České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Kvantování Weylovy gravitace

Quantization of Weyl's gravity

Bakalářská práce

Autor: **Jaroslav Kňap**

Vedoucí práce: **Ing. Petr Jizba, PhD.**

Akademický rok: 2016/2017

- Zadání práce -

- Zadání práce (zadní strana) -

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli Ing. Petru Jizbovi, PhD. za pečlivost, ochotu, trpělivost, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu uvedenou v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 4. července 2017 Jaroslav Kňap

Název práce:

Kvantování Weylovy gravitace

Autor: Jaroslav Kňap

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Petr Jizba, PhD., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze

Abstrakt: Konformní teorie gravitace, též Weylova teorie gravitace, je konformně invariantní obdobou obecné teorie relativity ve čtyřech dimenzích. V poslední době se objevila v centru zájmu díky tomu, že je vhodným rozšířením konvenční Einstein-Hilbertovy akce, a je poruchově renormalizovatelná. Tato práce ukazuje základní rysy Weylovy teorie gravitace a její odlišnosti od obecné teorie relativity, speciální důraz je kladen na ty rysy chování, které přímo ovlivňují kvantovací proceduru. Také stručně shrnuje různé přístupy ke kvantování gravitace. V závěru je naznačen způsob, jakým by se aplikovaly metody kvantování pomocí funkcionálního integrálu na Weylovu gravitaci s regularizací ve fixní dimenzi d=4. Předkládaná práce slouží jako teoretická laboratoř pro následné aplikace, zvláště pak v kosmologii rané fáze vesmíru.

Klíčová slova: efektivní akce, konformní symetrie, kvantová teorie gravitace, Weylova gravitace, zeta-funkce regularizace

Title:

Quantization of Weyl's Gravity

Author: Jaroslav Kňap

Abstract: Conformal theory of gravity, also Weyl's theory of gravity, is a conformally invariant analogy of the general theory of relativity in four dimensions. Recently it has emerged as the centerpiece of interest because it is an appropriate extension of the conventional Einstein-Hilbert action, and is perturbatively renormalizable. This work shows the basic features of Weyl's theory of gravity and its differences from the general theory of relativity, with particular emphasis on those features of behavior that directly affect the quantization procedure. It also briefly summarizes various approaches to quantizing gravity. At the end, it is suggested how to apply quantization methods using a functional integral on Weyl gravity with regularization in the fixed dimension d = 4. This thesis serves as a theoretical laboratory for subsequent applications, especially in cosmology of the early phase of the universe.

Key words: conformal symmetry, effective action, quantum theory of gravity, Weyl's gravity, zeta-function regularization

Obsah

Úvod

Obecná teorie relativity, publikována v roce 1915, je spolu s kvantovou elektrodynamikou (QED) jednou z nejdůkladněji ověřených fyzikálních teorií, co máme. I po 100 letech se stále potvrzují její předpovědi; v roce 2011 šlo o potvrzení takzvaného "frame-draggingu"(Gravity probe B) a v roce 2016 se jednalo o objev gravitačních vln (LIGO observatoř). Navzdory těmto úspěchům má obecná teorie relativity jeden velký problém, a to že odolává všem pokusům o sjednocení s kvantovou teorií. Jedním z přístupů k této problematice je snaha pozměnit vhodným způsobem originální Einstein-Hilbertovu akci, která generuje Einsteinovy pohybové rovnice. Jednou z těchto teorií je Weylova teorie gravitace.

Weylova teorie gravitace se od Einsteinovy liší primárně tím, že je kromě diffeomorfní invariance navíc takzvaně konformně symetrická. To znamená invarianci vůči lokálnímu škálování metriky. Konformní symetrie je velmi atraktivní vlastností, jednak protože je tato teorie díky ní renormalizovatelná (v poruchovém power-counting smyslu) a také z hlediska kosmologie, protože se předpokládá, že vesmír byl v raných fázích svého vývoje konformně symetrický. Tato teorie má ovšem i své nevýhody, například to, že pohybové rovnice jsou čtvrtého řádu, což vede na zespodu neomezené spektrum. Tradičně se předpokládá, že takové spektrum vede k objevení "duchových"stavů a problémům s unitaritou, existují ovšem i analytické výsledky, které naznačují, že tomu tak nemusí nutně být.

Od objevu kvantové teorie jsou snahy kvantovat i teorii gravitace. Důvody jsou celkem jasné, na pravé straně Einsteinových rovnic figuruje tensor hmoty a energie, jenž musí mít kvantový původ. Tím pádem i systém s ním provázaný (křivost časoprostoru) by se měl dát popsat kvantově. Ovšem navzdory všem pokusům zatím neexistuje kvantová teorie gravitace.

Cílem této práce je seznámení se s problematikou obecné teorie relativity a Weylovy teorie gravitace. V rámci tohoto se též seznámíme s různými přístupy k problému kvantové gravitace a jednu z metod aplikujeme na Weylovu teorii.

V první části této práce stručně diskutujeme klasickou Einsteinovu obecnou teorii relativity a Weylovu teorii gravitace a tyto teorie porovnáme z hlediska jejich pohybových rovnic a dynamických stupňů volnosti. Poté nastíníme možné přístupy k problému kvantové gravitace, a to jak kovariantní (dráhový integrál, ...) tak i kanonické (ADM formalismus, smyčková gravitace, ...) přístupy, stručně se zmíníme také o strunové teorii. V poslední kapitole pak naznačíme, jak by se aplikovala metoda kvantování pomocí funkcionálního integrálu na Weylovu teorii gravitace, včetně regularizace s využitím ζ-funkce.

Na konci následuje přehled matematického aparátu, konkrétně základy diferenciální geometrie, konformní symetrie, topologických invariantů na varietách a konečně stručný úvod do základů dráhových a funkcionálních integrál.

Část I

Matematický aparát

Kapitola 1

Diferenciální geometrie

Jelikož jazykem obecné teorie relativity a konformní gravitace je diferenciální geometrie, je tato oblast matematiky pro naše potřeby klíčová. Konkrétně se budeme zabývat pseudoriemannovskými varietami, tedy varietami s Lorentzsovskou metrikou a s přidruženou afinní konexí.

V této kapitole stručně představíme nutné koncepty a teorémy z pole diferenciální geometrie, nejprve základní koncept variety a jejich tečných a kotečných prostorů. Ty použijeme k definici tenzorů na varietě. Podíváme se také na zobrazení mezi varietami, s důrazem na diffeomorfismy.

Představíme též koncept konexe, kterou využijeme k definici kovariantní derivace a paralelního přenosu. Tyto koncepty nás přirozeně dovedou ke konceptu metriky, vnitřní křivosti variety a tedy k Riemannovu tenzoru. V závěru kapitoly ukážeme že Riemmanův tenzor lze rozložit do tří částí, jednou z nich je tzv. Weylův tenzor. Jelikož je tento tenzor konformně symetrický, je též nazýván konformním tenzorem křivosti.

Jelikož je diferenciální geometrie velmi bohatým polem matematiky, více informací lze dohled například v [1] nebo [2].

1.1 Variety

Než přistoupíme k definic variety musíme nejprve zadefinovat několik pomocných struktur. Pro budoucí potřebu budeme značit M topologický prostor, který je souvislý a Hausdorffův.

Definice 1.1.1. Souřadnicovou mapou *dimenze n nazýváme uspořádanou dvojici* (U, ϕ) *kde* U *je otevřená množina na varietě a* $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ *je homeomorfismus na otevřenou podmnožinu prostoru* $\mathbb{R}^n$.

Definice 1.1.2. Atlasem *dimenze n třídy r nazýváme množinu souřadnicových map dimenze n* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ *(I je libovolná indexová množina), splňující:*

(i) M *je pokryta množinami* U_α $(M = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha)$ *(ii) tzv. přechodové funkce* $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \bigcap U_j) \to \phi_j(U_i \bigcap U_j)$; $i, j \in I$ *jsou zobrazení třídy* C^r.

Z definice je vidět, že na dané množině existuje více různých atlasů, lze tedy vzít množinu možných atlasů a tu lze přirozeně uspořádat ve smyslu inkluze, je třeba ovšem zohlednit i třídu atlasu. Za tímto účelem se zavádí pojem *kompatibility* zobrazení s atlasem.

Definice 1.1.3. *Zobrazení $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ nazveme* kompatibilní *s atlasem třídy C^r pokud jsou všechny přechodové funkce třídy C^r.*

Atlas, který obsahuje všechna zobrazení s ním kompatibilní, se nazývá *úplný atlas*. Pro atlas třídy ∞ se používá výraz *diferencovatelná struktura*.

Nyní již můžeme přistoupit k definici variety.

Definice 1.1.4. Varietou *třídy r a dimenze n nazýváme topologický prostor M vybavený úplným atlasem třídy r a dimenze n. Pokud je atlas diferencovatelnou strukturou jedná se o* hladkou varietu.

Dimenze variety je tedy dána dimenzí atlasu.

Pokud mají dvě variety stejnou dimenzi, může mezi nimi existovat invertibilní, hladké zobrazení, tomuto zobrazení se pak říká diffeomorfismus.

Definice 1.1.5. Diffeomorfismem *variet M a N nazýváme hladké zobrazení $f : M \to N$ které je bijekcí a jeho inverze je také hladké zobrazení.*

Pokud je zobrazení f i s inverzí pouze C^r pak ho nazýváme C^r-diffeomorfismus.

Diffeomorfismy hrají ve studiu variet důležitou roli, dvě diffeomorfní variety jsou z hlediska určitých problémů stejné, a v takových případech se stačí zabývat třídami ekvivalence variet dle diffeomofismu.

V naší práci se omezíme na variety, které mají ještě dvě další vlastnosti, a to že jsou parakompaktní a Hausdorffovy. Tyto dvě vlastnosti tvoří rozumné předpoklady pro chování variet, jelikož celkem dobře odpovídají některým intuitivním vlastnostem.

Před definicí parakompaktnosti musíme nejprve zadefinovat lokálně konečné pokrytí topologického prostoru.

Definice 1.1.6. *Otevřené pokrytí je* lokálně konečné $\Leftrightarrow (\forall x \in M)(\exists J \subset I, \#(J) < \infty)(\forall \alpha \in I \setminus J)(\{x\} \bigcap U_\alpha = \emptyset)$

Definice 1.1.7. *Topologický prostor M je* parakompaktní, *práve tehdy když každé jeho otevřené pokrytí má lokálně končené zjemnění.*

O varietě M říkáme že je parakompaktní, resp. Hausdorffova pokud je topologický prostor (M, τ) parakompaktní, resp. Hausdorffův.

1.2 Tečné a kotečné prostory

Zatím jsme definovali pouze varietu samotnou, je třeba ovšem konzistentním způsobem definovat i různé objekty na ní, například vektorové funkce na varietě kterými se budeme zabývat v této sekci. K tomu nám pomohou koncepty tečných a kotečných prostorů, případně obecněji tečných a kotečných bundlů.

Začneme nejprve definicí tečných prostorů v bodě. Pokud si představíme naši varietu vnořenou do nějakého prostoru s větší dimenzí, pak je přirozené nazvat tečným prostorem v bodě vektorový prostor všech tečných vektorů k varietě v daném bodě. Tato představa je velice názorná, opírá se ovšem o nějaký vnější prostor, který se v naší definici variety vůbec neobjevil. Přesto ale chceme, aby naše definice vystihla klíčové vlastnosti této intuitivní definice.

Ukazuje se že pro variety konečné dimenze existuje takových definic dokonce několik a jsou vzájemně ekvivalentní. My vyjdeme z definice pomocných křivek na varietě a pak ukážeme ekvivalenci s definicí pomocí zobrazení z variety.

Definice 1.2.1. Křivkou *na varietě nazveme zobrazení* $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$.

Křivkou je tedy myšleno zobrazení, nikoliv nějaká podmnožina variety, jak se často zjednodušeně uvádí. V $\mathbb{R}^n$ známe podmínku definující, kdy jsou dvě křivky k sobě tečné, pomocí souřadnicových map můžeme tuto vlastnost přenést i do variety.

