\pi}{5}}, \\ \lambda_2 &= e^{\frac{i8\pi}{5}}, \\ \lambda_3 &= e^{\frac{i4\pi}{5}}, \\ \lambda_4 &= e^{\frac{i6\pi}{5}}, \\ \lambda_5 &= 1.\end{aligned}$$

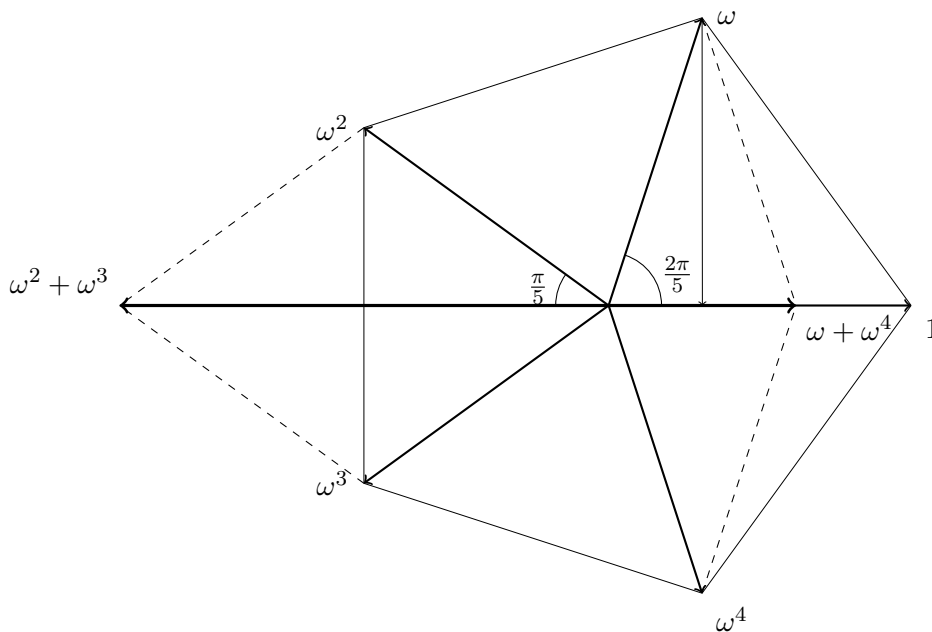
Kořeny druhého polynomu jsou díky tomu, že $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$, rovny $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Platí rovněž, že

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \quad \lambda_3 = \overline{\lambda_4}. \quad (1.5)$$

Označíme-li $\omega = e^{\frac{i2\pi}{5}}$, pak můžeme kořeny vyjádřit jako

$$\lambda_1 = \omega, \quad \lambda_2 = \omega^4, \quad \lambda_3 = \omega^2, \quad \lambda_4 = \omega^3, \quad \lambda_5 = 1 = \omega^5.$$

Tohoto značení budeme v hojně míře využívat. určíme vztahy mezi spojnicemi středu pravidelného pětiúhelníku s jeho vrcholy. Proto využijeme následující obrázek:



Obrázek ilustruje, jak dochází ke sčítání dvojic vektorů ω , ω^4 a ω^2 , ω^3 . Jelikož mají stejnou (jednotkovou) délku, leží jejich součet na ose úhlu jimi sevřeného. Proto tedy

$$\omega + \omega^4 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{5} \right) = \frac{1}{\tau}.$$

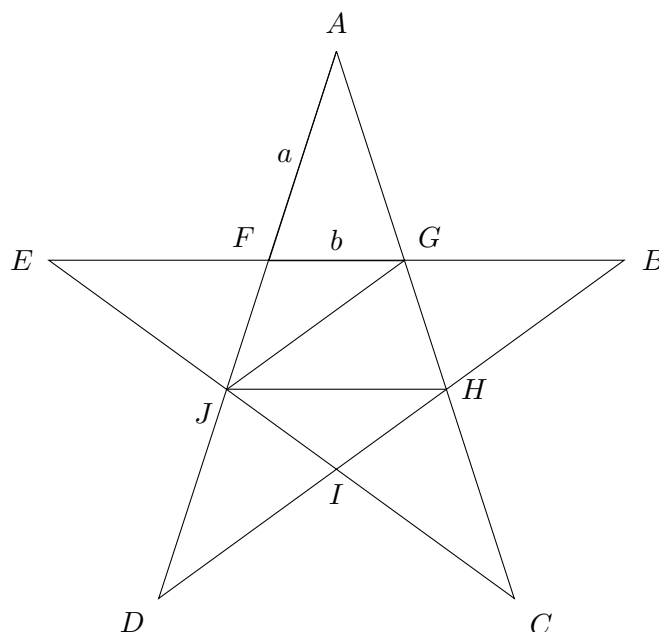
Obdobně toto provedeme pro jinou dvojici spojnic, které vzájemně svírají úhel $\frac{4\pi}{5}$. Ve druhém případě už jen využijeme předešlého výsledku, tj. vyjdeme z faktu, že

$$\begin{aligned} \omega + \omega^3 &= \frac{1}{\tau} \omega^2, \\ 1 + \omega^2 &= \frac{1}{\tau} \omega. \end{aligned}$$

Vyjádřením ω ze druhé rovnice a dosazením do první získáme

$$-\tau\omega = \omega^2 + \omega^3.$$

Díky tomu také získáváme vztah $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\tau}{2}$. V předešlé části jsme využili toho, že $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2\tau}$. Toto odvodíme pomocí poměrů strany a uhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku. Pro toto odvození vyjdeme z pentagramu:



Abychom dokázali odvodit poměr mezi stranami a a b , je třeba určit délku úsečky JH . Je zřejmé, že přímky FG a JH jsou rovnoběžné. Proto $|\angle JHG| = |\angle BGH|$ a $|\angle JGH| = |\angle BHG|$. Jelikož trojúhelníky $\triangle JHG$ a $\triangle BHG$ jsou rovnoramenné, mají společnou základnu a ramena se základnou svírají stejné úhly, jsou tyto trojúhelníky stejné, resp. jen vůči sobě navzájem pootočené. Proto $|JH| = |GB| = a$.

Je rovněž vidět, že trojúhelníky $\triangle AFG$ a $\triangle AJH$ jsou podobné, protože jejich ramena leží na týchž polopřímkách a jejich základny jsou rovnoběžné. Proto platí, že

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{a}{b} + 1.$$

Ze dvou řešení této rovnice vybíráme kladné, což je číslo, které je tradičně nazýváno *zlatý řez*, tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau.$$

Díky tomuto můžeme snadno určit například hodnotu $\cos \frac{2\pi}{5}$. Stačí totiž vyjít například z trojúhelníku $\triangle AFG$, resp. z trojúhelníku, který z něj vznikne svislým přepůlením. Protože je $|\angle AFG| = \frac{2\pi}{5}$, je díky trigonometrickým identitám platným v pravouhlém trojúhelníku

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2\tau}.$$

1.5 Klasická konstrukce kvazikrystalu s pětičetnou symetrií

Klasický způsob konstrukce cut-and-project množin vychází z teorie grup reflexí. Grupa reflexí je grupa transformací, která je určena pomocí jistých zobrazení, která se nazývají reflexe, česky též zrcadlení. Několik základních pojmů nyní ve stručnosti vysvětlíme a ukážeme na příkladech.

Definice 1.42. *Bud' $\alpha \in \mathbb{R}^n$ vektor. Reflexí podle nadroviny určené vektorem α rozumíme zobrazení $r_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, které působí na libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ následovně:*

$$r_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha, \quad (1.6)$$

přičemž $\langle \mathbf{x}, \alpha \rangle$ značí skalární součin vektorů \mathbf{x}, α . Nadrovinu, podle které zrcadlíme, nazýváme *zrcadlo*.

Všimněme si zajímavého faktu, a to, že $r_\alpha^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Toto je jedna z typických vlastností reflexe. Dále platí, že reflexe je izometrií. Skutečně, zvolme \mathbf{x} libovolné, pak:

$$\|r_\alpha(\mathbf{x})\|^2 = \left\langle \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha, \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \right\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 4 \frac{\langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + 4 \frac{\langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^2}{\langle \alpha, \alpha \rangle^2} \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Ilustrujme nyní chování zrcadlení v rovině. Ukážeme pro názornost, jak se zrcadlí vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ podle zrcadla určeného vektorem $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tedy podle osy y . Dosazením získáme

$$r_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Toto přesně odpovídá geometrické představě, jakou o zrcadlení podle osy y máme.

Grupy reflexí se velmi snadno zadávají pomocí tzv. *Dynkinových (Dynkinových-Coxeterových) diagramů*. Jedná se o grafy, jejichž vrcholy představují normály jednotlivých zrcadel a hrany úhel natočení mezi nimi. Jestliže nejsou dva vrcholy grafu v hraně, znamená to, že jim příslušná zrcadla jsou na sebe kolmá. Naopak, jsou-li spojena hranou s hodnotou $k \in \mathbb{N}$, pak tato zrcadla svírají úhel $\frac{\pi}{k}$. Je zvykem, že pro $k = 3$ se tato hodnota nepíše, neboť se jedná o hodnotu nejčastěji se vyskytující. Ilustrujme tento objekt na následujícím příkladě.

Grupě A_2 ¹ odpovídá Dynkinův graf

$$A_2 \equiv \begin{array}{c} \alpha_1 \quad \alpha_2 \\ \circ \text{---} \circ \end{array}$$

V \mathbb{R}^2 si tuto grupu reflexí můžeme představit jako veškeré možné transformace, které získáme skládáním dvou zrcadlení, přičemž normály těchto zrcadel mezi sebou svírají úhel $\frac{\pi}{3}$. Zvolme pro určitost zrcadla, z nichž jedno bude s osou x svírat úhel $\frac{\pi}{6}$ a druhé volme ve směru osy y . Uvažujme nyní mřížku

$$\mathcal{L} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}, \text{ kde } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Tato mřížka je invariantní vůči daným reflexím a má šestičetnou symetrii. Hledali jsme ji tak, aby její vektory $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\alpha_2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ byly normálami daných zrcadel. Proto vektory α_1, α_2 navíc splňují následující rovnice

$$\begin{aligned} r_1 \alpha_1 &= -\alpha_1, \\ r_1 \alpha_2 &= \alpha_1 + \alpha_2, \\ r_2 \alpha_1 &= \alpha_1 + \alpha_2, \\ r_2 \alpha_2 &= -\alpha_2, \end{aligned}$$

kde jsme do definičních vztahů (1.6) pro akci zrcadlení použili skalární součiny dané Grammovou maticí příslušející grupě A_2 , tedy

$$\mathcal{G}_{A_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Přístupme již nyní k samotné konstrukci cut-and-project množiny, kterou provedeme dle článku [1]. Pro získání proto vyjdeme z grupy reflexí A_4 , kterou lze popsat Dynkinovým diagramem

$$A_4 \equiv \begin{array}{c} \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$$

Tato grupa je generována čtyřmi zrcadly r_1, \dots, r_4 , jejichž normály buď svírají úhel $\frac{\pi}{3}$ nebo jsou na sebe kolmá. Grammova matice těchto vektorů má (po přenásobení faktorem 2) tvar:

$$\mathcal{G}_{A_4} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Obdobně jako v ilustrativním případě budeme konstruovat mříž

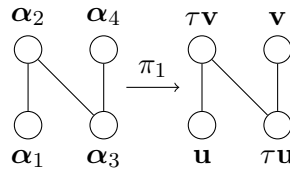
$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i=1}^4 a_i \alpha_i : a_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

¹Toto značení vychází z teorie Lieových algeber.

kteřá bude generována čtyřmi lineárně nezávislými vektory α_i v \mathbb{R}^4 , které splňují následující vztahy:

$$\begin{aligned} r_i \alpha_i &= -\alpha_i, \\ r_i \alpha_{i\pm 1} &= \alpha_i + \alpha_{i\pm 1}, \\ r_i \alpha_j &= \alpha_j \quad \text{pro } |j - i| > 1. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Tyto vztahy odvodíme z tvaru (1.7) Grammovy matice \mathcal{G}_{A_4} . Oproti nim totiž navíc musíme předpokládat, že některé vektory jsou na sebe kolmé. Nyní provedeme projekci π_1 do prostoru \mathbb{R}^2 . I toto je možné schematicky vyjádřit pomocí Dynkinova grafu:



Zde klademe požadavek na volbu projekce π_1 . Projekce vektorů α_i musejí ležet ve dvou různých směrech (\mathbf{u} , \mathbf{v}) a lišit se o násobek skalárem τ . Na vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} zatím neklademe jiné podmínky. Ty přirozeně vyplynou z podmínek kladených na cut-and-project množiny. Stejně tak obdržíme číslo τ . První z požadavků se týkal prostoty projekce π_1 zúžené na mříž. Tedy se jedná o bijekci mezi množinami \mathcal{L} a $\pi_1(\mathcal{L})$. Proto můžeme jednoznačně definovat dvojici zobrazení R_1, R_2 , která budou působit jako zrcadlení (vizte [1]) na prvky projekce $\pi_1(\mathcal{L})$.

$$\begin{aligned} R_1 : \pi_1(\mathcal{L}) &\rightarrow \pi_1(\mathcal{L}) : \mathbf{x} \mapsto \pi_1 r_1 r_3 \pi_1^{-1} \mathbf{x}, \\ R_2 : \pi_1(\mathcal{L}) &\rightarrow \pi_1(\mathcal{L}) : \mathbf{x} \mapsto \pi_1 r_2 r_4 \pi_1^{-1} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že se obě zobrazení chovají skutečně jako zrcadla kolmá na vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{u}) &= \pi_1 r_1 r_3 \pi_1^{-1} \mathbf{u} = \pi_1 r_1 r_3 \alpha_3 = -\pi_1 r_1 \alpha_3 = -\mathbf{u}, \\ R_2(\mathbf{v}) &= \pi_1 r_2 r_4 \pi_1^{-1} \mathbf{v} = \pi_1 r_2 r_4 \alpha_4 = -\pi_1 r_2 \alpha_4 = -\mathbf{v}, \end{aligned}$$

přičemž jsme využili vztahy (1.8). Obě tato zobrazení jsou díky linearitě zobrazení π_1, r_i lineární. Pomocí R_2 určíme konstantu τ . Zkoumejme proto působení zobrazení R_2 na vektory \mathbf{u} a $\tau\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} R_2(\mathbf{u}) &= \pi_1 r_2 r_4 \pi_1^{-1}(\mathbf{u}) = \pi_1 r_2 r_4(\alpha_1) = \pi_1(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathbf{u} + \tau\mathbf{v}, \\ R_2(\tau\mathbf{u}) &= \pi_1 r_2 r_4 \pi_1^{-1}(\tau\mathbf{u}) = \pi_1 r_2 r_4(\alpha_3) = \pi_1(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \tau\mathbf{v} + \tau\mathbf{u} + \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Jelikož je zobrazení R_2 lineární, musí platit, že $R_2(\tau\mathbf{u}) = \tau R_2(\mathbf{u})$. Proto dostáváme rovnost

$$\tau\mathbf{u} + (\tau + 1)\mathbf{v} = \tau(\mathbf{u} + \tau\mathbf{v}) = \tau\mathbf{u} + \tau^2\mathbf{v}.$$

Jelikož jsou vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} lineárně nezávislé v \mathbb{R}^2 , musí konstanta τ vyhovovat rovnici $\tau + 1 = \tau^2$. Za konstantu τ tedy volme větší z kořenů rovnice $x^2 - x - 1 = 0$. O této konstantě bude ještě řeč později. Nyní již tedy víme, jak vypadá projekce π_1 mříže \mathcal{L} na prostor \mathbb{R}^2 :

$$\pi_1(\mathcal{L}) = \{(a + b\tau)\mathbf{u} + (c + d\tau)\mathbf{v} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}.$$

