České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Aplikace invariantů Lieových algeber pro charakterizování kontrakcí

Application of invariants of Lie algebras for contraction characteristics

Bakalářská práce

Autor: **Pavel Lokvenc**

Vedoucí práce: **Ing. Petr Novotný, Ph.D.**

Konzultant: **prof. RNDr. Jiří Tolar, CSc.**

Akademický rok: 2016/2017

- Zadání práce -

- Zadání práce (zadní strana) -

Poděkování:
Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce Ing. Petrovi Novotnému, Ph.D. za odborné vedení, vstřícnost při konzultacích a především za cenné rady, které mi vypracování práce velice usnadnily.

Čestné prohlášení:
Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd....) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne.................................. ....
podpis

Název práce:

Aplikace invariantů Lieových algeber pro charakterizování kontrakcí

Autor: Pavel Lokvenc

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Petr Novotný, Ph.D., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze

Konzultant: prof. RNDr. Jiří Tolar, CSc., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze

Abstrakt: Práce obsahuje stručný úvod do teorie Lieových algeber. Je zde definice známých invariantů, jejichž hodnoty jsou vypočteny pro všechny neizomorfní Lieovy algebry do dimenze čtyři. Spojitá kontrakce je řádně definována a některá nutná kontrakční kritéria jsou sepsána. Přehledně jsou popsány seznamy vlastních, netriviálních, spojitých jedno-parametrických kontrakcí do dimenze čryři.

Zobecnění kohomologických kocyklů a takzvané invariantní funkce jsou zadefinovány, obzvláště je diskutována efektivita nově nalezené invariantní funkce.

Klíčová slova: invarianty, jedno-parametrická spojitá kontrakce, Lieova algebra

Title:

Application of invariants of Lie algebras for contraction characteristics

Author: Pavel Lokvenc

Abstract: A brief introduction into a theory of Lie algebras is made. There is a number of invariants, which are proposed and calculated for every non-isomorphic Lie algebras up to a dimension four. A Rigorous definition of an one-parametric continuous contraction is given and known necessary criteria of contraction are collected. Lists of all possible proper and nontrivial continuous one-parametric contractions of complex Lie algebras up to a dimension four are clearly illustrated.

A generalized concept of cohomology cocycles of Lie algebras is formulated and so called invariant functions are introduced. In particular, new invariant function is investigated and effectiveness of this function is discussed.

Key words: invariants, one-parametric continuous contraction, Lie algebra

Obsah

Úvod **8**

1 Lieovy Algebry **10**

2 Invarianty Lieových algeber **17**
2.1 Strukturní konstanty 17
2.2 Izomorfizmus dvou Lieových algeber 18
2.3 Invarianty 19
2.3.1 Derivace 19
2.3.2 (α, β, γ)-derivace 21
2.3.3 Centrum 21
2.3.4 Horní centrální série 23
2.3.5 Derivovaná série 25
2.3.6 Dolní centrální série 26
2.3.7 Stopa adjungované reprezentace 27
2.3.8 Killingova forma 28
2.3.9 Radikál 29
2.3.10 Nilradikál 30
2.3.11 Cartanova podalgebra 30
2.3.12 Hodnost adjungované a koadjungované reprezentace 30
2.3.13 Další invarianty 31
2.4 Komplexní Lieovy algebry do dimenze 3 a jejich invarianty 31
2.4.1 Jedno-dimenzionální Lieova algebra 31
2.4.2 Řešitelná dvou-dimenzionální Lieova algebra s nilradikálem $2\mathfrak{n}_{1,1}$ 32
2.4.3 Rozložitelná tří-dimenzionální Lieova algebra 32
2.4.4 Nilpotentní tří-dimenzionální Lieova algebra 32
2.4.5 Řešitelné tří-dimenzionální Lieovy algebry s nilradikálem $2\mathfrak{n}_{1,1}$ 32
2.4.6 Prostá tří-dimenzionální Lieova algebra 33
2.5 Komplexní Lieovy algebry dimenze 4 a jejich invarianty 33
2.5.1 Rozložitelné čtyř-dimenzionální Lieovy algebry 33
2.5.2 Nilpotentní čtyř-dimenzionální Lieova algebra 35
2.5.3 Řešitelné čtyř-dimenzionální Lieovy algebry s nilradikálem $3\mathfrak{n}_{1,1}$ 35
2.5.4 Řešitelné čtyř-dimenzionální Lieovy algebry s nilradikálem $\mathfrak{n}_{3,1}$ 36

3 Kontrakce Lieových algeber **38**
3.1 Definice kontrakcí 38
3.2 Nejjednodušší typy kontrakcí 39
3.3 Nutná kontrakční kritéria 41
3.4 Kontrakce komplexních nízko-dimenzionálních Lieových algeber 44
3.4.1 Algoritmus určování kontrakcí 44
3.4.2 Seznam kontrakcí komplexních Lieových algeber do dimenze 4 44
3.5 Částečné uspořádání komplexních Lieových algeber 49

4 Invariantní funkce Lieových algeber **51**
4.1 (α,β,γ)-derivace 51
4.2 Invariantní funkce ψ na dimenzi 3 52
4.3 Minimální množiny kontrakčních kritérií na dimenzi 3 53
4.4 Twistované kocykly 55
4.5 Invariantní funkce ξ na dimenzi 3 57
4.6 Invariantní funkce ξ na dimenzi 4 57
4.7 Efektivita ivnariantní funkce ξ na dimenzi 3 a 4 59

Závěr **62**

Úvod

Teorie Lieových algeber je důležitou matematickou teorií, která nachází mnoho aplikací ve fyzice ale i v jiných oblastech matematiky. Intenzivní studium nízko-dimenzionálních Lieových algeber je motivováno jejich širokým využitím v různých matematických teoriích, např. v teorii reprezentací, v teorii indukovaných reprezentací a při studiu symetrií.

V roce 1951 se poprvé objevuje pojem limitního procesu mezi Lieovými algebrami v Segalově práci [12]. Motivace pro definici tohoto procesu je ilustrována na následujících příkladech. Přechod od kvantové mechaniky ke klasické mechanice je realizován procesem $h \to 0$ a odpovídá kontrakci Heisenbergovy algebry na algebru Abelovskou. Další velice známý příklad je přechod od Poincarého ke Galileiho grupě symetrií, což má fyzikální význam přechodu od relativistické ke klasické mechanice.

Pojem kontrakce Lieových algeber se v letech 1953-1954 dále objevuje v pracích [6, 7]. Tyto kontrakce se podle svých tvůrců nazývají *Inönu-Wignerovi kontrakce* (*IW-kontrakce*) a přestože mají velice jednoduchý tvar, našly široké využití v mnoha matematických a fyzikálních problémech. Později v roce 1967 pánové Doebner a Melsheimer rozšiřují IW-kontrakce na *zobecněné Inönu-Wignerovi kontrakce*, které se také nazývají *p-kontrakce* nebo *Doebner-Melsheimrovi kontrakce*. Kromě zobecněných IW-kontrakcí existují tzv. *Saletanovi kontrakce* [11], které poskytují jiné rozšíření IW-kontrakcí.

Jedno z nejdůležitějších témat teorie Lieových algeber, je problematika struktury Lieových algeber fixní dimenze. Složitost této struktury exponenciálně roste v závislosti na dimenzi. Konkrétně, Lieovy algebry do dimenze čtyři jsou kompletně klasifikovány a jsou známé všechny jejich existující kontrakce, pro Lieovy algebry dimenze pět a šest je známa klasifikace a Lieovy algebery dimenze větší než šest jsou klasifikovány pouze pro některé speciální případy (např. nilpotentní). Teorie kontrakcí poskytuje aparát pro lepší pochopení daného problému. Díky kontarakcím lze totiž na množině Lieových algeber pevně zvolené dimenze definovat částečné uspořádání, které je možno chápat jako míru složitosti dané Lieovy algebry. Jinými slovy je možné částečně uspořádat Lieovy algebry fixní dimenze podle složitosti.

S ohledem na předchozí odstavec je hlavním cílem této práce pochopení struktury komplexních Lieových algeber do dimenze čtyři. Největší důraz je přitom kladen na jejich jednoparametrické spojité kontrakce. Klasifikace kontrakcí je realizována pomocí tzv. nutných kontrakčních kritérií, která využívají invarianty, neboli veličiny zachovávající svoji hodnotu při změně báze, např. dimenze radikálu a nilradikálu, počet Casimirových operátorů, dimenze algebry derivací atd. Vůči kontrakci pak invarianty obvykle zachovávají rovnost, resp. nerovnost, na čemž je založena základní myšlenka kontrakčních kritérií. V práci jsou sepsány některé ze známých invariantů, resp. kontrakčních kritérií, navíc jsou zde uvedeny nové, u kterých je následně provedena diskuze jejich efektivity.

Práce má následující strukturu.

V první kapitole je shrnuta úvodní teorie Lieových algeber, je zde uvedena samotná definice Lieovy algebry, definice elementárních pojmů ale i pokročilejší obecně známé věty, které nabízejí hlubší pochopení struktury Lieových algeber. Druhá kapitola je celá věnována invariantům. U každého z uvažovaných invariantů je uvedena jeho definice a postup výpočtu, který je následně ilustrován na vybraném příkladu. Seznam s hodnotami těchto invariantů pro všechny komplexní Lieovy algebry do dimenze čtyři je sepsán v závěru kapitoly. Začátek třetí kapitoly je zaměřen na definici spojité jedno-parametrické kontrakce a stručně uvádí nejjednodušší typy kontrakcí, jmenovitě *Inönu-Wignerovi kontrakce*, *zobecněné Inönu-Wignerovi kontrakce* a *Saletanovi kontrakce*. V prostřední části pak kapitola navazuje na dosažené výsledky z druhé kapitoly a pomocí invariantů shrnuje nutná kontrakční kritéria ve Větě 3.1. Díky výsledkům z druhé a třetí kapitoly je následně provedena identifikace spojitých kontrakcí komplexních Lieových algeber do dimenze čtyři. V poslední čtvrté kapitole se tato práce věnuje tzv. invariantním funkcím a jejich efektivitě při identifikaci kontrakcí komplexních Lieových algeber dimenze tři a čtyři.

Kapitola 1

Lieovy Algebry

První kapitola poskytuje úvod do problematiky Lieových algeber. Obsahem této kapitoly jsou základní pojmy, které popisují strukturu Lieových algeber a umožňují její hlubší pochopení. Většina definic, resp. vět je převzata z [13, 10].

Definice 1.1. Komplexní **Lineární algebra** $(\mathcal{A}, \oplus, \odot, \mu)$ je vektorový prostor $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ nad tělesem $\mathbb{C}$, vybavený bilineárním zobrazením (násobením) $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Násobení μ splňuje $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\mu(\alpha x + y, z) = \alpha\mu(x, z) + \mu(y, z), \quad \mu(z, \alpha x + y) = \alpha\mu(z, x) + \mu(z, y). \tag{1.1}$$

Podle vlastností násobení μ definujeme různé typy lineárních algeber:
1. **Abelovská (komutativní) algebra**, když násobení μ komutuje, tj. $\forall x, y \in \mathcal{A}$ platí

$$\mu(x, y) = \mu(y, x). \tag{1.2}$$

2. **Asociativní algebra**, když násobení μ (značíme $\cdot$) je asociativní, tj. $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$ platí

$$\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z). \tag{1.3}$$

3. **Lieova algebra**, když násobení μ (značíme $[\ ,\ ]$) splňuje $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$ následující podmínky

$$(Antikomutativitu): \ \mu(x, y) = -\mu(y, x) \tag{1.4}$$

$$(Jakobiho\ identitu): \ \mu(x, \mu(y, z)) + \mu(y, \mu(z, x)) + \mu(z, \mu(x, y)) = 0 \tag{1.5}$$

Poznámka 1.1. Máme-li asociativní algeru $(\mathcal{A}, \cdot\ )$, pak volbou

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x, \quad \forall x, y \in \mathcal{A}, \tag{1.6}$$

získáme Lievu algebru.

V následujícím textu budeme pracovat pouze s Lieovými algebrami, proto pro Lienární algebru a násobení na ní bude použito značení $(\mathcal{L}, [\ ,\ ])$, oproti klasickému $(\mathcal{A}, \mu(\ ,\ ))$.

Dále si zavedeme několik pojmů, které budou později užitečné, při zkoumání vlastností Lieových algeber.

Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ vektorové podprostory Lieovy algebry $\mathcal{L}$, potom

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] := \text{span}\{[a, b] |\ a \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B}\}. \tag{1.7}$$

Podprostor $\mathcal{A}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je **podalgebra**, jestliže je uzavřený vůči násobení [,], tj. $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \subset \mathcal{A}$.

Podalgebru $\mathcal{A}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ nazýváme **ideál**, když $[\mathcal{A}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{A}$.

Lemma 1.1. *Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ideály v $\mathcal{L}$, potom $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ jsou také ideály v $\mathcal{L}$.*

Buď $\mathcal{A}$ ideál Lieovy algebry $\mathcal{L}$, potom **faktoralgebra** podle ideálu $\mathcal{A}$ je

$$\mathcal{L}/\mathcal{A} := \{[x] = x + \mathcal{A} | x \in \mathcal{L}\}, \tag{1.8}$$

kde je násobení definováno jako $[[x], [y]] := [[x, y]],\ \forall x, y \in \mathcal{A}$.

Centrum Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je množina

$$C(\mathcal{L}) := \{x \in \mathcal{L} |\ [x, y] = [y, x],\ \forall y \in \mathcal{L}\}. \tag{1.9}$$

Poznámka 1.2. Centrum tvoří ideál v Lieově algebře.

Definice 1.2. Lieova algebra $\mathcal{L}$ se nazývá:
1. **Abelovská** právě tehdy, když $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] = 0$.
2. **Prostá** právě tehdy, když $dim\ \mathcal{L} > 1$ a jediné ideály v $\mathcal{L}$ jsou 0 a $\mathcal{L}$.
3. **Poloprostá** právě tedky, když jediný Abelovský ideál v $\mathcal{L}$ je 0.

Mějme Lieovy algebry $(\mathcal{L}_1, [,]_1)$ a $(\mathcal{L}_2, [,]_2)$. Definujeme **direktní součet** Lieových algeber $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$, jako direktní součet jejich vektorových prostorů

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathcal{L}_1,\ x_2 \in \mathcal{L}_2\}, \tag{1.10}$$

kde násobení [,] je definováno následovně

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1]_1, [x_2, y_2]_2). \tag{1.11}$$

Poznámka 1.3. Lieova algebra $\mathcal{L}$ je direktním součtem ideálů $\mathcal{L}_1,\ \mathcal{L}_2$ právě tehdy, když $\mathcal{L}_1,\ \mathcal{L}_2 \subset\subset \mathcal{L}$ jsou nenulové podprostory a platí $[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$, $[\mathcal{L}_2, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$, $[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = 0$. Jinak řečeno, je-li $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$, potom $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ tvoří ideály v $\mathcal{L}$.

Lieova algebra $\mathcal{L}$ se nazývá **rozložitelná**, když $\exists \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \neq 0$ tak, že $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. V opačném případě je **nerozložitelná**.

Definice 1.3. Charakteristické série ideálů v $\mathcal{L}$:
1. **Derivovaná série** $\mathcal{L}^{(0)} \supset \mathcal{L}^{(1)} \supset ... \supset \mathcal{L}^{(n)}...$ definovaná následovně

$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^{(n+1)} = [\mathcal{L}^{(n)}, \mathcal{L}^{(n)}], \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.12}$$

2. **Dolní centrální série** $\mathcal{L}^1 \supset \mathcal{L}^2 \supset ... \supset \mathcal{L}^n...$ definovaná následovně

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^{n+1} = [\mathcal{L}^n, \mathcal{L}], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

3.**Horní centrální série** $C^1(\mathcal{L}) \subset C^2(\mathcal{L}) \subset ... \subset C^n(\mathcal{L})...$ definovaná následovně

$$C^1(\mathcal{L}) = C(\mathcal{L}), \quad C^{n+1}(\mathcal{L})/C^n(\mathcal{L}) = C(\mathcal{L}/C^n(\mathcal{L})), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.14}$$

Definice 1.4. Lieova algebra $\mathcal{L}$ je
1. **řešitelná**, když $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\mathcal{L}^{(n)} = 0$.
2. **nilpotentní**, když $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\mathcal{L}^n = 0$.

Poznámka 1.4. Podle Definice 1.3 platí, $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^2$ a $\mathcal{L}^{(n)} \subset \mathcal{L}^{n+1}$. Jinými slovy, každá nilpotentní algebra je řešitelná.

Derivovaná algebra Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je nnožina **D(**$\mathcal{L}$**)** := [$\mathcal{L}$,$\mathcal{L}$]. Jestliže D($\mathcal{L}$)=$\mathcal{L}$, potom řekneme, že Lieova algebra $\mathcal{L}$ je **perfektní**.

Důsledek 1.1 (Lemmatu 1.1)**.** *Buď $\mathcal{A}$ ideál v $\mathcal{L}$, potom $\mathcal{A}^n$ a $\mathcal{A}^{(n)}$ jsou také ideály,* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lemma 1.2. *Pro každou Lieovu algebru $\mathcal{L}$ platí:*
1. Součet dvou libovolných řešitelných ideálů v $\mathcal{L}$ je řešitelný ideál v $\mathcal{L}$.
2. Součet dvou libovolných nilpotentních ideálů v $\mathcal{L}$ je nilpotentní ideál v $\mathcal{L}$.

Z předchozí věty plyne, že v každé algebře existují dva unikátní ideály, radikál a nilradikál. **Radikál**, značíme R($\mathcal{L}$), je maximální řešitelný ideál. **Nilradikál**, značíme NR($\mathcal{L}$), je maximální nilpotentní ideál. Tyto ideály jsou unikátní, protože jsou součtem všech řešitelních, resp. nilpotentních ideálů.

Poznámka 1.5. Nyní můžeme charakterizovat poloprosté a řešitelné Lieovy a lgebry pomocí radikálu. Lieova algebra $\mathcal{L}$ je poloprostá právě tehdy, když R($\mathcal{L}$) = 0. Naopak, $\mathcal{L}$ je řešitelná právě tehdy, když R($\mathcal{L}$) =$\mathcal{L}$.

V souvislousti s ideály v $\mathcal{L}$ si ještě uvedeme pojem Cartanovy podalgebry. **Normalizátor** podalgebry $\mathcal{A}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je množina

$$\mathrm{Norm}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{L} | \; [x, y] \in \mathcal{A}, \; \forall y \in \mathcal{A}\}. \tag{1.15}$$

Libovolná nilpotentní podalgebra $\mathcal{A}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$, která je rovna svému normalizátoru se nazývá **Cartanova podalgebra**.

Mějme Lieovy algebry $(\mathcal{L}_1, [\,,]_1)$, $(\mathcal{L}_2, [\,,]_2)$ a lineární zobrazení $h : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$. Zobrazení h je **homomorfismus** algeber $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ když

$$h([x, y]_1) = [h(x), h(y)]_2, \quad \forall x, y \in \mathcal{L}_1. \tag{1.16}$$

Jádro ker $h := \{x \in \mathcal{L}_1 | h(x) = 0\}$ zobrazení h tvoří ideál v $\mathcal{L}_1$. Homomorfismus h, který je surjektivnní (tj. $h(\mathcal{L}_1) = \mathcal{L}_2$) a prostý (tj. ker $h = 0$) se nazývá **izomorfismus**. Izomorfismus $\mathcal{L}_1$ na $\mathcal{L}_1$ se nazývá **automorfismus**.

Jestliže existuje izomorfismus Lieových algeber $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$ potom říkáme, že $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$ jsou izomorfní, ozn. $\mathcal{L} \cong \tilde{\mathcal{L}}$. Relace $\cong$ je ekvivalence na množině Ω všech Lieových algeber, třídu ekvivalence označíme $[\mathcal{L}] := \{ \tilde{\mathcal{L}} \in \Omega \mid \tilde{\mathcal{L}} \cong \mathcal{L} \}$.

Definice 1.5. Buď M neprázdná množina a $\Theta \subset \Omega$ tak, že $\mathcal{L} \in \Theta \Rightarrow [\mathcal{L}] \subset \Theta$. Jakékoliv zobrazení $\phi : \Theta \longrightarrow M$, které pro všechna $\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{L}} \in \Theta$ splňuje $\mathcal{L} \cong \tilde{\mathcal{L}} \Rightarrow \phi(\mathcal{L}) = \phi(\tilde{\mathcal{L}})$ se nazývá **invariant** na Θ.

Buď V vetorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$, potom prostor lineárních operátorů na V značíme End(V). Umažujeme-li násobení na End(V) definované jako složené zobrazení, tj.

$$(A \circ B)(x) = A(B(x)), \quad \forall x \in \mathcal{L}, \ \forall A, B \in \mathrm{End}(V), \tag{1.17}$$

potom End(V) tvoří asociativní algebru. Tímto zůsobem (viz. Poznámka 1.1) vytvoříme z End(V) Lieovu algebru, kterou označíme **gl(V)**. Je-li $\mathcal{L}$ Lieova algebra, potom budeme používat značení End($\mathcal{L}$) a gl($\mathcal{L}$) také pro asociativní, resp. Lieovu algebru lineárních operátorů na $\mathcal{L}$.

Mějme h: $\mathcal{L} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}$ izomorfismus Lieových algeber, potom z definice izomorfismu plyne, že zobrazení g: gl($\mathcal{L}$) $\longrightarrow$ gl($\tilde{\mathcal{L}}$), definované pro všechna X $\in$ gl($\mathcal{L}$) jako

$$\mathrm{g}(X) = hXh^{-1}, \tag{1.18}$$

je izomorfismus Lieových algeber gl($\mathcal{L}$) a gl($\tilde{\mathcal{L}}$). Odtud dostáváme, že platí

$$\mathcal{L} \cong \tilde{\mathcal{L}} \Longrightarrow \mathrm{gl}(\mathcal{L}) \cong \mathrm{gl}(\tilde{\mathcal{L}}). \tag{1.19}$$

Definice 1.6. Derivace Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je lineární zobrazení D $\in$ gl($\mathcal{L}$) splňující

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)], \quad \forall x, y \in \mathcal{L}. \tag{1.20}$$

Množina všech derivací tvoří Lieovu algebru, kterou označímeui **Der($\mathcal{L}$)**.

Použitím (1.18) okamžitě dostáváme

$$\mathcal{L} \cong \tilde{\mathcal{L}} \Longrightarrow \mathrm{der}(\mathcal{L}) \cong \mathrm{der}(\tilde{\mathcal{L}}). \tag{1.21}$$

Reprezentace dané Lieovy algebry $\mathcal{L}$ na vektorovém prostoru W je lineární zobrazení $\mathcal{L}$ do prostoru End(W) lineárních zobrazení na W, které působí na $\mathcal{L}$ následovně $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow$ gl(W) : x $\longmapsto \rho(x)$. Navíc pro všechny x, y prvky z $\mathcal{L}$ musí zobrazení ρ splňovat

$$\rho([x, y]) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x). \tag{1.22}$$

Speciální případ reprezentace na $\mathcal{L}$ je **adjugovaná reprezentace**

$$\mathrm{ad} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{gl}(\mathcal{L}) : x \longrightarrow \mathrm{ad}(x), \tag{1.23}$$

definovaná pro všechna $x, y \in \mathcal{L}$ jako

$$\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y]. \tag{1.24}$$

Obvykle se pro adjungovanou reprezentaci používá značení $\mathrm{ad}_x := \mathrm{ad}(x)$, kterého se budeme nadále držet.