Definice 1.2.2. *Křivky σ_1 a σ_2 jsou k sobě tečné v bodě p pokud platí:*

$$\text{(i) } \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p, \tag{1.1}$$

$$\text{(ii) } \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}(\sigma_1(t))\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}(\sigma_2(t))\bigg|_{t=0}. \tag{1.2}$$

Jelikož relace být tečný je reflexivní, symetrická a tranzitivní, jedná se tedy o ekvivalenci na množině všech křivek procházejících bodem. Zároveň, protože tečnost křivek nezávisí na daném souřadnicovém systému, se jedná o vlastnost variety. Zdá se tedy přirozené pomocí těchto tříd ekvivalence definovat tečné vektory.

Definice 1.2.3. Tečným vektorem *k varietě M v bodě p označíme třídu ekvivalence křivek tečných v bodě p. Třídu ekvivalence dané křivky značíme* $[\sigma]$.

Definice 1.2.4. Tečným prostorem T_pM *k varietě M v bodě p označíme množinu všech tečných vektorů v bodě p.*

Dále by bylo možné ukázat, že T_pM má charakter vektorového prostoru a pracovat pouze s definicí pomocí křivek. To by ovšem zbytečně skrývalo smysl, který mají tečné prostory pro obecnou teorii relativity. Proto nyní ukážeme ekvivalence s definicí pomocí zobrazení.

Pro tento účel nejprve definujeme obdobu směrové derivace.

Definice 1.2.5. *Nechť f je funkce na M. Poté definujeme působení tečného vektoru v na funkci f následujícím způsobem:*

$$v(f) := \frac{\mathrm{d}f(\sigma(t))}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \tag{1.3}$$

Je dobré si uvědomit, že σ může být libovolný prvek dané třídy ekvivalence, tzn. definice nezávisí na výběru reprezentanta.

Jelikož nám každý tečný vektor takto definuje určité zobrazení v bodě, můžeme se pokusit vyřešit opačný problém - zda je možné danému zobrazení přiřadit tečný vektor. Ukazuje se, že to možné je, a toto přiřazení je dokonce jednoznačné. Tato vlastnost nám umožní brát tečné vektory jako jisté lineární kombinace určitých zobrazení.

Definice 1.2.6. Derivace *v bodě $p \in M$ je zobrazení $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ splňující následující vlastnosti:* $(\forall f, g \in C^\infty(M))$ $(\forall r \in \mathbb{R})$

$$\text{(i) } v(rf + g) = rv(f) + v(g) \tag{1.4}$$

$$\text{(ii) } v(fg) = f(p)v(f) + g(p)v(f) \tag{1.5}$$

Význam požadavků je očividný: první zaručuje linearitu zobrazení v argumentu, druhý je obdoba Leibnitzova pravidla, tedy tzv. derivační vlastnost.

Z tohoto úhlu pohledu je propojení s obecnou teorií relativity, popřípadě i s teoretickou mechanikou mnohem jasnější, objekty s horními kontravariantními indexy byly jednoduše objekty z tečných prostorů nebo jejich kartézských součinů. Právě druhá vlastnost nás opravňuje k použití názvu derivace.

Na množině derivací lze snadno zavést strukturu reálného vektorového prostoru.

$$(v_1 + v_2)(f) := (v_1)(f) + (v_2)(f) \tag{1.6}$$

$$(rv)(f) := rv(f) \tag{1.7}$$

Množina derivací v bodě s takto definovanými operacemi splňuje axiomy vektorového prostoru, tento prostor budeme značit D_pM. Výše uvedená definice působení tečného vektoru na funkci přiřadila každé třídě ekvivalence křivek zobrazení (resp. derivaci v bodě), známe tedy zobrazení $T_pM \to D_pM$. Zanedlouho ukážeme, že se ve skutečnosti jedná o isomorfismus.

Nyní definujeme množinu derivací o které ukážeme že se jedná o bázi tohoto vektorového prostoru.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f := \frac{\partial}{\partial u^\mu} f \circ \phi^{-1}|_{\phi(p)} \qquad ; \qquad \mu = 1, 2, ..., \dim M \tag{1.8}$$

Objekt na levé straně *není* parciální derivace, varieta totiž nemá strukturu vektorového prostoru a potřebné limity tedy nedávají smysl. Ovšem můžeme využít souřadnic a problém lokálně přenést do prostoru $\mathbb{R}^n$, kde již můžeme dané věci definovat. Nyní ukážeme, že tato množina derivací tvoří bázi prostoru D_pM.

Lemma 1.2.7. *Nechť (U, ϕ) je souřadnicová mapa obsahující bod p se souřadnicovými funkcemi $(x^1, x^2, ..., x^m)$ takovými, že $x^\mu(p) = 0$ pro všechna μ. Poté pro všechny $f \in C^\infty(M)$ existuje $f_\mu \in C^\infty$*

takové, že platí:

$$\text{(i)}\ f_\mu(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f \tag{1.9}$$

$$\text{(ii)}\ f(q) = f(p) + \sum_{\nu=0}^{m} x^\mu(q) f_\mu(q) \tag{1.10}$$

pro všechna q z okolí p.

Důkaz. Nechť $F := f \circ \sigma^{-1}$ na nějaké otevřené kouli B se středem v počátku $\mathbb{R}^n$. Poté pro všechna $\boldsymbol{a} \in B$ platí

$$F(a_1, a_2, ..., a_n) = F(0, 0, ..., 0) + \sum_{\nu=0}^{n} F(a_1, a_2, ..., ta_\mu, 0, ...0)\Big\|_{t=0}^{t=1} =$$
$$F(0, 0, ..., 0) + \sum_{\nu=0}^{n} \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial u_\mu} F(a_1, a_2, ..., ta_\mu, 0, ..., 0) a_\mu$$

členy ve sčítancích označíme jako $F_\mu(\boldsymbol{a})$. Nyní definujeme nové zobrazení $f_\mu := F_\mu \circ \sigma$. Toto zobrazení je nejprve definováno na nějakém otevřeném okolí bodu p, z toho jde ovšem spojitě rozšířit na celé M. Tedy

$$f(q) = (f \circ \sigma^{-1})(\sigma(q)) = F(0, 0, ..., 0) + \sum_{\nu=0}^{n} x^\mu(q) F_\mu(x^1(q), x^2(q), ..., x^n(q)) = f(p) + \sum_{\nu=0}^{n} x^\mu(q) f_\mu(q)$$

Požadovaný tvar tedy existuje, nyní stačí ukázat, že mají žádaný tvar. Na to stačí aplikovat derivaci $\left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right)\Big|_p$ na obě strany rovnice. Dostaneme

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right)_p f = \left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right)_p k_p + \sum_{\nu=0}^{n} \left[\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right)_p x^\nu\right) f_\nu(p) + x^\nu(p) \left(\frac{\partial}{\partial u^\mu} f_\nu\right)_p\right]$$

První člen zmizí, jelikož libovolná derivace konstantní funkce je nulová, druhý člen v sumě v závorce zmizel díky předpokladu $x^\nu(p) = 0$. Nakonec tedy máme:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right)_p f = \sum_{\nu=0}^{m} \left(\left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right)_p x^\nu\right) f_\nu(p) = f_\mu(p)$$

jelikož $\left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right)_p x^\nu = \delta^\nu_\mu$. Tímto je důkaz ukončen. □

Důsledkem tohoto tvrzení je, že derivace se dají psát v následujícím tvaru

$$v = \sum_{\nu=0}^{m} v(x^\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \tag{1.11}$$

Důkaz tohoto tvrzení je snadný, stačí použít zobrazení v na obě strany dokázané rovnosti. Díky tomuto důsledku můžeme chápat zobrazení $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p$ jako bazické vektory prostoru D_pM. Z toho nám plyne, že $\dim D_pM = \dim M$, tedy prostor derivací v bodě má stejnou dimenzi jako varieta.

Nyní máme připraveny všechny nutné prostředky, abychom mohli ukázat, že množina derivací je ve skutečnosti tečným prostorem k varietě.

Věta 1.2.8. *Lineární zobrazení* $\chi : T_pM \to D_pM$ *definované jako*

$$\chi(v)(f) := \left.\frac{\mathrm{d}f(\sigma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}, \tag{1.12}$$

kde $[\sigma] = v$*, je isomorfismus.*

Důkaz. Již víme, že toto zobrazení je lineární, stačí tedy dokázat, že se jedná o bijekci. Je také vhodné si všimnout, že aby rovnice platila, stačí aby funkce f byla definována na nějakém otevřeném okolí $\sigma(0)$.

(i) injektivita Mějme dva prvky tečného prostoru $v_1, v_2 \in T_pM$, pro které platí $\chi(v_1) = \chi(v_2)$. Jelikož funkce f je libovolná, můžeme za ni vzít postupně všechny souřadnicové funkce. Z rovnosti dostaneme množinu rovnic

$$\left.\frac{dx^\mu(\sigma_1(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dx^\mu(\sigma_2(t))}{dt}\right|_{t=0}$$

to je ovšem podmínka na tečnost dvou křivek v bodě $p = \sigma_1(0) = \sigma_2(0)$, tedy spadají do stejné třídy ekvivalence a platí $v_1 = [\sigma_1] = [\sigma_2] = v_2$.

(ii) surjektivita) Nechť $v \in D_pM$, zkonstruujeme křivku $\sigma_v : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tak, aby splňovala

$$\text{(i) } \sigma_v(0) = p$$
$$\text{(ii) } v(x^\mu) = \left.\frac{d}{dt}x^\mu \circ \sigma_v(t)\right|_{t=0}$$

□

Dokázali jsme tedy, že prostory D_pM a T_pM jsou isomorfní. Pro popis tečných prostorů k varietě se tedy dají používat námi definované derivace. Prvky tohoto prostoru budeme odteď nazývat pouze *vektory*.

Zatím jsme zkoumali pouze chování a definic vektorů v bodě, je ovšem jasné, že pokud chceme například porovnávat vektory v různých bodech variety, potřebujeme obecnější strukturu. Tou strukturou je takzvaný tečný bundl.

Definice 1.2.9. Tečný bundl *(tečný fibrovaný prostor) je varieta* $TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM$ *vybavená atlasem* $\left(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\phi}_\alpha\right)$*, kde* $\pi : TM \to M : (P, v) \to P$ *je projekce na* M *a* $\tilde{\phi}_\alpha$ *působí* $\tilde{\phi}_\alpha(P, v) = (\phi_\alpha(P), v)$*. Bázovou varietou je pak varieta* M*, typickým vláknem* $\mathbb{R}^n$*.*

Na tento objekt se dá zjednodušeně nahlížet jako na sjednocení všech tečných prostorů. S vhodně definovanými vlastnostmi se dokonce jedná o varietu $\dim TM = 2n$.

Jelikož T_pM má strukturu vektorového prostoru a lze tedy definovat duální prostor, prostor všech funkcionálů nad T_pM, značíme T_p^*M. Jelikož se jedná o duální prostor, T_p^*M má také strukturu vektorového prostoru, jak za chvíli ukážeme, je vhodné tento prostor nazývat kotečným prostorem v bodě p k varietě m.

Definice 1.2.10. Kotečným prostorem *k varietě M v bodě p nazveme duální prostor k tečnému prostoru v bodě p, značíme* T_p^*M*.*

Definice 1.2.11. *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$.* Diferenciálem *f bodě p, psáno $\mathrm{d}f$, nazveme lineární funkcionál $\mathrm{d}f : T_pM \to R$ působící následujícím způsobem*

$$\mathrm{d}f(v) := v_p(f) \tag{1.13}$$

Tento zápis je nezávislý na volbě souřadnic, což je velice výhodné. Jelikož se jedná o lineární funkcionály na T_pM, jedná se o prvky kotečného prostoru v bodě p. Víme, že souřadnice na M indukují bázi v tečném prostoru, nyní se pokusíme podobným postupem nalézt bázi kotečného prostoru. Zdá se přirozené zkoumat za tímto účelem diferenciály souřadnicových funkcí, zkusíme tedy tento směr.