Určeme nyní další vlastnosti vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} . Vyjdeme z pozorování, že zobrazení R_1R_2 je izometrie řádu 5. Že se jedná o izometrii plyne z tvaru zobrazení samotného - jedná se totiž o skládání reflexí. Iterací působení tohoto zobrazení na vektor \mathbf{u} získáme

$$\begin{aligned} R_1R_2(\mathbf{u}) &= \pi_1 r_1 r_2 r_3 r_4 \pi_1^{-1}(\mathbf{u}) = \pi_1 r_1 r_2 r_3 r_4(\boldsymbol{\alpha}_1) = \pi_1(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \tau\mathbf{v} + \tau\mathbf{u}, \\ (R_1R_2)^2(\mathbf{u}) &= \pi_1(r_1 r_2 r_3 r_4)^2 \pi_1^{-1}(\mathbf{u}) = \pi_1(r_1 r_2 r_3 r_4)^2(\boldsymbol{\alpha}_1) = \pi_1(\boldsymbol{\alpha}_4) = \mathbf{v}, \\ (R_1R_2)^3(\mathbf{u}) &= \pi_1(r_1 r_2 r_3 r_4)^3 \pi_1^{-1}(\mathbf{u}) = \pi_1(r_1 r_2 r_3 r_4)^3(\boldsymbol{\alpha}_1) = \pi_1(-\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_4) = -\tau\mathbf{u} - \mathbf{v}, \\ (R_1R_2)^4(\mathbf{u}) &= \pi_1(r_1 r_2 r_3 r_4)^4 \pi_1^{-1}(\mathbf{u}) = \pi_1(r_1 r_2 r_3 r_4)^4(\boldsymbol{\alpha}_1) = \pi_1(-\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) = -\mathbf{u} - \tau\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Proto platí, že

$$\|\mathbf{u}\| = \|\tau\mathbf{v} + \tau\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\tau\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \tau\mathbf{v}\|.$$

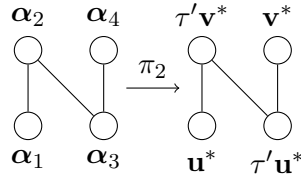
Z rovnosti $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\tau\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$ určíme úhel mezi vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} :

$$\|\tau\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \tau\mathbf{u} + \mathbf{v}, \tau\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \tau^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\tau \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Porovnáním s $\|\mathbf{v}\|^2$ dostáváme výsledek

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\frac{\tau}{2} \|\mathbf{u}\|^2 = \cos \frac{4\pi}{5} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|,$$

přičemž jsme využili opět rovnosti $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$. Již víme, že vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} jsou stejně dlouhé a svírají úhel $\frac{4\pi}{5}$, čímž jsme určili jednu z projekcí. Nyní nám zbývá určit druhou projekci π_2 . K její definici využijeme druhého kořene rovnice $x^2 - x - 1 = 0$, označme jej τ' . Pak projekci π_2 můžeme opět definovat pomocí Dynkinova diagramu následovně:



Analogickým výpočtem jako v předešlé části se ukáže, že vektory \mathbf{u}^* , \mathbf{v}^* jsou stejně dlouhé a že svírají úhel $\frac{2\pi}{5}$. Množina

$$\pi_2(\mathcal{L}) = \{(a + \tau'c)\mathbf{u}^* + (d + \tau'b)\mathbf{v}^* : a, b, c, d \in \mathbb{Z}\},$$

která touto projekcí vznikne, je hustá v \mathbb{R}^2 . Toto vyplývá přímo z lemmatu 1.39 a z lineární nezávislosti vektorů \mathbf{u}^* , \mathbf{v}^* .

Buď nyní $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ libovolný vektor mřížky \mathcal{L} zapsaný pomocí jeho souřadnic v bázi tvořené vektory $\boldsymbol{\alpha}_i$. Pak

$$\begin{aligned} \pi_1(a, b, c, d) &= (a + \tau c)\mathbf{u} + (d + \tau b)\mathbf{v}, \\ \pi_2(a, b, c, d) &= (a + \tau'c)\mathbf{u}^* + (d + \tau'b)\mathbf{v}^*. \end{aligned}$$

Proto cut-and-project množina pro okno Ω má v tomto případě tvar

$$\Sigma(\Omega) = \{(a + \tau c)\mathbf{u} + (d + \tau b)\mathbf{v} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, (a + \tau'c)\mathbf{u}^* + (d + \tau'b)\mathbf{v}^* \in \Omega\}. \quad (1.9)$$

Coxeterovy grupy byly použity i v článku [8] při konstrukci kvazikrystalů v dimenzi 3 a 4. Zároveň je tam předveden i algebraický přístup používající jistý podokruh v tělese kvaternionů.

Kapitola 2

Soběpodobnost kvazikrystalu

V této kapitole nejprve na jednodimenzionálním případě demonstrujeme pojem soběpodobnosti kvazikrystalu a následně vyslovíme a dokážeme větu (dle článku [5]), která nám umožní dát do souvislosti transformace cut-and-project množiny s transformací mřížky. Poznamenejme, že pojem cut-and-project množiny a kvazikrystalu nám bude odteď splývat. V literatuře navíc neexistuje jednotná definice kvazikrystalu (z matematického pohledu).

Definice 2.1. *Soběpodobností kvazikrystalu $\Sigma(\Omega) \in \mathbb{R}^n$ rozumíme afinní zobrazení $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ takové, že $S(\Sigma(\Omega)) \subset \Sigma(\Omega)$.*

Uvažujme nyní obecný tvar zobrazení S na kvazikrystalu $\Sigma(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, tedy

$$S(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta},$$

kde $\mathbf{x} \in \Sigma(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^n$. Jelikož platí, že $S(\Sigma(\Omega)) \subset \Sigma(\Omega)$ a jelikož předpokládáme, že $\mathbf{0} \in \Sigma(\Omega)$, platí, že $S(\mathbf{0}) = A\mathbf{0} + \boldsymbol{\delta} \in \Sigma(\Omega) \subset \pi_1(\mathcal{L})$. Proto tedy $\boldsymbol{\delta} \in \Sigma(\Omega) \subset \pi_1(\mathcal{L})$.

V práci se zaměříme na hledání soběpodobností bez translace. Existují ovšem ryze afinní soběpodobnosti jako například tzv. *kvazikrystalové sčítání*, které je soběpodobností na kvazikrystalech. Tato operace je podrobně popsána v článku [2] pro kvazikrystalu s pětičetnou symetrií. Tato binární operace působí na dvojici vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma(\Omega)$ následovně:

$$\mathbf{x} \vdash \mathbf{y} := \tau^2 \mathbf{x} - \tau \mathbf{y}.$$

Je možné ukázat, že $\Sigma(\Omega)$ je uzavřeno na tuto operaci a další její zajímavé vlastnosti.

2.1 Jednodimenzionální kvazikrystal se soběpodobností

Nyní uvažujme zobrazení $S : \Sigma(\Omega) \rightarrow \Sigma(\Omega)$, které je soběpodobností kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$, tzn. $S(\Sigma(\Omega)) \subset \Sigma(\Omega)$. Takové zobrazení má pro jednodimenzionální kvazikrystal podobu lineární transformace, tedy pro libovolné $x \in \Sigma(\Omega)$ má tvar

$$S(x) = Ax,$$

kde $A(x) = \lambda x$ a platí, že $\lambda \in \mathbb{R}$ a $|\lambda| > 1$. Pokud dochází k transformaci kvazikrystalu, dochází rovněž k transformaci mřížky, ze které projektujeme. Z tohoto důvodu je třeba předpokládat, že se i body množiny Ω transformují. Označme tedy C zobrazení na mřížce \mathcal{L} , které bude reprezentovat naše zobrazení S a ponese v sobě rovněž informaci o transformaci druhé složky v okně.

Matice zobrazení C ve standardní bázi \mathcal{E} má tvar:

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Zároveň víme, že se jedná o zobrazení, které transformuje mřížku do sebe samé, tj. $C(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. Jelikož souřadnice bodů mříže v bázi $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ jsou celočíselné, musejí být rovněž matice zobrazení C v těchto souřadnicích celočíselná, tj.

$${}_{\mathcal{Y}}C_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}.$$

Převědeme-li tuhle matici do báze \mathcal{E} , získáme porovnáním s maticí výše vyjádření parametrů λ, λ' v závislosti na konstantách ε, η :

$$\begin{aligned} C &= {}_{\mathcal{Y}}\mathcal{I}^{\mathcal{E}} {}_{\mathcal{Y}}C_{\mathcal{Y}} \mathcal{E}\mathcal{I}^{\mathcal{Y}} = \frac{1}{1 - \varepsilon\eta} \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\eta \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1 - \varepsilon\eta} \begin{pmatrix} a + c\eta - \varepsilon(b + d\eta) & b + d\eta - \eta(a + c\eta) \\ c + a\varepsilon - \varepsilon(d + b\varepsilon) & d + b\varepsilon - \eta(c + a\varepsilon) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Porovnáním nediagonálních prvků matic (2.1) a (2.2) obdržíme podmínky na čísla ε, η :

$$0 = b + d\eta - \eta(a + c\eta) = -c\eta^2 + (d - a)\eta + b, \quad (2.3)$$

$$0 = c + a\varepsilon - \varepsilon(d + b\varepsilon) = -b\varepsilon^2 + (a - d)\varepsilon + c. \quad (2.4)$$

Vidíme, že η a ε jsou kořeny navzájem reciprokých polynomů, tudíž η a ε jsou sobě převrácenými hodnotami. To znamená, že $\varepsilon \in \{\frac{1}{\eta}, \frac{1}{\eta'}\}$. Zároveň ale nemůže být $\eta = \frac{1}{\varepsilon}$, protože jinak by mříž \mathcal{L} byla generována dvěma lineárně závislými vektory. Z tohoto důvodu musí nutně být $\eta' = \frac{1}{\varepsilon}$. Díky tomuto poznatku můžeme přepsat podobu zkoumaného kvazikrystalu do tvaru

$$\Sigma(\Omega) = \{p + q\eta : p + q\eta' \in \eta'\Omega, p, q \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.5)$$

Poznamenejme ještě fakt, že pokud rovnice (2.3) a (2.4) vynásobíme koeficientem c , resp. b vidíme odtud, že čísla $c\eta$ a $b\varepsilon$ jsou algebraická celá čísla, protože jsou kořeny monických polynomů s celočíselnými koeficienty.

$$0 = -(c\eta)^2 + (d - a)c\eta + cb,$$

$$0 = -(b\varepsilon)^2 + (a - d)b\varepsilon + cb.$$

Dále porovnáním diagonálních prvků matice (2.1) a (2.2) získáme rovněž vyjádření koeficientů λ, λ' , které upravíme pomocí vztahů (2.3) a (2.4):

$$\lambda = \frac{a + c\eta - \varepsilon(b + d\eta)}{1 - \varepsilon\eta} = \frac{a + c\eta - \varepsilon\eta(a + c\eta)}{1 - \varepsilon\eta} = a + c\eta, \quad (2.6)$$

$$\lambda' = \frac{d + b\varepsilon - \eta(c + a\varepsilon)}{1 - \varepsilon\eta} = \frac{d + b\varepsilon - \eta\varepsilon(d + b\varepsilon)}{1 - \varepsilon\eta} = d + b\varepsilon. \quad (2.7)$$

Ukázali jsme, že $c\eta, b\varepsilon$ jsou algebraická celá čísla a že koeficienty $\lambda \in \mathbb{Z}[c\eta], \lambda' \in \mathbb{Z}[b\varepsilon]$. Proto jsou i λ a λ' algebraická celá čísla. Zkoumejme zvlášť případ, kdy $\lambda' = 1$. Pak totiž z (2.7) plyne, že $b = 0$ a $d = 1$. Ze vztahu (2.4) dále plyne, že $c = 0$ a $a = 1$, tudíž $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obdobný výsledek ($C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$) dostáváme i pro volbu $\lambda' = -1$.

Tvrzení 2.2. *Uvažujme cut-and-project schéma $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ z předchozích úvah a středově symetrické okno Ω . Je-li A soběpodobnost kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$, která pro všechna $x \in \Sigma(\Omega)$ působí následovně: $Ax = \lambda x$, pak buď $\lambda = \pm 1$, nebo λ nebo $-\lambda$ je kvadratické Pisotovo číslo.*

2.2 Škálovací symetrie kvazikrystalu

Následující věta pochází z článku [5], kde je dokázána v plné obecnosti pro konečně generované delonovské množiny, speciálně část (i) pro libovolné konečně generované množiny a část (ii) pro meyerovské množiny. Podle důsledku 1.38 je cut-and-project množina meyerovská. Důkaz věty, který zde předvedeme, je uzpůsobený pro náš případ.

Věta 2.3. *Buď $\Sigma(\Omega)$ n -dimenzionální kvazikrystal, $\text{rank}(\Sigma(\Omega)) = s$, takový, že existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$, číslo takové, že $\lambda\Sigma(\Omega) \subseteq \Sigma(\Omega)$. Pak platí*

(i) *Číslo λ je algebraické celé číslo a navíc stupeň λ dělí $\text{rank}(\Sigma(\Omega))$, tj. stupeň λ dělí s ;*

(ii) *Číslo λ je Pisotovo nebo Salemovo číslo.*

Důkaz. Pro přehlednost označme $m = s - n$. Abelovská aditivní grupa $[\Sigma(\Omega)]$ je konečně generována s vektory $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}^{(s)}$. Ty jsou díky ireducibilitě a nedegenerovanosti cut-and-project množiny $\Sigma(\Omega)$ lineárně nezávislé nad \mathbb{Q} . Podle věty 1.35 platí, že $[\Sigma(\Omega)] = \pi_1(\mathcal{L})$. Proto je-li $\mathcal{L} = \{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_s\}$, tak pak $\mathbf{v}^{(i)} = \pi_1(\mathbf{l}_i)$.

(i) Jelikož dle předpokladu platí, že $\lambda\Sigma(\Omega) \subseteq \Sigma(\Omega)$, platí rovněž $\lambda[\Sigma(\Omega)] \subseteq [\Sigma(\Omega)]$. Toto můžeme chápat jako akci nějakého zobrazení λ na abelovskou grupu $[\Sigma(\Omega)]$. Definujeme-li matici $V \in \mathbb{R}^{s \times n}$ jako matici vytvořenou ze složek vektorů $\mathbf{v}^{(i)}$ zapsaných do řádků, tj.

$$(V)_{ij} = v_j^{(i)},$$

můžeme inkluzi $\lambda[\Sigma(\Omega)] \subseteq [\Sigma(\Omega)]$ převést do řeči matic

$$\lambda V = MV. \tag{2.8}$$

Matice M je celočíselná matice $s \times s$, protože z inkluze $\lambda\Sigma(\Omega) \subseteq \Sigma(\Omega)$ plyne, že zobrazuje prvek kvazikrystalu na prvek kvazikrystalu a tedy toto platí i pro množinu $[\Sigma(\Omega)]$. Jelikož jsou ale tyto prvky jen ortogonálními projekcemi prvků z mříže, která je abelovskou aditivní grupou, tj. „souřadnice“ bodů v mříži jsou celá čísla, musí být obraz prvku při pronásobení číslem λ rovněž nějakou projekcí bodu z mříže, tedy prvku s celočíselnými souřadnicemi. Označme

$$f(x) = \det(xI_s - M) \in \mathbb{Z}[x].$$

Toto je monický polynom stupně s s celočíselnými koeficienty. Jelikož ale $f(\lambda) = 0$ (toto plyne z konstrukce, neboť dle (2.8) je $(\lambda I_s - M)V = 0$), je zřejmé, že číslo λ je algebraické celé číslo stupně nejvýše s . Označme tedy stupeň čísla λ jako d .

Nyní ukážeme, že d dělí s . Proto předpokládejme, že $f_{\min}(x)$ je celočíselný monický polynom minimálního stupně (tedy d), jehož je λ kořenem. Označme

$$f_{\min}(x) = x^d + \sum_{k=1}^d a_k x^{d-k}. \tag{2.9}$$

Platí, že $\lambda^k V = M^k V$. Skutečně, postupujeme-li matematickou indukcí, pro $j = 1$ máme z (2.8) $\lambda V = MV$. Nyní provedme indukční krok od $k \mapsto k + 1$:

$$\lambda^{k+1} V = \lambda(\lambda^k V) = \lambda(M^k V) = M^k(\lambda V) = M^k(MV) = M^{k+1} V. \quad (2.10)$$

Dosadíme-li nyní tento vztah do rovnice 2.9, získáme

$$f_{min}(M)V = \left(M^d + \sum_{k=1}^d a_k M^{d-k} \right) V = \left(\lambda^d + \sum_{k=1}^d a_k \lambda^{d-k} \right) V = f_{min}(\lambda)V = O. \quad (2.11)$$

Že je výsledkem nulová matice O , plyne z faktu, že $f_{min}(\lambda) = 0$. Všimněme si, že protože je matice M celočíselná, je taky matice $f_{min}(M)$ celočíselná (jedná se totiž o součet celočíselných násobků součinů celočíselných matic). Navíc podle (2.11) pro všechna $1 \leq i \leq s$ platí, že

$$\sum_{k=1}^s f_{min}(M)_{ik} \mathbf{v}^{(k)} = 0.$$

Toto je ale lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}^{(k)}$ dávající nulový vektor. Jelikož víme, že matice $f_{min}(M)$ je celočíselná a víme rovněž, že vektory $\mathbf{v}^{(k)}$ jsou lineárně nezávislé nad \mathbb{Q} , plyne odtud, že koeficienty této lineární kombinace jsou 0 a tedy libovolný i -tý řádek matice $f(M)$ je nulový. Tudíž celá matice $f_{min}(M)$ je nulová matice. Tímto jsme ukázali, že matice M nuluje polynom $f_{min}(x)$. Jelikož je tento polynom ireducibilní nad \mathbb{Q} a monický, implikuje to, že se musí jednat o minimální polynom matice M . Z důsledku (1.23) plyne, že charakteristický polynom matice M je mocninou minimálního polynomu. Proto existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $d^k = s$. Tedy stupeň d čísla λ dělí počet s generátorů grupy $[\Sigma(\Omega)]$. Navíc dimenze kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$ splňuje $n = \frac{s}{d}$.