Poznámka 1.6. Díky Jakobyho identitě je ad_x derivace.

Derivace D Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je **vnitřní**, jestliže existuje $x \in \mathcal{L}$ tak, že

$$\mathrm{D} = \mathrm{ad}_x, \quad \text{tj. } \mathrm{D}(y) = [x, y], \ \forall y \in \mathcal{L}. \tag{1.25}$$

Všechny derivace, které nejsou vnitří nazýváme **vnější**.

Mějme Lieovu algebru $\mathcal{L}$ a její reprezentaci na vektorovém prostoru V. **K-kořetězec** je totálně antisymetrické lineární zobrazení z $\mathcal{L}^{\times k} := \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times ... \times \mathcal{L}$ do V. Vektorový prostor všech k-kořetězců se značí $C^k(\mathcal{L}, V; \rho)$. Direktní součet $C^k(\mathcal{L}, V; \rho)$, $k = 0, ..., \dim \mathcal{L}$ se nazývá **soubor kořetězců** a značí se $C^\bullet(\mathcal{L}, V; \rho)$. **Kohomologický operátor d** je na $C^\bullet(\mathcal{L}, V; \rho)$ definovaný podle jeho působení na libovolný k-kořetězec následovně

$$\begin{aligned} d(c(x_1, ..., x_{k+1})) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \rho(x_i) c(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{k+1}) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j} c([x_i, x_j], x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{k+1}), \end{aligned} \tag{1.26}$$

pro každý soubor $(k + 1)$ vektorů $x_1, ..., x_{k+1} \in \mathcal{L}$.

Definice 1.7. K-kořetězec se nazývá k-kocyklus, když $d(c) = 0$, tj.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \rho(x_i) c(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{k+1}) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j} c([x_i, x_j], x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{k+1}). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Vektorový prostor k-kocyklů značíme $Z^k(\mathcal{L}, V; \rho)$.

Symetrická bilineární forma ω na $\mathcal{L}$ je:
1. **Ad-invariantní** (**invariantní**) $\Leftrightarrow \omega(\mathrm{ad}_x y, z) + \omega(y, \mathrm{ad}_x z) = 0, \forall x, y, z \in \mathcal{L}$.
2. **Invariantní vůči automorfismům** $\mathcal{L} \Leftrightarrow \omega(\phi(x), \phi(x)) = \omega(x, y)$, $\forall\ x, y \in \mathcal{L}$ a ϕ automorfismus na $\mathcal{L}$.

Definice 1.8. Buď $\mathcal{L}$ Lieova algebra, potom zobrazení $\mathrm{K} : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}$: K(x,y) = $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$ se nazývá **Killingova forma**.

Poznámka 1.7. Stopa je lineární zobrazení, tj. pro libovolné matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ na tělesem T a libovolné $a, b \in T$ platí

$$\mathrm{Tr}(a \cdot \mathbb{A} + b \cdot \mathbb{B}) = a \cdot \mathrm{Tr}(\mathbb{A}) + b \cdot \mathrm{Tr}(\mathbb{B}). \tag{1.28}$$

Navíc, požadujeme-li regularitu $\mathbb{B}$, potom platí

$$\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}). \tag{1.29}$$

Předchozí rovnost znamená, že stopa matice $\mathbb{A}$ je invariantní vůči podobnostní transformaci. Na vektorovém prostoru podobnostní transformace reprezentuje transformaci báze, tedy na vektorovém prostoru je stopa matice invariantí vůči změně báze.

Použitím předchozí poznámky není těžké dokázat, že Killingova forma je bilineární, invariantní vůči automorfismům a ad-invariantní forma.

Na závěr této kapitoly ještě uvedeme několik známých vět týkajících se Lieových algeber.

Věta 1.1 (Engelova)**.** *Lieova algebra $\mathcal{L}$ je nilpotentní právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{L}$ je $(\mathrm{ad}_x)^k = 0$, tj. když všechny operátory ad_x jsou nilpotentní na $\mathcal{L}$.*

A $\in \mathrm{gl}(\mathcal{L})$ je nilpotentní $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $A^n = 0$.

Věta 1.2 (Lieova)**.** *Buď $\mathcal{A}$ podalgebra $\mathrm{gl}(\mathcal{L})$. Potom $\mathcal{A}$ je řešitelná právě tehdy, když v $\mathcal{L}$ existuje báze, ve které mají všechny matice lineárních operátorů z $\mathcal{A}$ horní trojůhelníkový tvar.*

Věta 1.3. *Lieova algebra $\mathcal{L}$ je řešitelná*
1. jestliže existuje ideál $\mathcal{A}$ v $\mathcal{L}$ tak, že $\mathcal{L}/\mathcal{A}$ je řešitelná.
2. právě tehdy, když $D(\mathcal{L})$ je nilpotentní.

V následující větě jsou zahrnuta známá kritéria, která pomocí Killingovy formy určují, zda je Lieova algebra řešitelná nebo poloprostá.

Věta 1.4 (Cartanova kritéria)**.** *Buď K Killingova forma na Lieově algebře $\mathcal{L}$. $\mathcal{L}$ je*
1. poloprostá právě tehdy, když Killongova forma K je nedegerovaná, tj.

$$\mathcal{L}^{\perp} = \{x \in \mathcal{L} \mid K(x,y) = 0,\ \forall y \in \mathcal{L}\} = 0. \tag{1.30}$$

2. řešitelná právě tehdy, když při zúžení na derivovanou algebru $D(\mathcal{L})$, Killingova forma K vymizí, tj.

$$K(x,y) = 0, \quad \forall x,y \in D(\mathcal{L}). \tag{1.31}$$

Věta 1.5. *Radikál $R(\mathcal{L})$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je ortogonální doplněk $D(\mathcal{L})^{\perp}$ k $D(\mathcal{L})$ vzhledem ke Killingově formě na $\mathcal{L}$, tj.*

$$R(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} \mid K(x,y) = 0,\ \forall y \in D(\mathcal{L})\}. \tag{1.32}$$

Jak uvidíme v druhé kapitole, předchozí věta najde využití při hledání radikálu Lieovy algebry.

Buď x prvek Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Uvažujme lineární operátor $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{gl}(\mathcal{L})$ a jeho zobecněný vlastní podprostor $\mathcal{L}_0(x)$ příslušející vlastnímu číslu 0, tedy

$$\mathcal{L}_0(x) = \lim_{n\to\infty} \ker\,(\mathrm{ad}(x))^n. \tag{1.33}$$

Je-li $\dim \mathcal{L}_0(x)$ minimální, tj.

$$\dim \mathcal{L}_0(x) = \min_{y\in\mathcal{L}} \dim \mathcal{L}_0(y), \tag{1.34}$$

potom řekneme, že $x \in \mathcal{L}$ je **regulární**.

Nyní si uvedeme větu, která nám poskytuje návod na hledání Cartanovy podalgebry.

Věta 1.6. *Buď x regulární prvek Lieovy algebry $\mathcal{L}$, potom $\mathcal{L}_0(x)$ je Cartanova podlagbera $\mathcal{L}$. Jakákoliv jiná Cartanova podalgebra je s $\mathcal{L}_0(x)$ izomorfní.*

Vlastnosti poloprostých Lieových algeber jsou shrnuty v následující větě.

Věta 1.7. *Buď $\mathcal{L}$ poloprostá Lieova algebra, potom platí*
1. *$\mathcal{L}$ je direktním součtem prostých ideálů.*
2. *Všechny ideály a faktoralgebry v $\mathcal{L}$ jsou poloprosté.*
3. *$\mathcal{L}$ je perfektní, tj. $D(\mathcal{L})=\mathcal{L}$.*
4. *Všechny derivace $\mathcal{L}$ jsou vnitřní a $C(\mathcal{L})=0$.*

Na závěr ještě uvedeme dvě věty, které nám pomohou pochopit strukturu množiny Lieových algeber nad konkrétním, fixním vekrotovým prostorem.

Mějme Lieovy algebry $(\mathcal{L}_1, [,]_1)$ a $(\mathcal{L}_2, [,]_2)$ a homomorfismus $h : \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathrm{der}(\mathcal{L}_1)$. Potom definujeme **poloprostý součet** Lieových algeber $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \lhd \mathcal{L}_2$ jako direktní součet jejich vektorových prostorů

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2)|x_1 \in \mathcal{L}_1,\ x_2 \in \mathcal{L}_2\}, \tag{1.35}$$

kde násobení [,] je definováno následovně

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]_h = ([x_1, y_1]_1 + h(x_2)y_1 - h(y_2)x_1, [x_2, y_2]_2). \tag{1.36}$$

Poznámka 1.8. Jediný rozdíl oproti definici direktního součtu je zobrazení h v definici Lieových závorek, položíme-li $h \equiv 0$, obě definice splynou.

Věta 1.8 (Levi)**.** *Každou konečně-dimenzionální Lieovu algebru $\mathcal{L}$ lze rozložit na poloprostý součet*

$$\mathcal{L} = R(\mathcal{L}) \lhd P, \tag{1.37}$$

*kde doplněk P radikálu $R(\mathcal{L})$ v $\mathcal{L}$ je poloprostá Lieova algebra izomorfní k faktoralgebře $\mathcal{L}/R(\mathcal{L})$. Poloprostá Lieova algebra P se nazývá **Leviho faktor** nebo **Leviho podalgebra** Lieovy algebry $\mathcal{L}$.*

Věta 1.9 (Malcev)**.** *Pro každé dva Leviho faktory P_1 a P_2 Lieovy algebry $\mathcal{L}$ existuje vnitřní automorfismus Φ tak, že $\Phi(P_1) = P_2$.*

Kapitola 2

Invarianty Lieových algeber

V této kapitole se blíže seznámíme s invarianty Lieových algeber, které v dalších kapitolách použijeme při určování izomorfie a kontrakcí nízko-dimenzionálních komplexních Lieových algeber. Všechny uvažované invarianty nejdříve definujeme, poslezé uvedeme postup jejich výpočtu a na závěr tento postup ilustrujeme na příkladu.

2.1 Strukturní konstanty

Na úvod této kapitoly si uvedeme důležiný pojem strukturních konstant.

Definice 2.1. Buď $\mathcal{L}$ Lieova algebra konečné dimenze n $\in \mathbb{N}$ a $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$ báze na $\mathcal{L}$. Komplexní čísla $c_{ij}^k \in \mathbb{C}$, která jsou pro všechna $i, j \in \hat{n}$ definována jako

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k \tag{2.1}$$

nazýváme **strukturní konstanty** Lieovy algebry $\mathcal{L}$ vzhledem k bázi ε.

Poznámka 2.1. V textu budeme používat značení c_{ij}^k jak pro tenzor strukturních konstant, tak pro složky tohoto tenzoru. Z kontextu by mělo být vždy zřejmé, který případ nastal.

Poznámka 2.2. Máme-li dánu bázi, potom tenzor c_{ij}^k z předchozí definice poskytuje veškerou informaci o tom, jak je v dané Lieově algebře realizováno násobení. Jinak řečeno, tenzor c_{ij}^k definuje Lieovy závorky na Lieově algebře vzhledem k dané bázi.

Vezmeme-li v úvahu značení z předchozí definice, potom díky vlastnostem Lieových závorek (1.4), resp. (1.5), dostáváme $\forall i, j, k \in \hat{n}$ následující podmínky

$$[e_i, e_j] = -[e_j, e_i], \tag{2.2}$$

$$[e_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, e_i]] + [e_k, [e_i, e_j]] = 0, \tag{2.3}$$

což je v řeči strukturních konstant vyjádřeno jako

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \tag{2.4}$$

$$\sum_{l=1}^{n} (c_{il}^m c_{jk}^l + c_{jl}^m c_{ki}^l + c_{kl}^m c_{ij}^l) = 0. \tag{2.5}$$

Poznámka 2.3. Ze vztahu (2.4) je vidět, že tenzor c_{ij}^k je antisymetrický v indexech i a j.

Pro zpřehlednění textu, budeme nadále používat **Einsteinovu sumační konvenci**. Tedy, vyskytuje-li se v daném výrazu stejný horní i dolní index, potom se v tomto výrazu sčítá přes všechny možné hodnoty tohoto (sčítacího) indexu.

Příklad 1. Buď V n-dimenzionální vektorový prostor s bází $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$. Potom pro libovolný vektor $x \in V$, použitím Einsteinovi sumační konvence, dostaneme

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = x^i e_i, \tag{2.6}$$

kde x^i jsou $\forall i \in \hat{n}$ souřadnice vektoru x v bázi ε.

Poznámka 2.4. V předchozím příkladu stojí za povšimnutí, že souřadnice vektoru v bázi mají indexy nahoře. To je konvence, kterou budeme dodržovat v celé práci.

2.2 Izomorfizmus dvou Lieových algeber

Zdánlivě nejsnažší cesta [13] k určení zda jsou dvě Lieovy algebry izomorfní, je explicitní změna báze, která transformuje strukturní konstanty. Tento přístup ovšem vede k řešení nelineární soustavy rovnic, což je obecně obtížně proveditelné. Konkrétně, mějme dvě n-dimenzionální Lieovy algebry $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$ s bázemi $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$ a $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{e_1}, ..., \tilde{e_n})$, respektive. Pomocí strukturních konstant definujeme jejich Lieovy závorky

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad [\tilde{e}_i, \tilde{e}_j] = \tilde{c}_{ij}^k \tilde{e}_k, \quad \forall i, j, k \in \hat{n}. \tag{2.7}$$

Nyní hledáme regulární transformaci A tak, že

$$\bar{e}_i = A_i^k e_k, \quad [\bar{e}_i, \bar{e}_j] = \tilde{c}_{ij}^k \bar{e}_k, \quad \forall i, j, k \in \hat{n}. \tag{2.8}$$

Tímto způsobem dostaneme $n^2(n-1)/2$ kvadratických rovnic pro prvky matice A, tedy

$$A_i^k A_j^l c_{kl}^m = \tilde{c}_{ij}^k A_k^m, \quad det\, A \neq 0. \tag{2.9}$$

Jestliže existuje řešení této soustavy (existuje matice, jejíž prvky splňují soustavu (2.9)), potom jsou algebry $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$ izomorfní. Jak jsme předesílali, hledání takového řešení je obecně složité, proto budeme úlohu izomorfie dvou Lieových algeber řešit jinou cestou.

Určení zda jsou Lieovy algebry vzájemně neizomorfní budeme provádět pomocí invariantů, tj. na bázi nezávislých vlastností Lieových algeber (viz. definice 1.5). Příklady těchto invariantů mohou být, dimenze ideálů, vlastnosti Killingovy formy, dimenze prostoru derivací atd.. Z důvodu toho, že se objevují stále nové invarianty, nemůže existovat jejich úplný seznam. My v následující sekci udeveme některé důležité invarianty, které budeme používat v pozdějších kapitolách při zkoumání dalších vlastností Lieových algeber. Některé z těchto invarianů budou čistě elementální, tedy takové, které zle jednoduše určit výpočtem Lieových závorek v ruce. Některé budou více sofistikované, při jejihž výpočtu je téměř nezbytné využít nějaký počítačový software.

2.3 Invarianty

Buď $n \in \mathbb{N}$ libovolné, pevně zvolené přirozené číslo. Pokud nebude řečeno jinak, potom v celé sekci budeme předpokládat komplexní n-dimenzionální Lieovu algebru $\mathcal{L} = (\mathbb{C}^n, [\,,\,])$, na které si určíme libovolnou, pevně zvolenou bázi s označením $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$. Jakmile jsme takto zavedli Lieovu algebru s bazí, máme jednoznačně určené strukturní konstanty (viz. poznámka 2.2), které označíme c_{ij}^k pro všechna $i, j, k \in \hat{n}$. Dále, budeme-li používat Einsteinovu sumační konvenci, potom sčítací indexy budou vždy probíhat množinu $\hat{n} = \{1, 2, ..., n\}$.

Poznámka 2.5. Buď $d : \mathcal{L}_1 \mapsto \mathcal{L}_2$ izomorfismus Lieových algeber $(\mathcal{L}_1, [\,,\,]_1)$ a $(\mathcal{L}_2, [\,,\,]_2)$. Buď $\mathcal{A}$ ideál Lieovy algebry $\mathcal{L}_1$, tedy

$$[\mathcal{A}, \mathcal{L}_1]_1 \subset \mathcal{A}. \tag{2.10}$$

Necháme-li nyní působit izomorfismus d na obě strany inkluze (2.10) dostaneme

$$d([\mathcal{A}, \mathcal{L}_1]_1) = [d(\mathcal{A}), d(\mathcal{L}_1)]_2 = [d(\mathcal{A}), \mathcal{L}_2]_2 \subset d(\mathcal{A}), \tag{2.11}$$

kde jsme využili toho, že pro izomorfismus platí $d(\mathcal{L}_1) = \mathcal{L}_2$. Z poslední inkluze plyne, že $d(\mathcal{A})$ je ideál v $\mathcal{L}_2$. Ukázali jsme, že obraz ideálu při izomorfním zobrazení je opět ideál. Jelikož dimenze ideálu při izomorfním zobrazení se nutně zachovává, je dokázáno, že dimenze libovolného ideálu je invariant.

2.3.1 Derivace

Jako první invariant Lieovy algebry $\mathcal{L}$ uvedeme $\mathbf{n_D} := \mathbf{dimDer}\mathcal{L}$, tj. dimenze prostoru derivací Lieovy algebry $\mathcal{L}$. V první kapitole (konkrétně (1.18)) jsme ukázali, že toto číslo je skutečně dobře definovaný invariant. Tento invariant má veliký význam při určování spojitých kontrakcí, proč tomu tak je uvidíme v dalších kapitolách (viz. Poznámka 3.4).

Výpočet tohoto invariantu je poměrně pracný, proto je téměř vždy nutné využít k tomuto účelu počítač. Podle Definice 1.6 je lineární operátor A $\in$ gl($\mathcal{L}$) derivace Lieovy algebry $\mathcal{L}$, když platí

$$A[x, y] = [Ax, y] + [x, Ay], \quad \forall x, y \in \mathcal{L}. \tag{2.12}$$

Díky linearitě Lieových závorek stačí podmínku splnit pro vektory z báze ε

$$A[e_i, e_j] = [Ae_i, e_j] + [e_i, Ae_j], \quad \forall i, j \in \hat{n}. \tag{2.13}$$

Označíme-li pro všechna $i, j \in \hat{n}$ prvky matice zobrazení A v bázi ε jako a_i^k, potom platí $Ae_i = a_i^k e_k$ a předchozí výraz přejde na

$$c_{ij}^k a_k^l e_l = a_i^k c_{kj}^l e_l + a_j^k c_{ik}^l e_l, \quad \forall i, j \in \hat{n}, \tag{2.14}$$

přičemž jsme využili bilinearity Lieovy závorky a definice strukturních konstant. Konečně, využitím lineární nezavislsti vektorů báze ε obdržíme soustavu rovnic

$$c_{ij}^k a_k^l - a_i^k c_{kj}^l - a_j^k c_{ik}^l = 0, \quad \forall i, j, l \in \hat{n}. \tag{2.15}$$

Na první pohled je toto soustava n^3 rovnic pro n^2 neznámích prvků matice a_i^k. Ovšem podíváme-li se pozorněji a uvědomíme-li si, že tenzor c_{ij}^k je antisymetrický v indexech i a j (tj. $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$

pro všechna $i, j, k \in \hat{n}$), potom zjistíme, že soustava obsahuje maximálně $n \cdot n(n-1)/2$ lineárně nezávislích rovnic. Označíme-li matici soustavi (2.15) jako $\mathbb{A}$, potom platí

$$n_D = n^2 - \text{rank}\mathbb{A}. \tag{2.16}$$

Příklad 2. Pro ukázku výpočtu vybereme některou z jednodušších 3-dimenzionálních algeber.

Jedna z nejjednodušších Lieových algeber je 3-dimenzionální Heisenbergova algebra $\mathfrak{n}_{3,1}$, definovaná komutační tabulkou:

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	0	0
e_2	0	0	e_1

Z komutačních relací vidíme, že jediné nenulové prvky tenzoru srukturních konstant c_{ij}^k jsou $c_{23}^1 = 1$ a $c_{32}^1 = -1$. Z (2.15) dostáváme:

$$\begin{aligned} l = 1 \quad &: \quad c_{ij}^k a_k^1 - a_i^k c_{kj}^1 - a_j^k c_{ik}^1 = 0, \\ l = 2 \quad &: \quad c_{ij}^k a_k^2 = 0, \\ l = 3 \quad &: \quad c_{ij}^k a_k^3 = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Po dosazení konkrétních hodnot tenzoru c_{ij}^k a výpočtu příslušných matic dostaneme:

l=1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^1 \\ 0 & -a_1^1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_1^3 & -a_1^2 \\ 0 & a_2^3 & -a_2^2 \\ 0 & a_3^3 & -a_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_1^3 & -a_2^3 & -a_3^3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1^3 & -a_1^2 \\ -a_1^3 & 0 & a_1^1 - a_2^2 - a_3^3 \\ a_1^2 & -a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$l = 2 \quad : \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^2 \\ 0 & -a_1^2 & 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{2.18}$$

$$l = 2 \quad : \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^3 \\ 0 & -a_1^3 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Nulami na pravých stranách maticových rovnic (2.18) rozumíme nulové matice. Porovnáme-li v této soustavě člen po členu, dostaneme kýženou soustavu $n^3 = 27$ rovnic pro $n^2 = 9$ neznámých prvků matice zobrazení A v bázi ε. Nyní je ovšem názorně vidět, že díky antisymetrii tenzoru c_{ij}^k v indexech i a j obdržíme nanejvýš $n^2 \cdot (n-1)/2 = 9$ nezávislích rovnic. Soustava má v maticovém tvaru následující podobu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \\ a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \\ a_1^3 \\ a_2^3 \\ a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Okamžitě vidíme, že hodnost matice této soustavi je 3. Tedy $\mathbf{n_D} = \mathbf{6}$.

2.3.2 (α,β,γ)-derivace

Pojem derivace Lieovy algebry zavedený Definicí 1.6 lze zobecnit. Definice a věty v této sekci převzaty z článku [9].