Nejprve přepíšeme naši definic do nějakých souřadnic $(x^1, x^2, ..., x^n)$

$$\mathrm{d}f\left(\sum v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}_p\right) = \sum v^\mu(p)\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p). \tag{1.14}$$

Nyní za f dosadíme souřadnicovou funkci x^ν

$$\mathrm{d}x^\nu\left(\sum v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}_p\right) = \sum v^\mu(p)\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}(p) = v^\nu(p). \tag{1.15}$$

Poslední rovnítko je oprávněno tím, že souřadnice jsou vzájemně nezávislé. Z rovnice je patrné že souřadnicový diferenciál dx^ν vybere z libovolného vektoru jeho ν-tou složku. Množina $(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$ tedy tvoří bázi T_p^*M a libovolný prvek tohoto prostoru je možné psát následujícím způsobem

$$\alpha = \sum \alpha_\mu \mathrm{d}x^\mu.$$

Objekt, který lze takto zapsat, budeme nazývat *diferenciální formou.*

Nyní lze v analogii s tečným bundlem lze zavést *kotečný bundl.*

Definice 1.2.12. Tečný bundl *(tečný fibrovaný prostor) je varieta $T^*M = \bigsqcup_{p\in M} T_p^*M$ vybavená atlasem $\left(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\psi}_\alpha\right)$, kde $\pi : TM \to M : (P, v) \to P$ je projekce na M a $\tilde{\psi}_\alpha$ působí $\tilde{\psi}_\alpha(P, v) = (\psi_\alpha(P), v)$. Bázovou varietou je pak varieta M, typickým vláknem $\mathbb{R}^n$.*

Velká část literatury zabývající se obecnou teorií relativity používá zápis pomocí abstraktních indexů. Jelikož naše studium diferenciální geometrie je motivováno obecnou teorií relativity, je rozumné prozkoumat transformační vlastnost vektorů a diferenciálních forem.

Vezměme dvě různé báze, $(x^1, x^2, ..., x^n)$ a $(\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2, ..., \widetilde{x}^n)$, které jsou obě definované na nějakém průniku jejich definičních oborů. Začněme studiem vektorů.

Nejprve se podíváme na transformace bazických vektorů.

$$\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{v}^i}\right) = \sum_j \left(\frac{\partial x^j}{\partial \widetilde{x}^i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) \tag{1.16}$$

Složky se musí transformovat pomocí inverzní matice, aby se výsledný vektor nezměnil.

$$\widetilde{v}^i = \sum_j \left(\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j} \right) v^j \tag{1.17}$$

Pokud vezmeme v úvahu teoretickou fyziku, vidíme, že složky tečných vektorů se transformují jako složky kontravariantních vektorů. Tímto máme vyřešené transformační vlastnosti tečných vektorů a můžeme začít studovat kotečné vektory. Ty se transformují následovně

$$\widetilde{\mathrm{d}x}^i = \sum_j \left(\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j} \right) \mathrm{d}x^j. \tag{1.18}$$

Jelikož se kotečný vektor jako takový nesmí měnit při změně, složky kotečných vektorů se musí transformovat pomocí inverzní matice, tedy dostáváme

$$\widetilde{a}^i = \sum_j \left(\frac{\partial x^j}{\partial \widetilde{x}^i} \right) a^j. \tag{1.19}$$

Pokud opět uvážíme teoretickou fyziku, všimneme si že složky kotečných vektorů se transformují jako složky kovektorů. Odteď budeme tedy kotečným vektorům kovektory. Vidíme, že naše volba pozice indexů je kompatibilní s terminologií teoretické fyziky.

Jako poslední věc v této sekci rychle zavedeme vektorová pole, ta se nám budou hodit v příští sekci při definici Riemannovské metriky.

Definice 1.2.13. Vektorové pole *X na hladké varietě M je hladké přiřazení tečných vektorů z* T_pM *každému bodu p, kde slovo hladké má následující smysl*

$$\forall f \in C^\infty(M) \, \textit{funkce} \; Xf : M \to \mathbb{R} : p \to Xf(p) := X_p(f),$$

je hladká funkce.

Z hlediska diferenciální geometrie se jedná o řezy tečného bundlu. Jelikož jsme ukázali, že tečné vektory jsou diferenciální operátory v bodě, je možné interpretovat vektorová pole jako derivace působící na $f \in C^\infty(M)$.

1.3 Skalární součin, Riemannovská varieta

V této sekci se budeme věnovat skalárnímu součinu dvou vektorů, to nás rychle dovede k termínu Riemannovské variety.

Skalární (vnitřní) součin je symetrická, bilineární, nedegenerovaná operace pro kterou $\forall v, w \in T_pM$ je $\langle v, w \rangle$ reálné číslo. Je viditelné že vnitřní součin je zcela definován svým působením na všech párech bazických vektorů prostoru T_pM. Tyto prvky tvoří matici $G := (g_{ij})$

$$g_{ij} := \langle \frac{\partial}{\partial x^i}_p, \frac{\partial}{\partial x^j}_p \rangle. \tag{1.20}$$

Matice (g_{ij}) se nazývá metrický tenzor, a že je toto označení oprávněné, si ukážeme v další sekci. S touto maticí je nyní možno zapsat skalární součin následovně

$$\langle v, w \rangle = \sum v^i g_{ij} w^j = \boldsymbol{vGw}. \tag{1.21}$$

Jelikož skalární součin je bilineární, pak pro pevné v je objekt $\langle v, \cdot \rangle$ lineární funkcionál nad $T_p M$, tedy prvek kotečného prostoru. Tento objekt můžeme nazvat kovariantní verzí vektoru v. Složky tohoto objektu jsou

$$v_j = \langle v, e_j \rangle = \langle \sum_i e_i v^i, e_j \rangle = \sum_i v^i g_{ij}. \tag{1.22}$$

Je běžné označovat lineární funkcionál v stejným písmenem jako vektor v, to je odůvodněno tím, že v ortonormálních souřadnicích platí $v^i = v_i$. Matice G je regulární a tedy existuje inverzní matice $G^{-1} := (g^{ij})$, rychlým výpočtem lze ukázat, že platí $v^j = \sum_i g^{ij} v_i$. Z těchto výpočtů je vidět, že metrický tenzor G indukuje zobrazení mezi prostory $T_p M$ a $T_p^* M$, ovšem pozor toto zobrazení je definováno pouze v daném bodě. Rozšíření tohoto pojmu na celou varietu je Riemannovský metrický tenzor.

Definice 1.3.1. Riemannovská metrika *přiřazuje tečným prostorům v každém bodě variety pozitivně definitní vnitřní součin, který se mění hladce v tom smyslu, že pro vektorová pole X, Y je zobrazení $p \to g_p(X(p), Y(p))$ je hladké. Pokud je vnitřní součin pouze nedegenerovaný, pak se jedná o* pseudo-Riemannovskou metriku.

Nyní již můžeme konečně zadefinovat základní objekt obecné teorie relativity, Riemannovskou (resp. pseudoriemannovskou) varietu.

Definice 1.3.2. Riemannovská, resp. pseudo-Riemannovská, varieta *je varieta vybavená riemannovskou, resp. pseudo-rieamnnovskou, metrikou.*

Základním objektem obecné teorie relativity jsou pseudo-Riemannovské variety, jejichž metrika má signaturu (n-1,1) nebo (1, n-1), výběr signatury je otázka konvence. Varietám s takovou metrikou se též říká Lorentzovské. Nyní máme vymezený náš model časoprostoru, je třeba ale definovat objekty, které v něm budou reprezentovat různé veličiny. To je záležitost další sekce.

1.4 Tenzory

Zatím jsme zadefinovali varietu a dva různé typy objektů přidružené varietě. Je otázkou, zda je možné definovat širší třídu objektů na varietě, které by byly v jistém smyslu zobecněním pojmu vektor, resp. kovektor. Toto zobecnění skutečně možné je a v této sekci ho definujeme.

Budeme využívat výsledků předchozích sekcí, pouze mírně zjednodušíme značení. Tečný prostor je $E = T_p M$, jeho báze $\boldsymbol{\partial} = (\boldsymbol{\partial_1}, \boldsymbol{\partial_2}, ..., \boldsymbol{\partial_n})$, báze kotečného prostoru (tedy duální báze) bude značena následovně $\boldsymbol{dx} = (\boldsymbol{dx^1}, \boldsymbol{dx^2}, ..., \boldsymbol{dx^n})$.

Začneme definicí kovariantních tenzorů.

Definice 1.4.1. Kovariantní tenzor *řádu r je multilineární reálná funkce*

$$Q : E \times E \times \cdots \times E \to \mathbb{R} \tag{1.23}$$

r-tice vektorů.

Aby veličina byla opravdu tenzor, nesmí být závislá na bázi, ve které jsme.

Lineární funkcionály na vektorech jsou dle této definice kovariantní tenzory 1. řádu, tedy značení kovariantní vektor je oprávněné. Jelikož metrika byla lineární funkcí dvou vektorů, je i její označení jako kovariantní tenzor 2. řádu matematicky korektní.

Můžeme si klást otázku, jak vypadá tenzor řádu r v komponentách, to lze snadno vypočítat

$$Q(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}) = Q\left(\sum_{i_1} v_1^{i_1} \boldsymbol{\partial_{i_1}}, \ldots, \sum_{i_r} v_r^{i_r} \boldsymbol{\partial_{i_r}}\right) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_r} v_1^{i_1}, \ldots, v_r^{i_r} Q(\boldsymbol{\partial_{i_1}}, \ldots, \boldsymbol{\partial_{i_r}}). \tag{1.24}$$

Pokud nyní definujeme

$$Q_{i_1, \ldots, i_r} = Q(\boldsymbol{\partial_{i_1}}, \ldots, \boldsymbol{\partial_{i_r}}), \tag{1.25}$$

pak dostáváme za použití Einsteinovy sumační konvence

$$Q(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}) = Q_{i_1, \ldots, i_r} v_1^{i_1}, \ldots, v_r^{i_r}. \tag{1.26}$$

Pokud definujeme operace sčítání a násobení po složkách, pak tenzory řádu r tvoří vektorový prostor, ten budeme značit

$$\otimes^r E^* = E^* \otimes E^* \otimes \cdots \otimes E^*. \tag{1.27}$$

Můžeme také zavést novou operaci, a to tenzorový součin, ta nám umožní konstruovat tenzory vyšších řádů.

Definice 1.4.2. Tenzorovým součinem *tenzoru α řádu j a tenzoru β řádu k nazveme tenzor $\alpha \otimes \beta$: $E \times E \to \mathbb{R}$ řádu j+k definovaný následovně*

$$\alpha \otimes \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \alpha(\boldsymbol{v})\beta(\boldsymbol{w}) \tag{1.28}$$

Z definice je jasné, že složky vypadají takto $(\alpha \otimes \beta)_{ij} = \alpha_i \beta_j$. Analogickým způsobem lze definovat kontravariantní tenzory, pouze zaměníme role E^* a E.

Lze ještě definovat takzvané smíšené tenzory, jejich speciálními případy jsou výše zmíněné druhy. Jak slovo smíšené naznačuje, tyto tenzory působí jak na vektory, tak na kovektory.

Definice 1.4.3. Smíšený tenzor*, r-krát kovariantní a s-krát kontravariantní, je multilineární reálná funkce W*

$$W : E^* \times E^* \times \ldots E^* \times E \times E \times \ldots E \to \mathbb{R} \tag{1.29}$$

na s-tici kovektorů a r-tici vektorů.

Pro složky lze opět obdržet

$$W^{i_1,\dots,i_s}{}_{j_1,\dots,j_r} := W(\mathrm{d}x^{i_j}, \dots, \partial_{j_r}). \tag{1.30}$$

Jelikož se jedná v jistém smyslu o rozšíření konceptu vektoru, stejně jako u nich je možné používat metriku ke zvedání a snižování indexů. Nyní prozkoumáme jejich transformační vlastnosti, složky smíšeného tenzoru W jsou v dané bázi

$$W^{i,\dots,j}{}_{k,\dots,l} = W(\mathrm{d}x^i, \dots, \mathrm{d}x^j, \partial_k, \dots, \partial_l). \tag{1.31}$$

Po změně souřadnic (s využitím multilinearity a sumační konvence) obdržíme

$$\begin{aligned} W'^{i,\dots,j}{}_{k,\dots,l} &= W(\mathrm{d}x'^i, \dots, \mathrm{d}x'^j, \partial'_k, \dots, \partial'_l) \\ &= \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^c}\right) \cdots \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^d}\right)\left(\frac{\partial x^r}{\partial x'^k}\right) \cdots \left(\frac{\partial x^s}{\partial x'^l}\right) W^{c,\dots,d}{}_{r,\dots,s}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Transformace kovariantních nebo kontravariantních tenzorů lze snadno získat z této rovnice. Důležitá poznámka je, že v klasické tenzorové analýze se pracovalo s komponentami, nikoliv s multilineárními funkcemi. Tedy tenzor by byla vhodná kolekce komponent která by se transformovala při změně souřadnic, tak jak je psáno výše.