- (ii) Díky části (i) víme, že minimální polynom $f_{min}(x)$ matice M je ireducibilní nad \mathbb{Q} a λ je jeho kořenem. Označíme-li $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ kořeny minimálního polynomu f_{min} , lze jej zapsat v následující podobě:

$$f_{min}(x) = \prod_{i=1}^d (x - \lambda_i) = x^d + \sum_{k=1}^d a_k x^{d-k}, \text{ přičemž } \lambda_i \text{ jsou různé.}$$

Matici M je proto možné diagonalizovat nad \mathbb{C} . Odtud plyne, že je možné provést rozklad prostoru \mathbb{C}^s na direktní součet podprostorů příslušných různým vlastním číslům. Tedy

$$\mathbb{C}^s = \bigoplus_{j=1}^d V_j, \quad (2.12)$$

přičemž V_j je vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu λ_j . Jeho dimenze je $\dim V_j = \frac{s}{d} = n$. Je zřejmé, že pro všechna $1 \leq j \leq d$ a pro libovolné $\mathbf{w} \in V_j$ platí, že $M\mathbf{w} = \lambda_j \mathbf{w}$.

V první části jsme rovněž použili matici V představující složky projekcí $\mathbf{v}^{(i)} = \pi_1(\mathbf{l}_i)$ báze vektorů $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_s$ mříže \mathcal{L} zapsané do řádků. Ty se transformovaly pouze přenásobením maticí M . Dle pravidel pro násobení matice maticí je vidět, že se na tomto násobení podílí pouze prvních n řádků matice M . Pomocí stejné matice se ale musejí

transformovat projekce $\pi_2(\mathbf{l}_i)$. Zapišeme-li je do matice \widetilde{V} , pak můžeme celou transformaci obou projekcí zapsat schématicky do podoby

$$M(V|\widetilde{V}) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \widetilde{M} \end{pmatrix} (V|\widetilde{V}),$$

kde matice \widetilde{M} představuje působení na projekce π_2 bázevých vektorů mříže. Zároveň víme, že matici M v tomto tvaru lze chápat jako blokově diagonální tvar tvořený čtvercovými maticemi rozměru $n \times n$ s příslušnými vlastními čísly na diagonále. Matice \widetilde{M} je tedy rovněž diagonální s ostatními kořeny minimálního polynomu f_{min} na diagonále. Jelikož je $\Sigma(\Omega)$ cut-and-project množina, musejí projekce $\pi_2(\mathbf{l}_i)$ náležet oknu Ω . Aby toto bylo zajištěno, musí být velikost všech čísel na diagonále matice \widetilde{M} menší nebo rovna 1. Abychom toto

ukázali, vyjdeme z faktu, že $\Omega \subset \bigoplus_{j=2}^d V_j$. Zvolme $\mathbf{w} \in \Omega \cap \pi_2(\mathcal{L})$ tak, že $\widetilde{M}\mathbf{w} = \lambda_j\mathbf{w}$, tedy

volíme \mathbf{w} tak, že se jedná o vlastní vektor matice \widetilde{M} . Tuto volbu můžeme provést právě díky hustotě projekce $\pi_2(\mathcal{L})$ v \mathbb{R}^m . Pro vektor \mathbf{w} existuje $\mathbf{l} \in \mathcal{L}$ tak, že $\mathbf{w} = \pi_2(\mathbf{l})$. Platí, že $(\pi_1(M^k\mathbf{l})) = \lambda^k\pi_1(\mathbf{l}) \in \Sigma(\Omega)$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, neboť se jedná o soběpodobnost kvazikrystalu. Stejně se transformuje i druhá projekce, tedy $\widetilde{M}^k(\mathbf{w}) = \lambda_j^k\mathbf{w}$. Aby se tato projekce neocitla mimo omezenou množinu Ω pro žádné $k \in \mathbb{N}$, plyne odtud, že $|\lambda_j| \leq 1$ pro $j \geq 2$. Tímto jsme ukázali, že číslo λ je buď Pisotovo nebo Salemovo, neboť je dle předpokladu větší než jedna a ostatní k němu sdružená algebraická čísla mají velikost menší nebo rovnu jedné. □

V předešlém důkaze jsme využívali možnost zapsat cut-and-project schéma v maticovém zápisu. Proto tento způsob zápisu nyní zformalizujeme a upravíme do podoby, ve které bude užitečný pro další výpočty.

2.3 Souvislost soběpodobnosti na kvazikrystalu s transformacemi mříže

V následující sekci popíšeme cut-and-project množiny pomocí maticového zápisu. Na jeho základě ukážeme, jaké jsou podmínky na vektory mříže \mathcal{L} , aby cut-and-project množina vykazovala soběpodobnost A . Označme proto klasicky V matici rozměru $s \times s$ tvořenou generujícími vektory mříže \mathcal{L} zapsanými do sloupců.¹ Je zřejmé, že každý vektor mříže lze zapsat jako $V\mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^s$. Předpokládejme, že okno $\Omega \subset B(0, r) \subset \mathbb{R}^{s-n}$. Pak n -dimenzionální cut-and-project množinu s oknem Ω lze zapsat jako

$$\Sigma(\Omega, V) = \left\{ \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & O \end{pmatrix} V\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^s, \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{s-n} \end{pmatrix} V\mathbf{x} \in \Omega \right\}.$$

Aby toto zapsání bylo zcela identické s definicí cut-and-project množiny, je nutné poznamenat, že tento kvazikrystal je v \mathbb{R}^s , ačkoliv má nenulových pouze prvních n složek. Stejně tak pro

¹Zde je ona drobná změna oproti způsobu použitým v důkaze.

druhou projekci. Proto je možné provést jednoznačné přiřazení následujícím způsobem:

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & O \end{pmatrix} V\mathbf{x} = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots, 0)^T \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{s-n} \end{pmatrix} V\mathbf{x} = (0, \dots, 0, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_s)^T \rightarrow (a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_s) \in \mathbb{R}^{s-n}.$$

Označme $(I_n \ O)V\mathbf{x} = \pi_1(V\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $(O \ I_{s-n})V\mathbf{x} = \pi_2(V\mathbf{x}) = \mathbf{b}^* \in \mathbb{R}^{s-n}$. V řeči tohoto zápisu má pak kvazikrystal tvar

$$\Sigma(\Omega) = \{\mathbf{b} \in \pi_1(\mathcal{L}) : \mathbf{b}^* \in \Omega\},$$

což plně koresponduje s předešlou definicí.

Ve zbytku kapitoly využijeme výše uvedený maticový zápis cut-and-project množin k odvození několika tvrzení o soběpodobnostech cut-and-project množin, na kterých budeme ve zbytku práce stavět.

Věta 2.4. *Bud' $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ nedegenerované ireducibilní schéma, kde $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^{s \times s}$. Bud' dále A soběpodobnost množiny $\pi_1(\mathcal{L})$. Pak existuje matice $C \in \mathbb{Z}^{s \times s}$, která je podobná matici*

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix},$$

kde $B \in \mathbb{R}^{s-n \times s-n}$. Speciálně

$$C = V^{-1} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} V,$$

kde $V \in \mathbb{R}^{s \times s}$ je matice tvořená generujícími vektory mříže zapsanými do sloupců.

Poznámka. *Mějme soběpodobnost A na kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$. Podle druhého bodu věty 1.35 platí, že $\pi_1(\mathcal{L}) = [\Sigma(\Omega)]$. Jelikož je zobrazení A lineární, je odtud zřejmé, že A je také soběpodobností na $\pi_1(\mathcal{L})$. Obráceně toto tvrzení neplatí.*

Důkaz věty 2.4. Provedeme konstruktivní důkaz. Proto označme vektory mříže $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_s$. Pak libovolný vektor $\mathbf{l} \in \mathcal{L}$ lze napsat ve tvaru $\mathbf{l} = V\mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^s$. Projekce lze vyjádřit pomocí matic, tedy $\pi_1(\mathbf{l}) = (I_n \ O)\mathbf{l}$ a $\pi_2(\mathbf{l}) = (O \ I_{s-n})\mathbf{l}$. Jelikož je zobrazení A soběpodobností množiny $\pi_1(\mathcal{L})$, existuje $\mathbf{l}' \in \mathcal{L}$ takové, že

$$A\pi_1(\mathbf{l}) = \pi_1(\mathbf{l}').$$

Zároveň ale můžeme přepsat výraz na levé straně do tvaru

$$A\pi_1(\mathbf{l}) = A(I_n \ O)V\mathbf{x} = (I_n \ O)V\mathbf{y} \quad \text{pro jisté } \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^s.$$

Jelikož je zobrazení π_1 bijekcí, dostáváme porovnáním $\mathbf{l}' = V\mathbf{y}$. Dále definujme zobrazení B následovně:

$$B\pi_2(\mathbf{l}) = B(O \ I_{s-n})V\mathbf{x} := (O \ I_{s-n})V\mathbf{y}.$$

Od \mathbf{x} můžeme k \mathbf{y} přejít pomocí celočíselné matice $C \in \mathbb{Z}^{s \times s}$. Tuto můžeme nalézt díky libovůli volby \mathbf{x} . Dohromady tyto podmínky dávají

$$A(I_n \ O)V\mathbf{x} = (I_n \ O)VC\mathbf{x},$$

$$B \begin{pmatrix} O & I_{s-n} \end{pmatrix} V \mathbf{x} = \begin{pmatrix} O & I_{s-n} \end{pmatrix} V C \mathbf{x}.$$

Tento výraz už snadno upravíme do podoby, kterou budeme používat nejčastěji

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} V \mathbf{x} = V C \mathbf{x} \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in \pi_1(\mathcal{L}).$$

Proto tedy

$$C = V^{-1} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} V, \quad (2.13)$$

čímž je věta dokázána. \square

Z této věty ihned vyplývá dvojice zajímavých číselněteoretických důsledků, které později využijeme.

Důsledek 2.5. *Při stejném značení jako výše platí, že vlastní čísla matice A jsou algebraická celá čísla.*

Důkaz. Vlastní čísla matice $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ jsou stejná jako vlastní čísla matice C , neboť se jedná o podobné matice. Proto jsou vlastní čísla matice A mezi vlastními čísly matice C . Ta jsou kořeny monického polynomu s celočíselnými koeficienty, tedy jsou algebraická celá čísla. \square

Důsledek 2.6. *Minimální polynom nad \mathbb{Q} všech vlastních čísel λ matice A dělí charakteristický polynom matice C .*

Důkaz. Vlastní čísla matice A jsou algebraická celá čísla; proto jsou jejich minimální polynomy monické polynomy s celočíselnými koeficienty. Jelikož je libovolné vlastní číslo λ kořenem charakteristického polynomu matice C , který je celočíselný monický, plyne už odtud, že minimální polynom čísla λ musí dělit charakteristický polynom matice C . \square

Věta 2.7. *Bud' $C \in \mathbb{Z}^{s \times s}$ matice taková, že existuje matice $V \in \mathbb{R}^{s \times s}$ taková, že matice $V C V^{-1}$ je blokově diagonální, tj.*

$$V C V^{-1} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix},$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{s-n \times s-n}$.

(i) *Pak existuje cut-and-project schéma $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ takové, že $\dim \mathcal{L} = s$, $\pi_1 : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi_2 : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{s-n}$, A je soběpodobností $\pi_1(\mathcal{L})$ a generující vektory mříže \mathcal{L} jsou vektory vytvořené ze sloupců matice V . Přitom projekce lze zapsat ve tvaru*

$$\pi_1(\mathbf{l}) = \begin{pmatrix} I_n & O \end{pmatrix} \mathbf{l}, \quad \pi_2(\mathbf{l}) = \begin{pmatrix} O & I_{s-n} \end{pmatrix} \mathbf{l}, \quad \text{kde } \mathbf{l} \in \mathcal{L}.$$

(ii) *Je-li matice $C' \in \mathbb{Z}^{s \times s}$ taková, že po podobnostní transformaci maticí V je blokově diagonální s bloky stejné dimenze jako v předchozí části věty, tj.*

$$V C' V^{-1} = \begin{pmatrix} A' & O \\ O & B' \end{pmatrix},$$

pak zobrazení A' je soběpodobností $\pi_1(\mathcal{L})$.

Poznámka. *O nedegenerovanosti a ireducibilitě takového schematu neumíme obecně rozhodnout. V další části textu bude uveden příklad degenerovaného cut-and-project schematu vzniklého touto metodou. Vizte sekci 4.1.*

Důkaz věty 2.7. Důkaz části (i) je zřejmý s ohledem na důkaz předešlé věty. Platnost části (ii) plyne přímo z části (i), neboť díky požadavku na stejnou dimenzi jednotlivých bloků máme zajištěnu shodu zobrazení π_1 a π_2 . Dostáváme tedy stejné schéma a zobrazení A' je tedy jeho soběpodobností. \square

Věta 2.8. *Buď dáno nedegenerované ireducibilní cut-and-project schéma $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ se soběpodobností A . Jestliže existuje takové okno $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, že A je soběpodobností kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$, pak vlastní čísla matice zobrazení A jsou v absolutní hodnotě větší nebo rovna jedné a vlastní čísla matice B z věty 2.4 jsou v absolutní hodnotě menší nebo rovna jedné.*

\Rightarrow : Předpokládejme, že A je soběpodobností kvazikrystalu. Z věty 2.4 plyne existence matice $C \in \mathbb{Z}^{s \times s}$ takové, že $A\pi_1(V\mathbf{x}) = \pi_1(VC\mathbf{x})$. Iterováním rovnice (2.13) získáváme

$$\begin{pmatrix} A^k & O \\ O & B^k \end{pmatrix} = VC^kV^{-1}.$$

Proto $A^k\pi_1(V\mathbf{x}) = \pi_1(VC^kV^{-1}V\mathbf{x}) = \pi_1(VC^k\mathbf{x}) \in \Sigma(\Omega)$. Toto platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$, protože A je soběpodobnost kvazikrystalu. Proto také $\pi_2(VC^k\mathbf{x}) \in \Omega$ pro všechna k . Jelikož $\pi_2(VC^k\mathbf{x}) = B^k\pi_2(V\mathbf{x})$, plyne z omezenosti množiny Ω již nutně fakt, že absolutní hodnota vlastních čísel λ_j matice B je menší než jedna. Jelikož zobrazení B zachovává množinu $\Omega \cap \pi_2(\mathcal{L})$ a je spojitě a $\pi_2(\mathcal{L})$ je hustá v Ω , zachovává B celou množinu Ω i s jejím uzávěrem. Pak kdyby platilo, že $|\lambda_j| > 1$ pro nějaké $j \in \{1, \dots, m\}$, takové, že vlastní vektor \mathbf{w}_j je reálný, obdrželi bychom iterováním $B^n\mathbf{w}_j = \lambda_j^n\mathbf{w}_j \notin \Omega$ pro dostatečně velké n . Je-li vlastní číslo $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_j = |\lambda_j|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, je rovněž $\bar{\lambda}_j$ vlastním číslem matice B . Jim příslušné vlastní vektory nazvěme $\mathbf{w}_j, \bar{\mathbf{w}}_j$. Na reálném podprostoru dimenze 2 generovaném vektory $\mathbf{w}_j + \bar{\mathbf{w}}_j, i(\mathbf{w}_j - \bar{\mathbf{w}}_j)$ působí zobrazení B jako

$$|\lambda_j| \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Kdyby pak $|\lambda_j| > 1$, obdrželi bychom pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ iterováním $B^n\mathbf{x} \notin \Omega$ pro dostatečně velké n .