Definice 2.2. Buď $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$, potom (α,β,γ)**-derivace** Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je lineární zobrazení $D \in \mathrm{gl}(\mathcal{L})$ splňující

$$\alpha D[x,y] = \beta[Dx,y] + \gamma[x,Dy]. \tag{2.20}$$

Pro pevné $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{C}$ onačíme množinu (α,β,γ)-derivací jako $\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma)$. V řeči matematických symbolů:

$$\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma) = \{D \in \mathrm{gl}(\mathcal{L}) \mid \alpha D[x,y] = \beta[Dx,y] + \gamma[x,Dy], \quad \forall x,y \in \mathcal{L}\} \tag{2.21}$$

Věta 2.1. *Buď $g : \mathcal{L} \mapsto \tilde{\mathcal{L}}$ izomorfizmus Lieových algeber $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$. Potom zobrazení $h : gl(\mathcal{L}) \mapsto gl(\tilde{\mathcal{L}})$ definované pro všechna $D \in gl(\mathcal{L})$ jako $h(D) = gDg^{-1}$ je izomorfizmus Lieových algeber $gl(\mathcal{L})$ a $gl(\tilde{\mathcal{L}})$.*

Zanecháme-li značení z předchozí věty, dostáváme pro všechna $x,y \in \tilde{\mathcal{L}}$

$$[x,y]_{\tilde{\mathcal{L}}} = \mathrm{g}[\mathrm{g}^{-1}x,\mathrm{g}^{-1}y]_{\mathcal{L}}. \tag{2.22}$$

Pro všechna $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ a pro D$\in \mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma)$ podle Definice 2.2 platí

$$\alpha D[\mathrm{g}^{-1}x,\mathrm{g}^{-1}y]_{\mathcal{L}} = \beta[D\mathrm{g}^{-1}x,\mathrm{g}^{-1}y]_{\mathcal{L}} + \gamma[\mathrm{g}^{-1}x,D\mathrm{g}^{-1}y]_{\mathcal{L}}. \tag{2.23}$$

Použitím identity $I = \mathrm{g}\mathrm{g}^{-1}$ přepíšeme tento výraz následovně:

$$\alpha D\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}[\mathrm{g}^{-1}x,\mathrm{g}^{-1}y]_{\mathcal{L}} = \beta[\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}D\mathrm{g}^{-1}x,\mathrm{g}^{-1}y]_{\mathcal{L}} + \gamma[\mathrm{g}^{-1}x,\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}D\mathrm{g}^{-1}y]_{\mathcal{L}}. \tag{2.24}$$

Aplikováním izomorfizmu g na předchozí rovnost, získáme použitím (2.22) výraz

$$\alpha\mathrm{g}D\mathrm{g}^{-1}[x,y]_{\tilde{\mathcal{L}}} = \beta[\mathrm{g}D\mathrm{g}^{-1}x,y]_{\tilde{\mathcal{L}}} + \gamma[x,\mathrm{g}D\mathrm{g}^{-1}y]_{\tilde{\mathcal{L}}}, \tag{2.25}$$

tj. $\mathrm{g}D\mathrm{g}^{-1} \in \tilde{\mathcal{D}}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Tento výsledek dohromady s Větou 2.1 dává důležité tvrzení.

Tvrzení 2.1. *Pro všechna $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ je dimenze vektorového prostoru $\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma)$ invariant Lieovy algebry $\mathcal{L}$.*

2.3.3 Centrum

Centrum Lieovy algebry $\mathcal{L}$ tvoří ideál v $\mathcal{L}$. Při výpočtu dimenze centra $\mathbf{n_Z} := \mathbf{dimC}(\mathcal{L})$ budeme vycházet z definičního vztahu

$$C(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} | [x,y] = [y,x], \forall y \in \mathcal{L}\}. \tag{2.26}$$

Hledáme všechna taková $x \in \mathcal{L}$, že

$$[x, y] = [y, x], \quad \forall y \in \mathcal{L}. \tag{2.27}$$

Využijeme-li báze ε, můžeme předchozí výraz ekvivalentně přepsat následovně

$$[x, e_i] = [e_i, x], \quad \forall i \in \hat{n}. \tag{2.28}$$

Dále označíme souřadnice vektoru x v bázi ε jako x^i pro všechna $i \in \hat{n}$. Rozvoj vektoru x v bázi má nyní tvar $x = x^i e_i$. Dosazením do (2.27), dostaneme s využitím antikomutavivity a bilinearity Lieových závorek vztah

$$x^i [e_i, e_j] = 0, \quad \forall j \in \hat{n}. \tag{2.29}$$

Jinými slovy hledáme řešení soustavy rovnic

$$x^i c_{ij}^k = 0, \tag{2.30}$$

kde $j, k \in \hat{n}$. Dimenze centra se potom vypočte jako

$$n_Z = n - \mathrm{rank}\mathbb{A}, \tag{2.31}$$

kde $\mathbb{A}$ je matice soustavy (2.30).

Příklad 3. Mějme algebru $n_{4,1}$, jejíž komutační tabulka má tvar:

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	0	0	0
e_2		0	0	e_1
e_3			0	e_2

Z uvedené komutační tabulky ihned vidíme, že jediné nenulové strukturní konstanty jsou:

$$c_{42}^1 = -1,\ c_{24}^1 = 1 \ \text{ a } \ c_{43}^2 = -1,\ c_{34}^2 = 1. \tag{2.32}$$

Tyto hodnoty dosadíme do (2.30) a dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} k = 1,\ j = 2 \ &: \ -x^4 = 0, \\ k = 1,\ j = 4 \ &: \ x^2 = 0, \\ k = 2,\ j = 3 \ &: \ -x^4 = 0, \\ k = 2,\ j = 4 \ &: \ x^3 = 0, \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Centrum generováno vektorem e_1. Dimenze centra tedy je $\mathbf{dim\ C(s_{4,3}) = 1}$.

2.3.4 Horní centrální série

Definice 2.3. Buď $\mathcal{L}$ Lieova algebra, potom definujeme posloupnost nezáporných celých čísel **US** jako

$$\mathrm{US} := [\dim C^1(\mathcal{L}),\ \dim C^2(\mathcal{L}),\ \dots,\ \dim C^k(\mathcal{L})] \tag{2.34}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ je minimální přirozené číslo takové, že $\dim C^k = \dim C^i$ pro všechna $i > k$, $i \in \mathbb{N}$.

Je zjevné, že výpočet CS bude probíhat v krocích:

1. Krok

Podle definice Horní centrální série platí:

$$C^1(\mathcal{L}) = C(\mathcal{L}). \tag{2.35}$$

Výpočet Centra Lieovy algebry $\mathcal{L}$ byl ilustrován v předchozí podsekci.

Pokračování výpočtu US je závislé na tom, který z následujících tří disjunktních případů nastane:
1. $\dim C^1(\mathcal{L}) = \dim \mathcal{L}$. V tomto případě je výpočet u konce a $\mathrm{US} = [\dim C^1(\mathcal{L})]$.
2. Dim $C^1 = 0$. V tomto případě je výpočet také u konce a $\mathrm{US} = [\dim C^1(\mathcal{L})]$.
3. Dim $\mathcal{L} > \dim C^1(\mathcal{L}) > 0$. V tomto případě výpočet pokračuje krokem 2.

2. Krok

Znovu vyjdeme z definice Horní centrální série, která říká:

$$C^2(\mathcal{L})/C^1(\mathcal{L}) = C(\mathcal{L}/C^1(\mathcal{L})). \tag{2.36}$$

Buď $n^1 := \dim C(\mathcal{L})$ a $(e^1_1,\ \dots,e^1_{n^1})$ báze $C^1(\mathcal{L})$, kterou známe z 1. Kroku. Nyní provedeme regulární transformaci báze ε na bázi ε_1.

$$\varepsilon^1 := (e^1_1,\ \dots,e^1_{n^1}, e_{n^1+1},\ \dots,e_n) \tag{2.37}$$

Jinými slovy, nahradili jsme n^1 vektorů báze ε, vektory $(e^1_1,\ \dots,e^1_{n^1})$ z báze $C^1(\mathcal{L})$ a nově vzniklou bázi jsme přeuspořádali do tvaru, kde bazické vektory $C^1(\mathcal{L})$ jsou na prvním místě. Vzhledem k tomu, že $\forall n \in \mathbb{N}$ jsou $\dim C^n(\mathcal{L})$ invarianty Lieovy algebry $\mathcal{L}$, zachovají se při této transformaci báze hodnoty členů posloupnosti US. Nyní, vyřešením soustavy rovnic

$$x^i c^k_{ij} = 0, \quad j,k \in \{n^1+1,\ \dots,n\}, \tag{2.38}$$

dostaneme souřadnice bazických vektorů $C^2(\mathcal{L})/C^1(\mathcal{L}) = C(\mathcal{L}/C^1(\mathcal{L}))$. Pro všechny $j,k \in \hat{n}^1$ a $i \in \hat{n}$ jsme ve výrazu $x^i c^k_{ij}$ dostali nuly, v indexu j díky tomu, že vektory e_j jsu z centra, v indexu k díky faktorizaci $\mathcal{L}$ podle centra. Sjednocením množiny bazických vektorů $C^2(\mathcal{L})/C^1(\mathcal{L})$ a množiny vektorů báze $C^1(\mathcal{L})$ dostaneme množinu bazických vektorů $C^2(\mathcal{L})$.

Tři případy:
1. Dim $C^2(\mathcal{L}) = C^1(\mathcal{L})$. Výpočet končí, $\mathrm{US} = [\dim C^1(\mathcal{L})]$.
2. Dim $C^2 = \dim \mathcal{L}$. Výpočet končí, $\mathrm{US} = [\dim C^1(\mathcal{L}), \dim C^2(\mathcal{L})]$.

3. Dim $\mathcal{L}$ > dim $C^2(\mathcal{L})$ > dim $C^1(\mathcal{L})$. V tomto případě výpočet pokračuje krokem 3.

k-tý Krok

$$C^k(\mathcal{L})/C^{k-1}(\mathcal{L}) = C(\mathcal{L}/C^{k-1}(\mathcal{L})). \tag{2.39}$$

Předpokládáme, že známe n^{k-1} = dim $C^{k-1}(\mathcal{L})$ a bázi $(e_1^{k-1}, \dots, e_{n^{k-1}}^{k-1})$ ideálu $C^{k-1}(\mathcal{L})$. Označíme-li $\varepsilon^k := (e_1^{k-1}, \dots, e_{n^{k-1}}^{k-1}, e_{n^{k-1}+1}^{k-1}, \dots, e_n)$, potom řešením soustavy rovnic

$$x^i c_{ij}^k = 0, \quad j, k \in \{n^{k-1} + 1, \dots, n\} \tag{2.40}$$

získáme souřadnice bazických vektorů prostoru $C^k(\mathcal{L})/C^{k-1}(\mathcal{L}) = C(\mathcal{L}/C^{k-1}(\mathcal{L}))$. Sjednocením vektorů báze $C^k(\mathcal{L})/C^{k-1}(\mathcal{L})$ s vektory báze $C^{k-1}(\mathcal{L})$ získáme bazické vektory $C^k(\mathcal{L})$.

Tři případy:
1. Dim $C^n(\mathcal{L}) = C^{n-1}(\mathcal{L})$. Výpočet končí, US = $[\dim C^1(\mathcal{L}), \dim C^2(\mathcal{L}), ..., \dim C^{n-1}(\mathcal{L})]$.
2. Dim C^n = dim $\mathcal{L}$. Výpočet končí, US = $[\dim C^1(\mathcal{L}), \dim C^2(\mathcal{L}), \dots, \dim C^n(\mathcal{L})]$.
3. Dim $\mathcal{L}$ > dim $C^n(\mathcal{L})$ > dim $C^{n-1}(\mathcal{L})$. V tomto případě výpočet pokračuje krokem k+1.

Příklad 4. Navážeme na Příklad 3 a dopočítáme posloupnost CS pro Lieovu algebru $n_{4,1}$.

1.Krok
Víme, že centrum je podprostor generovaný vektorem e_1 a jeho dimenze je 1. Pokračujeme krokem 2.

2.Krok
Podle postupu máme vypočítat centrum faktoralgebry $n_{4,1}/C^1(\mathfrak{n}_{4,1})$ jejíž bazické vektory jsou $\{e_2, e_3, e_4\}$. Vyjdeme ze vztahů (2.32), (2.33) a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} k = 2,\ j = 3 \quad &: \quad -x^4 = 0, \\ k = 2,\ j = 4 \quad &: \quad x^3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

Ihned dostáváme, že bazický vektor $C^2(\mathfrak{n}_{4,1})/C^1(\mathfrak{n}_{4,1})$ je e_2. Odkud bazické vektory $C^2(\mathfrak{n}_{4,1})$ jsou (e_1, e_2). Dimenze dim $C^2(\mathfrak{n}_{4,1}) = 2$. Pokračujeme krokem 3.

3. Krok

Chceme vypočítat centrum faktor faktoralgebry $n_{4,1}/C^2(\mathfrak{n}_{4,1})$. Její bazické vektory jsou (e_3, e_4). Například z (2.33) vidíme, že tako fakroralgebra je Abelovská. Bazické vektory $C^3(\mathfrak{n}_{4,1})$ jsou (e_1, e_2, e_3, e_4) a dimenze dim $C^3(\mathfrak{n}_{4,1}) = 4$.

Celkově **US = [1,2,4]**.

2.3.5 Derivovaná série

Definice 2.4. Buď $\mathcal{L}$ Lieova algebra, potom
1. definujeme posloupnost nezáporných celých čísel **DS** jako

$$\mathrm{DS} := [\dim \mathcal{L}^{(1)},\ \dim \mathcal{L}^{(2)},\ \dots,\ \dim \mathcal{L}^{(k)}] \tag{2.42}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ je minimální přirozené číslo takové, že $\dim \mathcal{L}^{(k)} = \dim \mathcal{L}^{(i)}$ pro všechna $i > k$, $i \in \mathbb{N}$.
2. je-li $\mathcal{L}$ řešitelná, definujeme **hodnost řešitelnosti $\mathbf{r_s}$** jako minimální $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathcal{L}^{(k)} = 0$.

Víme, ža $\forall k \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{L}^{(k)}$ ideál v $\mathcal{L}$. Můžeme tedy říct, že DS je posloupnost invariantů v $\mathcal{L}$. Ovšem ze stejného důvodu musím být invariant i hodnost řešitelnosti r_s.

Postup výpočtu DS a r_s je stejně jako u Horní centrální série rozdělen do kroků:

1.Krok

Z Definice 1.3 víme, že

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} &= \mathrm{span}\{[\mathcal{L},\mathcal{L}]\} = \mathrm{span}\{[x,y] \mid \forall x,y \in \mathcal{L}\} = &(2.43)\\ &= \mathrm{span}\{[e_i,e_j] \mid i,j \in \hat{n}\} = \mathrm{span}\{c_{ij}^k e_k \mid i,j \in \hat{n}\} &(2.44)\end{aligned}$$

Vidíme, že $\forall i, j \in \hat{n}$ lineární obal vektorů $(c_{ij}^k e_k)$ vytváří derivovanou algebru $\mathcal{L}^{(1)}$. Maximální počet lineárně nezávislých vektorů tohoto lineárního obalu je roven dimenzi derivované algebry $\mathcal{L}^{(1)}$, ozn. $n^{(1)} := \mathbf{Dim}\ \mathcal{L}^{(1)}$. Pokud je to možné (může se stát, že $\dim \mathcal{L}^{(1)} = 0$), vybereme bázi derivované algebry a označíme jí $\varepsilon^{(1)} := (e_1^{(1)},\ \dots,\ e_{n^{(1)}}^{(1)})$.

Pokračovat budeme podle toho, který ze tří disjunktních případů nastane:
1. Dim $\mathcal{L}^{(1)} = \dim \mathcal{L}$. V tomto případě jsme s výpočtem u konce. Lieova algebra $\mathcal{L}$ není řešitelná a DS = [dim $\mathcal{L}^{(1)}$].
2. Dim $\mathcal{L}^{(1)} = 0$. V tomto případě je výpočet také u konce ale Lieova algebra je řešitelná. DS = [dim $\mathcal{L}^{(1)}$] a $\mathrm{r}_s = 1$.
3. Dim $\mathcal{L} > \dim \mathcal{L}^{(1)} > 0$. V tomto případě pokračujeme krokem 2.

2.Krok

Chceme určit dimenzi

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathrm{span}\{[\mathcal{L}^{(1)},\mathcal{L}^{(1)}]\} = \mathrm{span}\{\ [x,y] \mid \forall x,y \in \mathcal{L}^{(1)}\}. \tag{2.45}$$

Budeme postupovat jako v prvním kroku. Vyjádříme komutační relace báze $\varepsilon^{(1)}$ derivované algebry $\mathcal{L}^{(1)}$:

$$[e_i^{(1)}, e_j^{(1)}] = c_{ij}^{k\,(1)} e_k^{(1)}. \tag{2.46}$$

Stejně jako v prnvím kroku určíme z lineárního obalu $(c_{ij}^{k\,(1)} e_k^{(1)})$ dimenzi $n^{(2)} := \mathbf{Dim}\ \mathcal{L}^{(2)}$, případně bázi $\varepsilon^{(2)} := (e_1^{(2)},\ \dots,\ e_{n^{(2)}}^{(2)})$ ideálu $\mathcal{L}^{(2)}$.

Tři případy obdobné kroku 1:
1. Dim $\mathcal{L}^{(2)} = \dim \mathcal{L}^{(1)}$. Výpočet končí. $\mathcal{L}$ není řešitelná a DS = [dim $\mathcal{L}^{(1)}$].
2. Dim $\mathcal{L}^{(2)} = 0$. Výpočet končí. $\mathcal{L}$ je řešitelná, DS = [dim $\mathcal{L}^{(1)}$, dim $\mathcal{L}^{(2)}$] a $\mathrm{r}_s = 2$.

3. Dim $\mathcal{L}^{(1)} > \dim \mathcal{L}^{(2)} > 0$. Výpočet pokračuje krokem 3.

m-tý Krok

Buď $m \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{L}^{(m)} = \mathrm{span}\{[\mathcal{L}^{(m-1)}, \mathcal{L}^{(m-1)}]\} = \mathrm{span}\{\ [x, y] \mid \forall x, y \in \mathcal{L}^{(m-1)}\}. \tag{2.47}$$

Komutační relace báze $\varepsilon^{(m-1)}$ ideálu $\mathcal{L}^{(m-1)}$:

$$[e_i^{(m-1)}, e_j^{(m-1)}] = c_{ij}^{k\ (m-1)} e_k^{(m-1)}. \tag{2.48}$$

Určíme $n^{(m)}$:= **Dim** $\mathcal{L}^{(m)}$, popřípadě bázi $\varepsilon^{(m)} := (e_1^{(m)},\ \dots, e_{n^{(m)}}^{(m)})$ ideálu $\mathcal{L}^{(m)}$.

Případy:
1. Dim $\mathcal{L}^{(m)} = \dim \mathcal{L}^{(m-1)}$. Výpočet končí. $\mathcal{L}$ není řešitelná a DS = [dim $\mathcal{L}^{(1)}$, dim $\mathcal{L}^{(2)}$, ... , dim $\mathcal{L}^{(m-1)}$].
2. Dim $\mathcal{L}^{(m)} = 0$. Výpočet končí. $\mathcal{L}$ je řešitelná, DS = [dim $\mathcal{L}^{(1)}$, dim $\mathcal{L}^{(2)}$, ... , dim $\mathcal{L}^{(m)}$] a $\mathrm{r}_s = m$.
3. Dim $\mathcal{L}^{(m-1)} > \dim \mathcal{L}^{(m)} > 0$. Výpočet pokračuje krokem $m + 1$.

Zjevně takto můžeme provést nejvýše n kroků.

Příklad 5. Uvažujme Lieovu algebru $\mathfrak{s}_{4,3}$:

	e_1	e_2	e_3
e_4	e_1	ae_2	be_3

kde $a, b \in \mathbb{C}$, $0 < |b| < |a| \leq 1$, $(a, b) \neq (-1, -1)$.

1. Krok

$$[e_i, e_j] = \{e_1, ae_2, be_3\}, \quad \forall i, j \in \hat{4} \quad \Longrightarrow \quad \dim \mathcal{L}^{(1)} = 3 \tag{2.49}$$

2. Krok

$$[e_i, e_j] = \{0\}, \quad \forall i, j \in \hat{3} \quad \Longrightarrow \quad \dim \mathcal{L}^{(2)} = 0 \tag{2.50}$$

Vidíme, že $\mathcal{L}$ je řešitelná a DS = $[\mathbf{3}, \mathbf{0}]$, $\mathbf{r_s} = \mathbf{2}$.

2.3.6 Dolní centrální série

Definice 2.5. Buď $\mathcal{L}$ Lieova algebra, potom
1. definujeme posloupnost nezáporných celých čísel **CS** jako

$$\mathrm{CS} := [\dim \mathcal{L}^1,\ \dim \mathcal{L}^2,\ \dots,\ \dim \mathcal{L}^k] \tag{2.51}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ je minimální přirozené číslo takové, že $\dim \mathcal{L}^k = \dim \mathcal{L}^i$ pro všechna $i > k$, $i \in \mathbb{N}$.
2. je-li $\mathcal{L}$ nilpotentní, definujeme **hodnost nilpotence** $\mathbf{r_n}$ jako minimální $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathcal{L}^k = 0$.

Argumentace, že CS a r_n jsou invarianty je totožná jako pro DS a r_s, respektive. Ve skutečnosti i postup výpočtu těchto dvou invariantů je téměř stejný jako výpočet invariantů DS a r_n.

m-tý Krok

Buď $m \in \mathbb{N}$. Předpokládáme, že už máme vypočtenou dimenzi $n^{m-1} := \dim\mathcal{L}^{m-1}$ a bázi $\varepsilon^{m-1} := (e_1^{\,1}, \dots, e_{n^{m-1}}^{\,m-1})$ ideálu $\mathcal{L}^{m-1}$. Z 1. kapitoly víme, že

$$\mathcal{L}^m = [\mathcal{L}^{m-1}, \mathcal{L}] = \{\, [x, y] \mid \forall x \in \mathcal{L}^{m-1},\ \forall y \in \mathcal{L}\}. \tag{2.52}$$

Rozdíl oproti derivované sérii nyní spočívá v tom, že nebereme vzájemné komutační relace vektorů z báze ε^{m-1} ale bereme komutační relace vektorů z báze ε^{m-1} s vektory z báze ε. Konkrétně:

$$[e_i^{m-1}, e_j] = c_{ij}^{k\ m-1} e_k^{m-1}, \tag{2.53}$$

kde e_i^{m-1} jsou $\forall i \in \hat{n}^{m-1}$ vektory báze ε^{m-1} a e_j jsou $\forall j \in \hat{n}$ vektory báze ε. Dále, $c_{ij}^{k\ m-1}$ jsou strukturní konstanty báze, která je složená z vektorů $(e_1^{\,1}, \dots, e_{n^{m-1}}^{\,m-1})$ a $n - n^{m-1}$ vektorů z $(e_1, ..., e_n)$ doplňujících $(e_1^{\,1}, \dots, e_{n^{m-1}}^{\,m-1})$ na bázi $\mathcal{L}$. Nyní stejně jako u derivované série vypočítáme z lineárního obalu vektorů $(c_{ij}^{k\ m-1} e_k^{m-1})$ dimenzi $n^m :=$ **Dim**$\mathcal{L}^m$, popřípadě bázi $\varepsilon^m := (e_1^{\,1}, \dots, e_{n^m}^{\,m})$ ideálu $\mathcal{L}^m$.