Jako poslední věc v této sekci zavedeme, v analogii s vektorovými poli, tenzorová pole.

Definice 1.4.4. Tenzorové pole *na varietě je zobrazení, jež diferencovatelným způsobem přiřadí každému bodu p variety tenzor.*

Tento pojem je pro nás velmi důležitý, neboť ve fyzice jsou pole popisována právě tenzorovými poli. Například Riemannovská metrika se dá chápat jako kovariantní tenzorové pole 2. řádu. Motivace pro použití tenzorových polí spočívá ve faktu, že umožňují formulovat fyzikální zákony nezávisle na souřadnicích.

Po této sekci již máme varietu, na ní tenzorová pole a metriku, stále ovšem neumíme porovnávat vektory (potažmo tenzory) v různých bodech, tedy nemáme ani pojem derivace, který by byl v jistém smyslu vnitřní dané varietě. Tyto problémy vyřešíme v následující sekci.

1.5 Konexe a paralelní přenos

Teorie konexí v celé své šíři dalece přesahuje rámec této práce. V obecnosti je definována na fibrovaných vektorových prostorech, což je pojem, jenž není nutný pro tuto práci. Spokojíme se tedy pouze s takzvanou afinní konexí a i tu odvodíme spíše fyzikálním postupem, než postupem matematickým.

Pojmy konexe a paralelního přenosu jsou úzce provázány, bez definice konexe nelze přesně definovat, jak se paralelní přenos chová. Motivace těchto pojmů je následující: mějme dva tečné vektory v různých bodech variety, za jakých okolností jsou tyto vektory v jistém smyslu rovnoběžné, tedy paralelní? V $\mathbb{R}^n$ prostorech je tato otázka triviální, jeden vektor přesuneme k druhému a podíváme se na jejich chování. Na obecné varietě toto nelze protože pokud posuneme tečný vektor, byť jen infinitesimálně, už to nemusí nutně být tečný vektor. Co bychom tedy chtěli definovat, je nějaký předpis, který by nám říkal, jak vektor upravovat při přesunu do nového bodu, aby byl stále tečný, a zároveň aby se jeho velikost nezměnila.

Nechť $\boldsymbol{X}$ je vektorové pole definované podél křivky γ, t je parametr křivky. Rozepišme vektorové pole do složek v daných souřadnicích

$$\boldsymbol{X} = X^{\alpha}(t)\boldsymbol{x}_{\alpha}(\gamma(t)), \tag{1.33}$$

kde $\boldsymbol{x}_{\alpha}\,(\gamma, t)$ jsou komponenty jednotkového tečného vektoru ke křivce γ. Nyní rozepíšeme derivaci $\boldsymbol{X}$ dle parametru a položíme rovnou nule (chápeme jako diferenciální rovnici pro $\boldsymbol{X}$)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}X^{\alpha}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_{\alpha} + X^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{\alpha}}{\mathrm{d}\gamma^{\beta}}\frac{\mathrm{d}\gamma^{\beta}}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1.34}$$

První část je stále tečný vektor, ovšem druhá část již není v tečném prostoru. Tou se nyní budeme zabývat. Rozložíme $\boldsymbol{x}_{\alpha\beta}$ na tečnou a normální část

$$\boldsymbol{x}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{x}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}\boldsymbol{N}. \tag{1.35}$$

Koeficienty $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}$ zatím neznáme. Nyní naložíme na naší původní rovnici požadavek, aby po derivaci byl vektor $\boldsymbol{X}$ stále tečný, to znamená

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}X^{\sigma}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_{\sigma} + X^{\alpha}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}\gamma^{\beta}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_{\sigma} = \left[\frac{\mathrm{d}X^{\sigma}}{\mathrm{d}t} + X^{\alpha}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}\gamma^{\beta}}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{x}_{\sigma} = 0. \tag{1.36}$$

Objekt v závorce jsou složky vektoru, který byl transformován tak, aby se zachoval jeho tečný charakter. Nyní je třeba určit koeficienty $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}$, z podmínky

$$\langle \boldsymbol{x}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{x}_{\mu}\rangle = \langle \boldsymbol{x}_{\sigma}, \boldsymbol{x}_{\mu}\rangle\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} = g_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\mu\alpha\beta}. \tag{1.37}$$

Uvažme nyní derivaci metriky

$$\partial_{\beta}g_{\alpha\mu} = g_{\alpha\mu,\beta} = \partial_{\beta}\langle \boldsymbol{x}_{\alpha}, \boldsymbol{x}_{\mu}\rangle = \langle \boldsymbol{x}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{x}_{\mu}\rangle + \langle \boldsymbol{x}_{\alpha}, \boldsymbol{x}_{\mu\beta}\rangle = \Gamma_{\mu\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\mu\beta}. \tag{1.38}$$

Z této rovnice můžeme pomocí algebraických úprav a cyklické záměny indexů vyjádřit $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\gamma}g_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}g_{\gamma\beta} - \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha}\right), \tag{1.39}$$

jedná se o *Christoffelovy symboly prvního druhu*. Zvednutím prvního indexu získáme

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\mu}\left(\partial_{\beta}g_{\mu\alpha} + \partial_{\alpha}g_{\mu\beta} - \partial_{\mu}g_{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{2}g^{\sigma\mu}\left(g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}\right). \tag{1.40}$$

Symboly $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}$ se nazývají *Christoffelovy symboly druhého druhu*. Ty jsou definovány bez jakékoliv zmínky vnějšího prostoru (prostoru, do kterého je varieta vnořena), přestože jsme se v jejich odvození odkazovali na vnější prostor (v rozkladu na tečnou a normálovou část). Zpětně lze vzít tuto rovnici za jejich definici a máme tak vnitřní definici těchto symbolů a definici derivace na tečném bundlu, tedy kovariantní derivaci pro vektory.

Obecnější, ovšem abstraktnější, postup je vzít tečný bundl TM a na něm zavést soubor funkcí $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}$, které se při změně souřadnic chovají takto

$$\Gamma'^{\sigma}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\rho}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} + \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}\,\partial x'^{\beta}}. \tag{1.41}$$

Je vidět že tyto symboly mají tenzorový charakter pouze pro lineární transformace, pro obecné již nikoliv. Nyní zadefinujeme paralelní přenos tečných vektorů

$$\frac{\mathrm{d}X^{\mu}}{\mathrm{d}p} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}X^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}p} = 0, \tag{1.42}$$

kde p je parametr dané křivky, po které se přesouváme, speciálně v obecné teorii relativity pro časupodobné intervaly τ - vlastní čas, nebo pro prostoru nebo světlupodobné intervaly λ - affiní parametr. Symboly $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ nazýváme složkami *afinní konexe* na prostoru TM. Abychom se dostali k naší původní definici, musíme na tyto funkce klást ještě dodatečné požadavky. Prvním požadavkem je, aby naše afinní konexe byla bez torze. Tento požadavek prakticky znamená, že infinitesimální paralelní přenosy komutují až na korekce vyšších řádů. To vede na symetrii afinní konexe v dolních dvou indexech

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\alpha}. \tag{1.43}$$

Druhým požadavkem je pak *metrická kompatibilita*. To znamená, že paralelní přenos zachovává vnitřní součin, tedy

$$0 = \frac{\mathrm{d}(g_{\iota\kappa}X^{\iota}X^{\kappa})}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}g_{\iota\kappa}}{\mathrm{d}p}X^{\iota}X^{\kappa} + 2g_{\iota\mu}X^{\iota}\frac{\mathrm{d}X^{\mu}}{\mathrm{d}p} = (g_{\iota\kappa,\lambda} - 2g_{\iota\mu}\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda})X^{(\iota}X^{\kappa)}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}p}. \tag{1.44}$$

Jelikož vektory volíme stejně jako křivku volíme musí být nulový symetrizovaný výraz v závorce. Získáváme tedy podmínku

$$g_{\iota\kappa,\lambda} - \Gamma_{\iota\kappa\lambda} - \Gamma_{\kappa\iota\lambda} = 0. \tag{1.45}$$

Po cyklické permutaci indexů a algebraických úpravách obdržíme následující vzorec

$$\Gamma_{\iota\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{\iota\kappa,\lambda} + g_{\iota\lambda,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\iota}\right). \tag{1.46}$$

Jak vidíme, obdrželi jsme Christoffelovy symboly prvního druhu. Dostáváme tak výsledek, že symetrická, metricky kompatibilní, afinní konexe je jednoznačně dána metrikou. V některé literatuře se symboly $\Gamma_{\iota\kappa\lambda}$ a $\Gamma^{\iota}_{\kappa\lambda}$ používají i pro obecnější konexe a pro naše Christoffelovy symboly se značí takto $[\iota,\,\kappa\lambda]$ a $\left\{\binom{\iota}{\kappa\lambda}\right\}$. My budeme používat původní značení, jelikož obecnější konexe se používají v kalibračních teoriích. Afinní konexe splňující dvě výše zmíněné podmínky, t.j. jsou bez torze a metricky kompatibilní, se nazývá Levi-Civitovou konexí.

Paralelní přenos kovektoru získáme pomocí snížení indexu metrikou

$$\begin{aligned} 0 &= g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}p} + g_{\mu\nu}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}p}X^\beta = \frac{\mathrm{d}g_{\mu\nu}X^\mu}{\mathrm{d}p} - g_{\mu\nu,\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}p}X^\mu + \Gamma_{\nu\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}p}X^\beta \\ &= \frac{\mathrm{d}X_\nu}{\mathrm{d}p} + \left(\Gamma_{\nu\lambda\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}\right)\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}p}X^\mu = \frac{\mathrm{d}X_\nu}{\mathrm{d}p} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}X_\kappa\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}p}. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Pro paralelní přenos kovektoru tedy získáváme vztah

$$\frac{\mathrm{d}X_\nu}{\mathrm{d}p} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}X_\kappa\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}p} = 0. \tag{1.48}$$

Z toho vztahu a původní rovnice pro paralelní přenos můžeme odvodit, jak vypadá rovnice paralelního přenosu pro obecný tenzor

$$\frac{\mathrm{d}T^{\mu\dots}{}_{\nu\dots}}{\mathrm{d}p} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}T^{\alpha\dots}{}_{\nu\dots}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}p} + \cdots - \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}T^{\mu\dots}{}_{\kappa\dots}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}p} - \cdots = 0. \tag{1.49}$$

Tímto máme vyřešený problém paralelního přenosu. Je důležité poznamenat, že rovnice paralelního přenosu jsou diferenciální rovnice prvního řádu pro složky tenzorů, pokud známe křivku, po které dochází k přesunu a máme počáteční podmínku (tedy tenzor se kterým začínáme).

Nyní zavedeme novou derivační operaci, takzvanou kovariantní derivaci.

Definice 1.5.1. Kovariantní derivací vektoru (resp. kovektoru) *nazveme následující operaci*

$$\nabla_j v^i = v^i_{;j} := \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{jk}v^k \tag{1.50}$$

resp.

$$\nabla_j v_i = v_{i;j} := \frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \Gamma^k{}_{ji}v_k \tag{1.51}$$

Z definice je jasné, že kovariantní derivace bude záviset na volbě koeficientů afinní konexe, my se omezíme na případ s Levi-Civitovou konexí. Z této volby konexe pak plyne že kovariantní derivace metriky je nula $g_{ab;i} = 0$. Pro skalární pole je jeho kovariantní derivací jenom diferenciál, jak bude vidět z definice kovariantní derivace obecného tenzoru

$$T^{i\dots j}{}_{l\dots m;n} := \frac{\partial T^{i\dots j}{}_{l\dots m}}{\partial x^n} + T^{r\dots j}{}_{l\dots m}\Gamma^i{}_{nr} + \cdots + T^{i\dots r}{}_{l\dots m}\Gamma^j{}_{nr} - T^{i\dots j}{}_{r\dots m}\Gamma^r{}_{nl} - \dots - T^{i\dots j}{}_{l\dots r}\Gamma^r{}_{nm}. \tag{1.52}$$

Kovariantní derivace obecného tenzoru se tedy získá opakovaným použitím příslušných pravidel kovariantní derivace na všechny indexy. Z definice lze nahlédnout, že kovariantní derivace bude splňovat Leibnizovo pravidlo pro derivace, a také fakt, že i tenzor s konstantními složkami nemusí mít nutně nulovou kovariantní derivaci. Dalším důležitým faktem je, že kovariantní derivace komutuje se zúženími.