Fakt, že velikost vlastních čísel matice A je větší nebo rovna jedné, plyne z toho, že A zachovává množinu, která je delonovská. V opačném případě by totiž došlo k porušení faktu, že množina $A(\Sigma(\Omega))$ je delonovská se stejnou (nebo větší) minimální vzdáleností r . \square

Věta 2.9. *Buď dáno nedegenerované ireducibilní cut-and-project schéma $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ se soběpodobností A . Jestliže má matice $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ z věty 2.4 vlastní čísla v absolutní hodnotě ostře menší než jedna, pak existuje okno Ω takové, že $\Sigma(\Omega)$ je kvazikrystal se soběpodobností A .*

Důkaz. Jelikož jsou vlastní čísla matice B ostře menší než jedna v absolutní hodnotě, existuje podle [4, Corollary 1.2.3] v \mathbb{R}^m metrika h taková, že je v ní zobrazení B kontrahující, tj. pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ platí $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > h(B\mathbf{x}, B\mathbf{x})$. Zvolíme-li nyní jako okno množinu $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : h(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq 1\}$, platí, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a libovolné $\mathbf{z} \in \mathcal{L}$ takové, že $\pi_2(V\mathbf{z}) \in \Omega$, je splněno $B^k\pi_2(V\mathbf{z}) \in \Omega$. Proto také $\pi_1(V\mathbf{z}) \in \Sigma(\Omega)$ a $A^k\pi_1(V\mathbf{z}) \in \Sigma(\Omega)$. Tedy platí, že $A\Sigma(\Omega) \subset \Sigma(\Omega)$, což bylo dokázat. \square

Jestliže je matice B diagonalizovatelná, můžeme zeslabit předpoklad na vlastní čísla matice B .

Věta 2.10. *Bud' dáno nedegenerované ireducibilní cut-and-project schéma $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ se soběpodobností A . Jestliže je matice $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ z věty 2.4 diagonalizovatelná a její vlastní čísla jsou v absolutní hodnotě menší nebo rovna jedné, pak existuje okno Ω takové, že $\Sigma(\Omega)$ je kvazikrystal se soběpodobností A .*

Důkaz. Sestrojíme pozitivně definitní matici, která indukuje skalární součin, potažmo metriku, ve které bude zobrazení B neexpandující. Provedeme konstruktivní důkaz existence metriky a okna. Nejprve najdeme metriku takovou, ve které budou vlastní vektory ortonormální. Označme $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ vlastní čísla matice B a jim příslušné vlastní vektory označme $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$. Skalární součin definujeme pomocí hermitovscky sdružené matice $H = G^*G$, kde G^* značí hermitovské sdružení. Matice G je matice lineárního zobrazení takového, které převádí vlastní vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$ matice B na vektory standardní báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$. Pak definujeme skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ následovně

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_H = \mathbf{x}^* G^* G \mathbf{y}.$$

Přímo vidíme, že takto skalární součin je tímto způsobem dobře definovaný, protože se jedná o standardní skalární součin vektorů $G\mathbf{x}$ a $G\mathbf{y}$. Zároveň máme tímto způsobem zajištěnou ortonormalitu vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$, protože pro libovolné i, j platí, že

$$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle_H = \mathbf{w}_i^* G^* G \mathbf{w}_j = \mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

Nyní ukážeme, že v metrice indukované tímto skalárním součinem je zobrazení B kontrahující.

Uvažujme proto obecný vektor $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{w}_i$. Pak dostáváme

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_H = \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{w}_i, \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{w}_j \right\rangle_H = \sum_{i,j=1}^m \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle_H = \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2,$$

$$\langle B\mathbf{x}, B\mathbf{x} \rangle_H = \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i B\mathbf{w}_i, \sum_{j=1}^m \alpha_j B\mathbf{w}_j \right\rangle_H = \sum_{i,j=1}^m \overline{\alpha_i} \eta_i \alpha_j \eta_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle_H = \sum_{i=1}^m |\eta_i|^2 |\alpha_i|^2.$$

Jelikož jsou všechna vlastní čísla v absolutní hodnotě menší nebo rovna jedné, platí pak

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_H \geq \langle B\mathbf{x}, B\mathbf{x} \rangle_H$$

pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, a tedy zobrazení B je v této metrice neexpandující.

Zvolíme-li jako okno Ω kouli v této metrice, tj.

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_H \leq 1 \},$$

je množina $\Sigma(\Omega)$ opět kvazikrystal se soběpodobností A . □

Kapitola 3

Kvazikrystal s pětičetnou symetrií vzniklý projekcí 4D mříže

V následujících dvou kapitolách se budeme věnovat kvazikrystalům s pětičetnou symetrií. Budeme proto zkoumat jaká cut-and-project schemata připouštějí existenci kvazikrystalu, který je uzavřen vůči izometrii A řádu 5, tj. vůči zobrazení A splňujícímu $A^5 = I$. Proto minimální polynom matice A nad \mathbb{R} dělí polynom $x^5 - 1$. Rozklad tohoto polynomu nad \mathbb{R} má tvar $x^5 - 1 = (x - 1)(x^2 + \frac{1}{\tau}x + 1)(x^2 - \tau x + 1)$. Jelikož si nepřejeme triviální $A = I$, je pak buď $A^2 + \frac{1}{\tau}A - I$, nebo $A^2 - \tau A + I$. V obou případech jsou ale vlastními čísly páté kořeny jedničky, a proto musí mít matice C (z věty 2.7) charakteristický polynom dělitelný minimálním polynomem pátých kořenů jedničky (dle 2.6), tedy polynomem $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Proto bude rozměr matice alespoň 4×4 , a tedy dimenze mříže bude alespoň 4. V této kapitole rozebereme čtyřdimenzionální případ a srovnáme jej s klasickým postupem pro získávání množin se zadanou symetrií pomocí Coxeterových grup, v tomto konkrétním případě s grupou A_4 .

3.1 Konstrukce kvazikrystalu

Mějme proto polynom $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$. Matice, jejímž je tento polynom charakteristickým polynomem, je matice společnice

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nyní nalezneme vlastní vektory příslušné vlastním číslům. Buď proto λ libovolné vlastní číslo (tedy libovolný kořen rovnice $p(x) = 0$). Pak

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & \lambda & \lambda + \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda + 1 & \lambda^3 + \lambda^2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektory tedy budou mít až na komplexní násobek tvar

$$\mathbf{y}^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \lambda_i^3 \end{pmatrix},$$

kde index i označuje příslušné vlastní číslo λ_i . Z (1.5) plynou obdobné rovnosti pro vlastní vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)} &= \overline{\mathbf{y}^{(2)}}, \\ \mathbf{y}^{(3)} &= \overline{\mathbf{y}^{(4)}}. \end{aligned}$$

Jelikož se jedná o vlastní vektory matice C_1 , jsou lineárně nezávislé, a tedy tvoří bázi v prostoru \mathbb{C}^4 . Označme $\mathcal{X}_{\mathbb{C}} = (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)}, \mathbf{y}^{(4)})$. Díky provázanosti vektorů pomocí komplexního sdružení můžeme sestavit bázi $\mathcal{X}_{\mathbb{R}} = (\tilde{\mathbf{y}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{y}}^{(2)}, \tilde{\mathbf{y}}^{(3)}, \tilde{\mathbf{y}}^{(4)})$, jejíž vektory budou reálné. Stačí položit

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(1)} = \mathbf{y}^{(1)} + \mathbf{y}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{y}}^{(2)} = i(\mathbf{y}^{(2)} - \mathbf{y}^{(1)}), \quad (3.1)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(3)} = \mathbf{y}^{(3)} + \mathbf{y}^{(4)}, \quad \tilde{\mathbf{y}}^{(4)} = i(\mathbf{y}^{(4)} - \mathbf{y}^{(3)}). \quad (3.2)$$

Tedy mezi bázemi máme následující matice přechodu, přičemž matice P slouží k převodu z báze $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$ do báze $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

S využitím značení popsaného v úvodní kapitole má matice Y vytvořená z vlastních vektorů matice C_1 tvar (konstanta $\frac{1}{5}$ slouží pouze pro elegantnější výsledek)

$$Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega & \omega^4 & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega \\ \omega^3 & \omega^2 & \omega & \omega^4 \end{pmatrix}$$

a k ní inverzní matice Y^{-1} má následující podobu

$$Y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \omega & \omega^4 - \omega & \omega^3 - \omega & \omega^2 - \omega \\ 1 - \omega^4 & \omega - \omega^4 & \omega^2 - \omega^4 & \omega^3 - \omega^4 \\ 1 - \omega^2 & \omega^3 - \omega^2 & \omega - \omega^2 & \omega^4 - \omega^2 \\ 1 - \omega^3 & \omega^2 - \omega^3 & \omega^4 - \omega^3 & \omega - \omega^3 \end{pmatrix}.$$

Matici C_1 lze pomocí matic Y a Y^{-1} diagonalizovat. Pomocí matic P a P^{-1} ji lze převést do reálného kvazidiagonálního tvaru, tedy

$$P^{-1}Y^{-1}C_1YP = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} & \sin \frac{2\pi}{5} & 0 & 0 \\ -\sin \frac{2\pi}{5} & \cos \frac{2\pi}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{4\pi}{5} & \sin \frac{4\pi}{5} \\ 0 & 0 & -\sin \frac{4\pi}{5} & \cos \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Porovnáme-li tuto rovnici se vztahem (2.13), získáme podle věty 2.7 matici V z vektorů generujících mříž, která má tvar

$$\begin{aligned} V = P^{-1}Y^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \omega & \omega^4 - \omega & \omega^3 - \omega & \omega^2 - \omega \\ 1 - \omega^4 & \omega - \omega^4 & \omega^2 - \omega^4 & \omega^3 - \omega^4 \\ 1 - \omega^2 & \omega^3 - \omega^2 & \omega - \omega^2 & \omega^4 - \omega^2 \\ 1 - \omega^3 & \omega^2 - \omega^3 & \omega^4 - \omega^3 & \omega - \omega^3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 - \omega - \omega^4 & 0 & \omega^3 + \omega^2 - (\omega + \omega^4) & \omega^3 + \omega^2 - (\omega + \omega^4) \\ i(\omega^4 - \omega) & 2i(\omega^4 - \omega) & i(\omega^3 - \omega^2 + \omega^4 - \omega) & i(\omega^2 - \omega^3 + \omega^4 - \omega) \\ 2 - \omega^2 - \omega^3 & 0 & \omega + \omega^4 - (\omega^2 + \omega^3) & \omega + \omega^4 - (\omega^2 + \omega^3) \\ i(\omega^3 - \omega^2) & 2i(\omega^3 - \omega^2) & i(\omega - \omega^4 + \omega^3 - \omega^2) & i(\omega^4 - \omega + \omega^3 - \omega^2) \end{pmatrix} = \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \cos \frac{2\pi}{5} & 0 & \cos \frac{4\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} & \cos \frac{4\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} & 2 \sin \frac{2\pi}{5} & \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} & \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5} \\ 1 - \cos \frac{4\pi}{5} & 0 & \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{4\pi}{5} & \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} & 2 \sin \frac{4\pi}{5} & \sin \frac{4\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} & \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Mříž \mathcal{L} má tedy v tomto případě tvar

$$\mathcal{L} = \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \\ 1 - \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}^{(1)}} + \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin \frac{2\pi}{5} \\ 0 \\ 2 \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}^{(2)}} + \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \\ \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}^{(3)}} + \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5} \\ \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}^{(4)}}.$$

Grammova matice vektorů mříže má tvar

$$\mathcal{G} = 5 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Uvažujme nyní následující cut-and-project schéma

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^4 & \\ \swarrow \pi_1 & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Ukážeme, že jsou splněny podmínky pro to, aby množina vzniklá projekcí části mříže určené oknem Ω byla cut-and-project množina. Nejprve dokážeme prostotu zobrazení $\pi_1|_{\mathcal{L}}$. Pro dokázání tohoto tvrzení stačí ukázat, že $\pi_1^{-1}|_{\mathcal{L}}(\{\mathbf{0}\}) = \mathbf{0}$. Tedy stačí ukázat, že soubor projekcí $\{\pi_1(\mathbf{v}^{(i)})\}_{i=1}^4$ je lineárně nezávislý nad \mathbb{Q} . Nejen pro tento důkaz využijeme rovnosti

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}, \quad (3.7)$$

jejíž důkaz je přímočarý. Při stejném značení jako výše totiž platí, že

$$0 = \omega^4 + \omega + \omega^3 + \omega^2 + 1 = 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} + 1.$$

Tímto je tedy dokázána.

Lemma 3.1. *Vektory*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{\parallel}^{(1)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{\parallel}^{(2)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{\parallel}^{(3)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{\parallel}^{(4)}} \quad (3.8)$$

jsou lineárně nezávislé nad \mathbb{Q} .

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že existují nenulová čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Q}$ taková, že

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozepíšeme výraz $\cos \frac{4\pi}{5}$ za pomoci identity (3.7) a porovnáním koeficientů u výrazů $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\sin \frac{2\pi}{5}$, $\sin \frac{4\pi}{5}$, 1 získáme sadu rovnic pro koeficienty α_i .

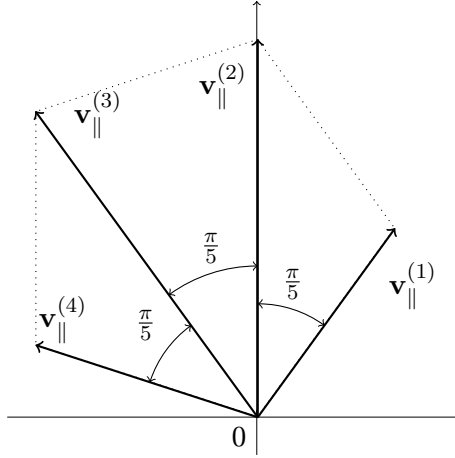
$$\begin{aligned} \alpha_1 - \frac{\alpha_3}{2} - \frac{\alpha_4}{2} &= 0, \\ -\alpha_1 - 2\alpha_3 - 2\alpha_4 &= 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0, \\ \alpha_3 - \alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, což je spor. \square

Přepíšeme nyní ještě vektory (3.8) pomocí vztahů pro goniometrické funkce, abychom zjistili jejich vzájemnou polohu v rovině.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} &= 2 \sin \frac{\pi}{5} \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{5} \\ \cos \frac{\pi}{5} \end{pmatrix}, & \mathbf{v}_{\parallel}^{(2)} &= 2 \sin \frac{2\pi}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{v}_{\parallel}^{(3)} &= 2 \sin \frac{3\pi}{5} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{5} \\ \cos \frac{\pi}{5} \end{pmatrix}, & \mathbf{v}_{\parallel}^{(4)} &= 2 \sin \frac{\pi}{5} \begin{pmatrix} -\sin \frac{3\pi}{5} \\ -\cos \frac{3\pi}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Odtud již vidíme, že tyto vektory společně s počátkem tvoří vrcholy pravidelného pětiúhelníku, jak ilustruje následující obrázek:



Jelikož vektory $\mathbf{v}_{\parallel}^{(i)}$ tvoří hrany a uhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, plynou z jeho geometrie následující vztahy, které umožní přepsat celou projekci $\pi_1(\mathcal{L})$ pomocí pouze dvojice vektorů

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\parallel}^{(2)} - \mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} &= \frac{1}{\tau} \mathbf{v}_{\parallel}^{(3)}, \\ \mathbf{v}_{\parallel}^{(3)} - \mathbf{v}_{\parallel}^{(4)} &= \frac{1}{\tau} \mathbf{v}_{\parallel}^{(2)},\end{aligned}$$

a odtud plynou požadované vztahy:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\parallel}^{(2)} &= \mathbf{v}_{\parallel}^{(4)} + \tau \mathbf{v}_{\parallel}^{(1)}, \\ \mathbf{v}_{\parallel}^{(3)} &= \mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} + \tau \mathbf{v}_{\parallel}^{(4)}.\end{aligned}$$

Pomocí nich tedy můžeme pro všechna $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ přepsat kombinaci

$$a\mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} + b\mathbf{v}_{\parallel}^{(2)} + c\mathbf{v}_{\parallel}^{(3)} + d\mathbf{v}_{\parallel}^{(4)} = a\mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} + b\mathbf{v}_{\parallel}^{(4)} + \tau b\mathbf{v}_{\parallel}^{(4)} + c\mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} + \tau c\mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} + d\mathbf{v}_{\parallel}^{(4)} = (a+c+b\tau)\mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} + (b+d+c\tau)\mathbf{v}_{\parallel}^{(4)}.$$

Proto můžeme psát

$$\pi_1(\mathcal{L}) = \left\{ a\mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} + b\mathbf{v}_{\parallel}^{(2)} + c\mathbf{v}_{\parallel}^{(3)} + d\mathbf{v}_{\parallel}^{(4)} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Z}[\tau]\mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} + \mathbb{Z}[\tau]\mathbf{v}_{\parallel}^{(4)}. \quad (3.9)$$

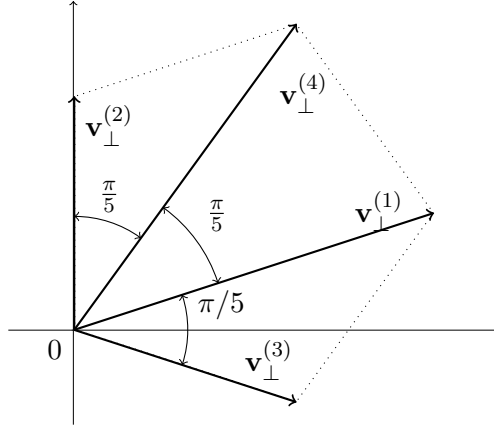
Nyní ukážeme, že druhá projekce mříže $\pi_2(\mathcal{L})$ je hustá v \mathbb{R}^2 . Tím potvrdíme, že navržené cut-and-project schéma je ireducibilní a nedegenerované, čímž dokážeme, že vhodnou volbou Ω můžeme získat cut-and-project množinu.