Postup je kompletní uvědomíme-li si, že 1. krok tohoto výpočtu se shoduje s 1. krokem výpočtu derivované série.

Příklad 6. Znovu uvažujeme Lieovu algebru $\mathfrak{s}_{4,3}$.

1.Krok

$$[e_i, e_j] = \{e_1, ae_2, be_3\}, \quad \forall i, j \in \hat{4} \quad \Longrightarrow \quad \dim \mathcal{L}^1 = 3 \tag{2.54}$$

2.Krok

$$[e_i, e_j] = \{e_1, ae_2, be_3\}, \quad \forall i \in \hat{3}, \forall j \in \hat{4} \quad \Longrightarrow \quad \dim \mathcal{L}^2 = 3 \tag{2.55}$$

Vidíme, že $\mathcal{L}$ není nilpotentní a **CS** = [**3**].

2.3.7 Stopa adjungované reprezentace

V první kapitole jsme definovali adjungovanou reprezentaci jako prvek množiny gl($\mathcal{L}$), konkrétně

$$\mathrm{ad}_x(y) = [x, y], \quad \forall x, y \in \mathcal{L}. \tag{2.56}$$

Zvolíme-li nyní vektor x libovolně pevně, potom díky Poznámce 1.7 víme, že $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x)$ je invariantní vůči změně báze. To znamená, že pro libovolné pevně zvolené $x \in \mathcal{L}$ je $\mathbf{Tr}(\mathbf{ad_x})$ invariant Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Jediné co nyní musíme udělat, je najít matici zobrazení ad_x v libovolné bázi. Necháme-li působit zobrazení ad_x postupně na všechny vektory báze ε, dostaneme pro řádky matice tohoto zobrazení v bázi ε následující vztah

$$(\mathrm{ad}_x)_{\bullet j} = [x, e_j] = [x^i e_i, e_j] = x^i c_{ij}^k e_k, \quad \forall j \in \hat{n}, \tag{2.57}$$

kde x^i jsou $\forall i \in \hat{n}$ souřadnice vektoru x v bázi ε. Matice zobrazení ad_x v bázi ε má tedy tvar:

$$(\mathrm{ad}_x)_{kj} = x^i c_{ij}^k, \quad \forall k, j \in \hat{n}. \tag{2.58}$$

Odtud už snadno získáme stopu této matice:

$$\mathbf{Tr}(\mathbf{ad_x}) = \mathbf{x^i c^k_{ik}} \tag{2.59}$$

Příklad 7. Lieova algebra $\mathfrak{s}_{4,3}$:

Z komutačních relací této algebry (viz. Příklad 5) dostaneme, že jediné nenulové prvky tenzoru strukturních konstant c^k_{ij} jsou:

$$\begin{aligned} c^1_{41} &= -1, & c^2_{42} &= -a, & c^3_{43} &= -b, \\ c^1_{14} &= 1, & c^2_{24} &= a, & c^3_{34} &= b. \end{aligned}$$

Použitím odvozeného vztahu (2.59) dostáváme:

$$\mathbf{Tr}(\mathbf{ad_x}) = -\, x^4 - ax^4 - bx^4 = -\mathbf{x^4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{1}) \tag{2.60}$$

2.3.8 Killingova forma

Pro libovolné pevné $x, y \in \mathcal{L}$ je Killingova forma $K(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$ invariant Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Argumentace tohoto výroku je ekvivalentní argumentaci invariance stopy adjungované reprezentace. Při výpočtu Killingovy formy pro libovolně pevně zvolené $x, y \in \mathcal{L}$ využijeme znalosti matic zobrazení ad_x a ad_y v bázi ε:

$$(\mathrm{ad}_x)_{ik} = x^m c^i_{mk}, \; (\mathrm{ad}_y)_{kj} = y^n c^k_{nj} \quad \forall i, j, k \in \hat{n}, \tag{2.61}$$

kde x^m a y^n jsou $\forall n, m \in \hat{n}$ souřadnice vektorů x, resp. y v bázi ε. Odtud určíme matici zobrazení $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y$ v bázi ε:

$$(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)_{ij} = (\mathrm{ad}_x)^k_i (\mathrm{ad}_y)_{kj} = x^m c^i_{mk} y^n c^k_{nj}, \quad \forall i, j \in \hat{n}. \tag{2.62}$$

Zbývá vypočítat stopu této matice:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_\mathbf{x} \circ \mathrm{ad}_\mathbf{y}) = \mathbf{x^m c^i_{mk} y^n c^k_{ni}}. \tag{2.63}$$

Díváme-li se na Killingovu formu jako na bilineární formu, potom z (2.63) ihned určíme její matici:

$$(\mathbb{K})_{mn} = c^i_{mk} c^k_{ni}, \quad \forall m, n \in \hat{n}. \tag{2.64}$$

Hodnost matice **rank**$\mathbb{K}$ se zachovává, je to tedy invariant.

Příklad 8. Lieova algebra $\mathfrak{s}_{4,3}$:

Jak vypadá tenzor strukturních konstant jsme si ukázali v Příkladě 7. Z (2.63) dostáváme, že jediné nenulové sčítance v Killingově formě jsou:

$$K(x, y) = x^4 y^4 c^1_{41} + x^4 y^4 c^2_{42} + x^4 y^4 c^3_{43} \tag{2.65}$$

Dosazením za prvky tenzoru c^k_{ij} obdržíme výsledek:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x^4 y^4} + \mathbf{x^4 y^4 a^2} + \mathbf{x^4 y^4 b^2}. \tag{2.66}$$

Odtud ještě určíme matici Killingovy formy:

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \tag{2.67}$$

Hodnost **rank**$(\mathbb{K})$ je 1 pro $a^2 + b^2 \neq -1$, jinak 0.

2.3.9 Radikál

Díky Větě 1.5 dokážeme poměrně snadno určit radikál Lieovy algebry $\mathcal{L}$ jako

$$R(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} | \operatorname{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) = 0, \ \forall y \in D(\mathcal{L})\}. \tag{2.68}$$

Nejdříve musíme najít bazické vektory $D(\mathcal{L})$ (viz. např. 2.3.5 Derivovaná série, 1. Krok). Tyto vektory označíme $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, ..., \tilde{e}_p)$, kde $p \leq n$, $p \in \mathbb{N}$ je dimenze $D(\mathcal{L})$. Máme-li tuto bázi, potom použitím (2.68) a dříve odvozeného vzorce pro Killingovu formu (2.63), dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_{\tilde{e}_1}) &= x^m c^i_{mk} \tilde{e}^j_1 c^k_{ji} = 0, \\ \operatorname{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_{\tilde{e}_2}) &= x^m c^i_{mk} \tilde{e}^j_2 c^k_{ji} = 0, \\ &\vdots \\ \operatorname{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_{\tilde{e}_p}) &= x^m c^i_{mk} \tilde{e}^j_p c^k_{ji} = 0, \end{aligned} \tag{2.69}$$

kde $\tilde{e}^j_l$ jsou pro všechna $j \in \hat{n}$ souřadnice vektoru $\tilde{e}_l$ v bázi ε.

Pro $i', j' \in \hat{n}$ platí $[e_{i'}, e_{j'}] = c^k_{i'j'} e_k$. Nyní si uvědomíme, že $c^k_{i'j'}$ jsou $\forall k \in \hat{n}$ buď souřadnice nulového vektoru, nebo souřadnice nějakého vektoru báze $D(\mathcal{L})$ v bázi ε. Projdeme-li nyní všechna $i' \in \{2, \ldots, n\}, j' \in \{1, \ldots i' - 1\}$ (díky antisymetrii tenzoru komutační tabulky stačí procházet jen prvky pod diagonálou), dostaneme postupně souřadnice všech vektorů báze $D(\mathcal{L})$ v bázi ε. Touto úvahou můžeme soustavu (2.69) zapsat v elegantnějším tvaru

$$x^m c^i_{mk} c^j_{i'j'} c^k_{ji} = 0, \quad \forall i' \in \{2, ..., n\}, \ \forall j' \in \{1, ..., i' - 1\}. \tag{2.70}$$

Vyřešením jedné z ekvivalentních soustav (2.69), resp. (2.70) získáme souřadnice bazických vektorů radikálu $R(\mathcal{L})$ v bázi ε. **Dim R**(**L**) se snadno určí jako počet těchto souřadnicových vektorů.

Příklad 9. Lieova algebra $\mathfrak{s}_{4,3}$:

Z příkladu 5 víme, že

$$D(\mathfrak{s}_{4,3}) = \{e_1, ae_2, be_3\}. \tag{2.71}$$

Na první pohled vidíme jak vypadají souřadnice těchto vektorů v bázi $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.72}$$

Dále z Příkladu 8 víme, jak vypadá Killingova forma algebry $\mathfrak{s}_{4,3}$:

$$K_{s_{4,3}}(x, y) = x^4 y^4 + x^4 y^4 a^2 + x^4 y^4 b^2. \tag{2.73}$$

Postupným dosazením souřadnicových vektorů (2.72) do Killingovy formy dostaneme následujíci soustavu rovnic v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.74}$$

Ihned vidíme, že **dim** $\mathbf{R}(\mathcal{L}) = \mathbf{4}$. Tento výsledek nás ovšem nepřekvapuje, protože z Příkladu 5 víme, že $\mathfrak{s}_{4,3}$ je řešitelná.

2.3.10 Nilradikál

Stejně jako radikál, je i nilradikál ideál Lieovy algebry $\mathcal{L}$, proto je i **dim** $\mathbf{N}(\mathcal{L})$ invariant. Narozdíl od radikálu je určení nilradikálu obecně obtížnější a postup zde uvádět nebudeme. Podrobně je tento postup popsán například v [13].

2.3.11 Cartanova podalgebra

Věta 1.6 říká, že je-li $x \in \mathcal{L}$ regulární, potom Cartanova algebra odpovídá zobecněnému vlastnímu podprostoru $\mathcal{L}_0(x)$ vlastního čísla 0 při zobrazení ad_x. Dim $\mathcal{L}_0(x)$ je rovna algebraické násobnosti vlastního čísla 0. Jelikož násobnost jakéhokoliv vlastního čísla je invariantní, je i dimenze Cartanovy algebry invariant Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Tuto dimenzi označíme $\mathbf{r}_{\mathcal{L}}$.

Výpočet $r_{\mathcal{L}}$ můžeme zapsat v jednoduché formě následovně:

$$r_{\mathcal{L}} = n - \max_{x \in \mathcal{L}} \mathrm{rank}(x^i c_{ij}^k)^n. \tag{2.75}$$

Příklad 10. Lieova algebra $\mathfrak{s}_{4,3}$:

Z Příkladu 7 známe tvar tenzoru strukturních konstant c_{ij}^k. Použitím vzorce (2.58) snadno nahlédneme, že pro libovolné $x \in \mathfrak{s}_{4,3}$ má matice zobrazení ad_x v bázi ε tvar

$$\begin{pmatrix} -x^4 & 0 & 0 & x^3 \\ 0 & -ax^4 & 0 & ax^3 \\ 0 & 0 & -bx^4 & bx^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.76}$$

kde x^i jsou $\forall i \in \hat{4}$ souřadnice vektoru x v bázi ε. Pro zpřehlednění budeme nyní psát indexy souřadnic vektorů dole. N-tá mocnina předchozí matice má tvar:

$$\begin{pmatrix} (-x_4)^4 & 0 & 0 & -(x_4)^3x^3 \\ 0 & (-ax_4)^4 & 0 & -a^4(x_4)^3x^3 \\ 0 & 0 & (-bx_4)^4 & -b^4(x_4)^3x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.77}$$

Regulární jsou taková $x \in \mathcal{L}$, která mají čtvrtou souřadnici nenulovou, pro taková x je hodnost matice (2.77) rovna třem. Odtud $\mathbf{r}_{\mathfrak{s}_{4,3}} = \mathbf{3}$.

2.3.12 Hodnost adjungované a koadjungované reprezentace

Pro podrobnější informace ohledně invariantů v této sekci se odkazujeme na [13].

Hodnost koadjungované reprezentace rank $(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}}) := \max_{x \in V^*}$ rank $(c_{ij}^k x_k)$ je invariant Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Pro všechna $k \in \hat{n}$ jsou x_k souřadnice vektoru x v duální bázi ε^* s indexem dole. Číslo $n -$ rank $(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}})$ pak představuje počet zobecněných Casimirových invariantů.

Situace se nezmění ani pro hodnost adjungované reprezentace $\mathrm{rank}(\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}) := \max_{x \in V}\ \mathrm{rank}\,(c_{ij}^{k} x^{j})$, kde x^{j} jsou $\forall j \in \hat{n}$ souřadnice vektoru x v bázi ε. Hodnost adjungované reprezentace je také invariant Lieovy algebry $\mathcal{L}$.

Příklad 11. Lieova algebra $\mathfrak{s}_{4,3}$:
Kompletní komutační tabulka této algebry má tvar:

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	0	0	e_1
e_2	0	0	0	ae_2
e_3	0	0	0	be_3
e_4	-e_1	-ae_2	be_3	0

(2.78)

Okamžitě vidíme, že **rank** $(\mathbf{ad}^{*}_{\mathfrak{s}_{4,3}}) = \mathbf{2}$.

2.3.13 Další invarianty

Na závěr povídání o invariantech si stručně uvedeme některé invarianty, které jsou použité v [8]. Těmito invarianty se v této práci budeme zabývat pouze okrajově, pro bližší informace se proto odkazujeme na právě zmíněný článek.

Konkrétně se jedná o dimenzi maximální Abelovské podalgebry $\mathcal{L}$ (ozn. $\mathbf{n_A}$), dimenzi maximálního Abelovského ideálu v $\mathcal{L}$ (ozn. $\mathbf{n_{A_i}}$) a invariant C_{pq} definovaný pro $u, v \in \mathcal{L}$ následovně

$$C_{pq} = \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^{p})\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v{}^{q})}{\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^{p}\mathrm{ad}_v{}^{q})}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \tag{2.79}$$

za předpokladu, že $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^{p}) \neq 0$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^{q}) \neq 0$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^{p}\mathrm{ad}_v{}^{q})$ a dále, že hodnota C_{pq} nezávisí na u a v.

2.4 Komplexní Lieovy algebry do dimenze 3 a jejich invarianty

2.4.1 Jedno-dimenzionální Lieova algebra

- $\mathfrak{n}_{1,1}$

	e_1
e_1	0

$n_D = 1$	$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$
$n_Z = 1$	$K(x,y) = 0$, $\mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 0$
US = [1]	$\dim R(\mathcal{L}) = 1$
DS = [0], $r_s = 1$	$r_{\mathcal{L}} = 1$
CS = [0], $r_n = 1$	$\mathrm{rank}(\mathrm{ad}^{*}_{\mathcal{L}}) = 0$

2.4.2 Řešitelná dvou-dimenzionální Lieova algebra s nilradikálem $2\mathfrak{n}_{1,1}$

	e_1
e_1	0

- $\mathfrak{s}_{2,1}$

	e_1
e_2	e_1

$n_D = 2$
$n_Z = 0$
US = [0]
DS = [1,0], $r_s = 2$
CS = [1]

Tr(ad$_x$) = -x^2
K(x,y) = x^2y^2, rank($\mathbb{K}$) = 1
dim R($\mathcal{L}$) = 2
$r_{\mathcal{L}} = 1$
rank(ad$^*_{\mathcal{L}}$) = 2

2.4.3 Rozložitelná tří-dimenzionální Lieova algebra

- $\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$

	e_1	e_2
e_1	0	$-e_1$

$n_D = 4$
$n_A = 2$
$n_Z = 1$
US = [1]
DS = [1,0], $r_s = 2$
CS = [1]

Tr(ad$_x$) = $-x^2$
K(x,y) = x^2y^2, rank($\mathbb{K}$) = 1
dim R($\mathcal{L}$) = 3
$r_{\mathcal{L}} = 2$
rank(ad$^*_{\mathcal{L}}$) = 2
$C_{pq} = 1$

2.4.4 Nilpotentní tří-dimenzionální Lieova algebra

- $\mathfrak{n}_{3,1}$

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	0	0
e_2		0	e_1

$n_D = 6$
$n_A = 2$
$n_Z = 1$
US = [1,3]
DS = [1,0], $r_s = 2$
CS = [1,0], $r_n = 2$

Tr(ad$_x$) = 0
K(x,y) = 0, rank($\mathbb{K}$) = 0
dim R($\mathcal{L}$) = 3
$r_{\mathcal{L}} = 3$
rank(ad$^*_{\mathcal{L}}$) = 2

2.4.5 Řešitelné tří-dimenzionální Lieovy algebry s nilradikálem $2\mathfrak{n}_{1,1}$

	e_1	e_2
e_1	0	0

- $\mathfrak{s}_{3,1}$

	e_1	e_2
e_3	e_1	ae_2

$a \neq 1 : n_D = 4$,
$a = 1 : n_D = 6$
$n_A = 2$
$n_Z = 0$
US = [0]
DS = [2,0], $r_s = 2$
CS = [2]

Tr(ad$_x$) = $-x^3(a+1)$
K(x,y) = $x^3y^3(a^2+1)$, $a \neq i$: rank($\mathbb{K}$) = 1
$a = i$: rank($\mathbb{K}$) = 0
dim R($\mathcal{L}$) = 3
$r_{\mathcal{L}} = 3$
rank(ad$^*_{\mathcal{L}}$) = 2
$a = -1 : C_{2p2q} = 2$
$a \neq -1 : C_{pq} = 1 + \frac{a^p+a^q}{1+a^{p+q}}$

Kde $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| \leq 1$, když $|a| = 1$ potom arg(a)$\leq \pi$.

- $\mathfrak{s}_{3,2}$

	e_1	e_2
e_3	e_1	$e_1 + e_2$

$n_D = 4$
$n_A = 2$
$n_Z = 0$
US = [0]
DS = [2,0], $r_s = 2$
CS = [2]

Tr(ad$_x$) = $-2x^3$
K(x,y) = $2x^3y^3$, rank($\mathbb{K}$) = 1
dim R($\mathcal{L}$) = 3
$r_{\mathcal{L}} = 1$
rank(ad$^*_{\mathcal{L}}$) = 2
$C_{pq} = 2$

2.4.6 Prostá tří-dimenzionální Lieova algebra

- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	$2e_1$	$-e_2$
e_2		0	$2e_3$

$n_D = 3$
$n_A = 1$
$n_Z = 0$
US = [0]
DS = [3]
CS = [3]

Tr(ad$_x$) = 0
K(x,y) = $4(x^1y^3 + 2x^2y^2 + x^3y^1)$, rank($\mathbb{K}$) = 3
dim R($\mathcal{L}$) = 0
$r_{\mathcal{L}} = 1$
rank(ad$^*_{\mathcal{L}}$) = 2
$C_{2p2q} = 2$

2.5 Komplexní Lieovy algebry dimenze 4 a jejich invarianty

2.5.1 Rozložitelné čtyř-dimenzionální Lieovy algebry

- $\mathfrak{s}_{2,1} \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1}$

	e_1	e_2
e_1	0	$-e_1$

$n_D = 8$
$n_A = 3$
$n_Z = 2$
US = [2]
DS = [1,0], $r_s = 2$
CS = [1],

Tr(ad$_x$) = $-x^2$
K(x,y) = x^2y^2, rank($\mathbb{K}$) = 1
dim R($\mathcal{L}$) = 4
$r_{\mathcal{L}} = 3$
rank(ad$^*_{\mathcal{L}}$) = 2
$C_{pq} = 1$

- $2\mathfrak{s}_{2,1}$

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	$-e_1$	0	0
e_2		0	0	0
e_3			0	$-e_3$

$n_D = 4$
$n_A = 2$
$n_Z = 0$
US = [0]
DS = [2,0], $r_s = 2$
CS = [2]

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x) = -x^4 - x^2$
$\mathrm{K(x,y)} = x^2y^2 + x^4y^4$, $\mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 2$
$\dim \mathrm{R}(\mathcal{L}) = 4$
$r_{\mathcal{L}} = 2$
$\mathrm{rank}(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}}) = 4$

- $\mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	0	0
e_2		0	$-e_1$

$n_D = 10$
$n_A = 3$
$n_Z = 2$
US = [2,4]
DS = [1,0], $r_s = 2$
CS = [1,0], $r_n = 2$

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$
$\mathrm{K(x,y)} = 0$, $\mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 0$
$\dim \mathrm{R}(\mathcal{L}) = 4$
$r_{\mathcal{L}} = 4$
$\mathrm{rank}(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}}) = 2$

- $\mathfrak{s}_{3,2} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	0	$-e_1$
e_2		0	$-e_1 - e_2$

$n_D = 6$
$n_A = 3$
$n_Z = 1$
US = [1]
DS = [2,0], $r_s = 2$
CS = [2]

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x) = -2x^3$
$\mathrm{K(x,y)} = 2x^3y^3$, $\mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 1$
$\dim \mathrm{R}(\mathcal{L}) = 4$
$r_{\mathcal{L}} = 2$
$\mathrm{rank}(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}}) = 2$
$C_{pq} = 2$

- $\mathfrak{s}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	0	$-e_1$
e_2		0	$-ae_2$

$a = 1 : n_D = 8$
$a \neq 1 : n_D = 6$
$n_A = 3$
$n_Z = 1$
US = [1]
DS = [2,0], $r_s = 2$
CS = [2]

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x) = -x^3(a + 1)$
$\mathrm{K(x,y)} = x^3y^3(a^2 + 1)$, $a = \pm i : \mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 0$
$a \neq \pm i : \mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 1$
$\dim \mathrm{R}(\mathcal{L}) = 4$
$r_{\mathcal{L}} = 2$
$\mathrm{rank}(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}}) = 2$
$a = -1 : C_{2p2q} = 2$
$a \neq -1 : C_{pq} = 1 + \frac{a^p + a^q}{1 + a^{p+q}}$

Kde $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| \leq 1$, když $|a| = 1$ potom arg(a)$\leq \pi$.