Obecně nejsou kovariantní derivace v zakřivených prostorech záměnné, což je důsledkem anholonomie paralelního přenosu. Podívejme se nyní, jak konkrétně se tato nekomutativita projevuje. Výpočet provedeme s kovektorem, ostatní transformace by se získaly analogicky.

Jelikož výpočet je jednoduchý, ale zdlouhavý napíšeme rovnou rozdíl druhých kovariantních derivacích

$$T_{\kappa;\lambda\mu} - T_{\kappa;\mu\lambda} = -T_\iota R^\iota{}_{\kappa\lambda\mu}, \tag{1.53}$$

kde

$$R^\iota{}_{\kappa\lambda\mu} := 2\left(\Gamma^\iota{}_{\kappa[\lambda,\mu]} + \Gamma^\sigma{}_{\kappa[\lambda}\Gamma^\iota{}_{\sigma\lambda]}\right). \tag{1.54}$$

Levá strana je tenzor pro libovolný vektor $\boldsymbol{T}$, z toho plyne že $R^\iota{}_{\kappa\lambda\mu}$ také musí být tenzorem. Tento tenzor nazveme *Riemannovým tenzorem křivosti*. Jeho studiem se budeme zabývat v následující sekci.

1.6 Riemannův tenzor

Riemannův tenzor křivosti popisuje, jak název naznačuje, zakřivení prostoru, konkrétněji odchylku od plochého prostoru. Z definice tohoto tenzoru je jasné, že pro plochý prostor platí

$$R^\iota{}_{\kappa\lambda\mu} = 0, \tag{1.55}$$

jelikož afinní konexe ploché variety jsou nulové.

Podívejme se nyní na symetrie Riemannova tenzoru. Nejprve ho převedeme do čistě kovariantního tvaru

$$R_{\iota\kappa\lambda\mu} = g_{\iota\nu}R^\nu{}_{\kappa\lambda\mu} = g_{\iota[\lambda,\kappa\mu]} + g_{\kappa[\mu,\iota\lambda]} + 2\Gamma^\nu{}_{\kappa[\lambda}\Gamma_{\nu\iota\mu]}. \tag{1.56}$$

Hranaté závorky značí antisymetrizaci indexů, u kterých jsou psány. Ze samotné definice je tak vidět antisymetrie v páru $\lambda\mu$. Další jsou antisymetrie v prvním páru indexů $\iota\kappa$, symetrie při záměnně $\iota\kappa \leftrightarrow \lambda\mu$

$$R_{\iota\kappa\lambda\mu} = -R_{\iota\kappa\mu\lambda} = -R_{\kappa\iota\lambda\mu} = R_{\lambda\mu\iota\kappa}, \tag{1.57}$$

a také, že splňuje cyklickou identitu v indexech $\kappa\lambda\mu$

$$R_{\iota\kappa\lambda\mu} + R_{\iota\lambda\mu\kappa} + R_{\iota\mu\kappa\lambda} = 0. \tag{1.58}$$

Toto jsou veškeré symetrie Riemannova tenzoru, s jejich pomocí lze spočítat počet nezávislých prvků. Také poznamenáme, že cyklické identitě se říká také *první Bianchiho identita*.

Matice n-tého řádu má obecně n^2 prvků, antisymetrická matice jich má $\frac{1}{2}n(n-1)$, symetrická pak $\frac{1}{2}n(n+1)$. Riemannův tenzor je antisymetrický v prvním páru a druhém páru indexů, v každém z nich má tedy jen $N = \frac{1}{2}n(n-1)$ nezávislých prvků. Jelikož je ale symetrický v celých těchto dvojicích, můžeme páry indexů chápat jako jeden symbol, máme pak symetrickou matici R_{AB}. Ta má $\frac{1}{2}N(N+1)$ nezávislých prvků. Nyní musíme uvážit cyklickou identitu. Ta je nezávislá na předchozích podmínkách pouze za předpokladu, že jsou všechny indexy různé. Výběr čtyř různých čísel z n se dá jednoduše spočíst pomocí kombinačního čísla $\binom{4}{n}$. Celkem tedy máme

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n\,(n\,-\,1)\right)\left(\left(\frac{1}{2}n\,(n\,-\,1)\right)+\,1\right)-\binom{4}{n}\,=\,\frac{1}{12}n^2\left(n^2\,-\,1\right), \tag{1.59}$$

nezávislých složek. Pro prostor dimenze čtyři tedy máme 20 nezávislých složek z celkových 256.

Riemannův tenzor splňuje ještě jednu důležitou identitu, a to takzvanou *druhou Bianchiho identitu*

$$R_{\iota\kappa\lambda\mu;\nu}\,+\,R_{\iota\kappa\mu\nu;\lambda}\,+\,R_{\iota\kappa\nu\lambda;\mu}\,=\,0. \tag{1.60}$$

Vzhledem k počtu indexů můžeme Riemannův tenzor dvakrát zúžit přes vhodný pár indexů. Prvním zúžením obdržíme takzvaný *Ricciho tenzor*

$$R_{\iota\kappa}\,:=\,g^{\lambda\mu}R_{\iota\lambda\kappa\mu}\,=\,R^{\lambda}{}_{\iota\lambda\kappa}\,=\,2\left(\Gamma^{\iota}{}_{\kappa[\lambda,\mu]}\,+\,\Gamma^{\sigma}{}_{\kappa[\lambda}\Gamma^{\iota}{}_{\sigma\lambda]}\right)\,=\,\Gamma^{\lambda}{}_{\iota\kappa,\lambda}-\Gamma^{\lambda}{}_{\iota\lambda,\kappa}+\Gamma^{\sigma}{}_{\iota\kappa}\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}-\Gamma^{\sigma}{}_{\iota\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\sigma}. \tag{1.61}$$

Jedná se o symetrický tenzor. Je to také unikátní netriviální zúžení Riemannova tenzoru, ostatní jsou buď nula, nebo opět Ricciho tenzor.

Zúžením Ricciho tenzoru, tedy výpočtem jeho stopy, získáme *Ricciho skalár*

$$R\,:=\,g^{\iota\lambda}R_{\iota\lambda}\,=\,R^{\lambda}{}_{\lambda}. \tag{1.62}$$

Tato veličina vyjadřuje odchylku objemu od standardního Euklidovského objemu, pro kladné hodnoty je objem na varietě menší, pro záporné je větší.

Pokud dvakrát zúžíme Bianciho identitu, nejprve v indexech $\iota\nu$ a poté v $\kappa\lambda$, získáme s použitím předchozích výsledků následující výrazy

$$R^{\iota}{}_{\kappa\lambda\mu;\iota}\,-\,R_{\kappa\mu;\lambda}\,+\,R_{\kappa\lambda;\mu}\,=\,0, \tag{1.63}$$

$$-\,R_{\mu}{}^{\iota}{}_{;\iota}\,-\,R_{\mu}{}^{\iota}\,+\,R_{;\kappa}\,=\,-2\left(R^{\kappa}{}_{\mu}\,+\,\frac{1}{2}R\delta^{\kappa}{}_{\mu}\right)_{;\mu}\,=\,0. \tag{1.64}$$

Na prvním řádku je Bianchiho identita po prvním zúžení, poté je po druhém zúžení. Z druhého řádku vidíme, že divergence objektu v závorce je nula. Tenzor v závorce se nazývá *Einsteinovým tenzorem* a hraje důležitou roli v obecné teorii relativity.

Již víme že Riemannův tenzor má 20 nezávislých složek, ukazuje se, že je možné Riemannův tenzor rozložit pomocí takzvané Ricciho dekompozice na tři části, skalární S_{abcd}, částečně bezestopy E_{abcd} a plně bezestopy C_{abcd}.

$$R_{\iota\kappa\lambda\mu}\,=\,S_{\iota\kappa\lambda\mu}\,+\,E_{\iota\kappa\lambda\mu}\,+\,C_{\iota\kappa\lambda\mu} \tag{1.65}$$

První a druhá část jsou významem podobné Ricciho skaláru a Ricciho tenzoru, třetí pak reprezentuje konformně invariantní část Riemannova tenzoru. Tomuto tenzoru se říká Weylův tenzor, z Riemannova tenzoru se konstruuje takto

$$C_{abcd} \; = \; R_{abcd} + \frac{1}{n-2}\left(R_{ad}g_{bc} - R_{ac}g_{bd} + R_{bc}g_{ad} - R_{bd}g_{ac}\right) + \frac{1}{(n-1)(n-2)}R(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{b}c)). \tag{1.66}$$

Význam tohoto tenzoru je, že popisuje lokální konformní odchylku od ploché variety. Má stejné symetrie jako Riemannův tenzor a navíc je kompletně beze stopy, tedy kontrakce na libovolné dvojici indexů je nulová. Navíc má tento tenzor takzvanou *konformní symetrii*, detaily této symetrie se zabývá následující kapitola.

Kapitola 2

Konformní symetrie

Minulá kapitola byla zakončena definicí Weylova tenzoru křivosti, o němž jsme řekli, že má takzvanou *konformní symetrii*. Jelikož cílem této práce je pracovat s Weylovou teorií gravitace, jež je konformně invariantní, tak v této sekci krátce shrneme teorii konformních symetrií jako přípravu na pozdější práci. Stručně projdeme vlastnosti konformních transformací a odlišíme je od konformních izometrií, poté se budeme zabývat konformní invariancí a transformačními vlastnostmi tenzorů křivosti pod konformními transformacemi.

Literatuře není zcela jednotná, co se definice pojmu konformní transformace týče. V této práci se budeme držet rozdělení dle práce J. Aalberse [4], ze které též čerpáme většinu informací. V souladu s ním tedy definujeme

Definice 2.0.1. Konformní transformací *nazveme následující transformaci metriky*

$$g_{\mu\nu} \to \Omega^2 g_{\mu\nu}. \tag{2.1}$$

V jiné literatuře se dá tato transformace nalézt také pod názvem "Weylova transformace", konformní transformace jsou pak konformní isometrie dle naší terminologie.

Lze snadno nahlédnout, že takováto transformace zachová úhly (což opravňuje použití názvu konformní) a změní pouze délky vektorů, pokud je tedy Ω nezávislá na bodu na varietě jedná se vlastně o škálování. Lze ukázat, že konformní faktor Ω je jeden ze stupňů volnosti metriky, tedy má vliv na metrické vlastnosti variety.

Pokud je původ konformní transformace diffeomorfismus (tedy konformní transformace je pullback diffeomorfismu, $h^*g = \Omega^2 g$), budeme tuto transformaci nazývat konformní isometrií. Tyto specifičtější transformace jsou zajímavé, jelikož zůstáváme ve stejné třídě ekvivalence metrik. Specifičtěji v obecné teorii relativity platí, že pokud jsou dvě řešení Einsteinových rovnic spojena konformní symetrií pak jsou fyzikálně nerozlišitelná. V časoprostoru, ve kterém by všechny konformní transformace pocházely z konformních symetrií, by se tak konformní faktor nedal pozorovat.

Podívejme se nejprve na transformační vlastnosti různých objektů pod vlivem konformních transformací. Uvažujeme transformace $g_{\mu\nu} \to \Omega^2 g_{\mu\nu}$, kde Ω je skalární funkce časoprostoru. Pro inverzní metriku pak tedy musí platit

$$g^{\mu\nu} \to \Omega^{-2} g^{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

jelikož musí po pro násobení dát jednotkou matici ($g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho}$ je invariant).

Determinant se transformuje následovně

$$g = \epsilon^{\mu,\ldots,\sigma} g_{0\mu} \ldots g_{n\sigma} \to \Omega^{2n} g. \tag{2.3}$$

Všimněme si faktu, že se u dvou různých objektů vyskytuje Ω s různými mocninami. Jelikož jsou takové transformace časté, budeme této mocnině říkat konformní váha.

Definice 2.0.2. *Faktoru p u transformací typu $f \to \Omega^p f$ říkáme* konformní váha p.