Lemma 3.2. *Množina $\pi_2(\mathcal{L})$ je hustá v \mathbb{R}^2 .*

Důkaz. V důkaze budeme chtít použít větu 1.39. Proto nejprve množinu $\pi_2(\mathcal{L})$ přepíšeme do formy, která umožní tuto větu použít.

$$\pi_2(\mathcal{L}) = \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 - \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{\perp}^{(1)}} + \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{\perp}^{(2)}} + \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{\perp}^{(3)}} + \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{\perp}^{(4)}}.$$

Stejnou úpravou pomocí goniometrických identit (jako v předešlém odstavci) dojdeme k faktu, že vrcholy vektorů $\mathbf{v}_{\perp}^{(i)}$ tvoří pravidelný pětiúhelník.



Proto platí

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\perp}^{(1)} - \mathbf{v}_{\perp}^{(3)} &= \frac{1}{\tau} \mathbf{v}_{\perp}^{(4)}, \\ \mathbf{v}_{\perp}^{(4)} - \mathbf{v}_{\perp}^{(2)} &= \frac{1}{\tau} \mathbf{v}_{\perp}^{(1)}. \end{aligned}$$

Buď nyní $\mathbf{x} \in \pi_2(\mathcal{L})$ libovolné. Nechť jsou $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= a\mathbf{v}_{\perp}^{(1)} + b\mathbf{v}_{\perp}^{(2)} + c\mathbf{v}_{\perp}^{(3)} + d\mathbf{v}_{\perp}^{(4)} = \mathbf{v}_{\perp}^{(1)} \left[a + c - \frac{b}{\tau} \right] + \mathbf{v}_{\perp}^{(4)} \left[b + d - \frac{c}{\tau} \right] = \\ &= \mathbf{v}_{\perp}^{(1)} [a + c + b - b\tau] + \mathbf{v}_{\perp}^{(4)} [b + d + c - c\tau] \in \mathbf{v}_{\perp}^{(1)} \mathbb{Z}[\tau] + \mathbf{v}_{\perp}^{(4)} \mathbb{Z}[\tau] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pro úplnost dodejme, že ve druhém řádku jsme využili toho, že τ splňuje $\tau^2 - \tau - 1 = 0$. Proto (po vydělení τ) platí $\frac{1}{\tau} = \tau - 1$. Tímto jsme ukázali, že množinu $\pi_2(\mathcal{L})$ je možné zapsat jako součet

$$\pi_2(\mathcal{L}) = \mathbf{v}_{\perp}^{(1)} \mathbb{Z}[\tau] + \mathbf{v}_{\perp}^{(4)} \mathbb{Z}[\tau], \quad (3.11)$$

přičemž vektory $\mathbf{v}_{\perp}^{(1)}, \mathbf{v}_{\perp}^{(4)}$ jsou lineárně nezávislé. Toto znamená, že množinu $\pi_2(\mathcal{L})$ lze chápat jako součet dvou hustých množin, které leží v rozdílných podprostorech a hustota v jedné z těchto množin nezávisí na druhé. Proto je množina $\pi_2(\mathcal{L})$ hustá v \mathbb{R}^2 . \square

Tímto jsme dokázali, že jsme sestrojili nedegenerované ireducibilní cut-and-project schéma.

Tvrzení 3.3. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ taková, že $\overline{\text{int}(\Omega)} \neq \emptyset$. Pak množina*

$$\begin{aligned} \Sigma(\Omega) = \left\{ (a + b\tau) \begin{pmatrix} 1 - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + (c + d\tau) \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \right. \\ \left. (a + b\tau') \begin{pmatrix} 1 - \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} + (c + d\tau') \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} \in \Omega \right\} \end{aligned}$$

je cut-and-project množina.

3.2 Srovnání s klasickou konstrukcí

V této sekci ověříme, jestli jsme získali stejný výsledek jako v případě konstrukce pomocí grup reflexí. Dospěli jsme totiž ke dvěma výsledkům, které by měly být stejné. Že tomu tak je, resp. že se výsledky liší jen o škálování, ukážeme tak, že se pokusíme nalézt vyjádření vektorů α_i z klasické konstrukce pomocí námi nalezených vektorů $\mathbf{v}^{(i)}$. Vyjdeme přitom z projekcí obou vektorů a z Grammových matic obou čtveřic vektorů.

Z klasické konstrukce vyplynulo, že projektované vektory splňují následující rovnosti:

$$\begin{aligned}\underbrace{\pi_1(\alpha_3)}_{\tau \mathbf{u}} &= \tau \underbrace{\pi_1(\alpha_1)}_{\mathbf{u}}, \\ \underbrace{\pi_1(\alpha_2)}_{\tau \mathbf{v}} &= \tau \underbrace{\pi_1(\alpha_4)}_{\mathbf{v}}.\end{aligned}$$

Rovněž víme, že vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} jsou stejně dlouhé a svírají úhel $\frac{4\pi}{5}$. Vzhledem k faktu, že námi vypočtené projektované vektory $\mathbf{v}_{\parallel}^{(i)}$ formují po řadě svými vrcholy pravidelný pětiúhelník, plyne z jeho geometrie toto

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\parallel}^{(2)} &= \tau \left(\mathbf{v}_{\parallel}^{(3)} - \mathbf{v}_{\parallel}^{(4)} \right), \\ -\mathbf{v}_{\parallel}^{(3)} &= \tau \left(\mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} - \mathbf{v}_{\parallel}^{(2)} \right).\end{aligned}$$

Touto volbou znamének je navíc zaručeno, že vektory $\mathbf{v}_{\parallel}^{(3)} - \mathbf{v}_{\parallel}^{(4)}$ a $\mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} - \mathbf{v}_{\parallel}^{(2)}$ svírají požadovaný úhel $\frac{4\pi}{5}$. Volme proto následující přiřazení:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= k \left(\mathbf{v}^{(3)} - \mathbf{v}^{(4)} \right), \\ \alpha_2 &= -k \mathbf{v}^{(3)}, \\ \alpha_3 &= k \mathbf{v}^{(2)}, \\ \alpha_4 &= k \left(\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(2)} \right).\end{aligned}$$

Přepíšeme-li toto do řeči matic, získáme matici přechodu. Ta má jednotkový determinant (při vhodné volbě konstanty k . Jelikož na velikost vektorů $\mathbf{v}^{(i)}$ klademe pouze tu podmínku, aby byly stejně dlouhé, můžeme je konstantou k pronásobit). Konkrétně vypadá tento přechod v maticovém zápisu následovně:

$$\left(\mathbf{v}^{(1)} \ \mathbf{v}^{(2)} \ \mathbf{v}^{(3)} \ \mathbf{v}^{(4)} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4).$$

Konstantu k získáme výpočtem, kterým rovněž ověříme, že jsme přiřazení provedli správně. Spočteme Grammovu matici těchto nových vektorů a porovnáme ji s (1.7). Tímto zjistíme, že matice mají stejný tvar a konstanta $k = \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$. Konkrétně tedy můžeme ještě vyjádřit generující

vektory α_i pomocí sinů a cosinů:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin \frac{4\pi}{5} \\ 0 \\ -2 \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} \\ \cos \frac{4\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin \frac{2\pi}{5} \\ 0 \\ 2 \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}, \alpha_4 = \sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} 1 - \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \\ 1 - \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}.$$

Tímto jsme tedy učili normály k zrcadlům, která určují čtyřdimenzionální mříž.

Můžeme ještě využít vztahů (3.9), (3.10) a tvaru vektorů (3.6) a zapsat kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ v jistém tvaru. Definujeme-li totiž zobrazení $' : \mathbb{Z}[\tau] \rightarrow \mathbb{Z}[\tau]$, které působí následujícím způsobem

$$(a + b\tau)' = a + b\tau' := a - \frac{b}{\tau},$$

a využijeme-li faktu, že v matici (3.6) jsou první dva řádky souřadnice projekce π_1 a druhé dva řádky souřadnice projekce π_2 a že je vidět (z tvaru (3.5)), že se jedná o obrazy prvních dvou řádků při Galoisově automorfismu $\sigma : \omega \mapsto \omega^2$, můžeme definovat zobrazení $*$: $\pi_1(\mathcal{L}) \rightarrow \pi_2(\mathcal{L})$, které působí následovně:

$$(\mathbf{u}_{\parallel} + \tau \mathbf{v}_{\parallel})^* = \mathbf{u}_{\parallel}^* + \tau' \mathbf{v}_{\parallel}^* := \mathbf{u}_{\perp} + \tau' \mathbf{v}_{\perp}.$$

Proto pak můžeme zkoumaný kvazikrystal přepsat do podoby

$$\Sigma(\Omega) = \left\{ a\mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} + b\mathbf{v}_{\parallel}^{(4)} : a, b \in \mathbb{Z}[\tau], \left(a\mathbf{v}_{\parallel}^{(1)} + b\mathbf{v}_{\parallel}^{(4)} \right)^* \in \Omega \right\},$$

což je výsledek de facto identický s tím, který jsme obdrželi za použití klasické konstrukce, tedy stejný jako (1.9). Obě metody tedy dávají principiálně stejný výsledek jen s tím rozdílem, že námi použitá metoda umožňuje konstruovat kvazikrystaly s pětičetnou symetrií pouze na základě jednoduchých prostředků lineární algebry a elementů teorie matic bez předchozí znalosti teorie grup reflexí.

3.3 Soběpodobnosti 2D kvazikrystalu s pětičetnou symetrií

V této části se pokusíme vyšetřit, jaké další soběpodobnosti může mít kvazikrystal vzniklý projekcí této konkrétní mříže \mathcal{L} . Aby nějaká takováto soběpodobnost existovala, musí existovat dle druhého bodu věty (2.7) matice C taková, že VCV^{-1} je blokově diagonální. Kvazikrystal jsme získali z matice C_1 . Je proto třeba najít další matice, které budou mít stejné vlastní vektory,

jako matice C_1 . To jsou především její mocniny,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, C_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_1^4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matici C_1^4 nebudeme potřebovat, neboť je možné ji získat jako následující lineární kombinaci předešlých matic: $C_1^4 = -C_1^3 - C_1^2 - C_1 - I$. Toto vyplývá z Hamilton-Cayleyho věty a tvaru charakteristického polynomu matice C_1 . Všechny tyto matice mají shodné vlastní vektory, což je snadno nahlédnutelné. Snadným výpočtem rovněž ověříme, že toto jsou jediné možné matice, které mají za vlastní vektory právě $\mathbf{y}^{(i)}$. Uvažujme obecnou matici $C \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$ a vektor $\mathbf{y}^{(1)}$. Pak řešíme rovnici

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \varepsilon & \zeta & \eta & \vartheta \\ \iota & \kappa & \lambda & \mu \\ \nu & \xi & \omicron & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \quad \text{pro } \rho \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Vynásobíme-li první řádek této soustavy číslem ω a porovnáme-li jej s pravou stranou druhé rovnice, získáme po porovnání koeficientů u stejných mocnin ω vztahy mezi čísly v matici C' . Analogicky postupujeme pro třetí a čtvrtý řádek. Dostáváme podmínky pro koeficienty

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\delta, & \iota &= \delta - \gamma, & \nu &= \gamma - \beta, \\ \zeta &= \alpha - \delta, & \kappa &= -\gamma, & \xi &= \delta - \beta, \\ \eta &= \beta - \delta, & \lambda &= \alpha - \gamma, & \omicron &= -\beta, \\ \vartheta &= \gamma - \delta, & \mu &= \beta - \gamma, & \pi &= \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Odtud již plyne, že se jedná o matici nakombinovatelnou z mocnin matice C_1 , tj.

$$C = \alpha I + \beta C_1 + \gamma C_1^2 + \delta C_1^3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\delta & \alpha - \delta & \beta - \delta & \gamma - \delta \\ \delta - \gamma & -\gamma & \alpha - \gamma & \beta - \gamma \\ \gamma - \beta & \delta - \beta & -\beta & \alpha - \beta \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Matice C musí navíc zachovávat mříž, proto z tvaru prvního řádku plyne, že je nutně celočíselná. Další podmínky na matici C už výše užitým postupem, tj. za pomoci dalších vlastních vektorů $\mathbf{y}^{(i)}$, nezískáme. Plyne to z faktu, že soustavu, kterou bychom řešili, lze získat z (3.12) aplikací příslušného tělesového automorfismu tělesa $\mathbb{Q}(\omega)$. $\mathbb{Q}(\omega)$ je cyklotomické těleso stupně 4, přičemž Galoisovy automorfismy tohoto tělesa mají tvar:

$$\sigma_i(\omega) = \omega^i \quad \text{pro } i = 1, 2, 3, 4.$$

Jsou-li vlastní vektory $\mathbf{y}^{(i)}$ matice C_1 zapsány do matice Y , můžeme pomocí nich všechny moc-

niny matice C_1 diagonalizovat a budou mít následující podobu

$$Y^{-1}C_1Y = \text{diag} \{ \omega, \omega^4, \omega^2, \omega^3 \},$$

$$Y^{-1}C_1^2Y = \text{diag} \{ \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega \},$$

$$Y^{-1}C_1^3Y = \text{diag} \{ \omega^3, \omega^2, \omega, \omega^4 \}.$$

Vidíme rovněž, že veškeré lineární kombinace těchto matic jsou pomocí matice Y diagonalizovatelné.

Tvrzení 3.4. *Vlastní čísla matice (3.13) jsou tvaru*

$$\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^4, \quad (3.14)$$

$$\sigma_2(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^4), \quad (3.15)$$

$$\sigma_3(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^4), \quad (3.16)$$

$$\sigma_4(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^4). \quad (3.17)$$

Důkaz. Z předešlých úvah plyne, že matici C můžeme převést pomocí matice Y do diagonálního tvaru, kde na diagonále jsou právě čísla $\sigma_i(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^4)$. \square

Důsledek 3.5. *Množina*

$$\mathfrak{C} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\delta & \alpha - \delta & \beta - \delta & \gamma - \delta \\ \delta - \gamma & -\gamma & \alpha - \gamma & \beta - \gamma \\ \gamma - \beta & \delta - \beta & -\beta & \alpha - \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z} \right\}$$

s operacemi maticové sčítání a maticové násobení je komutativní okruh izomorfní okruhu cyklotomických celých čísel $\mathbb{Z}[\omega]$.