- $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	$2e_1$	$-e_2$
e_2		0	$2e_3$

$n_D = 4$
$n_A = 2$
$n_Z = 1$
US = [1]
DS = [3]
CS = [3]

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$
$\mathrm{K(x,y)} = 4(x^1y^3 + 2x^2y^2 + x^3y^1)$, $\mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 3$
$\dim \mathrm{R}(\mathcal{L}) = 1$
$r_{\mathcal{L}} = 2$
$\mathrm{rank}(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}}) = 2$
$C_{2p2q} = 2$

2.5.2 Nilpotentní čtyř-dimenzionální Lieova algebra

- $\mathfrak{n}_{4,1}$

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	0	0	0
e_2		0	0	e_1
e_3			0	e_2

$n_D = 7$
$n_A = 3$
$n_Z = 1$
US = [1,2,4]
DS = [2,0], $r_s = 2$
CS = [2,1,0], $r_n = 3$

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$
$\mathrm{K(x,y)} = 0$, $\mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 0$
$\dim \mathrm{R}(\mathcal{L}) = 4$
$r_{\mathcal{L}} = 4$
$\mathrm{rank}(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}}) = 2$

2.5.3 Řešitelné čtyř-dimenzionální Lieovy algebry s nilradikálem $3\mathfrak{n}_{1,1}$

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	0	0
e_2		0	0

- $\mathfrak{s}_{4,1}$

	e_1	e_2	e_3
e_4	0	e_1	e_3

$n_D = 6$
$n_A = 3$
$n_Z = 1$
US = [1,2]
DS = [2,0], $r_s = 2$
CS = [2,1]

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x) = x^4$
$\mathrm{K(x,y)} = x^4 y^4$, $\mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 1$
$\dim \mathrm{R}(\mathcal{L}) = 4$
$r_{\mathcal{L}} = 3$
$\mathrm{rank}(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}}) = 2$
$C_{pq} = 1$

- $\mathfrak{s}_{4,2}$

	e_1	e_2	e_3
e_4	e_1	$e_1 + e_2$	$e_2 + e_3$

$n_D = 6$
$n_A = 3$
$n_Z = 0$
US = [0]
DS = [3,0], $r_s = 2$
CS = [3]

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x) = -3x^4$
$\mathrm{K(x,y)} = 3x^4 y^4$, $\mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 1$
$\dim \mathrm{R}(\mathcal{L}) = 4$
$r_{\mathcal{L}} = 1$
$\mathrm{rank}(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}}) = 2$
$C_{pq} = 3$

- $\mathfrak{s}_{4,3}$

	e_1	e_2	e_3
e_4	e_1	ae_2	be_3

$a = b = 1 : n_D = 12$
$a, b \neq 1,\ a = 1 : n_D = 8$
$a, b \neq 1,\ a = b : n_D = 8$
$a, b \neq 1,\ a \neq b : n_D = 6$
$n_A = 3$
$n_Z = 0$
US = [0]
DS = [3,0], $r_s = 2$
CS = [3]

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x) = -x^4(a + b + 1)$
$\mathrm{K(x,y)} = x^4 y^4 (a^2 + b^2 + 1)$,
$a^2 + b^2 \neq -1 : \mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 1$
$a^2 + b^2 = -1 : \mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 0$
$\dim \mathrm{R}(\mathcal{L}) = 4$
$r_{\mathcal{L}} = 1$
$\mathrm{rank}(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}}) = 2$
$C_{pq} = \frac{(1+a^p+b^p)(1+a^q+b^q)}{1+a^{p+q}+b^{p+q}}$

Kde hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{C}$ jsou $0 \leq |b| \leq |a| \leq 1$, $(a, b) \neq (-1, -1)$.

- $\mathfrak{s}_{4,4}$

	e_1	e_2	e_3
e_4	e_1	$e_1 + e_2$	ae_3

$a \neq 1 : n_D = 6$
$a = 1 : n_D = 8$
$n_A = 3$
$n_Z = 0$
US = [0]
DS = [3,0], $r_s = 2$
CS = [3]

Tr(ad$_x$) $= -x^4(a + 2)$
K(x,y) $= x^4y^4(a^2 + 2)$, $a \neq \pm i\sqrt{2}$: rank($\mathbb{K}$) = 1
$a = \pm i\sqrt{2}$: rank($\mathbb{K}$) = 0
dim R($\mathcal{L}$) = 4
$r_{\mathcal{L}} = 1$
rank(ad$^*_{\mathcal{L}}$) = 2
$C_{pq} = \frac{(2+a^p)(2+a^q)}{2+a^{p+q}}$

Kde $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

2.5.4 Řešitelné čtyř-dimenzionální Lieovy algebry s nilradikálem $\mathfrak{n}_{3,1}$

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	0	0
e_2		0	e_1

- $\mathfrak{s}_{4,6}$

	e_1	e_2	e_3
e_4	0	e_2	$-e_3$

$n_D = 5$
$n_A = 2$
$n_Z = 1$
US = [1]
DS = [3,1,0], $r_s = 2$
CS = [3]

Tr(ad$_x$) = 0
K(x,y) $= 2x^4y^4$, rank($\mathbb{K}$) = 1
dim R($\mathcal{L}$) = 4
$r_{\mathcal{L}} = 2$
rank(ad$^*_{\mathcal{L}}$) = 2
$C_{2p2q} = 2$

- $\mathfrak{s}_{4,8}$

	e_1	e_2	e_3
e_4	$(1 + a)e_1$	e_2	ae_3

$a = 1 : n_D = 7$
$a \neq 1 : n_D = 5$
$n_A = 2$
$n_Z = 0$
US = [0]
DS = [3,1,0], $r_s = 3$
CS = [3]

Tr(ad$_x$) $= -2x^4(a + 1)$
K(x,y) $= 2x^4y^4(a^2 + a + 1)$,
$a \neq -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$: rank($\mathbb{K}$) = 1
$a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$: rank($\mathbb{K}$) = 0
dim R($\mathcal{L}$) = 4
$r_{\mathcal{L}} = 1$
rank(ad$^*_{\mathcal{L}}$) = 4
$C_{pq} = \frac{(1+a^p+(1+a)^p)(1+a^q+(1+a)^q)}{1+a^{p+q}+(1+a)^{p+q}}$

Kde $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| \leq 1$, když $|a| = 1$ potom arg(a) $< \pi$.

- $\mathfrak{s}_{4,10}$

	e_1	e_2	e_3
e_4	$2e_1$	e_2	$e_2 + e_3$

$n_D = 5$
$n_A = 2$
$n_Z = 0$
US = [0]
DS = [3,1,0], $r_s = 3$
CS = [3]

Tr(ad$_x$) $= -4x^4$
K(x,y) $= 6x^4y^4$, rank($\mathbb{K}$) = 1
dim R($\mathcal{L}$) = 4
$r_{\mathcal{L}} = 1$
rank(ad$^*_{\mathcal{L}}$) = 4
$C_{pq} = \frac{(2+2^p)(2+2^q)}{2+2^{p+q}}$

- $\mathfrak{s}_{4,11}$

	e_1	e_2	e_3
e_4	e_1	e_2	0

$n_D = 5$
$n_A = 2$
$n_Z = 0$
US = [0]
DS = [2,0], $r_s = 2$
CS = [2]

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x) = -2x^4$
$\mathrm{K(x,y)} = 2x^4y^4$, $\mathrm{rank}(\mathbb{K}) = 1$
$\dim \mathrm{R}(\mathcal{L}) = 4$
$r_{\mathcal{L}} = 2$
$\mathrm{rank}(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}}) = 4$
$C_{pq} = 2$

Kapitola 3

Kontrakce Lieových algeber

Tato kapitola je věnována kontrakcím na Lieových algebrách. Uvádíme zde definici kontrakce, nutná kontrakčí kritéria a v závěru kompletní seznamy existujících kontrakcí na dimenzi 3 a 4. Hlavním zdrojem pro tuto kapitolu byl článek [8].

3.1 Definice kontrakcí

Mějme Lieovu algebru $\mathcal{L} = (V, [\,,\,])$ a uvažujme **spojitou** funkci $U : (0, 1] \mapsto \mathrm{GL(V)}$, kde GL(V) je grupa regulárních operátorů na V. $U_\varepsilon := U(\varepsilon)$ je tedy $\forall \varepsilon \in (0, 1]$ regulární lineární zobrazení na V. Definujeme parametrickou množinu nových Lieových závorek na V, pomocí starých Lieových závorek následujícím způsobem:

$$[x, y]_\varepsilon = U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon x, U_\varepsilon y], \quad \forall \varepsilon \in (0, 1],\ \forall x, y \in V. \tag{3.1}$$

Poznámka 3.1. Předchozí Lieovy závorky jsme zvolili tak, aby $\forall \varepsilon \in (0, 1]$ byla Lieova algebra $\mathcal{L}_\varepsilon := (V, [\,,\,]_\varepsilon)$ izomorfní s $\mathcal{L}$.

Definice 3.1. Jestliže limita $\lim_{\varepsilon\to 0_+}[x, y]_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0_+} U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon x, U_\varepsilon y] =: [x, y]_0$ existuje pro všechna $x, y \in V$, potom $[x, y]_0$ je dobře definovaná Lieova závorka na V. Lieova algebra $\mathcal{L}_0 := (V, [\,,\,]_0)$ se nazývá **jedno-parametrická kontrakce** (zjednodušeně **kontrakce**) Lieovy algebry $\mathcal{L}$.

Jestliže máme zvolenou bázi prostoru V, potom lze tuto definici přeformulovat v řeči strukturních konstant a matic operátorů U_ε v dané bázi.

Definice 3.2. Buď $n \in \mathbb{N}$ přirozené číslo a c_{ij}^k tenzor strukturních konstant algebry $\mathcal{L}$ vzhledem k bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Jestliže

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}(U_\varepsilon)^i_{i'}(U_\varepsilon)^j_{j'}(U_\varepsilon^{-1})^{k'}_k c_{ij}^k =: \tilde{c}^{k'}_{i'j'} \tag{3.2}$$

existuje pro všechna $i', j', k' \in \hat{n}$, potom $\tilde{c}^{k'}_{i'j'}$ je dobře definovaný tenzor strukturních konstant Lieovy algebry $\mathcal{L}_0$. V tomto případě se Lieova algera $\mathcal{L}_0$ nazývá **jedno-parametrickou kontrakcí** (zjednodušeně **kontrakcí**) Lieovy algebry $\mathcal{L}$.

Parametr ε a maticová funkce z předchozího textu se nazývají **parametr kontrakce** a **matice kontrakce**, respektive. Proces při kterém vzniká Lieova algebra $\mathcal{L}_0$ z Lieovy algebry $\mathcal{L}$ se také nazývá **kontrakce**.

Definice 3.1 a 3.2 jsou ekvivalentní. První definice je nezávislá na bázi a je užitečná pro teorii. Druhá definice s více hodí pro praktické počítání.

Definice 3.3. Řekneme, že kontrakce Lieovy algebry $\mathcal{L}$ na Lieovu algebru $\mathcal{L}_0$ **triviální**, když $\mathcal{L}_0$ je Abelovská a **nevlastní**, když $\mathcal{L}_0$ je izomorfní s $\mathcal{L}$.

Existuje-li po složkách limita $\lim_{\varepsilon\to 0_+} U_\varepsilon =: U_0 \in GL(V)$, potom je zjevně kontrakce nevlastní. Požadujeme-li aby kontrakce byla vlastní, potom maticová funkce U_ε musí splňovat alespoň jednu z následujících podmínek:
1. Neexistuje limita U_ε pro $\varepsilon \longrightarrow 0_+$, tj. alespoň jeden prvek funkce U_ε je singulární, když $\varepsilon \longrightarrow 0_+$.
2.Existuje limita $\lim_{\varepsilon\to 0_+} U_\varepsilon =: U_0$ ale matice U_0 je singulární.
Ani jedna z podmínek není dostačující aby kontrakce byla vlastní.

Poznámka 3.2. Triviální a nevlasní kontrakce existuje pro každou Lieovu algebru. Jestliže zvolíme maticovou funkci $U_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$, potom kontrakce bude triviální. Volbou $U_\varepsilon = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots 1)$ dostaneme nevlastní kontrakci.

Definice 3.4. Nechť Lieovy algebry $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$ kontrahují na algebry $\mathcal{L}_0$ a $\tilde{\mathcal{L}}_0$, respektive. Jestliže $\mathcal{L}$ je izomorfní s $\tilde{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{L}_0$ je izomorfní s $\tilde{\mathcal{L}}_0$ potom řekneme, že kontrakce jsou **ekvivalentní**.

Nyní si uvedeme pojem sekvenční kontrakce, který nám bude užitečný v dalším textu. Uvažujme posloupnost $(U_p) \in \mathrm{GL(V)}$, $p \in \mathbb{N}$. Stejným způsobem jako u spojité kontrakce definujeme posloupnost nových Lieových závorek následovně, $[x, y]_p := U_p^{-1}[U_p x, U_p y]$ pro všechna $p \in \mathbb{N}$, $x, y \in V$.

Definice 3.5. Jestliže existuje limita $\lim_{p\to\infty}[x, y]_p = \lim_{p\to\infty} U_p^{-1}[U_p x, U_p y] =: [x, y]_0$ pro všechna $x, y \in V$, potom Lieovy závorky $[,]_0$ jsou dobře definované. Lieova algebra $\mathcal{L}_0 := (V, [,]_0)$ se nazývá **sekvenční kontrakce** Lieovy algebry $\mathcal{L}$.

Poznámka 3.3. Každá spojitá kontrakce $\mathcal{L}$ na $\mathcal{L}_0$ nám poskytuje nekonečnou množinu posloupností matic, které zajištují sekvenční kontrakci z $\mathcal{L}$ na $\mathcal{L}_0$. Konkrétně, máme-li maticovou funkci U_ε spojité kontrakce a posloupnost $\{\varepsilon_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ splňující $\varepsilon_p \in (0, 1], \varepsilon_p \to 0_+$ pro $p \to \mathbb{N}$, potom $\{U_{\varepsilon_p}, p \in \mathbb{N}\}$ je maticová posloupnost zajišťující sekvenční kontrakci.

3.2 Nejjednodušší typy kontrakcí

Jednoduché Inönu-Wignerovi kontrakce [6], zkráceně **IW-kontrakce**, jsou kontrakce, které mají kontrakční matice těch nejjednodušších typů. Konkrétně mají tyto matice tvar $U_\varepsilon = U_0 + \varepsilon U_0'$, kde U a U_0 jsou konstantní čtvercové matice rozměru, který odpovídá dimenzi dané Lieovy algebry. Pro matici U_ε se dále předpokládá (viz. [7]), že je transformovatelná do speciálního diagnálního tvaru $\hat{W} U_\varepsilon \check{W}^{-1} = \mathrm{diag}(1 + \varepsilon v, \ldots, 1 + \varepsilon v, \varepsilon, \ldots, \varepsilon) =: D_\varepsilon$, kde $\check{W}$ a $\hat{W}$ jsou regulární konstantní matice. Bez ztráty na obecnosti můžeme položit $v = 0$. Matice D_ε poskytuje kontrakci $\tilde{\mathcal{L}}$ na $\tilde{\mathcal{L}}_0$. Zde $\tilde{\mathcal{L}}$ a $\tilde{\mathcal{L}}_0$ jsou Lieovy algebry s Lieovými závorkami

$[x,y]^{\sim} = \check{W}\hat{W}^{-1}[\hat{W}\check{W}^{-1}x, \hat{W}\check{W}^{-1}y]$, resp. $[x,y]^{\sim}_0 = \check{W}\hat{W}^{-1}[\hat{W}\check{W}^{-1}x, \hat{W}\check{W}^{-1}y]_0$, které jsou na první pohled izomorfní s $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}_0$, respektive. Odtud můžeme položit $U_\varepsilon = D_\varepsilon$, tj.

$$U_\varepsilon = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon). \tag{3.3}$$

Buď $i_1, j_1, k_1 \in \{1, ..., s\}$ a $i_2, j_2, k_2 \in \{n-s, ..., n\}$. Podle (3.2) snadno spočítáme strukturní konstanty IW-kontrakce:

$$[e_{i_1}, e_{j_1}]_\varepsilon = c^{k_1}_{i_1 j_1} e_{k_1} + \frac{1}{\varepsilon} c^{k_2}_{i_1 j_1} e_{k_2} \to \tilde{c}^{k_1}_{i_1 j_1} e_{k_1} + \tilde{c}^{k_2}_{i_1 j_1} e_{k_2}, \quad \varepsilon \to 0_+, \tag{3.4}$$

$$[e_{i_1}, e_{j_2}]_\varepsilon = \varepsilon c^{k_1}_{i_1 j_2} e_{k_1} + c^{k_2}_{i_1 j_2} e_{k_2} \to \tilde{c}^{k_2}_{i_1 j_2} e_{k_2}, \quad \varepsilon \to 0_+, \tag{3.5}$$

$$[e_{i_2}, e_{j_1}]_\varepsilon = \varepsilon c^{k_1}_{i_2 j_1} e_{k_1} + c^{k_2}_{i_2 j_1} e_{k_2} \to \tilde{c}^{k_2}_{i_2 j_1} e_{k_2}, \quad \varepsilon \to 0_+, \tag{3.6}$$

$$[e_{i_2}, e_{j_2}]_\varepsilon = \varepsilon^2 c^{k_1}_{i_2 j_2} e_{k_1} + \varepsilon c^{k_2}_{i_2 j_2} e_{k_2} \to 0, \quad \varepsilon \to 0_+. \tag{3.7}$$

Z první rovnice dostaneme podmínku $c^{k_2}_{i_1 j_1} = 0$, která říká, že prvky $e_1, \ldots, e_s$ musí tvořit podalgebru $\mathcal{M}$ počáteční Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Strukturní konstanty výsledné Lieovy algebry $\mathcal{L}_0$ tedy mají tvar:

$$\tilde{c}^{k_1}_{i_1 j_1} = c^{k_1}_{i_1 j_1}, \ \tilde{c}^{k_2}_{i_1 j_1} = c^{k_2}_{i_1 j_1} = 0, \ \tilde{c}^{k_1}_{i_1 j_2} = \tilde{c}^{k_1}_{i_2 j_1} = 0, \ \tilde{c}^{k_2}_{i_1 j_2} = c^{k_2}_{i_1 j_2}, \ \tilde{c}^{k_2}_{i_2 j_1} = c^{k_2}_{i_2 j_1}, \ \tilde{c}^{k_2}_{i_2 j_2} = \tilde{c}^{k_2}_{i_2 j_2} = 0. \tag{3.8}$$

IW-kontrakce má řadu zajímavých vlastností (viz. [11]), které shrneme v tomto odstavci. Každá podalgebra $\mathcal{M}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ může být použita pro IW-kontrakci na $\mathcal{L}$. Vybereme-li jinou bázi doplňku $\mathcal{M}$ nebo změníne-li podalgebru $\mathcal{M}$ na $\tilde{\mathcal{M}}$ izomorfní s $\mathcal{M}$, potom výsledná algebra $\tilde{\mathcal{L}}_0$ bude izomorfní s $\mathcal{L}_0$. Zvolíme-li podalgebru $\mathcal{M} = \mathcal{L}$, dostaneme nevlastní kontrakci, zvolíme-li $\mathcal{M} = \{0\}$, dostaneme triviální kontrakci. Opakováním IW-kontrakce s totožnou podalgebrou $\mathcal{M}$ dostaneme totožnou výslednou algebru $\mathcal{L}_0$. Výsledná algebra $\mathcal{L}_0$ má strukturu polopřostého součtu $\mathcal{M} \lhd \mathcal{A}$, kde $\mathcal{A}$ je Abelovská algebra tvořená bazickými vektory doplňku $\mathcal{M}$. Podalgebra $\mathcal{M}$ je izomorfní faktoralgebře $\mathcal{L}_0/\mathcal{A}$.

Každá IW-kontrakce splňuje dvě následující podmínky:
1. Kontrakční matice je lineární s ohledem na kontrakční parametr.
2. Existují konstantní regulární matice $\check{W}$ a $\hat{W}$, které diagonalizují kontrakční matici.

Zobecněné Inönu-Wignerovi kontrakce [2, 4] jsou jednoduché IW-kontrakce, pro které je požadavek linearity nahrazen podmínkou, že diagonální prvky kontrakční matice jsou mocniny kontrakčního parametru. Kontrakční matice zobecněné IW-kontrakce n-dimenzionální Lieovy algebry $\mathcal{L}$ má tvar $U_\varepsilon = \hat{W}^{-1}\mathrm{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^{\alpha_2}, \ldots, \varepsilon^{\alpha_n})\,\check{W}$, kde $\hat{W}$, $\check{W}$ jsou opět konstantní, regulární matice a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$. Stejně jako u jednoduchých IW-kontrakcích můžeme díky izomorfii položit kontrakční matici rovnu

$$U_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^{\alpha_2}, \ldots, \varepsilon^{\alpha_n}). \tag{3.9}$$

Použitím (3.2) dostaneme výraz určující strukturní konstanty výsledné Lieovy algebry $\mathcal{L}_0$

$$\tilde{c}^k_{ij} = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \varepsilon^{\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k} c^k_{ij}, \tag{3.10}$$

přičemž se nesčítá přes opakující se indexy. Jelikož ε jde k nule, musí platit

$$\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k \geq 0, \quad \forall i, j, k \in n, \tag{3.11}$$

vždy když $c_{ij}^k \neq 0$. Kdyby předchozí nerovnost neplatila, dostali bychom na pravé straně (3.10) nekonečnou limitu, což by vedlo k nekorektní definici nových strukturních konstant $\tilde{c}_{ij}^k$. Strukturní konstanty výsledné Lieovy algebry $\mathcal{L}_0$ budou mít tvar:

$$\tilde{c}_{ij}^k = c_{ij}^k, \quad \text{pro } \alpha_i + \alpha_j = \alpha_k, \tag{3.12}$$

$$\tilde{c}_{ij}^k = 0, \quad \text{pro } \alpha_i + \alpha_j > \alpha_k. \tag{3.13}$$

Jak napovídá název, jednoduché IW-kontrakce tvoří podmnožinu zobecněných IW-kontrakcí kde $\alpha_i = \{0, 1\}, \forall i \in \hat{n}$.

Saletanovi kontrakce [11], zkráceně S-kontrakce, jsou kontrakce generované maticemi $U(\varepsilon) = U_0 + \varepsilon U_0'$, kde U_0 a U_0' jsou konstantní matice. Za předpokladu $U(1) = I$, kde I je jednotknová matice, bude mít kontrakční matice tvar $U(\varepsilon) = \varepsilon I + (1 - \varepsilon)\tilde{U}$, kde $\tilde{U}$ je znovu konstantní matice. Podmínky kladené na matici $\tilde{U}$ jsou definovány v [11]. Každá jednoduchá IW-kontrakce je zároveň S-kontrakce ale existuje S-kontrakce, která není jednoduchá IW-kontrakce.

3.3 Nutná kontrakční kritéria

V této sekci navážeme na Kapitolu 2 a ukážeme si, jak se při vyšetřování kontrakcí na Lieových algebrách používají tzv. **nutná kritéria**, která jsou založena na, vzhledem ke kontrakci, invariantních nebo semi-invariantních veličinách. Pro úplnost uvádíme, že **invariantní** veličina se při kontrakci zachovává, kdežto u **semi-invariantní** veličiny existuje nerovnost mezi hodnotou na počáteční Lieově algebře a na kontrahované Lieově algebře.