Metrika má tedy konformní váhu 2, její inverze -2 a determinant 2n. Zatím veškeré váhy jsou násobky dvou, někteří autoři proto definují konformní váhu jako 1/2 naší hodnoty. Ostatní tenzory se většinou transformují mnohem složitěji, jelikož kovariantní derivace se transformuje velmi složitě, díky transformačnímu předpisu pro Christoffelovy symboly

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} \to \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} + \frac{1}{\Omega}\left(\delta^{\mu}{}_{\rho}\partial_{\nu}\Omega + \delta^{\mu}{}_{\nu}\partial_{\rho}\Omega - g^{\mu\sigma} g_{\nu\rho}\partial_{\sigma}\Omega\right). \tag{2.4}$$

Z tohoto předpisu již lze odvodit transformaci libovolné kovariantní derivace, a také Riemannova tenzoru

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} \to R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} + \frac{1}{\Omega^2}\left(g_{\nu\sigma}\left(2g^{\mu\iota}\nabla_{\rho}\Omega\nabla_{\iota}\Omega - g^{\mu\iota}\Omega\nabla_{\iota}\nabla_{\rho}\Omega\right) + \delta^{\mu}{}_{\sigma}\left(\Omega\nabla_{\rho}\nabla_{\nu}\Omega - 2\nabla_{\nu}\Omega\nabla_{\rho}\Omega + g_{\nu\rho}\nabla^{\iota}\Omega\nabla_{\iota}\Omega\right) - \rho \leftrightarrow \sigma\right), \tag{2.5}$$

kde $\rho \leftrightarrow \sigma$ značí předchozí výraz, pouze se zaměněnými indexy ρ a σ. Rovnice jde dramaticky zkrátit pokud zavedeme zjednodušující výrazy

$$V_{\mu\nu} := \nabla_{\mu}\Omega\nabla_{\nu}\Omega, \tag{2.6}$$

$$W_{\mu\nu} := \Omega\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\Omega, \tag{2.7}$$

kde $\triangledown$ je kovariantní derivace. S tímto zjednodušením a využitím metriky na zvýšení indexů tedy dostaneme

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} \to R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} + \frac{1}{\Omega^2}\left(g_{\nu\sigma}\left(2V^{\mu}{}_{\rho} - W^{\mu}{}_{\rho}\right) + \delta^{\mu}{}_{\sigma}\left(W_{\nu\rho} - 2V_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}V^{\iota}{}_{\iota}\right) - \rho \leftrightarrow \sigma\right). \tag{2.8}$$

Vysčítáním nyní již snadno odvodíme chování Ricciho tenzoru při konformní transformaci

$$R_{\mu\nu} \to R_{\mu\nu} + \frac{1}{\Omega^2}\left((n-2)(2V_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}) - g_{\mu\nu}\left((n-3)\,V^{\sigma}{}_{\sigma} + W^{\sigma}{}_{\sigma}\right)\right)]. \tag{2.9}$$

Zúžením pomocí inverzní transformované metriky $\Omega^{-2}g^{\mu\nu}$ zjistíme transformaci Ricciho skaláru

$$R \to \frac{1}{\Omega^2}\left(R - \frac{n-1}{\Omega^2}\left((n-4)V + 2W\right)\right). \tag{2.10}$$

Vidíme, že na varietě dimenze čtyři se transformace Ricciho skaláru zjednoduší na

$$R \to \frac{1}{\Omega^2}\left(R - \frac{3}{\Omega^2}2W\right). \tag{2.11}$$

Pro naši další práci je důležitý Weylův tensor, ten je (s jedním indexem nahoře) konformně invariantní. Pokud má ovšem všechny indexy dole, pak má konformní váhu 2. Z jeho tvaru

$$C^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} + \frac{1}{n-2}\left(R^{\mu}{}_{\sigma}g_{\nu\rho} - R^{\mu}{}_{\rho}g_{\nu\sigma} + R_{\nu\rho}g^{\mu}{}_{\sigma} - R_{\nu\sigma}g^{\mu}{}_{\rho}\right) + \frac{1}{(n-1)(n-2)}R(g^{\mu}{}_{\rho}g_{\nu\sigma} - g^{\mu}{}_{\sigma}g_{\nu\rho}), \tag{2.12}$$

a s použitím předchozích výsledků lze odvodit, že je opravdu invariantní při konformních transformacích.

Nyní se budeme zabývat konformní invariancí. Mějme rovnici, která je splněná pro pole ψ^α s metrikou $g_{\mu\nu}$. Pokud existuje číslo w takové, že rovnice platí pro $\Omega^w\psi^\alpha$ s metrikou $\Omega^2 g_{\mu\nu}$, pak takovou rovnici nazýváme *konformně invariantní*. Číslo w je nazýváno v souladu s předchozí terminologií *konformní váha* pole ψ^α.

Mnoho fyzikálních rovnic je konformně invariantních, nebo se dají jemně modifikovat do konformně invariantního tvaru. Příkladem rovnice, která není konformně invariantní, jsou například Einsteinovy rovnice, Einsteinův tenzor se totiž transformuje následujícím způsobem

$$G_{\mu\nu} \to G_{\mu\nu} + \frac{n-2}{\Omega^2}\left(2V_{\mu\nu} - W_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left((n-5)V + 2W\right)\right). \tag{2.13}$$

Z tohoto transformačního zákona je vidět, že řešení Einsteinových rovnic po transformaci nebude řešením pro transformovanou metriku. Jednou možností, jak zachovat konformní invarianci, by bylo, aby se tenzor hmoty a energie transformoval právě takovým způsobem, aby vyrušil anomální faktory v transformaci Einsteinova tenzoru. Druhou možností by bylo, že konformní transformace by byla isometrií metriky, a tedy diffeomorphismem a zachovávala tak všechny tenzorové rovnice. Existují způsoby, jak modifikovat Einsteinovy rovnice, aby byly konformně invariantní, případně teorie gravitace s konformně invariantní akcí, jako například Weylova teorie gravitace.

Kapitola 3

Topologické invarianty

V této kapitole poskytneme pouze stručný přehled některých výsledků z oblasti klasifikace variet a topologických charakteristik, které se za tímto účelem dají použít. Další informace lze dohledat například v [5].

Již víme že dvě variety jsou v mnoha ohledech stejné pokud jsou diffeomorfní, z čehož pramení dvě otázky: 1) Je možné variety dané dimenze klasifikovat? 2) Jaké vlastnosti jsou diffeomorfně invariantní? První z těchto otázek se zabývá klasifikací variet dané dimenze a je zřejmé, že tato otázka závisí také na dalších strukturách na varietě. V této souvislosti existují 2 úhly pohledu; z hlediska topologie, a z hlediska diferencovatelných struktur. Nyní stručně shrneme základní poznatky z obou těchto úhlů.

Variety s dimenzemi nula a jedna jsou triviální a v případě dimenzí dva a tři lze snadno klasifikovat uzavřené variety. V dimenzi dva lze totiž ukázat, že každá taková varieta má konstantní křivost a ty mohou být typově tři (kladná, záporná a nula), konkrétně lze ukázat že každá uzavřená souvislá varieta dimenze dva je homeomorfní buď kouli, souvislé sumě[1] torů či souvislé sumě projektivních rovin.

V dimenzi tři lze provést takzvanou geometrizaci, kdy se varieta interpretuje jako souvislá suma jednodušších variet a poté se rozdělí na jednotlivé části ze souvislé sumy, tyto části už pak jde klasifikovat do jedné z osmi modelových geometrií.

V dimenzích pět a výše můžeme použít takzvanou "*surgery theory*", tato teorie se opírá o Whitneyho trik který umožňuje zjednodušení variety.

V dimenzi čtyři narážíme na problém, že surgery theory funguje již jen topologicky a to pouze za použití takzvaných *Cassonových rukojetí*.

Cassonova rukojeť je dvojice variet (M, C), která je homeomorfní k 4 dimenzionální 2-rukojeti $(D^2 \times \mathbb{R}^2, \partial D^2 \times 0)$. Konkrétními detaily jejich konstrukce se zabývá "surgery theory"a "handle theory".

Topologická klasifikace variet dimenze čtyři je pak pro souvislé kompaktní variety vyřešena. Z hlediska diferencovatelných struktur lze ovšem ukázat, že je nemožné provést jejich klasifikaci. Existuje totiž nekonečná množina takzvaných *exotických struktur na* $\mathbb{R}^4$, jedním z příkladů je *Donaldson-*

[1] *Souvislou sumou* dvou povrchů M a N je myšlen povrch $M\#N$ vytvořený tak že z obou povrchů odstraníme disk a spojíme je po takto vzniklé hraně.

Freedmanovo $\mathbb{R}^4$. Informace o této a dalších podobných exotických strukturách lze nalézt například v [6]. Dimenze čtyři se tedy chová unikátně, toto nám bohužel bude později působit problémy.

Podívejme se nyní na druhou otázku: jaké vlastnosti variety závisí na topologii a pod diffeomorfismy se nezmění? Začněme tedy studovat topologické invarianty variet.

Jedním ze základních topologických invariantů je *Eulerova charakteristika*. Ta je definována následovně

$$\chi = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots. \tag{3.1}$$

Jedná se o alternující sumu *Bettiho čísel*. K-té Bettiho číslo je rovno dimenzi k-té grupy homologie variety. Je jasné, že Eulerova charakteristika je dobře definovaná pouze pokud tato řada má od jistého v_0 všechny členy nulové, jelikož Bettiho čísla jsou vždy celá. Existují i jiné způsoby, jak tuto charakteristiku vypočítat, například pro kompaktní hladké Riemannovské variety dimenze 2 platí *Gauss-Bonnetův teorém*, který říká

$$\iint_M K dS + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M), \tag{3.2}$$

kde $K = \frac{R}{2}$ je Gaussova křivost variety M a k_g je geodetická křivost hraniční křivky variety. Tento teorém je tedy pozoruhodným spojením lokální vlastnosti křivosti a globální vlastnosti Eulerovy charakteristiky, je také výhodné ,že ho lze zobecnit do více dimenzí.

Nyní zavedeme termín divergentní dráhy a úplné variety.

Definice 3.0.1. Divergentní dráhou *v Riemannovské varietě nazveme hladkou křivku, která není obsažena v žádné kompaktní podmnožině variety.*

Z této definice pak přímo plyne, že v kompaktní varietě neexistují divergentní dráhy.

Definice 3.0.2. *Nekompaktní varieta je* úplná varieta*, právě když každá divergentní dráha má nekonečnou délku.*

Jako příklad těchto variet lze zmínit většinu variet používaných v práci s obecnou teorií relativity. Pro nekompaktní úplné Riemannovské variety dimenze 2 platí *Cohn-Vossenova nerovnost* (viz [7])

$$\iint_M K dS \leq 2\pi\chi(M). \tag{3.3}$$

Další důležitou charakteristikou, která je diffeomorfně invariantní, jsou grupy homotopie, my zmíníme pouze první homotopickou grupu, takzvanou *fundamentální grupu*. Ta popisuje, kdy jsou dvě dráhy mezi různými body homotopické (lze jednu do druhé spojitě deformovat).

Dalším invariantem je *genus*, který, zjednodušeně řečeno, popisuje počet děr na varietě, přesněji se týká tříd ekvivalence smyček, které nejsou homotopické bodu. Pro kompaktní orientovatelné variety ho lze spočítat z Eulerovy charakteristiky

$$g = 1 - \frac{\chi(M)}{2}. \tag{3.4}$$

Pro neorientovatelné variety se pak definuje takto

$$g_n = 2 - \chi(M). \tag{3.5}$$

Z Gauss-Bonnetova teorému (resp. Cohn-Vossenovy nerovnosti) pak tedy máme i spojení mezi genii a křivostí.

Kapitola 4

Dráhový integrál

Jednou z možných metod kvantování je takzvaný dráhový integrál. Ten byl ve fyzikálním kontextu definován R. Feynmanem v roce 1948 a jako metoda kvantování se dá chápat jako zobecnění akčního principu z klasické mechaniky. K pravděpodobnosti přechodu částice mezi dvěma body nepřispívá pouze klasická trajektorie, ale i všechny ostatní spojující ony dva body, pouze se mění váhový faktor se kterým přispívají. Tato metoda došla hlavní úspěchu při výpočtech v kvantové teorii pole, tam se ovšem mluví o funkcionálním integrálu, jelikož neintegrujeme přes dráhy ale přes různé funkce.

V první sekci této kapitoly stručně uvedeme základy dráhového integrálu, v další sekci pak následuje nástin funkcionálního integrálu pro případ reálného skalárního pole. Kapitola je pak zakončena sekcí o efektivní akci.