Důkaz. Jelikož je ω algebraické celé číslo stupně 4, je množina

$$\mathbb{Z}[\omega] := \{ \alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^3 : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z} \}$$

okruh celých čísel v tělese $\mathbb{Q}(\omega)$, tedy platí $\mathbb{Z}[\omega] = \mathbb{Q}(\omega) \cap \mathbb{B}$. Isomorfismus mezi $\mathbb{Z}[\omega]$ a \mathfrak{C} je pak dán

$$\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\delta & \alpha - \delta & \beta - \delta & \gamma - \delta \\ \delta - \gamma & -\gamma & \alpha - \gamma & \beta - \gamma \\ \gamma - \beta & \delta - \beta & -\beta & \alpha - \beta \end{pmatrix}.$$

\square

Matici C můžeme kvazidiagonalizovat pomocí matic (3.3). Je to možné, neboť se jedná o součty mocnin matice C_1 . Dle (3.4) získáme blokově diagonální matici s maticovým vyjádřením všech možných soběpodobností modulu $\pi_1(\mathcal{L})$. Po kvazidiagonalizaci dostaneme

$$P^{-1}Y^{-1}CYP = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \cos \frac{2\pi}{5} + (\gamma + \delta) \cos \frac{4\pi}{5} & \beta \sin \frac{2\pi}{5} + (\gamma - \delta) \sin \frac{4\pi}{5} & 0 & 0 \\ -\beta \sin \frac{2\pi}{5} + (\delta - \gamma) \sin \frac{4\pi}{5} & \alpha + \beta \cos \frac{2\pi}{5} + (\gamma + \delta) \cos \frac{4\pi}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \beta \cos \frac{4\pi}{5} + (\gamma + \delta) \cos \frac{2\pi}{5} & \beta \sin \frac{4\pi}{5} + (\gamma - \delta) \sin \frac{2\pi}{5} \\ 0 & 0 & -\beta \sin \frac{4\pi}{5} + (\delta - \gamma) \sin \frac{2\pi}{5} & \alpha + \beta \cos \frac{4\pi}{5} + (\gamma + \delta) \cos \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}.$$

Označme

$$A \equiv \begin{pmatrix} \alpha + \beta \cos \frac{2\pi}{5} + & \beta \sin \frac{2\pi}{5} + \\ +(\gamma + \delta) \cos \frac{4\pi}{5} & +(\gamma - \delta) \sin \frac{4\pi}{5} \\ -\beta \sin \frac{2\pi}{5} + & \alpha + \beta \cos \frac{2\pi}{5} + \\ +(\delta - \gamma) \sin \frac{4\pi}{5} & +(\gamma + \delta) \cos \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix},$$

$$B \equiv \begin{pmatrix} \alpha + \beta \cos \frac{4\pi}{5} + & \beta \sin \frac{4\pi}{5} + \\ +(\gamma + \delta) \cos \frac{2\pi}{5} & +(\gamma - \delta) \sin \frac{2\pi}{5} \\ -\beta \sin \frac{4\pi}{5} + & \alpha + \beta \cos \frac{4\pi}{5} + \\ +(\delta - \gamma) \sin \frac{2\pi}{5} & +(\gamma + \delta) \cos \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}.$$

Z věty ?? plyne, že aby matice A byla soběpodobností kvazikrystalu pro jisté okno Ω (například kruhové), musí mít vlastní čísla větší nebo rovna jedné a matice B menší nebo rovna jedné. Jelikož známe diagonální podobu matice C , získáme snadno rovněž její vlastní čísla, která jsou stejná jako vlastní čísla kvazidiagonální matice $P^{-1}Y^{-1}CYP$. Proto snadno získáme podmínky na koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^3| &\geq 1, \\ |\alpha + \beta\omega^4 + \gamma\omega^3 + \delta\omega^2| &\geq 1, \\ |\alpha + \beta\omega^2 + \gamma\omega^4 + \delta\omega| &\leq 1, \\ |\alpha + \beta\omega^3 + \gamma\omega + \delta\omega^4| &\leq 1. \end{aligned}$$

S využitím automorfismů tělesa $\mathbb{Q}(\omega)$ můžeme podmínky ekvivalentně přepsat do následujícího tvaru:

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^3| &\geq 1, \\ |\sigma_4(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^3)| &\geq 1, \\ |\sigma_2(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^3)| &\leq 1, \\ |\sigma_3(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^3)| &\leq 1. \end{aligned}$$

Jelikož navíc platí, že $\omega = \overline{\sigma_4(\omega)}$ a $\sigma_2(\omega) = \overline{\sigma_3(\omega)}$, jsou podmínky na čísla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ekvivalentní požadavku, aby číslo $\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^3$ bylo komplexní Pisotovo číslo. Formálně tedy:

Tvrzení 3.6. *Pro všechna komplexní Pisotova čísla η , $\eta \in \mathbb{Z}[\omega]$, $\eta = |\eta|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ existuje okno Ω takové, že A je soběpodobností kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$ a $A = |\eta|R$, kde R je matice rotace o úhel φ .*

V následující části ukážeme, že existují rovněž další soběpodobnosti kvazikrystalu, které neodpovídají kombinacím mocnin matice C_1 . Podle věty 2.7 musí každá matice F , která koresponduje se soběpodobností kvazikrystalu, splňovat maticovou rovnost

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = V F V^{-1},$$

kde V je matice tvořená vektory mříže zapsanými do sloupců. Toto můžeme v souladu s naší volbou matice V přepsat podle (3.5) do tvaru

$$P \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} P^{-1} = Y^{-1} F Y \Leftrightarrow Y P \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} P^{-1} = F Y. \quad (3.18)$$

Dále požadujeme, aby matice F zachovávala dva invariantní podprostory $\text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}\}$ a $\text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{y}^{(3)}, \mathbf{y}^{(4)}\}$. Tento požadavek vyplývá z tvaru matice $P \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} P^{-1}$. Ta je totiž blokově diagonální (protože matice P i P^{-1} jsou blokově diagonální, vizte (3.3)) a tedy při násobení maticí Y zleva obdržíme dvě lineární kombinace vektorů $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}$ a dvě kombinace vektorů $\mathbf{y}^{(3)}, \mathbf{y}^{(4)}$. Poznamenejme, že předešlý výpočet obecného tvaru matice C byl pouze požadavkem na invarianci každého podprostoru zvlášť. Pro tento výpočet formálně požadujeme, aby

$$\begin{aligned} F\mathbf{y}^{(1)} &= \mu\mathbf{y}^{(1)} + \nu\mathbf{y}^{(2)}, \\ F\mathbf{y}^{(2)} &= \mu'\mathbf{y}^{(1)} + \nu'\mathbf{y}^{(2)}, \\ F\mathbf{y}^{(3)} &= \zeta\mathbf{y}^{(3)} + \eta\mathbf{y}^{(4)}, \\ F\mathbf{y}^{(4)} &= \zeta'\mathbf{y}^{(3)} + \eta'\mathbf{y}^{(4)}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

kde koeficienty $\mu, \mu', \nu, \nu', \zeta, \zeta', \eta, \eta' \in \mathbb{C}$. Jelikož platí, že $\mathbf{y}^{(1)} = \overline{\mathbf{y}^{(2)}}$ a $\mathbf{y}^{(3)} = \overline{\mathbf{y}^{(4)}}$, vyplývá odtud, že:

$$\begin{aligned} \mu' &= \bar{\nu}, & \zeta' &= \bar{\eta}, \\ \nu &= \bar{\mu}, & \eta' &= \bar{\zeta}. \end{aligned}$$

Uvažujme nyní obecný tvar matice $F \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$:

$$F = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}.$$

Jelikož tato matice musí splňovat podmínky (3.19), umožní nám toto snížit počet parametrů vystupujících v matici. Proto rozepišme první podmínku do následující podoby:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}}_{F_h} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega & \omega^4 \end{pmatrix}}_{D_h^{(1)}} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}}_{F_d} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^3 & \omega^2 \end{pmatrix}}_{D_d^{(1)}} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Pokud z těchto rovnic vyloučíme parametry μ, ν a získáme vztah mezi koeficienty matice F_h a F_d .

Postupně upravujeme:

$$\begin{aligned}
D_d^{(1)} D_h^{(1)-1} F_h \mathbf{Y}^{(1)} &= F_d \mathbf{Y}^{(1)} \\
\frac{1}{\omega^4 - \omega} \begin{pmatrix} \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^3 & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^4 & -1 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & \omega + \omega^4 \\ -\omega - \omega^4 & -\omega - \omega^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + b\omega + c\omega^2 + d\omega^3 \\ e + f\omega + g\omega^2 + h\omega^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i + j\omega + k\omega^2 + l\omega^3 \\ m + n\omega + o\omega^2 + p\omega^3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -a-e+f-h+\omega(-b+g-h)+ \\ +\omega^2(-c-e+f)+\omega^3(-d-e+g-h) \\ a-b+d+e-f+h+\omega(-c+d-g+h)+ \\ +\omega^2(a-b+e-f)+\omega^3(a-c+d+e-g+h) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i + j\omega + k\omega^2 + l\omega^3 \\ m + n\omega + o\omega^2 + p\omega^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů na obou stranách rovnice získáme obecný tvar matice F vyjádřený pomocí osmi koeficientů

$$F = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ -a - e + f - h & -b + g - h & -c - e + f & -d - e + g - h \\ a - b + d + e - f + h & -c + d - g + h & a - b + e - f & a - c + d + e - g + h \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Tyto podmínky nemůžeme z podmínek (3.19) vylepšit. Pokud bychom totiž provedli též výpočet pro druhou dvojici podmínek, tj. vyloučili bychom koeficienty ζ, η , dostaneme tytéž vztahy. To plyne z faktu, že matice F je celočíselná a matice D_h a D_d jsou nad tělesem $\mathbb{Q}(\omega)$. Z tohoto důvodu lze použít třetí tělesový automorfismus σ_2 a rovnice budou mít formálně stejný tvar. Toto ukazuje následující výpočet:

$$\begin{aligned}
D_d^{(2)} D_h^{(2)-1} F_h \mathbf{Y}^{(3)} &= F_d \mathbf{Y}^{(3)} \\
\frac{1}{\omega^3 - \omega^2} \begin{pmatrix} \omega^4 & \omega \\ \omega & \omega^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^3 & -1 \\ -\omega^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \\ \omega \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \\ \omega \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & \omega^2 + \omega^3 \\ -\omega^2 - \omega^3 & -\omega^2 - \omega^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + b\omega^2 + c\omega^4 + d\omega \\ e + f\omega^2 + g\omega^4 + h\omega \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i + j\omega^2 + k\omega^4 + l\omega \\ m + n\omega^2 + o\omega^4 + p\omega \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -a-e+f-h+\omega(-d-e+g-h)+ \\ +\omega^2(-b+g-h)+\omega^4(-c-e+f) \\ a-b+d+e-f+h+\omega(a-c+d+e-g+h)+ \\ +\omega^2(-c+d-g+h)+\omega^4(a-b+e-f) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i + j\omega^2 + k\omega^4 + l\omega \\ m + n\omega^2 + o\omega^4 + p\omega \end{pmatrix} \\
\sigma_2 \left(\begin{pmatrix} -a-e+f-h+\omega(-b+g-h)+ \\ +\omega^2(-c-e+f)+\omega^3(-d-e+g-h) \\ a-b+d+e-f+h+\omega(-c+d-g+h)+ \\ +\omega^2(a-b+e-f)+\omega^3(a-c+d+e-g+h) \end{pmatrix} \right) &= \sigma_2 \left(\begin{pmatrix} i + j\omega + k\omega^2 + l\omega^3 \\ m + n\omega + o\omega^2 + p\omega^3 \end{pmatrix} \right) \\
\sigma_2 \left(D_d^{(1)} D_h^{(1)-1} F_h \mathbf{Y}^{(1)} \right) &= \sigma_2 \left(F_d \mathbf{Y}^{(1)} \right)
\end{aligned}$$

Zkoumejme nyní strukturu, kterou vytvářejí všechny matice tvaru (3.22). Tvrdíme, že tvoří asociativní algebru nad okruhem \mathbb{Z} .

Tvrzení 3.7. *Množina*

$$\mathfrak{F} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ -a-e+f-h & -b+g-h & -c-e+f & -d-e+g-h \\ a-b+d+e-f+h & -c+d-g+h & a-b+e-f & a-c+d+e-g+h \end{pmatrix} : a, b, \dots, h \in \mathbb{Z} \right\}$$

společně s operacemi sčítání matic, násobení celým číslem a maticovým násobením tvoří asociativní algebru nad modulem \mathbb{Z} . Navíc množina \mathfrak{C} tvoří komutativní podalgebru algebry \mathfrak{F} .

Důkaz. Z linearity všech koeficientů na všech pozicích matice plyne, že součtem dvou těchto matic získáme opět matici stejné struktury. Rovněž pronásobením dané matice libovolným celým číslem tvar matice nezměníme. Proto tyto matice tvoří modul nad \mathbb{Z} .

Uvažujme nyní dvojici matic F_1, F_2 , jež generují zobrazení A_1, A_2, B_1, B_2 . Pro ně platí

$$\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & B_1 \end{pmatrix} V = VF_1, \\ \begin{pmatrix} A_2 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix} V = VF_2.$$

Vyjádríme-li odtud součin F_1F_2 , dostaneme

$$F_1F_2 = V^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & B_1 \end{pmatrix} V V^{-1} \begin{pmatrix} A_2 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix} V = V^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix} V.$$

Toto ukazuje, že pronásobením obou matic opět získáváme zobrazení zachovávající dvojici invariantních podprostorů, kterou je možno vyjádřit pomocí složení zobrazení A_1, A_2 a B_1, B_2 . Proto má tato matice F_1F_2 tvar (3.22). Tímto jsme ukázali, že množina matic zachovávajících dvojici invariantních podprostorů je uzavřena na maticové násobení. Proto společně s operacemi maticové sčítání a násobení celým číslem tvoří asociativní algebru nad modulem \mathbb{Z} .

Volíme-li v matici F koeficienty

$$\begin{aligned} a &= \alpha, & e &= -\delta, \\ b &= \beta, & f &= \alpha - \delta, \\ c &= \gamma, & g &= \beta - \delta, \\ d &= \delta, & h &= \gamma - \delta. \end{aligned}$$

obdržíme matici (3.13). Proto množina \mathfrak{C} při zúžení operací tvoří podalgebru algebry \mathfrak{F} . \square

Určeme ze vztahů (3.20) a (3.21) hodnoty koeficientů μ, ν :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} &= \frac{1}{\omega^4 - \omega} \begin{pmatrix} \omega^4 & -1 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} (2 + 4\omega + \omega^2 + 3\omega^3) \begin{pmatrix} b - e + \omega(c - f) + \omega^2(d - g) - h\omega^3 + a\omega^4 \\ e + \omega(f - a) + \omega^2(g - b) + \omega^3(h - c) - d\omega^4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{5} (2a + 2b - 3c + 2d - 2e + 3f - 2g + 3h + \omega(-a + 4b - c - d - 4e + f + g + h) + \\ &\quad + \omega^2(a + b + c + d - e - f - g + 4h) + \omega^3(-2a + 3b - 2c + 3d - 3e + 2f - 3g + 2h)), \end{aligned}$$

$$\nu = \frac{1}{5}(3a - 2b + 3c - 2d + 2e - 3f + 2g - 3h + \omega(a + b + c + d + 4e - f - g - h) + \omega^2(-a - b + 4c - d + e + f + g - 4h) + \omega^3(2a - 3b + 2c + 2d + 3e - 2f + 3g - 2h)).$$

Vidíme, že $\mu, \nu \in \mathbb{Q}(\omega)$, tedy je zřejmé, že rovnosti (3.19) získáme z první z nich pouhou aplikací tělesových automorfismů. Proto platí

$$\begin{aligned}\mu' &= \sigma_4(\mu), & \nu' &= \sigma_4(\nu), \\ \zeta &= \sigma_2(\mu), & \eta &= \sigma_2(\nu), \\ \zeta' &= \sigma_3(\mu), & \eta' &= \sigma_3(\nu).\end{aligned}$$

Zároveň můžeme vyjádřit podmínky (3.19) pomocí násobení matic, tedy

$$FY = Y \begin{pmatrix} \mu & \bar{\nu} & 0 & 0 \\ \nu & \bar{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & \bar{\eta} \\ 0 & 0 & \eta & \bar{\zeta} \end{pmatrix}.$$

Porovnáním tohoto vztahu s (3.18) dospějeme k vyjádření matic zobrazení A, B pomocí koeficientů μ, ν, η, ζ :

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \mu & \bar{\nu} & 0 & 0 \\ \nu & \bar{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & \bar{\eta} \\ 0 & 0 & \eta & \bar{\zeta} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\mu + \nu) & \operatorname{Im}(\mu + \nu) & 0 & 0 \\ \operatorname{Im}(\nu - \mu) & \operatorname{Re}(\mu - \nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{Re}(\zeta + \eta) & \operatorname{Im}(\zeta + \eta) \\ 0 & 0 & \operatorname{Im}(\eta - \zeta) & \operatorname{Re}(\zeta - \eta) \end{pmatrix}.$$

Koeficienty této matice mají tvar:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\mu + \nu) &= a + b \cos \frac{2\pi}{5} + (c + d) \cos \frac{4\pi}{5}, \\ \operatorname{Im}(\mu + \nu) &= b \sin \frac{2\pi}{5} + (c - d) \sin \frac{4\pi}{5}, \\ \operatorname{Re}(\mu - \nu) &= -c + d + f + h + (2g - b) \cos \frac{2\pi}{5} + (-c + d + 2h) \cos \frac{4\pi}{5}, \\ \operatorname{Im}(\nu - \mu) &= \frac{1}{5} \left((2a - 3b + 2c + 2d + 8e - 2f - 2g - 2h) \sin \frac{2\pi}{5} + \right. \\ &\quad \left. + (-6a + 4b - c - d - 4e + 6f - 4g - 4h) \sin \frac{4\pi}{5} \right), \\ \operatorname{Re}(\zeta + \eta) &= a + (c + d) \cos \frac{2\pi}{5} + b \cos \frac{4\pi}{5}, \\ \operatorname{Im}(\zeta + \eta) &= (d - c) \sin \frac{2\pi}{5} + b \sin \frac{4\pi}{5}, \\ \operatorname{Re}(\zeta - \eta) &= -c + d + f + h + (-c + d + 2h) \cos \frac{2\pi}{5} + (2g - b) \cos \frac{4\pi}{5}, \\ \operatorname{Im}(\eta - \zeta) &= \frac{1}{5} \left((6a - 4b + c + d + 4e - 6f + 4g + 4h) \sin \frac{2\pi}{5} + \right. \\ &\quad \left. + (2a - 3b + 2c + 2d + 8e - 2f - 2g - 2h) \sin \frac{4\pi}{5} \right).\end{aligned}$$

Z tvarů prvků matice plyne přímo tvrzení o struktuře zobrazení A .