Pro připomenutí uvádíme značení invariantů n-dimenzionální Lieovy algebry $\mathcal{L}$, zavedené v druhé kapitole:
n_D - dimenze prostoru derivací $\mathcal{L}$,
n_A - dimenze maximální Abelovské podalgebry $\mathcal{L}$,
n_Z - dimenze centra $\mathcal{L}$,
dim $C^i(\mathcal{L})$, dim $\mathcal{L}^{(i)}$, dim $\mathcal{L}^i$ pro $i \in \mathbb{N}$ - dimenze příslušných struktur Lieovy alebry $\mathcal{L}$ (viz. Definice 1.3),
dim $R(\mathcal{L})$, dim $N(\mathcal{L})$ - dimenze radikálu, resp. nilradikálu $\mathcal{L}$,
n_{A_i} - dimenze maximálního Abelovského ideálu v $\mathcal{L}$,
$r_{\mathcal{L}}$ - dimenze Cartanovy podalgebry $\mathcal{L}$,
rank($\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}}$), rank($\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}$) - hodnost koadjungované resp. adjungované reprezentace Lieovy algebry $\mathcal{L}$,
rank($\mathbb{K}$) - hodnost matice Killingovy formy Lieovy algebry $\mathcal{L}$,
tr(ad_x) - stopa adjungované reprezentace Lieovy algebry $\mathcal{L}$,
r_s, r_s - hodnost řešitelnosti, resp. hodnost nilpotence $\mathcal{L}$,
C_{pq} - viz. (2.79),

dim $\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma)$ - dimenze prostoru (α, β, γ)-derivací.

Následující věta nám shrnuje chování právě vyjmenovaných invariantů při spojité kontrakci.

Věta 3.1. *Buď $n \in \mathbb{N}$, jestliže Lieova algebra $\mathcal{L}_0$ je vlastní (spojitá nebo sekvenční) kontrakce n-dimenzionální Lieovy algebry $\mathcal{L}$, potom platí následující vztahy:*
1. $n_D(\mathcal{L}_0) > n_D(\mathcal{L})$.
2. $n_A(\mathcal{L}_0) \geq n_A(\mathcal{L})$.
3. dim $C^i(\mathcal{L}_0) \geq$ dim $C^i(\mathcal{L})$, $i \in \mathbb{N}$.
4. dim $\mathcal{L}_0^{(i)} \leq$ dim $\mathcal{L}^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$.
5. dim $\mathcal{L}_0^i \leq$ dim $\mathcal{L}^i$, $i \in \mathbb{N}$.
6. dim $R(\mathcal{L}_0) \geq$ dim $R(\mathcal{L})$.
7. dim $N(\mathcal{L}_0) \geq$ dim $N(\mathcal{L})$.
8. $n_{A_i}(\mathcal{L}_0) \geq n_{A_i}(\mathcal{L})$.
9. $r_{\mathcal{L}_0} \geq r_{\mathcal{L}}$.
10. rank$(\mathrm{ad}_{\mathcal{L}_0}) \leq$ rank$(\mathrm{ad}_{\mathcal{L}})$, rank$(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}_0}) \leq$ rank$(\mathrm{ad}^*_{\mathcal{L}})$.
11. rank$(\mathbb{K}_{\mathcal{L}_0}) \leq$ rank$(\mathbb{K}_{\mathcal{L}})$.
12. $\mathcal{L}_0$ *je unimodulární když* $\mathcal{L}$ *je unimodilární, tj.* $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$ *pro každé* $x \in \mathcal{L}$ *implikuje* $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$ *pro* $x \in \mathcal{L}_0$.
13. Je-li $\mathcal{L}$ *řešitelná, potom* $\mathcal{L}_0$ *je také řešitelná a platí,* $r_s(\mathcal{L}_0) \leq r_s(\mathcal{L})$.
14. Je-li $\mathcal{L}$ *nilpotentní, potom* $\mathcal{L}_0$ *je také nilpotentní a platí,* $r_n(\mathcal{L}_0) \leq r_n(\mathcal{L})$.
15. $C_{pq}(\mathcal{L}_0) = C_{pq}(\mathcal{L})$ *pro všechny* $p, q \in \mathbb{N}$, *kde invarianty* $C_{pq}(\mathcal{L}_0)$ *a* $C_{pq}(\mathcal{L})$ *jsou dobře definované.*
16. dim $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_0}(\alpha, \beta, \gamma) \geq$ dim $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Než přikročíme k důkazu této věty, dokážeme nejprve následující užitečné Lemma.

Lemma 3.1. *Buď $(\mathbb{A}_p)$, $p \in \mathbb{N}$, posloupnost komplexních matic stejných dimenzí. Nechť dále existuje, po složkách, limita $\mathbb{A}_0 := \lim_{p\to\infty} \mathbb{A}_p$. Jestliže rank $\mathbb{A}_p = r$ pro všechna $p \in \mathbb{N}$, potom rank $\mathbb{A}_0 \leq r$.*

Důkaz. Zvolíme libovolně pevně $p \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu má matice $\mathbb{A}_p$ hodnost r. Použijeme výsledky Lineární algery a přepíšeme tuto vlastnost $\mathbb{A}_p$ v řeči subdeterminantů. Dostaneme, že $\forall p \in \mathbb{N}$ bude každý subdeterminant dimenze větší než r nulový. Provedením limintiho přechodu $p \to \infty$ vidíme, že všechny subdeterminanty matice $\mathbb{A}_0$ větší než r jsou nulové. Jinými slovy, rank $(\mathbb{A}_0) \leq r$. □

Důkaz. (Věty 3.1) Případ spojitých kontrakcí okamžitě plyne z případu sekvenčních kontrakcí, proto větu stačí dokázat pro sekvenční kontrakce. V této práci pro ilustraci provedeme důkaz jen některých kritérií. Téměř všechna kritéria jsou dokázana v článeku [8]. Kritérum 1 je dokázáno např. v [1, 3].

Kritérium 16:

Zvolíme-li $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ libovolně pevně, potom prvky d^i_j matice (α, β, γ)-derivace Lieovy algebry $\mathcal{L}$ musí v pevně zvolené bázi splňovat soustavu rovnic

$$\alpha c^k_{ij} d^l_k - \beta d^k_i c^l_{kj} - \gamma d^k_j c^l_{ik} = 0, \quad \forall i, j, l \in \hat{n}, \tag{3.14}$$

kde c_{ij}^k jsou $\forall i, j, k \in \mathbb{N}$ složky tenzoru strukturních konstant v dané bázi. Tato soustava vznikla identickým postupem jako soustava (2.15), s přidáním parametrů α, β, γ. Označíme-li matici soustavy (3.14) jako $\mathbb{A}(\alpha, \beta, \gamma)$, potom zjevně

$$\dim \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\alpha, \beta, \gamma) = n^2 - \mathrm{rank}(\mathbb{A}(\alpha, \beta, \gamma)). \tag{3.15}$$

Buď $(\mathcal{L}_p)$, $p \in \mathbb{N}$ polsoupnost Lieových algeber vystupujících v sekvenční kontrakci. Dále označíme matice soustav (3.14) Lieových algeber $\mathcal{L}_p$, jako $\mathbb{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$, pro všechna $p \in \mathbb{N}$. Matice $\mathbb{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ se budou lišit v závislosti na tvaru tenzoru strukturních konstant Lieových algeber $\mathcal{L}_p$ (jinak řečeno v závislosti na tvaru báze a Lieových závorek, Lieových algeber $\mathcal{L}_p$).

Jelikož pro všechna $p \in \mathbb{N}$ jsou Lieovy algebry $\mathcal{L}_p$ izomorfní s $\mathcal{L}$, dostáváme z (3.15) použitím Tvrzení 2.1, rovnost:

$$\mathrm{rank}\mathbb{A}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathrm{rank}\mathbb{A}_p(\alpha, \beta, \gamma), \quad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Když nyní označíme matici soustavy (3.14) Lieovy algebry $\mathcal{L}_0$ jako $\mathbb{A}_0(\alpha, \beta, \gamma)$, potom zřejmě platí $\lim_{p\to\infty} \mathbb{A}_p(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbb{A}_0(\alpha, \beta, \gamma)$. Posloupnost matic $(\mathbb{A}_p(\alpha, \beta, \gamma))$ tedy splňuje podmínky Lemmatu 3.1. Aplikací tohoto Lemmatu dostáváme:

$$\mathrm{rank}\mathbb{A}_0(\alpha, \beta, \gamma) \leq \mathrm{rank}\mathbb{A}_p(\alpha, \beta, \gamma) = \mathrm{rank}\mathbb{A}(\alpha, \beta, \gamma). \tag{3.17}$$

Odkud z (3.15) plyne kýžený výsledek

$$\dim \mathcal{D}_{\mathcal{L}_0}(\alpha, \beta, \gamma) \geq \dim \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\alpha, \beta, \gamma), \tag{3.18}$$

pro libovolné $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

$\square$

Poznámka 3.4. Položíme-li $\alpha, \beta, \gamma = 1$, dostaneme z 16. kritéria neostrou nerovnost

$$n_D(\mathcal{L}_0) \equiv \dim \mathcal{D}_{\mathcal{L}_0}(1, 1, 1) \geq \dim \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(1, 1, 1) \equiv n_D(\mathcal{L}), \tag{3.19}$$

což je slabší verze 1. kritéria. V Kapitole 2 jsme zmiňovali, že invariant dimDer $\mathcal{L}$ má mezi invarianty neobyčejně významné postavení. V kritériu 1 se jako v jediném kritériu vyskytuje ostrá nerovnost, proto je toto kritérium velice efektivní při rozhodování zda je kontrakce možná či není.

Poznámka 3.5. Seznam může být rozšířen o další kritéria, která popisují při kontrakci invariantní nebo semi-inariantní veličiny.

Množina těchto kritérií je úplná pro 3-dimenzionální a 4-dimenzionální Lieovy algebry ve smyslu, že kritéria rozlišují všechny páry Lieových algeber, které na sebe nemohou kontrahovat.

Seznam kritérií ovšem není minimální. Ve 4. Kapitole budeme diskutovat minimalitu tohoto seznamu ve smyslu úplnosti.

Použitelnost kritérií obecně silně závisí na typu dané Lieovy algebry, například kritéria 3, 4, 5 jsou užitečná pro nilpotentní a řeštelné Lieovy algebry ale neposkytují téměř žádné informace o poloprostých Lieových algebrách. Invariant C_{pq} je obecně velice užitečný pro všechny typy algeber až na nilpotentní. Pro nilpotentní algebry není invariant C_{pq} dobře definovaný viz. Věta 1.2.

3.4 Kontrakce komplexních nízko-dimenzionálních Lieových algeber

V této sekci se podíváme na kontrakce komplexních Lieových algeber do dimenze čtyři. Vzhledem k tomu, že na konkrétní výpočty těchto kontrakcí není v této práci kladen přílišný důraz, uvedeme si pouze všeobecně známé výsledky, které vhodně okomentujeme. Pro podrobnější informace se odkazujeme na jiné materiály [8].

3.4.1 Algoritmus určování kontrakcí

Hledání kontrakcí je do jisté míry mechanická záležitost. Tím je míněno, že existuje algoritmus poskytující návod na hledání kontrakcí. Tento algoritmus shrneme do tří kroků:

1.Vezmeme kompletní seznam Lieových algeber fixní dimenze. Pro každou algebru tohoto seznamu spočítáme invariantní a semi-invariantní veličiny vzhledem ke kontrakci. Volba těchto veličin není striktně určená. Obecně je důležíté aby námi zvolené veličiny zakázaly co nejvíce kontrakcí.

2. Pro každý pár Lieových algeber ze seznamu určíme pomocí nutných kritérií existenci kontrakce tak, že porovnáme vypočítané intariantní a semi-invariantní veličiny. Zřejmě stačí hledat jenom netriviální a vlastní kontrakce, proto nebudeme brát v úvahu pár Lieova algebra s Ábelovou algebrou a pár Lieova algebra se sebou samou.

3. Vezmeme v úvahu všechny páry pro která jsou splněna nutná kritéria kontrakce. Použitím Definice 3.2 a metod ze Sekce 3.2 dokážeme buď neexistenci kontrakce, nebo zkonstruujeme kontrakční matici v explicitní formě.

Jak jsme již předesílali, dále se budeme, téměř výlučně, zabývat pouze prvními dvěma kroky tohoto algoritmu.

3.4.2 Seznam kontrakcí komplexních Lieových algeber do dimenze 4

Definice 3.6. Kontrakce $\mathcal{L}$ na $\mathcal{L}_0$ se nazývá **přímá**, jestliže neexistuje Lieova algebra $\mathcal{L}_1$ neizomorfní s $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}_0$ tak, že $\mathcal{L}$ se kontrahuje na $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_1$ se kontrahuje na $\mathcal{L}_0$. Opakem k tomuto pojmu je **složená** kontrakce.

Poznámka 3.6. Kontrahuje-li algebra $\mathcal{L}$ na $\mathcal{L}_1$ a algebra $\mathcal{L}_1$ na $\mathcal{L}_0$, potom zjevně kontrahuje algebra $\mathcal{L}$ na $\mathcal{L}_0$.

Ze Sekce 3.2 víme, jak vypadá matice zobecněné IW-kontrakce. V následjících seznamech je použito přehlednější značení

$$I\ \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2,\ \dots, \alpha_n) := \hat{W}^{-1}\mathrm{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^{\alpha_2},\ \dots, \varepsilon^{\alpha_n})\check{W}, \tag{3.20}$$

kde n je fixní dimenze Lieových algeber, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ pro $i \in \hat{n}$, $I := \hat{W}^{-1}$ a od matice $\check{W}$ se bude všude vyžadovat aby byla rovna jednotkové matici. Abychom rozlišili matici I, která se budeme obecně lišit kontrakci od kontrakce, označíme jí dolním číselným indexem. Za každým seznamem jsou všechny tyto matice uvedené v explicitní formě. Příslušné kontrakčí matice jsou v seznamech vepsány nad šipkou, která znázorňuje limitní přechod $\varepsilon \to 0_+$. V případě jednoduchých IW-kontrakcí uvedeme i příslušné podalgebry $\mathcal{M}$.

3.4.2.1 Dimenze 1, 2

Existuje jenom jedna Abelovská Lieova algebra dimenze 1. Kontrakce této Lieovy algebry jsou tedy triviální a nevlastní zároveň.

Všechny neizomorfní algebry dimenze dvě jsou, Abelovská algebra $2\mathfrak{n}_{1,1}$ a algebra $\mathfrak{s}_{2,1}$. Kontrakce každé Abelovské algebry jsou triviální a nevlastní zároveň. Kontrakce algebry $\mathfrak{s}_{2,1}$ jsou také triviální a nevlastní.

3.4.2.2 Dimenze 3

Seznam všech možných vlastních, netriviálních, spojitých kontrakcí komplexních tří-dimenzionálních Lieových algeber [8]:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1} \quad &: \xrightarrow{I_1 W(1,1,0)} \mathfrak{n}_{3,1},\ (e_1 - e_3). \\
\mathfrak{s}_{3,2} \quad &: \xrightarrow{I_5 W(1,0,1) \text{ nebo } W(2,1,1)} \mathfrak{n}_{3,1},\ (e_3); \qquad \xrightarrow{I_6 W(0,1,0) \text{ nebo } W(1,2,0)} \mathfrak{s}_{3,1,\ a=1},\ (e_1, e_2 + e_3). \\
\mathfrak{s}_{3,1,\ a\neq 1} \quad &: \xrightarrow{I_2 W(1,0,1)} \mathfrak{n}_{3,1},\ (e_1 + e_2). \\
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \quad &: \xrightarrow{I_3 W(1,1,0)}, \mathfrak{n}_{3,1}\ (e_3); \qquad \xrightarrow{I_4 W(1,0,0)} \mathfrak{s}_{3,1,\ a=-1}
\end{aligned}
$$

Konstantní části kontrakčních matic mají tvar:

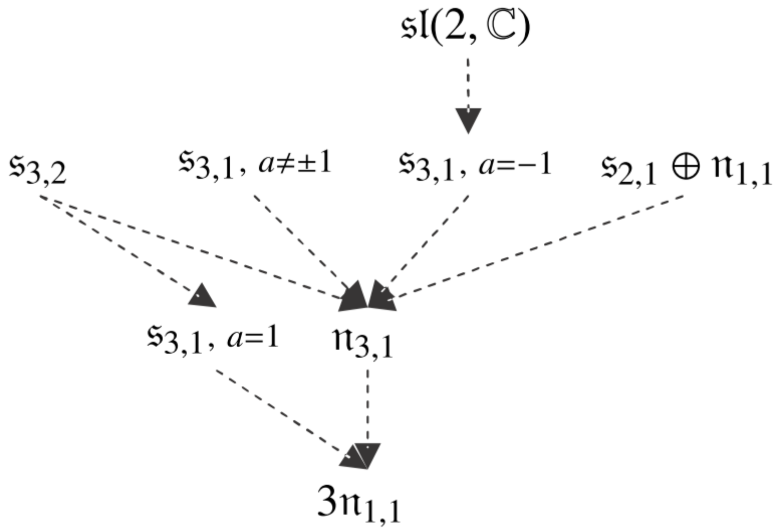
$$
I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Poznámka 3.7. Tento seznam je uvedený v [8]. V tomto článku jsou puužité jiné komutační relace Lieových algeber než ty, které jsme uvedli na konci Kapitoly 2. Seznam kontrakčních matic je tedy platný pro Lieovy algebry s těmito komutačními relacemi:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1} : [e_1, e_2] = e_1, && \mathfrak{n}_{3,1} : [e_2, e_3] = e_1, \\
&\mathfrak{s}_{3,2} : [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_1 + e_2, && \mathfrak{s}_{3,1}(a) : [e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = ae_2, \\
&\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) : [e_1, e_2] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_3,\ [e_1, e_3] = 2e_2. &&
\end{aligned}
$$

Kdybychom chtěli seznam kompatibilní s algebrami z Kapitoly 2, potom bychom museli dopočítat změněné kontrakční matice.



Obrázek 3.1: Přímé, vlastní kontrakce tří-dimenzionálních Lieových algeber.

Závěrem můžeme říci, že pro každý pár komplexních Lieových algeber dimenze tři mohou nastat dvě možnosti:
1. Neexistuje kontrakce, protože nejsou splněná nutná kontrakční kritéria.
2. Existuje jednoduchá IW-kontrakce.

Věta 3.2. *Každá spojitá kontrakce komplexních tří-dimenzionálních Lieových algeber je ekvivalentní jednoduché IW-kontrakci.*

3.4.2.3 Dimenze 4

Seznam všech možných vlastních, netriviálních, spojitých kontrakcí komplexních čtyř-dimenzionálních Lieových algeber [8]:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{s}_{2,1} \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1} \quad &: \xrightarrow{I_{23}W(1,1,0,0)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_3 - e_1, e_4). \\
2\mathfrak{s}_{2,1} \quad &: \xrightarrow{W(0,0,0,1)} \mathfrak{s}_{2,1} \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_2, e_3); \quad \xrightarrow{I_1W(1,1,0,1)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1 + e_3); \\
&\xrightarrow{U_1} \mathfrak{s}_{3,2} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}; \quad \xrightarrow{I_2W(0,0,0,1)} \mathfrak{s}_{3,1,\ a=1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_3, e_2 + e_4); \\
&\xrightarrow{I_{20}W(1,1,0,1)} \mathfrak{s}_{3,1,\ a\neq 1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_2 + ae_4), \quad \xrightarrow{U_1} \mathfrak{n}_{4,1}, \quad \xrightarrow{I_{21}W(0,1,1,0)} \mathfrak{s}_{4,1},\ (e_1, e_2 - e_3); \\
&\xrightarrow{I_3W(0,1,0,1)} \mathfrak{s}_{4,11},\ (e_1 + e_3). \\
\mathfrak{s}_{3,2} \oplus \mathfrak{n}_{1,1} \quad &: \xrightarrow{W(1,0,1,0)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_2, e_4); \quad \xrightarrow{W(0,1,0,0)} \mathfrak{s}_{3,1,\ a=1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_3, e_4); \quad \xrightarrow{I_{22}W(2,1,0,1)} \mathfrak{n}_{4,1}. \\
\mathfrak{s}_{3,1,\ a=1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1} \quad &: \xrightarrow{I_4W(1,0,1,0)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_2 + e_4). \\
\mathfrak{s}_{3,1,\ a\neq 1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1} \quad &: \xrightarrow{I_5W(1,1,0,0)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_2, e_1 + e_4); \quad \xrightarrow{I_6W(2,1,0,1)} \mathfrak{n}_{4,1}. \\
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{n}_{1,1} \quad &: \xrightarrow{I_8W(1,1,0,0)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_3, e_4); \quad \xrightarrow{I_7W(1,1,0,0)} \mathfrak{s}_{3,1,\ a=-1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_2, e_4); \\
&\xrightarrow{I_{17}W(1,1,1,0)} \mathfrak{n}_{4,1},\ (e_1 + e_4); \quad \xrightarrow{I_{24}W(1,0,1,0)} \mathfrak{s}_{4,6},\ (e_1, e_2 - \frac{1}{2}e_4). \\
\mathfrak{n}_{4,1} \quad &: \xrightarrow{I_{10}(0)W(0,0,0,1)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_2, e_4). \\
\mathfrak{s}_{4,4} \quad &: \xrightarrow{I_{11}W(1,0,1,0)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_3); \quad \xrightarrow{b\neq 1,\ I_{15}W(2,1,0,1)} \mathfrak{n}_{4,1}; \quad \xrightarrow{W(1,0,1,0)} \mathfrak{s}_{4,3,\ b=1},\ (e_2, e_4). \\
\mathfrak{s}_{4,1} \quad &: \xrightarrow{I_{12}W(0,0,1,0)} \mathfrak{s}_{2,1} \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_2, e_4); \quad \xrightarrow{I_{11}W(1,0,1,0)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_3); \\
&\xrightarrow{I_{13}W(2,1,0,1)} \mathfrak{n}_{4,1}. \\
\mathfrak{s}_{4,2} \quad &: \xrightarrow{I_{10}(0)W(1,0,1,1)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_2); \quad \xrightarrow{W(2,1,0,1)} \mathfrak{n}_{4,1}; \quad \xrightarrow{W(0,1,1,0)} \mathfrak{s}_{4,4,\ a=1},\ (e_1, e_4); \\
&\xrightarrow{W(0,1,2,0)} \mathfrak{s}_{4,3,\ a,b=1}. \\
\mathfrak{s}_{4,3} \quad &: \xrightarrow{a\neq b,\ I_{14}W(1,0,1,0)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (\tfrac{1+b}{a}e_1 + e_2, e_3); \quad \xrightarrow{1\neq a\neq b\neq 1,\ I_9W(2,1,0,1)} \mathfrak{n}_{4,1}. \\
\mathfrak{s}_{4,10} \quad &: \xrightarrow{I_{11}W(1,0,1,0)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_3); \quad \xrightarrow{I_{16}W(1,1,1,0)} \mathfrak{n}_{4,1},\ (e_4); \quad \xrightarrow{W(0,1,1,0)} \mathfrak{s}_{4,4,\ a=2},\ (e_1, e_4); \\
&\xrightarrow{W(0,0,1,0)} \mathfrak{s}_{4,5,\ a,b=-\frac{1}{2}},\ (e_1, e_2, e_4); \quad \xrightarrow{W(1,0,1,0)} \mathfrak{s}_{4,8,\ a=1},\ (e_2, e_4). \\
\mathfrak{s}_{4,6} \quad &: \xrightarrow{W(0,0,0,1)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_2, e_3); \quad \xrightarrow{I_{10}(0)W(1,1,0,1)} \mathfrak{s}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1,\ a=-1}; \\
&\xrightarrow{I_{19}W(1,1,1,0)} \mathfrak{n}_{4,1},\ (e_2 - e_3). \\
\mathfrak{s}_{4,11} \quad &: \xrightarrow{W(0,0,0,1)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_2, e_3); \quad \xrightarrow{I_{18}W(0,0,0,1)} \mathfrak{s}_{3,2} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_2, e_3 + e_4); \\
&\xrightarrow{I_{10}(0)W(0,0,0,1)} \mathfrak{s}_{3,1,\ a=1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_2, e_4); \quad \xrightarrow{I_{19}W(1,1,1,0)} \mathfrak{n}_{4,1},\ (e_2 - e_3). \\
\mathfrak{s}_{4,8} \quad &: \xrightarrow{W(0,0,0,1)} \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1},\ (e_1, e_2, e_3); \quad \xrightarrow{b\neq 1,\ I_{19}W(1,1,1,0)} \mathfrak{n}_{4,1},\ (e_2 - e_3); \\
&\xrightarrow{-1<b<0,\ W(0,0,1,0)} \mathfrak{s}'_{3,4},\ (e_1, e_2, e_3); \xrightarrow{0<b\leq 1,\ \mathrm{diag}(1,1,1,\frac{1}{1+b})W(0,0,1,0)} \mathfrak{s}''_{3,4}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Konstantní části matic zobecněné IW-kontrakce mají tvar:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_6 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a(a-1)} & \frac{1}{a(a-1)} & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{b-1} & \frac{(a-b)^{-1}}{(b-1)} & \frac{(a-b)^{-1}}{(a-1)(b-1)} & 0 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_{10}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$I_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{14} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+b}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$I_{16} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(a-b)(a-1)^{-1}}{(a-b+1)} & \frac{(a-1)^{-1}}{(a-b+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{17} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$I_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(b-1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \quad I_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$I_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{24} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{b-1} & \frac{-1}{(b-1)^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Oproti tří-dimenzioálnímu případu se zde vyskytují dvě kontrakce, které nejsou ekvivalentní zobecněné IW-kontrakci. Tyto kontrakce jsou Saletanovi a kontrakční matice mají tvar:

$$U_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 & -\varepsilon & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon^2 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

Poznámka 3.8. Navážeme na Poznámku 3.7 a uvedeme komutační relace, při kterých je tvar kontrakčních matic uvedený v tomto seznamu platný.