4.1 Základy dráhového integrálu

Matematický aparát zakončíme stručným přehledem důležitého nástroje pro kvantování systémů popsaných v jazyce Lagrangeovy mechaniky, dráhovým integrálem. Jelikož se jako metoda používá zejména ve fyzice, následující popis a odvození bude motivováno spíše fyzikálně než matematicky. V této kapitole značíme tlustým písmenem ($\boldsymbol{x}$) vektory a stříškou nad písmenem $\hat{P}$ operátory.

Dráhový integrál rozvinul a zpopularizoval zejména R. Feynman, ovšem základy položil již Paul Dirac a Norbert Wiener. Základem odvození je *propagátor*, tedy jádro integrálního operátoru časového vývoje v kvantové mechanice

$$\psi(\boldsymbol{x}_f, t_f) = \int K(\boldsymbol{x}_f, t_f, \boldsymbol{x}_i, t_i)\psi(\boldsymbol{x}_i, t_i)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i. \tag{4.1}$$

Propagátor také splňuje

$$K(\boldsymbol{x}_f, t_f, \boldsymbol{x}_i, t_i) = \langle \boldsymbol{x}_f, t_f \,|\, \boldsymbol{x}_i, t_i \rangle, \tag{4.2}$$

a kvadrát jeho absolutní hodnoty je pravděpodobnost přechodu ze stavu $|\boldsymbol{x}_i, t_i\rangle$ do stavu $|\boldsymbol{x}_f, t_f\rangle$

Zabývejme se nyní otázkou jak spočítat pravděpodobnost přechodu částice z časoprostorového bodu $(\boldsymbol{x}_i, t_i)$ do bodu $(\boldsymbol{x}_f, t_f)$, předpokládáme následující Hamiltonův operátor

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{x}, t). \tag{4.3}$$

Ve výpočtu budeme potřebovat propagátor pro volnou částici, tedy potenciál $V(\hat{x}, t) = 0$ identicky. Tento propagátor má následující tvar

$$K(\boldsymbol{x}_f, t_f, \boldsymbol{x}_i, t_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t}}^{\,n} e^{\frac{im}{2\hbar\Delta t}(\vec{x}_f - \vec{x}_i)^2}, \tag{4.4}$$

kde n je dimenze prostoru, ve kterém se pohybujeme (v případě časoprostoru je myšlen počet prostorových dimenzí).

Pro výpočet obecného propagátoru použijeme opakovaně rozkladu jedničky v Heisenbergově obraze, ten má tvar

$$\mathbb{1} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} |\boldsymbol{x}, t\rangle\langle \boldsymbol{x}, t|. \tag{4.5}$$

Pokud nyní rozepíšeme $\langle \boldsymbol{x}_f t_f | \boldsymbol{x}_i, t_i\rangle$ jako

$$\langle \boldsymbol{x}_f t_f | \boldsymbol{x}_i, t_i\rangle = \langle \boldsymbol{x}_f t_f | \mathbb{1}\mathbb{1} \dots \mathbb{1} | \boldsymbol{x}_i, t_i\rangle, \tag{4.6}$$

pak s použitím rozkladu jedničky (4.5) dostáváme

$$\langle \boldsymbol{x}_f, t_f \,|\, \boldsymbol{x}_i, t_i\rangle = \int\cdots\int \langle \boldsymbol{x}_f, t_f \,|\, \boldsymbol{x}_N, t_N\rangle\langle \boldsymbol{x}_N, t_N \,|\, \boldsymbol{x}_{N-1}, t_{N-1}\rangle \dots \langle \boldsymbol{x}_2, t_2 \,|\, \boldsymbol{x}_1, t_1\rangle\langle \boldsymbol{x}_1, t_1 \,|\, \boldsymbol{x}_i, t_i\rangle \mathrm{d}\boldsymbol{x}_N \dots \mathrm{d}\boldsymbol{x}_1. \tag{4.7}$$

Skalární součiny v integrálu lze ovšem interpretovat jako propagátory mezi stavy $|\boldsymbol{x}_k, t_k\rangle$ a $|\boldsymbol{x}_{k+1}, t_{k+1}\rangle$, za předpokladu že Δt je malé pak můžeme aproximovat

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x_{k+1}}, t_{k+1} \,|\, \boldsymbol{x_k}, t_k\rangle &= K(\boldsymbol{x_{k+1}}, t_{k+1}, \boldsymbol{x_k}, t_k) = \langle \boldsymbol{x_{k+1}} \,| e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_k)\Delta t + \sigma(\Delta t^2)} |\, \boldsymbol{x_k}\rangle = \\ &\langle \boldsymbol{x_{k+1}} \,| e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{x}, t_k))\Delta t + \sigma(\Delta t^2)} |\, \boldsymbol{x_k}\rangle = \langle \boldsymbol{x_{k+1}} \,| e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{x}, t_k))\Delta t}(1 + \sigma(\Delta t^2)) |\, \boldsymbol{x_k}\rangle, \end{aligned} \tag{4.8}$$

kde jsme aproximovali Hamiltonián v exponenciále do prvního řádu v Δt. Pro další výpočet bychom potřebovali, aby v exponentu byl vždy pouze jeden operátor, tedy přepsat exponenciálu jako součin dvou exponenciál, to nám umožní *Lie-Trotter-Katoova formule*

$$e^{A+B} = \lim_{N \to +\infty} (e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}})^N. \tag{4.9}$$

Pro náš konkrétní případ z ní obdržíme,

$$\langle \boldsymbol{x}_{k+1} \,| e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{P}^2}{2m}\Delta t} e^{-\frac{i}{\hbar}V(\hat{x}, t_k)\Delta t}(1 + \sigma(\Delta t^2)) |\, \boldsymbol{x}_k\rangle = \langle \boldsymbol{x}_{k+1} \,| e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{P}^2}{2m}\Delta t} |\, \boldsymbol{x}_k\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}V(x_k, t_k)\Delta t}(1 + \sigma(\Delta t^2)). \tag{4.10}$$

Nyní využijeme znalosti propagátoru pro volnou částici

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t}}^{n} e^{\frac{im}{2\hbar\Delta t}(\overrightarrow{x_f}-\overrightarrow{x_i})^2} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}V(x_k,t_k)\Delta t}(1+\sigma(\Delta t^2)) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t}}^{n} e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{m}{2}(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 - V(x_k,t_k))\Delta t}(1+\sigma(\Delta t^2)) =$$
$$\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t}}^{n} e^{\frac{i}{\hbar}(L(x_k,\frac{\Delta x}{\Delta t},t_k))\Delta t}(1+\sigma(\Delta t^2)), \quad (4.11)$$

odkud tedy vidíme, že v první aproximaci je infinitesimální propagátor dán Lagrangeovou funkcí.

Po dosazení do rovnice (4.7) získáme

$$\langle \boldsymbol{x}_f, t_f \,|\, \boldsymbol{x}_i, t_i \rangle = \int \cdots \int \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t}}^{Nn} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}(L(x_k,\frac{\Delta x}{\Delta t},t_k))\Delta t} \mathrm{d}\boldsymbol{x}_N \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{x}_1. \quad (4.12)$$

Vidíme, že výraz v exponenciále připomíná klasickou akci, ovšem branou v diskrétních konečných krocích, mohli bychom tedy zkusit spočítat limitu pro $N \to +\infty$. Samotný integrand je v limitě definovaný dobře, otázkou je, jak se bude chovat míra v této limitě, integrál totiž přechází do prostoru s nekonečnou dimenzí. Za tímto účelem se zavádí *Feynmanova dráhová "míra"* na prostoru spojitých trajektorií

$$\mathcal{D}\overrightarrow{x} = \lim_{N\to+\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t}}^{Nn} \mathrm{d}\boldsymbol{x}_N \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{x}_1. \quad (4.13)$$

Poznamenejme ještě, že slovo míra používáme v matematicky nekorektním významu, jelikož tento objekt nesplňuje všechny potřebné vlastnosti. Celkem tedy můžeme psát

$$\langle \boldsymbol{x}_f, t_f \,|\, \boldsymbol{x}_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}\overrightarrow{x}\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]} \quad (4.14)$$

Z tvaru integrandu je jasné, že jeho hodnoty budou velmi rychle oscilovat, díky faktoru $\frac{1}{\hbar}$. Díky těmto rychlým oscilacím bude dominantní příspěvek pocházet od trajektorií, které mají stacionární akci, tedy podél klasické trajektorie.

Formálně je tento výraz jednoduchý, ovšem v praktických výrazech se často naráží na problémy. Už například samotná míra $\mathcal{D}x$ není mírou v matematickém smyslu slova, v důsledku komplexní jednotky. Dalším problémem je pak řazení operátorů, jeden operátor totiž může odpovídat více klasickým funkcím, jako důsledek nekomutativity operátorů. Také je třeba zahrnout možné topologické vlastnosti prostoru, na kterém se pohybujeme, parametrizace drah pro výpočet je také problematická.

Problém s mírou na prostoru drah lze často odstranit pokud přejdeme k čistě imaginárním časům, $t \to -i\tau$, pomocí takzvané *Wickovi rotace*. Poté naše konstrukce přechází v takzvaný Wienerův integrál, který byl původně vytvořen za účelem studia Brownova pohybu. Ukazuje se, že v takovém případě je míra $\mathcal{D}\overrightarrow{x}$ dobře definována. Toto zjištění vede k tomu, že některé výpočty se provádí přechodem k Wienerovu integrálu a pak zpětnou Wickovou rotací k reálnému času.

Během vyhodnocování limity vybíráme, v jakém bodě vyhodnocujeme operátory, zda v x_k nebo v x_{k+1}, či ve vhodně zvoleném váženém průměru těchto hodnot. Pokud by dráhový integrál byl Riemannovský, všechny volby by vedli na stejný výsledek, ukazuje se ovšem, že tomu tak není. Stejným způsobem se chová *Itův stochastický integrál* či *Stratonovichův stochastický integrál*, poslední jmenovaný představuje správný matematický podklad pro naše výpočty. Stratonovichův integrál odpovídá vyhodnocení v aritmetickém průměru hodnot $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. Špatná volba by vedla k nefyzikálním výsledkům, např. při výpočtu chování částice v elektromagnetickém poli. Za jistých okolností na této volbě nezáleží, a pak lze volit tyto hodnoty libovolně, jak jsme to ve výpočtech prozatím dělali.

4.2 Funkcionální integrál

Zatím jsme se zabývali dráhovými integrály pouze ve fázových prostorech několika částic, to nám ovšem pro naše potřeby nestačí. V kvantové teorii pole se totiž zabýváme, jak název naznačuje, různými kvantovými poli. Adekvátní dráhový integrál již tedy nebude integrovat přes možné dráhy částice, ale přes možné polní konfigurace.

Je rozumné začít nejjednodušším možným polem, tedy reálným skalárním polem. Klasická akce pro skalární pole ϕ je následující

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4 x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi) \right), \tag{4.15}$$

kde m je hmotnost pole a $V(\phi)$ je potenciál. V dalším kroku definujeme kanonickou hybnost

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_0 \phi]} = \partial_0 \phi \equiv \dot{\phi}, \tag{4.16}$$

a posléze Hamiltonvskou hustotu jako Legendrovu transformaci Lagrangeovy hustoty

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\pi^2 + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi + m^2 \right) - V(\phi). \tag{4.17}$$

Nyní definujeme amplitudu přechodu mezi vakui v přítomnosti lokálního zdroje jako

$$\langle \Omega | \Omega \rangle_J \equiv Z[J] = N \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi e^{i \int \mathrm{d}^4 x (\pi \dot{\phi} - \mathcal{H} + J\phi)}, \tag{4.18}$$

kde $J(x)$ je nějaký obecný zdroj a N je normalizační konstanta. Pro naše budoucí aplikace je důležité poznamenat že integrand v exponentu se dá přepsat jako $\pi\dot{\phi} - \mathcal{H} + J\phi = \mathcal{L} + J\phi$, tedy například u teorie gravitace, kde je Hamiltonovská formulace mnohem složitější, lze tento integrál definovat přímo pomocí Lagrangeovy akce.

Po několika úpravách obdržíme pro skalární pole

$$Z[J] = N' \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) + J\phi \right) \right], \tag{4.19}$$

tento objekt se nazývá *partiční funkcí* nebo někdy též *generujícím funkcionálem* pro Greenovy funkce. Integrand je oscilující, což je problematické. Standardní řešení tohoto problému jsou dvě, v prvním se přidá do integrandu člen $e^{-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2}$ ($\epsilon > 0$), nebo pomocí *Wickovi rotace*, kdy analyticky prodloužíme integrál do imaginárních časů, v nich provedeme řešení a pak převedeme zpět.