Důsledek 3.8. *Soběpodobnosti modulu $\pi_1(\mathcal{L})$ tvoří asociativní algebru nad \mathbb{Z} .*

Samotný požadavek na zachování dvojice invariantních podprostorů ovšem není dostatečný pro popis všech soběpodobností na kvazikrystalu. Aby matice F byla skutečnou soběpodobností kvazikrystalu, je dle věty 2.9 třeba uvalit podmínky na vlastní čísla matic A a B .

3.3.1 Příklad netriviální soběpodobnosti

Na konkrétním příkladu nyní ukážeme, jak může vypadat soběpodobnost, která není ani rotací, ani škálováním, na kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$ vzniklém z $\pi_1(\mathcal{L})$ volbou vhodného okna Ω .

Uvažujme matici F s nenulovými hodnotami parametrů $b = -1, c = 1, d = 1, f = 1$, tj.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jí příslušná matice zobrazení A má tvar

$$A = \begin{pmatrix} -\cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} & -\sin \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} & \cos \frac{2\pi}{5} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau - \frac{1}{2\tau} & -\frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 + 1} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 + 1} & \frac{1}{2\tau} + 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice A mají hodnotu

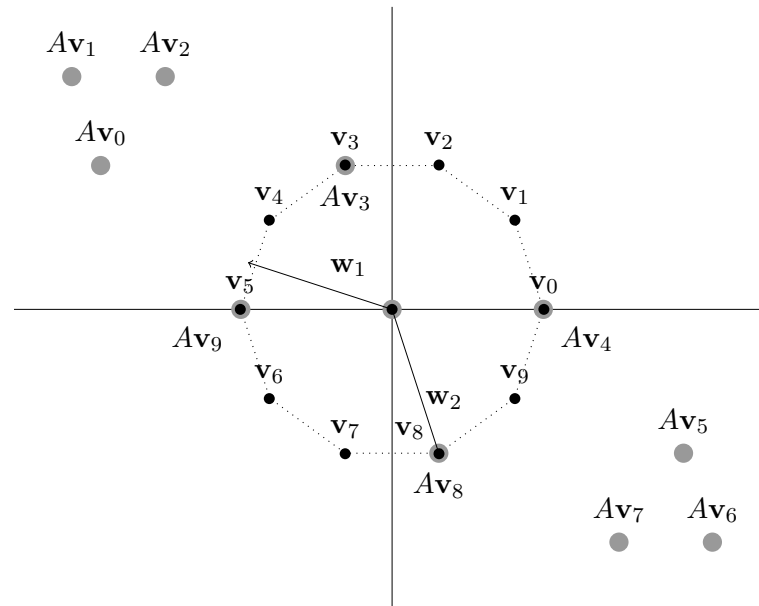
$$\lambda_1 = -\tau, \quad \lambda_2 = 1.$$

Jim příslušné vlastní vektory jsou tvaru

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -\sin \frac{2\pi}{5} \\ \cos \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá, že zobrazení A působí na kvazikrystalu ve směru \mathbf{w}_1 jako škálování faktorem $-\tau$ a ve směru \mathbf{w}_2 působí jako identita.

Následující obrázek ukazuje, jak zobrazení působí na pravidelný desetiúhelník (vyznačen černými body) umístěný v počátku:



Dále zkoumejme působení zobrazení B . Matice zobrazení B má tvar

$$B = \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{4\pi}{5} & -\sin \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} & \cos \frac{4\pi}{5} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} + \frac{\tau}{2} & -\frac{1}{2\tau} \sqrt{\tau^2 + 1} \\ \frac{1}{2\tau} \sqrt{\tau^2 + 1} & 1 - \frac{\tau}{2} \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice B mají tvar

$$\eta_1 = \frac{1}{\tau}, \quad \eta_2 = 1.$$

Jim příslušné vlastní vektory jsou tvaru

$$\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} -\sin \frac{4\pi}{5} \\ \cos \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}.$$

Volíme-li okno Ω tvaru kosočtverce

$$\Omega = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} -\sin \frac{4\pi}{5} \\ \cos \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} : \alpha_i \in [-1, 1] \right\},$$

pak je tato množina jistě invariantní vůči působení zobrazení B , a tedy je vhodným oknem.

Můžeme ale volit okno Ω i v souladu s důkazem věty 2.10 a to za pomoci speciální metriky. Snadno určíme, že matice G má tvar

$$G = \frac{1}{\cos \frac{2\pi}{5}} \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} & \sin \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} & \cos \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}.$$

Jelikož matice G je symetrická, platí, že $G = G^*$. Matice H určující skalární součin má tvar

$$H = \frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\sin \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

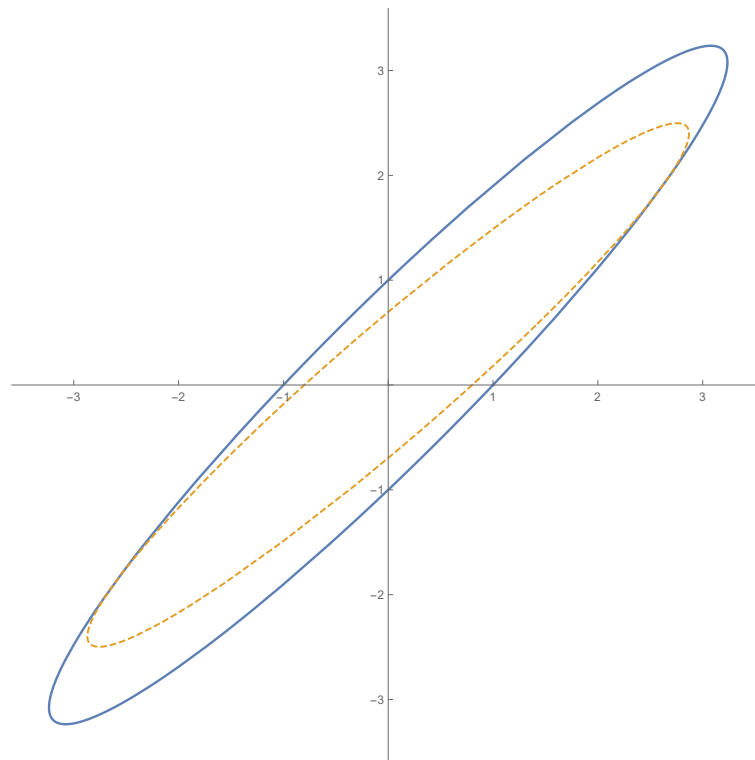
Jako množinu Ω můžeme volit kouli v této metrice, tedy množinu

$$\Omega = \{ \mathbf{x} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_H \leq K, K = \text{konst.} \},$$

konkrétně to může být množina

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 - 2xy \sin \frac{2\pi}{5} + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Pak toto okno je rovněž invariantní vůči zobrazení B a tedy $\Sigma(\Omega)$ je kvazikrystal se soběpodobností A . Následující obrázek ukazuje hranice množiny Ω a její transformaci při zobrazení B .



Nepřerušovaná elipsa vyznačuje hranici množiny Ω a tečkovaná elipsa znázorňuje její obraz při zobrazení B .

Kapitola 4

Kvazikrystal s pětičetnou symetrií vzniklý projekcí 5D mříže

V této kapitole provedeme konstrukci kvazikrystalu pomocí pětidimenzionální mříže. Zvolme proto polynom $x^5 - 1$, který je určitě dělitelný minimálním polynomem pátého kořene jedničky, tj. polynomem $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Matice společnice polynomu $x^5 - 1$ je

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je zřejmé, že vlastními čísly budou stejná čísla jako v čtyřdimenzionálním případě, jen s tím rozdílem, že k nim přibude 1. Vlastní vektory k λ_i lze volit ve stejném tvaru (ten plyne z tvaru matice společnice), a to

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \lambda_i^3 \\ \lambda_i^4 \end{pmatrix}.$$

Využijme opět zjednodušujícího zápisu pomocí ω . Matice Y , která vznikne zapsáním vlastních vektorů do sloupců, má při tomto značení tvar

$$Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega & \omega^4 & 1 & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega^4 & \omega \\ \omega^3 & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^4 \\ \omega^4 & \omega & 1 & \omega^3 & \omega^2 \end{pmatrix}, Y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Stejně jako v předešlém případě nalezneme i matice přechodu:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i & -i \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Nyní můžeme matici C_2 kvazidiagonalizovat, tedy

$$P^{-1}Y^{-1}C_2YP = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} & \sin \frac{2\pi}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \frac{2\pi}{5} & \cos \frac{2\pi}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \frac{4\pi}{5} & \sin \frac{4\pi}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \frac{4\pi}{5} & \cos \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Odtud již vidíme, že matice $P^{-1}Y^{-1}C_2YP$ má blokově diagonální tvar, který jsme požadovali. Z podmínky (2.13) pak porovnáním plyne, že

$$\begin{aligned} V = P^{-1}Y^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & \omega^4 + \omega & \omega^3 + \omega^2 & \omega^2 + \omega^3 & \omega + \omega^4 \\ 0 & i\omega^4 - i\omega & i\omega^3 - i\omega^2 & i\omega^2 - i\omega^3 & i\omega - i\omega^4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & \omega^3 + \omega^2 & \omega + \omega^4 & \omega^4 + \omega & \omega^2 + \omega^3 \\ 2 & i\omega^3 - i\omega^2 & i\omega - i\omega^4 & i\omega^4 - i\omega & i\omega^2 - i\omega^3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cos \frac{2\pi}{5} & \cos \frac{4\pi}{5} & \cos \frac{4\pi}{5} & \cos \frac{2\pi}{5} \\ 0 & \sin \frac{2\pi}{5} & \sin \frac{4\pi}{5} & -\sin \frac{4\pi}{5} & -\sin \frac{2\pi}{5} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos \frac{4\pi}{5} & \cos \frac{2\pi}{5} & \cos \frac{2\pi}{5} & \cos \frac{4\pi}{5} \\ 0 & \sin \frac{4\pi}{5} & -\sin \frac{2\pi}{5} & \sin \frac{2\pi}{5} & -\sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Tímto jsme získali přesné vyjádření vektorů, které tvoří mřížku \mathcal{L} . Proto můžeme zapsat

$$\mathcal{L} = \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}^{(1)}} + \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \\ 1 \\ \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}^{(2)}} + \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \\ 1 \\ \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}^{(3)}} + \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \\ 1 \\ \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}^{(4)}} + \underbrace{\mathbb{Z} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \\ 1 \\ \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}^{(5)}}.$$

Nyní budeme diskutovat možná cut-and-project schémata, která na této mřížce můžeme provést tak, aby umožňovala soběpodobnost (dle 2.7). Ta jsou dána tvarem matice (4.3), resp. velikostí jejich bloků. Můžeme proto sestavit jednodimenzionální, dvoudimenzionální, třídimenzionální a čtyřdimenzionální kvazikrystal. Jednodimenzionální případ můžeme ihned vyloučit, neboť zobrazení π_1 zúžené na mříž by nebylo prosté. Stejně tak můžeme snadno vyloučit čtyřdimenzionální případ kvazikrystalu, neboť v tomto případě by množina $\pi_2(\mathcal{L})$ nebyla hustá v \mathbb{R} .

4.1 Dvoudimenzionální případ

Uvažujme následující schéma

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5 & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Tvrdíme, že v tomto případě není zobrazení $\pi_1|_{\mathcal{L}}$ prosté. Abychom tohle ukázali, stačí ukázat, že existuje nenulová $\alpha \in \mathbb{Z}^5$ tak, že $\sum_{i=1}^5 \alpha_i \pi_1(\mathbf{v}^{(i)}) = 0$, tj.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Položíme-li $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$ pro libovolnou společnou hodnotu, dostaneme platnou rovnost. Ta plyne z rovnice (3.7) Že je toto jediný způsob volby α plyne z následující úvahy. Rozepíšeme-li pomocí rovnosti (3.7) výraz $\cos \frac{4\pi}{5}$, získáme porovnáním koeficientů u členů $\cos \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{4\pi}{5}, 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_5 &= 0, \\ \alpha_3 - \alpha_4 &= 0, \\ \alpha_1 - \frac{\alpha_3}{2} - \frac{\alpha_4}{2} &= 0, \\ \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 &= 0. \end{aligned}$$

Odtud již plyne, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$. Tímto jsme ukázali, že zobrazení není prosté, a tudíž uvažované schéma nemůže být nedegenerovaným ireducibilním cut-and-project schematem.

4.2 Třídídimenzionální případ

Uvažujme tentokrát schéma

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5 & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Cut-and-project schéma má v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} \Sigma(\Omega) &= \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha_i \in \mathbb{Z}, \right. \\ &\left. \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} \in \Omega \right\}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Nyní dokážeme, že se skutečně jedná o cut-and-project množinu. Toto tvrzení dokážeme ve dvou krocích. V prvním ukážeme prostoru zobrazení $\pi_1|_{\mathcal{L}}$ a ve druhém hustotu množiny $\pi_2(\mathcal{L})$.

Lemma 4.1. Zobrazení $\pi_1|_{\mathcal{L}}$ je prosté.

Důkaz. Z předešlých úvah víme, že stačí ukázat lineární nezávislost (nad \mathbb{Q}) vektorů

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Chceme tedy ukázat, že jediná jejich lineární kombinace s racionálními koeficienty, která dává nulový vektor, je kombinace s nulovými koeficienty. V důkaze (4.5) jsme ukázali, že vynulování prvních dvou složek se dá docílit pouze volbou shodných koeficientů. Označme jejich hodnotu $\alpha \in \mathbb{Q}$. Pak v poslední složce dostaneme hodnotu 5α , která je rovna 0 jen pro $\alpha = 0$. Tímto jsme tedy dokázali, že vektory jsou lineárně nezávislé nad \mathbb{Q} a tudíž zobrazení $\pi_1|_{\mathcal{L}}$ je prosté. \square

Lemma 4.2. Množina $\pi_2(\mathcal{L})$ je hustá v \mathbb{R}^2 .

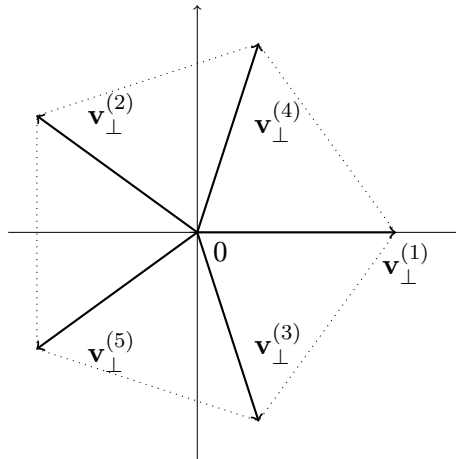
Důkaz. Nejprve ukážeme, že množina

$$A = \left\{ \alpha_2 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}, \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

je hustá v \mathbb{R}^2 . Ukážeme totiž, že je možné ji zapsat jako součet dvou hustých jednodimenzionálních množin, přičemž směrové vektory příslušné oběma jednodimenzionálním množinám jsou lineárně nezávislé. Pro jednodušší zápis označme ve shodě s indexy u koeficientů jednotlivé projekce $\pi_2(\mathbf{v}^{(i)})$ postupně $\mathbf{v}_{\perp}^{(2)}, \mathbf{v}_{\perp}^{(3)}, \mathbf{v}_{\perp}^{(4)}, \mathbf{v}_{\perp}^{(5)}$. Pak platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\perp}^{(4)} + \mathbf{v}_{\perp}^{(5)} &= \frac{1}{\tau} \mathbf{v}_{\perp}^{(2)}, \\ \mathbf{v}_{\perp}^{(2)} + \mathbf{v}_{\perp}^{(3)} &= \frac{1}{\tau} \mathbf{v}_{\perp}^{(5)}. \end{aligned}$$

Konstanta $\tau = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ vyplývá, stejně jako tyto rovnosti, z geometrie pravidelného pětiúhelníku. Vektory totiž tvoří jeho vrcholy:



Buďte nyní $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{Z}$ libovolné. Pak

$$\begin{aligned} A \ni \mathbf{x} &= \alpha_2 \mathbf{v}_\perp^{(2)} + \alpha_3 \mathbf{v}_\perp^{(3)} + \alpha_4 \mathbf{v}_\perp^{(4)} + \alpha_5 \mathbf{v}_\perp^{(5)} = \alpha_2 \mathbf{v}_\perp^{(2)} + \alpha_3 \left(\frac{1}{\tau} \mathbf{v}_\perp^{(5)} - \mathbf{v}_\perp^{(2)} \right) + \alpha_4 \left(\frac{1}{\tau} \mathbf{v}_\perp^{(2)} - \mathbf{v}_\perp^{(5)} \right) + \alpha_5 \mathbf{v}_\perp^{(5)} = \\ &= \mathbf{v}_\perp^{(2)} \left(\alpha_2 - \alpha_3 + \frac{\alpha_4}{\tau} \right) + \mathbf{v}_\perp^{(5)} \left(\alpha_5 - \alpha_4 + \frac{\alpha_3}{\tau} \right). \end{aligned}$$

Jelikož jsme koeficienty volili libovolně, rozepsali jsme množinu A jako součet dvou množin $\mathbb{Z}[\tau]$, které jsou husté v \mathbb{R} . Argument, který zde používáme je identický s tím, jehož bylo užito v lemmatu (3.2). Zároveň jsou tyto množiny obsaženy v podprostorech $\text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{v}_\perp^{(2)}\}$, $\text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{v}_\perp^{(5)}\}$. Protože jsou vektory $\mathbf{v}_\perp^{(2)}$ a $\mathbf{v}_\perp^{(5)}$ lineárně nezávislé, plyne odtud, že množina $\mathbb{Z}[\tau] \mathbf{v}_\perp^{(2)} + \mathbb{Z}[\tau] \mathbf{v}_\perp^{(5)} = A$ je hustá v \mathbb{R}^2 . Množina $\pi_2(\mathcal{L}) = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A$ pak již bude rovněž hustá, protože sjednocení hustých množin je hustá množina. \square

Tvrzení 4.3. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ taková, že $\overline{\text{int}(\Omega)} \neq \emptyset$. Pak množina*

$$\begin{aligned} \Sigma(\Omega) &= \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha_i \in \mathbb{Z}, \right. \\ &\quad \left. \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} \in \Omega \right\} \end{aligned}$$

je cut-and-project množina.