$\mathfrak{s}_{2,1} \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1} : [e_1, e_2] = e_1$

$\mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1} : [e_2, e_3] = e_1$

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{n}_{1,1} : [e_1, e_2] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_3,\ [e_1, e_3] = 2e_2$

$\mathfrak{n}_{4,1} : [e_2, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2$

$\mathfrak{s}_{4,2} : [e_1, e_4] = e_1,\ [e_2, e_4] = e_1 + e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3$

$\mathfrak{s}_{4,4} : [e_1, e_4] = ae_1,\ [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3$

$\mathfrak{s}_{4,8} : [e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = (1 + b)e_1,\ [e_3, e_4] = be_3$

$\mathfrak{s}_{4,11} : [e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = e_1,\ [e_2, e_4] = e_2$

$2\mathfrak{s}_{2,1} : [e_1, e_2] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_3$

$\mathfrak{s}_{3,2} \oplus \mathfrak{n}_{1,1} : [e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_1 + e_2$

$\mathfrak{s}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1} : [e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = ae_2$

$\mathfrak{s}_{4,1} : [e_1, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2$

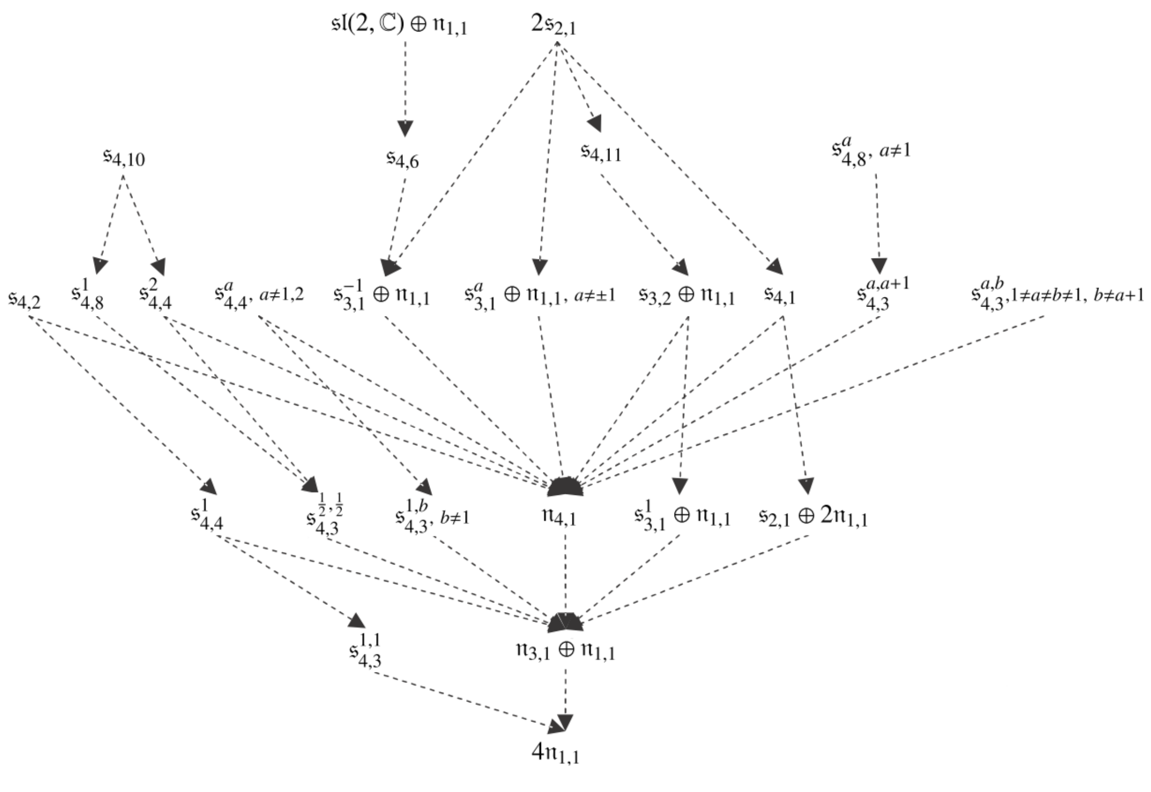
$\mathfrak{s}_{4,3} : [e_1, e_4] = ae_1,\ [e_2, e_4] = be_2,\ [e_3, e_4] = e_3$

$\mathfrak{s}_{4,6} : [e_2, e_3] = e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = -e_3$

$\mathfrak{s}_{4,10} : [e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = 2e_1,\ [e_2, e_4] = e_2$
$[e_3, e_4] = e_2 + e_3$

$\mathfrak{s}'_{3,4} : [e_1, e_4] = (1 + b)e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,$
$[e_3, e_4] = be_3$

$\mathfrak{s}''_{3,4} : [e_1, e_4] = e_1,\ [e_2, e_4] = \frac{1}{1+b}e_2,$
$[e_3, e_4] = \frac{b}{1+b}e_3$



Obrázek 3.2: Přímé, vlastní kontrakce čtyř-dimenzionálních Lieových algeber.

.

3.5 Částečné uspořádání komplexních Lieových algeber

Definice 3.7. Buď V n-dimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$. Množinu všech možných Lieových závorek na V označíme $L_n = L_n(\mathbb{C})$. Prvkem $\mu \in L_n$ budeme rozumět odpovídající Lieovu algebru $\mathcal{L} = (V, \mu)$.

Pomocí spojíté kontrakce lze na množině L_n zavést relaci částečného uspořádání.

Definice 3.8. Buď $\mathcal{L}, \mathcal{L}_0 \in L_n$. Řekneme, že $\mathcal{L} \succ \mathcal{L}_0$, když $\mathcal{L}_0$ je vlastní kontrakce $\mathcal{L}$.

Díky tomuto částečnému uspořádání lze L_n rozdělit na různé úrovně.

Definice 3.9. Lieova algebra $\mathcal{L}$ z L_n patří do **nulové úrovně** L_n jestliže nemá žádnou vlastní kontrakci. Další úrovně jsou definovány pomocí indukce. Lieova algebra $\mathcal{L}$ patří do **k-té úrovně** L_n jestliže může kontrahovat na algebry (k-1)-ní úrovně a také pouze na algebry predchozích úrovní.

Rozložení úrovní tří- a čtyř-dimenzionálních algeber je ilustrováno na Obrázku 3.1, resp. na Obrázku 3.1. Mimo jiné odtud vidíme, že L_3 a L_4 má čtyři a šest úrovní, respektive. Tyto úrovně mohou být chápány jako míra složitosti dané struktury, tj. algebry na vyšší úrovni jsou komplikovanější než algebry na úrovních nižších. Konkrétně, na nulté úrovni se vždy vyskytuje nejjednodušší Abelovská algebra, dále na nízkých úrovních se zpravidla vyskytují nilpotentní algebry. Oproti tomu prostá algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ má nejsložitější strukturu mezi tří-dimenzionálními algebrami a vyskytuje se na úrovni tři. Stejně tak na nejvyšší 6-té úrovni L_4 se nacházejí neřešitelná $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$ a perfektní $2\mathfrak{s}_{2,1}$.

Kapitola 4

Invariantní funkce Lieových algeber

4.1 (α, β, γ)-derivace

Z druhé kapitoly známe pojem $\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma)$ vektorového prostoru (α, β, γ)-derivací. Dimenze tohoto prostoru je podle Tvrzení 2.1 invariantní pro všechna $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}$. Hledání této dimenze je v nejjednodušším případě, kdy samotná Lieova algebra není parametrická, úloha hledání hodnosti matice o n^2 neznámých se třemi parametry (viz. 3.14). Je-li Lieova algebra navíc parametrická, potom počet parametrů v soustavě roste, např. kdybychom na dimenzi 3 chtěli najít $\dim \mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma)$ Lieovy algebry $\mathfrak{s}_{3,1}$ pro všechna $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}$, potom bychom museli řešit soustavu rovnic o devíti neznámých se čtyřmi parametry. Obecně můžeme říci, že čím více parametů, tím obtížnější je řešení takovéto úlohy. Následující věta (dokázána v [9]) snížuje počet parametrů o dva.

Věta 4.1. *Buď $\mathcal{L}$ Lieova algebra. Pro každé $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ existuje $\delta \in \mathbb{C}$, tak že podprostor $\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) \subset End(\mathcal{L})$ je roven jednomu z následujících podprostorů:*

1. $\mathcal{D}(\delta, 0, 0)$.
2. $\mathcal{D}(\delta, 1, -1)$.
3. $\mathcal{D}(\delta, 1, 0)$.
4. $\mathcal{D}(\delta, 1, 1)$.

Znovu se odvoláme na Tvrzení 2.1 z kterého vyplývá, že dimenze podprostorů $\mathcal{D}(\delta, 0, 0)$, $\mathcal{D}(\delta, 1, -1)$, $\mathcal{D}(\delta, 1, 0)$, $\mathcal{D}(\delta, 1, 1)$ jsou invarianty Lieovy algebry $\mathcal{L}$.

Definice 4.1. Buď $\mathcal{L}$ Lieova algebra a $\delta \in \mathbb{C}$, potom definujeme **invariantní funkci** $\psi : \mathbb{C} \mapsto \{1,\ 2,\ \dots,\ (\dim \mathcal{L})^2\}$ algebry $\mathcal{L}$ následovně:

$$\psi(\delta) = \dim \mathcal{D}(\delta, 1, 1). \tag{4.1}$$

Poznámka 4.1. Zvolíme-li na Lieově algebře bázi ε, potom se výpočet funkčních hodnot funkce ψ redukuje na úlohu zjištění hodnosti matice následující soustavy

$$\delta c_{ij}^k d_k^l - d_i^k c_{kj}^l - d_j^k c_{ik}^l = 0, \quad \forall i, j, l \in \hat{n},\ \forall \delta \in \mathbb{C}, \tag{4.2}$$

kde c_{ij}^k je tenzor strukturních konstant v bázi ε. Konkrétně, označíme-li matici předchozí soustavy jako $\mathbb{A}(\delta)$ pro všechna $\delta \in \mathbb{C}$, potom platí

$$\psi(\delta) = n^2 - \operatorname{rank} \mathbb{A}(\delta). \tag{4.3}$$

Určení matice $\mathbb{A}(\delta)$ je výpočetně náročné, proto budeme k tomuto účelu využívat služeb počítače. Následný výpočet hodnosti matice pro všechny hodnoty parametru δ provádíme ručně.

Máme-li dvě Lieovy algebry $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$, potom můžeme díky Tvrzení 2.1 okamžitě psát implikaci

$$\mathcal{L} \cong \tilde{\mathcal{L}} \Rightarrow \psi_{\mathcal{L}}(\delta) = \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(\delta), \quad \forall \delta \in \mathbb{C}. \tag{4.4}$$

Za povšimnutí stojí, že pro hodnotu parametru $\delta = 1$ je funkce ψ rovna dimenzi prostoru derivací dané Lieovy algebry, tj. $\psi(1) = \dim \mathcal{D}(1,1,1) \equiv n_D$. Vzhledem k tomuto poznatku budeme vždy uvádět hodnotu funkce ψ v bodě 1.

Z druhé kapitoly, konkrétně z Věty 3.1 víme, jak se funkce ψ chová při spojité kontrakci. Následující větu lze rovněž nalézt v [5].

Věta 4.2. *Je-li $\mathcal{L}_0$ vlastní kontrakce Lieovy algebry $\mathcal{L}$, potom $\forall \delta \in \mathbb{C}$ platí:*
1. $\psi_{\mathcal{L}}(1) < \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(1)$,
2. $\psi_{\mathcal{L}}(\delta) \leq \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(\delta)$.

Důkaz. Věta je přímá obdoba kritéria 16 ve Větě 3.1. □

4.2 Invariantní funkce ψ na dimenzi 3

V této sekci najdeme hodnoty funkce ψ pro všechny neizomorfní algebry dimenze 3. Postup výpočtu probíhá podle Poznámky 4.1. Pro ilustraci uvádíme následující příklad.

Příklad 12. Mějme tří-dimenzionální Lieovu algebru $\mathfrak{s}_{3,1}(a)$. Matice $\mathbb{A}(\delta)$ soustavy (4.2) vypadá, po převedení do horního stupňovitého tvaru $\forall \delta \in \mathbb{C}$, následovně:

$$\begin{pmatrix} -\delta+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a\delta+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta+a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a\delta+a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Odkud snadno vypočteme hodnoty funkce ψ.

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_{3,1}(-1) &: \quad \psi(1) = 4, \quad \psi(-1) = 5, \quad \psi(\delta) = 3 \text{ pro } \delta \neq \pm 1. \\ \mathfrak{s}_{3,1}(1) &: \quad \psi(1) = 6, \quad \psi(\delta) = 3 \text{ pro } \delta \neq 1. \\ \mathfrak{s}_{3,1}(a),\ a \neq \pm 1 &: \quad \psi(1) = 4, \quad \psi(a) = \psi(\frac{1}{a}) = 4, \quad \psi(\delta) = 3 \text{ pro } \delta \neq 1,\ a,\ \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Následující tabulky shrnují hodnoty funkce ψ pro všechny komplexní tří-dimenzionální algebry.

Abelovská:

δ	1	
$\psi(\delta)$	9	9

$\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$:

δ	1	0	
$\psi(\delta)$	4	6	4

$\mathfrak{n}_{3,1}$:

δ	1	
$\psi(\delta)$	6	6

$\mathfrak{s}_{3,2}$:

δ	1	
$\psi(\delta)$	4	3

$\mathfrak{s}_{3,1}(-1)$:

δ	1	-1	
$\psi(\delta)$	4	5	3

$\mathfrak{s}_{3,1}(1)$:

δ	1	
$\psi(\delta)$	6	3

$\mathfrak{s}_{3,1}(a),\ a \neq \pm 1$:

δ	1	a	$1/a$	
$\psi(\delta)$	4	4	4	3

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

δ	1	-1	2	
$\psi(\delta)$	3	5	1	0

4.3 Minimální množiny kontrakčních kritérií na dimenzi 3

Provedeme analýzu dosavadních výsledků a na její základě formulujeme některá zajímavá tvrzení pro komplexní Lieovy algebry dimenze 3. Tvrzení 4.1 a Tvrzení 4.2 jsou dokázána v článku [5].

Nejdříve rozšíříme implikaci (4.4) na ekvivalenci. Výsledek je shrnutý v následujícím tvrzení.

Tvrzení 4.1. *Dvě tří-dimenzionální komplexní Lieovy algebry $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$ jsou izomorfní právě tehdy, když $\psi_{\mathcal{L}}(\delta) = \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(\delta)$ pro všechna $\delta \in \mathbb{C}$.*

Důkaz. Stačí dokázat ($\Leftarrow$): Tato implikace ovšem okamžitě plyne z tabulek hodnot funkce ψ uvedených v předchozí sekci. □

Dostaneme-li libovolnou komplexní Lieovu algebru $\mathcal{L}$ dimenze tři, potom stačí určit hodnoty funkce $\psi_{\mathcal{L}}$ v každém bodě, porovnáním vypočtených hodnot s hodnotami uvedenými v předchozím seznamu zjistíme, která z algeber v tomto seznamu je s algebrou $\mathcal{L}$ izomorfní.

Příklad 13. Mějme tří-dimenzionální Lieovu algebru s bází $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$ a komutačními relacemi:

$$[e_1, e_2] = 3e_1 - e_2 - 3e_3$$

$$[e_1, e_3] = 3e_1 - \frac{1}{3}e_2 - 3e_3$$

$$[e_2, e_3] = -3e_1 + e_2 + 3e_3$$

Spočítáme-li pro tuto algebru hodnoty funkce ψ zjistíme, že $\psi(1) = 4$ a $\psi(\delta) = 3$ pro $\delta \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Porovnáním se seznamem v předchozí sekci zjistíme, že tato Lieova algebra je izomorfní s Lieovou algebrou $\mathfrak{s}_{3,2}$.

Dále se podíváme, jaké informace nám funkce ψ poskytuje ohledně spojité kontrakce. Z kapitoly 3 víme, že na dimenzi 3 existují jenom tyto vlastní a netriviální kontrakce komplexních Lieových algeber (viz. Obrázek 3.1):

1. $\mathfrak{s}_{3,1}(-1)$ je kontrakce $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

2. $\mathfrak{s}_{3,1}(1)$ je kontrakce $\mathfrak{s}_{3,2}$.

3. $\mathfrak{n}_{3,1}$ je kontrakce $\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$, $\mathfrak{s}_{3,2}$, $\mathfrak{s}_{3,1,\ a\neq 1}$ a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Použitím Věty 4.2 a tabulek z předchozí sekce dostáváme tvrzení:

Tvrzení 4.2. *Buď $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}_0$ dvě komlpexní tří-dimenzionální Lieovy algebry. Potom existuje vlastní spojitá kontrakce Lieovy algebry $\mathcal{L}$ na $\mathcal{L}_0$ právě tehdy, když*

$$\psi_{\mathcal{L}}(\delta) \leq \psi_{\mathcal{L}_0}(\delta) \quad a \quad \psi_{\mathcal{L}}(1) < \psi_{\mathcal{L}_0}(1), \quad \delta \in \mathbb{C}\backslash\{1\}. \tag{4.6}$$

Důsledek 4.1. *Funkce ψ **sama** rozlišuje páry tří-dimenzionálních komplexních Lieových algeber, které na sebe mohou kontrahovat.*

Podle předchozího důsledku je nutné počítat funkci ψ v každém bodě. Analýzou hodnot funkce ψ ovšem zjistíme, že situace ve skutečnosti není tak složitá a hodnoty funkce ψ stačí v mnoha případech učit jen v některých bodech. Následující algoritmus zjednodušuje použití Tvrzení 4.1 a Tvrzení 4.2.

Mějme komplexní Lieovy algebry $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$. Chceme určit zda existuje vlastní a netriviální kontrakce mezi $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$, resp. zda jsou Lieovy algebry $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$ izomorfní.

Algoritmus:

Vypočteme hodnoty funkce $\psi_{\mathcal{L}}$ a $\psi_{\tilde{\mathcal{L}}}$ v bodech -1 a 1.

1. Jestliže $\psi_{\mathcal{L}}(1) \neq \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(1)$ nebo $\psi_{\mathcal{L}}(-1) \neq \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(-1)$, potom existuje spojitá vlastní, netriviální kontrakce mezi $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$ ("směr"kontrakce viz. Tvrzení 4.2), resp. Lieovy algebry $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$ nejsou izomorfní.

2. Jestliže $\psi_{\mathcal{L}}(1) = \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(1) \neq 4$ a $\psi_{\mathcal{L}}(-1) = \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(-1) \neq 3$, potom jsou $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$ izomorfní a tedy neexistuje spojitá vlastní, netriviální kontrakce.

3. Jestliže $\psi_{\mathcal{L}}(1) = \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(1) = 4$ a $\psi_{\mathcal{L}}(-1) = \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(-1) = 3$, potom spojitá kontrakce neexistuje. Chceme-li zjistil zda jsou Lieovy algebry $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$ izomorfní, musíme funkci ψ dopočítat v každém bodě.

Podívejme se nyní, jak by vypadala situace, kdybychom chtěli rozlišit páry tří-dimenzionálních komplexních Lieových algeber, které na sebe mohou kontrahovat, bez použití použití kritéria 16 ve Větě 3.1, tj. použijeme pouze kritéria 1-16 a nemáme tedy k dispozici funkci ψ. Invarianty vystupující v těchto kritériích máme připravené na konci kapitoly 2. Jejich analyzováním zjistíme, že platí následující dvě tvrzení.