4.3 Geometrické vlastnosti 3D kvazikrystalu

Když jsme dokázali, že množina (4.6) je cut-and-project množina, popíšeme její vlastnosti. Z jejího tvaru vyplývá, že v z -ové souřadnici nabývá pouze celých čísel. Tudíž je možné si tuto množinu představit jako systém dvoimenzionálních kvazikrystalů (v osách x, y) „navrstvených na sebe“. Abychom toto co nejlépe ilustrovali, uvažujme, že $\mathbf{x} \in \Sigma(\Omega)$, tedy

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_\parallel^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{v}_\parallel^{(2)} + \alpha_3 \mathbf{v}_\parallel^{(3)} + \alpha_4 \mathbf{v}_\parallel^{(4)} + \alpha_5 \mathbf{v}_\parallel^{(5)},$$

kde $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ pro všechna $i = 1, \dots, 5$. Zároveň musí platit, že

$$\alpha_1 \mathbf{v}_\perp^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{v}_\perp^{(2)} + \alpha_3 \mathbf{v}_\perp^{(3)} + \alpha_4 \mathbf{v}_\perp^{(4)} + \alpha_5 \mathbf{v}_\perp^{(5)} \in \Omega.$$

Pokud nyní přičteme ke každému koeficientu α_i jedničku, tj. přejdeme od $\alpha_i \mapsto \alpha_i + 1$ pro všechna $i = 1, \dots, 5$, zjistíme, že získáme prvek kvazikrystalu, neboť dle (3.7) se projekce π_2 nezmění. Prvek bude mít tvar $\mathbf{x} + (0, 0, 5)^T$. Vidíme, že pokud budeme fixovat třetí souřadnici u prvků kvazikrystalu, tak dostaneme podmnožinu \mathbb{R}^2 , která se bude nekonečněkrát opakovat podél osy z s ekvidistantní vzdáleností 5. Nyní můžeme definovat jisté základní stavební prvky, pomocí kterých jsme schopni celý kvazikrystal popsat a s jejichž pomocí ještě snadněji nahlédneme jisté symetrie, které se u něj vyskytují.

Definice 4.4. *Bud' $\Sigma(\Omega)$ kvazikrystal popsaný výše. Pak pro $j = 0, 1, 2, 3, 4$ definujeme j -tou základní rovinu kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$ jako*

$$\Sigma_j(\Omega) = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^5 \alpha_i = j, \right. \\ \left. \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \in \Omega \right\}.$$

Pomocí těchto základních rovin můžeme přepsat kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ do podoby

$$\Sigma(\Omega) = \bigcup_{j=1}^5 \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \Sigma_j(\Omega) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5k + j \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.7)$$

Zároveň odtud plyne, že pro popis vlastností této cut-and-project množiny se stačí omezit na množinu

$$\Sigma(\Omega) = \bigcup_{j=1}^5 \left\{ \Sigma_j(\Omega) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{pmatrix} \right\}.$$

Z tvaru (4.7) plyne rovněž přímo invariantnost $\Sigma(\Omega)$ vůči translaci ve směru osy z s vektorem posunutí $(0, 0, 5)^T$, tedy

$$\Sigma(\Omega) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \Sigma(\Omega).$$

Dále z tohoto popisu jasně vyplývá invariance $\Sigma(\Omega)$ vůči škálování faktorem 5 ve směru osy z . Označme $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ jednotlivé složky vektoru $\mathbf{u} \in \Sigma(\Omega)$. Pak

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{pmatrix} \in \Sigma(\Omega).$$

4.3.1 Násobky vlastních vektorů

Zkoumejme nyní, co se stane s kvazikrystalem, jestliže namísto vlastních vektorů matice C_2 použijeme jejich násobky. Komplexně sdružené vektory budeme násobit stejným číslem, abychom zachovali možnost převést matici C_2 do blokově diagonálního tvaru. V maticovém zápisu to odpovídá vynásobení matice Y zprava maticí N , která má tvar

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}, \quad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Potom matice, která určuje generující vektory mříže má tvar

$$V' = P^{-1}N^{-1}Y^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \cos \frac{2\pi}{5} & \frac{1}{a} \cos \frac{4\pi}{5} & \frac{1}{a} \cos \frac{4\pi}{5} & \frac{1}{a} \cos \frac{2\pi}{5} \\ 0 & \frac{1}{a} \sin \frac{2\pi}{5} & \frac{1}{a} \sin \frac{4\pi}{5} & -\frac{1}{a} \sin \frac{4\pi}{5} & -\frac{1}{a} \sin \frac{2\pi}{5} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \cos \frac{4\pi}{5} & \frac{1}{c} \cos \frac{2\pi}{5} & \frac{1}{c} \cos \frac{2\pi}{5} & \frac{1}{c} \cos \frac{4\pi}{5} \\ 0 & \frac{1}{c} \sin \frac{4\pi}{5} & -\frac{1}{c} \sin \frac{2\pi}{5} & \frac{1}{c} \sin \frac{2\pi}{5} & -\frac{1}{c} \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix}.$$

Stejným postupem jako výše se ukáže, že $\pi_1|_{\mathcal{L}'}$ je prosté zobrazení a $\pi_2(\mathcal{L}')$ je hustá množina v \mathbb{R}^2 . Cut-and-project množina má potom tvar

$$\Sigma'(\Omega) = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \frac{1}{a} \sin \frac{2\pi}{5} \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \frac{1}{a} \sin \frac{4\pi}{5} \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\frac{1}{a} \sin \frac{4\pi}{5} \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\frac{1}{a} \sin \frac{2\pi}{5} \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix}, \alpha_i \in \mathbb{Z}^5 : \right. \\ \left. \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ \sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} \\ -\sin \frac{4\pi}{5} \end{pmatrix} \in c\Omega \right\}.$$

Z tvaru této cut-and-project množiny vidíme, že by její další zkoumání nepřineslo nic nového. Jedná se o tutéž množinu, kterou jsme získali již dříve, akorát s tím rozdílem, že došlo k pronásobení základních vrstev kvazikrystalu koeficientem $\frac{1}{a}$, vzdálenost mezi těmito vrstvami se změnila z jednotkové na $\frac{1}{b}$ a díky změně vektorů mříže došlo rovněž k přeškálování okna koeficientem c .

4.3.2 Další možné soběpodobnosti

Obdobně jako u případu kvazikrystalu vzniklého projekcí čtyřrozměrné mříže se i zde pokusíme najít další soběpodobnosti, které dané cut-and project schéma připouští. Proto vyjdeme (jako výše) z mocnin matice C_2 .

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_2^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektory všech těchto matic jsou stejné, matice z nich vytvořená je matice Y . Tyto matice jsou diagonalizovatelné touto maticí do následujících podob

$$Y^{-1}C_2Y = \text{diag} \{ \omega, \omega^4, 1, \omega^2, \omega^3 \}, \\ Y^{-1}C_2^2Y = \text{diag} \{ \omega^2, \omega^3, 1, \omega^4, \omega \}, \\ Y^{-1}C_2^3Y = \text{diag} \{ \omega^3, \omega^2, 1, \omega, \omega^4 \}, \\ Y^{-1}C_2^4Y = \text{diag} \{ \omega^4, \omega, 1, \omega^3, \omega^2 \}.$$

Libovolná kombinace těchto matic a identické matice pak dává rovněž matici, jejíž vlastní vektory budou mít žádanou podobu. Označme $C = \alpha I + \beta C_2 + \gamma C_2^2 + \delta C_2^3 + \varepsilon C_2^4$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$. Pak tuhle matici můžeme kvazidiagonalizovat stejným postupem jako výše a získáme blokově diagonální matici jejíž horní blok určuje soběpodobnost A :

$$P^{-1}Y^{-1}CYP =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + (\beta + \varepsilon) \cos \frac{2\pi}{5} + & (\beta - \varepsilon) \sin \frac{2\pi}{5} + & 0 & 0 & 0 \\ +(\gamma + \delta) \cos \frac{4\pi}{5} & +(\gamma - \delta) \sin \frac{4\pi}{5} & & & \\ (\varepsilon - \beta) \sin \frac{2\pi}{5} + & \alpha + (\beta + \varepsilon) \cos \frac{2\pi}{5} + & 0 & 0 & 0 \\ +(\delta - \gamma) \sin \frac{4\pi}{5} & +(\gamma + \delta) \cos \frac{4\pi}{5} & & & \\ 0 & 0 & \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + (\beta + \varepsilon) \cos \frac{4\pi}{5} + & (\beta - \varepsilon) \sin \frac{4\pi}{5} + \\ 0 & 0 & 0 & +(\gamma + \delta) \cos \frac{2\pi}{5} & +(\gamma - \delta) \sin \frac{2\pi}{5} \\ & & & (\varepsilon - \beta) \sin \frac{4\pi}{5} + & \alpha + (\beta + \varepsilon) \cos \frac{4\pi}{5} + \\ & & & +(\delta - \gamma) \sin \frac{2\pi}{5} & +(\gamma + \delta) \cos \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}.$$

Soběpodobnost projekce $\pi_1(\mathcal{L})$ má pak podle věty 2.4 tvar

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + (\beta + \varepsilon) \cos \frac{2\pi}{5} + & (\beta - \varepsilon) \sin \frac{2\pi}{5} + & 0 \\ +(\gamma + \delta) \cos \frac{4\pi}{5} & +(\gamma - \delta) \sin \frac{4\pi}{5} & \\ (\varepsilon - \beta) \sin \frac{2\pi}{5} + & \alpha + (\beta + \varepsilon) \cos \frac{2\pi}{5} + & 0 \\ +(\delta - \gamma) \sin \frac{4\pi}{5} & +(\gamma + \delta) \cos \frac{4\pi}{5} & \\ 0 & 0 & \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Tímto postupem jsme pochopitelně nevytvořili veškeré možné soběpodobnosti modulu $\pi_1(\mathcal{L})$. Je zřejmé, že stejným postupem jako v předešlé kapitole bychom byli opět schopni popsat celou algebru soběpodobností.

Závěr

V práci jsme po zavedení základních pojmů týkajících se teorie čísel, teorie matic a diskrétních množin zdefinovali soběpodobnost a předvedli důkaz věty o škálovací symetrii podle článku Lagariase [5], který jsme upravili pro cut-and-project množiny, resp. kvazikrystaly.

V další části práce jsme ukázali, že je možné na kvazikrystaly pohlížet skrze matice. Pro lineární transformace jsme dali do souvislosti transformace na kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$, resp. na modulu $[\Sigma(\Omega)] = \pi_1(\mathcal{L})$ s transformacemi mříže, ze které projektujeme. Nalezli jsme kritéria pro to, aby nějaká transformace mříže byla soběpodobností modulu $\pi_1(\mathcal{L})$. Rovněž jsme dokázali, že pro danou celočíselnou matici C je možné nalézt cut-and-project schéma $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ se soběpodobností takové, že C je matice transformace na mříži \mathcal{L} . Rovněž jsme zformulovali podmínky, za kterých daná matice C transformace mříže \mathcal{L} indukuje soběpodobnost na kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$.

Za použití těchto tvrzení jsme pak v další kapitole zkonstruovali cut-and-project schéma $(\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^4, \pi_1, \pi_2)$, ze kterého by vhodnou volbou okna bylo možné sestrojít kvazikrystal s pětičetnou symetrií. Toto schéma jsme vytvořili pouze na základě požadavku na existenci zobrazení, které by bylo izometrií řádu 5 a působilo na $\pi_1(\mathcal{L})$. Ukázali jsme, že toto schéma je nedegenerované a ireducibilní. Pak jsme provedli srovnání s klasickou konstrukcí kvazikrystalů pomocí grup reflexí a ukázali, že výsledek je identický. V další části jsme zkoumali možné soběpodobnosti na množině $\pi_1(\mathcal{L})$. Ukázali jsme množina zobrazení, která působí jako rotace a škálování zároveň, je izomorfní okruhu celých čísel $\mathbb{Z}[\omega]$ v tělese $\mathbb{Q}(\omega)$, kde ω je pátý kořen jedničky. Dále jsme dokázali, že všechna zobrazení zachovávající v $\pi_1(\mathcal{L})$ dvojici podprostorů tvoří asociativní algebru nad okruhem celých čísel \mathbb{Z} , přičemž rotace se škálováním tvoří její podalgebru. Nadto jsme našli konkrétní příklad zobrazení, které není ani rotací, ani škálováním celého kvazikrystalu.

V další části práce jsme zkoumali cut-and-project schéma $(\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5, \pi_1, \pi_2)$. Ukázali jsme, že existuje pouze jediné nedegenerované ireducibilní cut-and-project schéma, které je invariantní vůči izometrii řádu 5. Rozebrali jsme geometrii množiny $\pi_1(\mathcal{L})$ a našli některé její soběpodobnosti.

V další práci bychom se rádi zaměřili i na jiná než na pouze lineární zobrazení. Dále vystává otázka, jakou strukturu formují soběpodobnosti na dvoudimenzionálním kvazikrystalu a jaké jsou obecné podmínky na konkrétní transformaci mříže, aby z ní odvozené zobrazení bylo soběpodobností na kvazikrystalu. V průběhu psaní práce jsme narazili i na další otázky a problémy, které by měly být předmětem budoucího výzkumu.

Literatura

- [1] Barache, D., Champagne, B., and Gazeau, J.-P. (1998). Pisot-cyclotomic quasilattices and their symmetry semigroups. In *Quasicrystals and discrete geometry (Toronto, ON, 1995)*, volume 10 of *Fields Inst. Monogr.*, pages 15–66. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [2] Berman, S. and Moody, R. V. (1994). The algebraic theory of quasicrystals with five-fold symmetries. *J. Phys. A*, 27(1):115–129.
- [3] Cotfas, N. (1999). On the self-similarities of a model set. *J. Phys. A*, 32(15):L165–L168.
- [4] Katok, A. and Hasselblatt, B. (1995). *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [5] Lagarias, J. C. (1999). Geometric models for quasicrystals I. Delone sets of finite type. *Discrete Comput. Geom.*, 21(2):161–191.
- [6] Masáková, Z. and Pelantová, E. (2010). *Teorie čísel*. Česká technika - nakladatelství ČVUT.
- [7] Moody, R. V., editor (1997). *The mathematics of long-range aperiodic order*, volume 489 of *NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.
- [8] Moody, R. V. and Patera, J. (1993). Quasicrystals and icosians. *J. Phys. A*, 26(12):2829–2853.
- [9] Zhang, F. (2011). *Matrix theory*. Universitext. Springer, New York, second edition. Basic results and techniques.