Tvrzení 4.3. *Buď $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}_0$ dvě komlpexní tří-dimenzionální Lieovy algebry. Potom existuje vlastní spojitá kontrakce Lieovy algebry $\mathcal{L}$ na $\mathcal{L}_0$ právě tehdy, když jsou splněna kritéria 1, 12 a 15.*

Tvrzení 4.4. *Množiny kritérií z Věty 3.1, které neodsahují jako podmnožiny kritérií {1, 16} nebo {1, 12, 15} nerozlišují všechny páry tří-dimenzionálních komplexních Lieových algeber, které na sebe mohou kontrahovat.*

4.4 Twistované kocykly

V této sekci navážeme na Definici 1.7 a podobně jako v případě (α,β,γ)-derivace, zobecníme pojem k-kocyklu na tzv. twistovaný kocyklus, který byl poprvé definován v článku [5]. S důkazy vět se rovněž odvoláváme na zmíněný článek.

Definice 4.2. Buď $\mathcal{L}$ komplexní Lieova algebra a f její reprezentace na vektorovém prostoru V. Dále buď $\varkappa := (\varkappa_{ij})$ komplexní, $(q+1)\times(q+1)$ rozměrná, symetrická matice. Totálně antisymetrické lineární zobrazení $c \in C^q(\mathcal{L}, V; f)$, $q \in \mathbb{N}$ splňující

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{q+1}(-1)^{i+1}\varkappa_{ij}\, f(x_i)\, c(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_{q+1}) \\ &+ \sum_{1\le i<j\le q+1}(-1)^{i+j}\varkappa_{ij}\, c([x_i,x_j],x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_{q+1}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

nazýváme **$\varkappa$- twistovaný kocyklus** dimenze q vzhledem k reprezentaci f. Vektorový prostor všech $\varkappa$- twisted kocyklů dimenze q značíme $Z^q(\mathcal{L}, f, \varkappa)$.

Poznámka 4.2. Za povšimnutí stojí, že v předchozí definici je zahrnuta i definice (α,β,γ)-derivace. Uvažujeme-li adjungovanou reprezentaci a její jedno-dimenzionální twistovaný kocyklus, dostaneme:

$$Z^1\left(\mathcal{L}, \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}, \left(\begin{smallmatrix}\beta & \alpha\\ \alpha & \gamma\end{smallmatrix}\right)\right) = \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\alpha,\beta,\gamma). \tag{4.8}$$

Z předchozí poznámky začíná být zřejmé, proč jsme zavedli pojem vektorového prostoru $Z^q(\mathcal{L}, f, \varkappa)$ všech $\varkappa$-twisted kocyklů. Uvedeme teď dvě důležité věty, které popisují jak se prostor $Z^q(\mathcal{L}, f, \varkappa)$ chová vzhledem k izomorfii Lieových algeber, resp. ke spojité kontrakci Lieových algeber.

Věta 4.3. *Buď $g : \mathcal{L} \mapsto \tilde{\mathcal{L}}$ izomorfizmus Lieových algeber $\mathcal{L}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$. Potom zobrazení $h : C^q(\mathcal{L}, V, f) \mapsto C^q(\tilde{\mathcal{L}}, V, f)$ definované pro všechna $c \in C^q(\mathcal{L}, V, f)$ a všechna $x_1,...,x_q \in \tilde{\mathcal{L}}$ jako*

$$h(c)(x_1,...,x_q) = gc(g^{-1}x_1,...,g^{-1}x_q), \tag{4.9}$$

je izomorfizmus vektorových prostorů $C^q(\mathcal{L}, V, f)$ a $C^k(\tilde{\mathcal{L}}, V, f)$. Dále pro každou komplexní, symetrickou, $(q+1)\times(q+1)$ rozměrnou matici $\varkappa$ platí

$$h(Z^q(\mathcal{L}, \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}, \varkappa)) = Z^q(\tilde{\mathcal{L}}, \mathrm{ad}_{\tilde{\mathcal{L}}}, \varkappa). \tag{4.10}$$

Důsledek 4.2. *Pro každé $q \in \mathbb{N}$ a komplexní, symetrickou, $(q+1)\times(q+1)$ rozměrnou matici $\varkappa$ je dimenze vektorového prostoru $Z^q(\mathcal{L}, ad_{\mathcal{L}}, \varkappa)$ invariant Lieovy algebry $\mathcal{L}$.*

Věta 4.4. *Buď Lieova algebra $\mathcal{L}_0$ spojitá kontrakce Lieovy algebry $\mathcal{L}$ a $q \in \mathbb{N}$. Potom pro každou komplexní, symetrickou, $(q+1)\times(q+1)$ rozměrnou matici $\varkappa$ platí*

$$\dim Z^q(\mathcal{L}, \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}, \varkappa) \le \dim Z^q(\mathcal{L}_0, \mathrm{ad}_{\mathcal{L}_0}, \varkappa). \tag{4.11}$$

Nyní se podrobněji podíváme na vektorový prostor $Z^2(\mathcal{L}, \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}, \varkappa)$. Dodržíme značení zavedené v [5], tedy:

$$\mathrm{coc}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)}\,\mathcal{L} = Z^2\left(\mathcal{L}, \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}, \left(\begin{smallmatrix} \beta_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \beta_3 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_1 & \beta_2 \end{smallmatrix}\right)\right). \tag{4.12}$$

Z (4.7) okamžitě dostáváme, že vektorový prostor $\mathrm{coc}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)}\,\mathcal{L}$ tvoří taková $B \in C^2(\mathcal{L}, V, \mathrm{ad}_{\mathcal{L}})$, která pro všechna $x, y, z \in \mathcal{L}$ splňují

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 B(x,[y,z]) + \alpha_2 B(z,[x,y]) + \alpha_3 B(y,[z,x]) \\ &+ \beta_1[x, B(y,z)] + \beta_2[z, B(x,y)] + \beta_3[y, B(z,x)]. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Buď $\mathcal{L}$ Lieova algebra dimenze n. Zvolíme bázi $(e_1, ..., e_n)$ na $\mathcal{L}$ a podobně jako v případě tenzoru strukturních konstant c^k_{ij} zavedeme $B(e_i, e_j) = b^k_{ij} e_k$, kde $i, j, k \in \mathbb{N}$ a přes k se sčítá. Dosadíme-li nyní do vztahu (4.13) za $x = e_l$, $y = e_i$, $z = e_j$, dostaneme následující soustavu rovnic pro složky b^k_{ij} antisymetrického tenzoru

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 c^k_{ij} b^m_{lk} + \alpha_2 c^k_{li} b^m_{jk} + \alpha_3 c^k_{jl} b^m_{ik} \\ &+ \beta_1 c^m_{lk} b^k_{ij} + \beta_2 c^m_{jk} b^k_{li} + \beta_3 c^m_{ik} b^k_{jl}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

kde $i, j, k, l, m \in \hat{n}$ a přes index k se sčítá. Antisymetrický tenzor b^k_{ij} je plně určen $n^2(n-1)/2$ svými složkami, tudíž (4.14) je soustana n^4 rovnic o $n^2(n-1)/2$ neznámích. Označíme-li matici této soustavy jako $\mathbb{B}$, potom můžeme psát

$$\dim \mathrm{coc}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)} = \frac{n^2 \cdot (n-1)}{2} - \mathrm{rank}\,\mathbb{B}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3). \tag{4.15}$$

Definice 4.3. Buď $\mathcal{L}$ Lieova algebra dimenze $n \in \mathbb{N}$, potom definujeme invariantní funkce $\varphi, \varphi^0, \xi : \mathbb{C} \mapsto \{0, 1, ..., n^2(n-1)/2\}$ následovně:

$$\varphi_{\mathcal{L}}(\delta) := \dim \mathrm{coc}_{(1,1,1,\delta,\delta,\delta)}\,\mathcal{L} \tag{4.16}$$

$$\varphi^0_{\mathcal{L}}(\delta) := \dim \mathrm{coc}_{(0,1,1,\delta,1,1)}\,\mathcal{L} \tag{4.17}$$

$$\xi_{\mathcal{L}}(\delta) := \dim \mathrm{coc}_{(-\delta,0,\delta,1,0,-1)}\,\mathcal{L} \tag{4.18}$$

Funkce $\varphi_{\mathcal{L}}$ a $\varphi^0_{\mathcal{L}}$ jsou rozebrány v [5]. S důkazem následujících vět se proto odkazujeme na právě zmíněný článek.

Věta 4.5. *Dvě tří-dimenzionální komplexní Lieovy algebry $\mathcal{L}$, $\tilde{\mathcal{L}}$ jsou izomorfní právě tehdy, když $\varphi^0_{\mathcal{L}}(\delta) = \varphi^0_{\tilde{\mathcal{L}}}(\delta)$, pro všechna $\delta \in \mathbb{C}$.*

Věta 4.6. *Dvě čtyř-dimenzionální komplexní Lieovy algebry $\mathcal{L}$, $\tilde{\mathcal{L}}$ jsou izomorfní právě tehdy, když $\psi_{\mathcal{L}}(\delta) = \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(\delta)$ a $\varphi_{\mathcal{L}}(\delta) = \varphi_{\tilde{\mathcal{L}}}(\delta)$, pro všechna $\delta \in \mathbb{C}$.*

Hodnoty funkce ξ jsou pro dimenze tři a čtyři shrnuty v následujících dvou sekcích.

4.5 Invariantní funkce ξ na dimenzi 3

Abelovská:

δ	
$\psi(\delta)$	9

$\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$:

δ	0	1	
$\psi(\delta)$	3	3	1

$\mathfrak{n}_{3,1}$:

δ	
$\psi(\delta)$	3

$\mathfrak{s}_{3,2}$:

δ	1	
$\psi(\delta)$	6	0

$\mathfrak{s}_{3,1}(-1)$:

δ	-1	1	
$\psi(\delta)$	2	2	0

$\mathfrak{s}_{3,1}(1)$:

δ	1	
$\psi(\delta)$	6	0

$\mathfrak{s}_{3,1}(a)$, $a \neq \pm 1$:

δ	1	a	$\frac{1}{a}$	
$\psi(\delta)$	2	1	1	0

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

δ	1	
$\psi(\delta)$	1	0

4.6 Invariantní funkce ξ na dimenzi 4

Abelovská:

δ	
$\psi(\delta)$	24

$\mathfrak{s}_{2,1} \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1}$:

δ	0	1	
$\psi(\delta)$	12	9	6

$2\mathfrak{s}_{2,1}$:

δ	1	
$\psi(\delta)$	4	0

$\mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$:

δ	0	
$\psi(\delta)$	12	9

$\mathfrak{s}_{3,2} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$:

δ	0	1	
$\psi(\delta)$	6	4	1

$\mathfrak{s}_{3,1}(a) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$:
$a \neq \pm 1$

δ	0	1	a	$\frac{1}{a}$	
$\psi(\delta)$	6	4	2	2	1

$\mathfrak{s}_{3,1}(-1) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$:

δ	-1	0	1	
$\psi(\delta)$	3	6	4	1

$\mathfrak{s}_{3,1}(1) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$:

δ	0	1	
$\psi(\delta)$	6	8	1

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$:

δ	0	1	
$\psi(\delta)$	6	2	0

$\mathfrak{n}_{4,1}$:

δ	0	1	
$\psi(\delta)$	6	4	3

$\mathfrak{s}_{4,1}$:

δ	0	1	
$\psi(\delta)$	6	4	2

$\mathfrak{s}_{4,2}$:

δ	1	
$\psi(\delta)$	3	0

$\mathfrak{s}_{4,3}(a,b)$:
$a \neq \pm 1, b, \frac{1}{b}, b^2$
$b \neq \pm 1, a, \frac{1}{a}, a^2$

δ	1	a	$\frac{1}{a}$	b	$\frac{1}{b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$	
$\psi(\delta)$	3	1	1	1	1	1	1	0

$\mathfrak{s}_{4,3}(a,a)$:
$a \neq \pm 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

δ	1	a	$\frac{1}{a}$	
$\psi(\delta)$	7	2	3	0

$\mathfrak{s}_{4,3}(a,a^2)$:
$a \neq \pm 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm i$

δ	1	a	$\frac{1}{a}$	a^2	$\frac{1}{a^2}$	
$\psi(\delta)$	3	2	2	1	1	0

$\mathfrak{s}_{4,3}(a,1)$:
$a \neq \pm 1$

δ	1	a	$\frac{1}{a}$	
$\psi(\delta)$	7	2	3	0

$\mathfrak{s}_{4,3}(a,-1)$:
$a \neq \pm 1, \pm i$

δ	1	a	$\frac{1}{a}$	-1	-a	-$\frac{1}{a}$	
$\psi(\delta)$	3	1	1	2	1	1	0

$\mathfrak{s}_{4,3}(1,1)$:

δ	1	
$\psi(\delta)$	18	0

$\mathfrak{s}_{4,3}(-1,1)$:

δ	-1	1	
$\psi(\delta)$	5	7	0

$\mathfrak{s}_{4,3}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2})$:

δ	1	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\psi(\delta)$	7	3	3	0

$\mathfrak{s}_{4,3}(\pm i, -1)$:

δ	-1	1	$\pm i$	
$\psi(\delta)$	2	3	2	0

$\mathfrak{s}_{4,4}(a)$: $a \neq \pm 1$

δ	1	a	$\frac{1}{a}$	
$\psi(\delta)$	3	1	1	0

$\mathfrak{s}_{4,4}(-1)$:

δ	-1	1	
$\psi(\delta)$	2	3	0

$\mathfrak{s}_{4,4}(1)$:

δ	1	
$\psi(\delta)$	7	0

$\mathfrak{s}_{4,6}$:

δ	0	1	
$\psi(\delta)$	6	2	0

$\mathfrak{s}_{4,8}(a)$: $a \neq 1$

δ	1	$1+a$	$1+\frac{1}{a}$	
$\psi(\delta)$	2	1	1	0

$\mathfrak{s}_{4,8}(1)$:

δ	1	2	
$\psi(\delta)$	2	3	0

$\mathfrak{s}_{4,10}$:

δ	1	2	
$\psi(\delta)$	2	1	0

$\mathfrak{s}_{4,11}$:

δ	1	
$\psi(\delta)$	4	0

4.7 Efektivita ivnariantní funkce ξ na dimenzi 3 a 4

Podívejme se nyní jaké výsledky přináší funkce ξ při identifikaci izomorfie, resp. kontrakcí komplexních Lieových algeber dimenze 3 a 4. Porovnáním hodnot funkce ξ např. pro Lieovy algebry $\mathfrak{s}_{3,2}$ a $\mathfrak{s}_{3,1}(1)$ zjistíme, že samotná funkce ξ nerozhoduje, zda jsou dvě tří-dimenzionální komplexní Lieovy algebry izomorfní. Situace se změní jestliže navíc vemzeme v úvahu dimenzi algebry derivací, tj. hodnotu funkce ψ v bodě 1.

Tvrzení 4.5. *Dvě tří-dimenzionální komplexní Lieovy algebry $\mathcal{L}$, $\tilde{\mathcal{L}}$ jsou izomorfní právě tehdy, když $\psi_{\mathcal{L}}(1) = \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(1)$ a $\xi_{\mathcal{L}}(\delta) = \xi_{\tilde{\mathcal{L}}}(\delta)$, pro všechna $\delta \in \mathbb{C}$.*

Důkaz. Viz. Tvrzení 4.6. □

Předchozí tvrzení zůstane v platnosti i v případě, že definiční obor funkce ξ zúžíme na body $\{-1, 1\}$.

Tvrzení 4.6. *Dvě tří-dimenzionální komplexní Lieovy algebry $\mathcal{L}$, $\tilde{\mathcal{L}}$ jsou izomorfní právě tehdy, když $\psi_{\mathcal{L}}(1) = \psi_{\tilde{\mathcal{L}}}(1)$, $\xi_{\mathcal{L}}(1) = \xi_{\tilde{\mathcal{L}}}(1)$ a $\xi_{\mathcal{L}}(-1) = \xi_{\tilde{\mathcal{L}}}(-1)$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z tabulky:

	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathfrak{s}_{3,2}$	$\mathfrak{s}_{3,1}^{a\neq\pm1}$	$\mathfrak{s}_{3,1}^{a=-1}$	$\mathfrak{s}_{2,1}\oplus\mathfrak{n}_{1,1}$	$\mathfrak{s}_{3,1}^{a=1}$	$\mathfrak{s}_{3,2}$
$\psi(1)$	3	4	4	4	4	6	6
$\xi(1)$	1	6	2	2	3	6	3
$\xi(-1)$	0	0	0	2	1	0	0

□

Porovnáme-li hodnoty funkce ξ pro algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ a $\mathfrak{s}_{3,2}$ zjistíme, že funkce ξ mezi těmito algebrami povoluje kontrakci. Z druhé kapitoly (viz. Obrázek 3.1) víme, že tato kontrakce neexistuje. Funkce ξ tedy nerozlišuje páry tří-dimenzionálních Lieových algeber, které na sebe mohou kontrahovat. Situace se tentorkát nezmění ani po přidání dimenze algebry derivací:

	$\psi(1)$	$\xi(1)$	$\xi(\delta)$
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	3	1	0
$\mathfrak{s}_{3,2}$	4	6	0

Podobný výsledek dostaneme i pro Lieovy algebry dimenze 4. Uvažujme Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{n}_{1,1}$ a $\mathfrak{s}_{4,1}$, hodnoty funkcí $\xi, \psi, \varphi, \varphi^0$ pro tyto algebry jsou:

	$\xi(0)$	$\xi(1)$	$\xi(\delta)$	$\psi(-1)$	$\psi(0)$	$\psi(1)$	$\psi(2)$	$\psi(\delta)$
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{n}_{1,1}$	6	2	0	6	4	4	2	1
$\mathfrak{s}_{4,1}$	6	4	2	7	7	7	7	7

	$\varphi(-1)$	$\varphi(0)$	$\varphi(\frac{1}{2})$	$\varphi(1)$	$\varphi(\delta)$	$\varphi^0(1)$	$\varphi^0(\delta)$
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{n}_{1,1}$	14	12	10	12	9	1	0
$\mathfrak{s}_{4,1}$	16	16	15	15	15	3	3

Z těchto tabulek vidíme, že funkce $\xi, \psi, \varphi, \varphi^0$ **dohromady** povolují kontrakci Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$ na Lieovu algebru $\mathfrak{s}_{4,1}$, přitom z druhé kapitoly víme, že tato kontrakce neexistuje (viz. Obrázek 3.2).

Závěr

V práci se zabýváme kontrakcemi nízko-dimenzionálních komplexních Lieových algeber. Kontrakce jsme rozlišovali pomocí nerovností mezi invariantními veličinami počáteční a kontrahované algebry. Invarianty jsou zadefinovány v druhé kapitole, načež ve třetí kapitole s jejich pomocí shrnujeme nutná kontrakční kritéria ve Větě 3.1. Je známo, že tato kritéria rozlišují všechny kontrakce Lieových algeber až do dimenze čtyři (viz. [8]). Kontrakce komplexních Lieových algeber dimenze jedna a dva jsou triviální, kontrakce na dimenzi tři a čtyři jsou ilustrovány na Obrázku 3.1, resp. na Obrázku 3.2.

Ve čtvrté kapitole jsme diskutovali efektivitu kontrakčních kritérií z Věty 3.1 na dimenzi tři a čtyři. V této souvislosti jsme definovali tzv. invariantní funkce pomocí $\varkappa$-twistovaných kocyklů. Pojem $\varkappa$-twistovaných kocyklů byl poprvé zaveden v článku [5]. V tomto článku byly podrobně rozebrány funkce:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{L}}(\delta) &:= \dim \mathcal{D}(\delta, 1, 1), \\
\varphi_{\mathcal{L}}(\delta) &:= \dim \operatorname{coc}_{(1,1,1,\delta,\delta,\delta)} \mathcal{L}, \\
\varphi^0_{\mathcal{L}}(\delta) &:= \dim \operatorname{coc}_{(0,1,1,\delta,1,1)} \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

Tyto funkce jsou velice efektivní pro charakterizaci kontrakcí na dimenzi 3, oproti tomu selhávají na dimenzi čtyři. V závěru práce jsme definovali novou funkci

$$\xi_{\mathcal{L}}(\delta) := \dim \operatorname{coc}_{(-\delta,0,\delta,1,0,-1)} \mathcal{L}$$

a spočetli jsme její hodnoty pro všechny neizomorfní komplexní Lieovy algebry dimenze tři a čtyři. Ukázali jsme, že funkce je užitečná na dimenzi tři, kdežto na dimenzi čtyři opět selhává. Vezmeme-li v úvahu Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$ a $\mathfrak{s}_{4,1}$, potom všechny funkce $\psi_{\mathcal{L}}, \varphi_{\mathcal{L}}, \varphi^0_{\mathcal{L}}, \xi_{\mathcal{L}}$ povolují mezi těmito algebrami kontrakci, přestože tato kontrakce neexistuje.

V úplném závěru nastíníme některé dosud nevyřešené problémy, na které by mohl být zaměřen další výzkum: Jsou kontrakční kritéria, která jsme uvažovali, dostačující pro rozlišení kontrakcí všech párů komplexních Lieových algeber dimenze pět? Existuje seznam kritérií, který by byl dostačující pro obecnou dimenzi n? Jak efektivní jsou invariantní funkce $\varkappa$-twistovaných kocyklů dimenze vetší než dva? Prozatím je známo pouze jedno kritérium, které obsahuje ostrou nerovnost. Existují i další kritéria poskytující ostrou nerovnost?

Literatura

[1] Borel A.: *Linear algebraic groups*. Benjamin, Inc, 1969.

[2] Doebner H. D. and Melsheimer O.: *On a class of generalized group contractions*, Nuovo Cimento A(10) **49**, (1967), 306–311.

[3] Grunewald F. and O'Halloran J.: *Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six*, J. Algebra **112**, (1988), 315–325.

[4] Hegerfeldt G. C.: *Some properties of a class of generalized Inönu–Wigner contractions*, Nuovo Cimento A (10) **51**, (1967), 439–447.

[5] Hrivnák J., Novotný P.: *Twisted cocykles of Lie algebras and corresponding invariant functions*, Lin. Alg. Appl. **430**, 1384 (2009)

[6] Inönu E. and Wigner E. P.: On the contraction of groups and their representations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, (1953), 510–524.

[7] Inönu E. and Wigner E. P.: *On a particular type of convergence to a singular matrix*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40**, (1954), 119–121.

[8] Nesterenko M., Popovych R.: *Contractions of low-dimenzional Lie algebras*, K. Math. Phys. **47**, 123515 (2006)

[9] Novotný P., Hrivnák J.: *On (α,β,γ)–derivations of Lie algebras and corresponding invariant functions*, J. Geom. & Phys. **58**, Issue 2, (2008), 208–217.

[10] Novotný P.: *Graded contractions of sl$(3,C)$*, Ph.D. Thesis, Czech Technical University, Prague (2009)

[11] Saletan E. J.: *Contraction of Lie groups*: J. Math. Phys. **2**, (1961), 1–21.

[12] Segal I. E.: *A class of operator algebras which are determined by groups*, Duke Math. J. **18**, (1951), 221–265

[13] Šnobl L., Winternitz P.: *Classification and Identification of Lie Algebras*, American Mathematical Society, 2014