Generující funkcionál se použije pro sestrojení *Greenových funkcí*, což jsou koefiencty ve funkcionálním rozkladu

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \int \mathrm{d}^4 x_n J_1 J_2 \dots J_n G^{(n)(1,\dots,n)}, \tag{4.20}$$

kde

$$G^{(n)}(1,\dots,n) = \frac{1}{\mathrm{i}^n} \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{\delta}{\delta J_2} \cdots \frac{\delta}{\delta J_n} Z[J] \bigg|_{J=0}, \tag{4.21}$$

a $J_i = J(x_i)$, tyto Greenovy funkce nyní chceme vypočítat.

Nyní zkusíme vyhodnotit případ bez potenciálu, tedy $V = 0$, použijeme regularizaci pomocí $-\mathrm{i}\epsilon$. Začínáme s následujícím funkcionálem

$$Z_0[J] \equiv N \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\left(m^2 - \mathrm{i}\epsilon\right)\phi^2 + J\phi\right)\right], \tag{4.22}$$

ten se dá dobře vyhodnotit v hybnostní reprezentaci, pro převod použijeme čtyřrozměrnou Fourierovu transformaci. Po transformaci funkcí $\phi(x)$ a $J(x)$ obdržíme následující tvar pro výraz v exponentu

$$\frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4 p \left[\tilde{\phi}'(p)\left[p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon\right]\tilde{\phi}'(-p) - \tilde{J}(p)\left[p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon\right]^{-1} \tilde{J}(-p)\right], \tag{4.23}$$

kde

$$\tilde{\phi}'(p) = \tilde{\phi}(p) + \left[p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon\right]^{-1} \tilde{J}(p). \tag{4.24}$$

Jelikož druhá část výrazu (4.23) nezávisí na ϕ je možné přepsat $W_0[J]$ následovně

$$Z_0[J] = N \exp\left[-\frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4 p \frac{\left|\tilde{J}(\phi)\right|^2}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\right] \int \mathcal{D}\phi' \exp\left[\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi' - \frac{1}{2}\left(m^2 - \mathrm{i}\epsilon\right)\phi'^2\right)\right]. \tag{4.25}$$

Ovšem výraz v exponenciále v integrálu je stejný jako původní výraz pro $W_0[J]$, pouze s $J = 0$, můžeme tedy psát

$$Z_0[J] = Z_0[0] \exp\left[-\frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4 p \frac{\tilde{J}(p)\tilde{J}(-p)}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\right]. \tag{4.26}$$

Nyní již známe explicitní závislost $W_0[J]$ na J a můžeme tedy, po provedení inverzní Fourierovy transformace, vypočítat Greenovy funkce. Po inverzní transformaci obdržíme

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= Z_0[0] \exp\left[-\frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4 x_1 \int \mathrm{d}^4 x_2 \left(J_1 \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{\mathrm{i}p\cdot(x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} J_2\right)\right] \\ &= Z_0[0] \exp\left[-\frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4 x_1 \int \mathrm{d}^4 x_2 \left(J_1 \Delta_{F12} J_2\right)\right], \end{aligned} \tag{4.27}$$

kde Δ_{F12} je Feynmanův propagátor. Toto poslední vyjádření umožňuje snadno vypočíst Greenovy funkce

$$G_0^{(2)} = \mathrm{i}\Delta_F(x_1 - x_2) \tag{4.28}$$

$$G_0^{(4)} = -\left[\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3)\right], \tag{4.29}$$

atd., kde liché Greenovy funkce jsou nulové. Z tvaru Greenových funkcí je vidět, že se dají vyjádřit jako funkce $G_0^{(2)}$. Také je vhodné přepsat generující funkcionál do následujícího tvaru

$$Z[J] = e^{\mathrm{i}W[J]}, \tag{4.30}$$

a definovat nové Greenovy funkce pomocí $W[J]$

$$\mathrm{i}W[J] = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1 \int \mathrm{d}^4x_2 \cdots \int \mathrm{d}^4x_n G_c^{(n)}(1,2,\ldots,n)\,J_1J_2\ldots J_n. \tag{4.31}$$

Případné zobecnění pro obecnější pole, ať vektorová, spinorová nebo tenzorová se dají formálně provést snadno, ovšem pro reálné výpočty je třeba být velmi opatrný.

4.3 Efektivní akce a efektivní potenciál

Důležitým faktem je, že z generujícího funkcionálu lze zkonstruovat snadno interpretovatelné lokální veličiny, například

$$\frac{\delta Z_0}{\delta J(x)} = -\mathrm{i}Z_0[J]\int \mathrm{d}^4x_1\Delta_F(x - x_1)\,J_1, \tag{4.32}$$

z čehož se dá odvodit

$$\phi_{cl}^{(0)} \equiv -\mathrm{i}\frac{\delta \ln Z_0}{\delta J} = \frac{\delta W_0}{\delta J}. \tag{4.33}$$

Z vlastností Δ_F plyne, že $\phi_{cl}^{(0)}$ splňuje klasickou pohybovou rovnici

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi_{cl}^{(0)} = J(x). \tag{4.34}$$

Tento vztah naznačuje, že je možné nahradit v rovnicích $J(x)$ za pomoci $\phi_{cl}^{(0)}$, provedeme tedy Leganderovu transformaci

$$\Gamma_0\left[\phi^{(0)_{cl}}\right] = W_0[J] - \int \mathrm{d}^4x\left(J(x)\,\phi_{cl}^{(0)}(x)\right). \tag{4.35}$$

Pokud dosadíme do tohoto vzorce naše veličiny pro reálné skalární pole, nakonec obdržíme

$$\Gamma_0\left[\phi_{cl}^{(0)}\right] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\left[\partial_\mu\phi_{cl}^{(0)}\partial^\mu\phi_{cl}^{(0)} - m^2\phi_{cl}^{(0)2}\right], \tag{4.36}$$

což je ovšem akce bez potenciálu, tedy ta se kterou jsme začali. Nabízí se tento postup aplikovat na obecný funkcionál $W[J]$ v obecném případě $V \neq 0$. Začneme výpočtem

$$\phi_{cl} \equiv -\mathrm{i}\frac{\delta \ln Z}{\delta J} = \frac{\delta W}{\delta J}, \tag{4.37}$$

a nyní definujeme *efektivní akci*

$$\Gamma[\phi_{cl}] = W[J] - \int \mathrm{d}^4x \{J(x)\phi_{cl}(x)\}. \tag{4.38}$$

Pro vyhodnocení integrálu v tomto tvaru se dá výhodně využít metoda sedlového bodu, ta byla původně vytvořena pro vyhodnocování integrálu tohoto tvaru

$$I \equiv \int \mathrm{d}x e^{-a(x)}. \tag{4.39}$$

Pokud má funkce $a(x)$ v bodě x_0 stacionární bod, lze ji aproximovat

$$a(x) \approx a(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 a''(x_0) + \ldots, \tag{4.40}$$

a integrál I jde tedy aproximovat

$$I \approx e^{-a(x_0)} \int \mathrm{d}x e^{\frac{1}{2}(x-x_0)^2 a''(x_0)}. \tag{4.41}$$

Tento integrál jde již snadno vypočítat, za předpokladu že $a''(x_0) > 0$, za zanedbání vyšších derivací. Ukazuje se, že tato metoda jde zobecnit i na případ Euklidovských dráhových integrálů. Na počátku máme Euklidovský generující funkcionál

$$Z_E[J] = N_E \int \mathcal{D}\phi \exp\{-S_E[\phi, J]\}, \tag{4.42}$$

kde S_E pro reálné skalární pole je

$$S_E[\phi, J] = \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{1}{2}\overline{\partial}_\mu\phi\overline{\partial}^\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi) - J\phi\right). \tag{4.43}$$

Operátory $\overline{\partial}_\mu$ jsou operátory ∂_μ převedené do prostoru s Euklidovskou signaturou. Akci (4.43) rozvineme okolo pole ϕ_0

$$\begin{aligned} S_E[\phi, J] = S_E[\phi_0, J] + \int \mathrm{d}^4x \left(\left.\frac{\delta S_E}{\delta\phi}\right|_{\phi_0} (\phi(x) - \phi_0(x))\right) + \\ \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \int \mathrm{d}^4x_2 \left(\left.\frac{\delta^2 S_E}{\delta\phi_1\delta\phi_2}\right|_{\phi_0} (\phi(x_1) - \phi_0(x_1))(\phi(x_2) - \phi_0(x_2))\right) + \ldots \ . \end{aligned} \tag{4.44}$$

Předpokládáme, že funkcionál S_E je stacionární, tedy že jsou splněny klasické pohybové rovnice se zdrojem

$$\left.\frac{\delta S_E}{\delta \phi}\right|_0 = 0, \tag{4.45}$$

pro náš případ reálného skalárního pole tedy

$$-\overline{\partial}^{\mu}\overline{\partial}_{\mu}\phi_0 + m^2\phi_0 + V'(\phi_0) - J = 0. \tag{4.46}$$

Z tohoto výsledku plyne

$$S_E[\phi_0, J] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4\overline{x}\left[2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi_0}\right][-J\phi_0 + V(\phi_0)], \tag{4.47}$$

a pro druhou variaci

$$\frac{\delta^2 S_E}{\delta\phi_1\delta\phi_2} = \left.\left[-\overline{\partial}^{\mu}\overline{\partial}_{\mu} + m^2 + V''(\phi)\right]\right|_{x_1}\delta(\overline{x}_1 - \overline{x}_2). \tag{4.48}$$

Z výsledku (4.48) je vidět, že se jedná o operátor, v analogii s metodou sedlového bodu můžeme psát

$$Z_E[J] \approx N_E e^{-S_E[\phi_0,J]}\int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x_1\int \mathrm{d}^4x_2\left(\phi_1\frac{\delta^2 S_E}{\delta\phi_1\delta\phi_2}\phi_2\right)\right], \tag{4.49}$$

kde $\phi_1 = \phi(x_1)$ a $\phi_2 = \phi(x_2)$. Tento Gaussovský integrál se dá formálně vyřešit (viz. [8]) a získáme tak pro případ reálného skalárního pole

$$Z_E[J] = N_E' e^{-S_E[\phi_0,J]}\left[\det\left[\left.\left(-\overline{\partial}^{\mu}\overline{\partial}_{\mu} + m^2 + V''(\phi_0)\right)\right|_{x_1}\delta(x_1 - x_2)\right]\right]^{-1/2}. \tag{4.50}$$

Výraz v determinantu se dá vypočítat například pomocí spektrální $\zeta-$funkce [1], a to díky identitě[8]

$$\det M = e^{-\zeta_M'(0)}, \tag{4.51}$$

kde ζ_M je spektrální $\zeta-$funkce utvořená z vlastních čísel a_n operátoru M, tedy

$$\zeta_M(s) = \sum_n \frac{1}{a_n^s}. \tag{4.52}$$

Snadno se přesvědčíme, že by rovnice (4.51) měla platit, budeme předpokládat že platí

$$\det A = \prod_{n=0}^{\infty}\lambda_n, \tag{4.53}$$

kde λ_n jsou vlastní čísla operátoru A, a definujeme ζ_A jako

$$\zeta_A(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^s}, \tag{4.54}$$

[1]Nejedná se o Riemannovu zeta funkci, ovšem ve speciálních případech v ní (případně nějaké její škálování) může přejít.

z těchto definic již opravdu plyne rovnice (4.51). Ještě poznamenejme, že převod do euklidovského prostoru nebyl nutný, aproximace podobná metodě sedlového bodu existuje i v případě, kdy je v exponentu imaginární číslo. Taková aproximační technika se nazývá *metoda stacionární fáze.*, pro praktický výpočet funguje podobně jako metoda sedlového bodu. Více informací o dráhových integrálech, funkcionální integraci a efektivní akci čtenář najde například v [8] či [13].

Část II

Fyzikální část

Kapitola 5

Einsteinova a Weylova gravitace

V této kapitole nejprve rychle zopakujeme hlavní rysy obecné teorie relativity a posléze představíme Weylovu modifikaci, která kromě diffeomorfní invariance je i invariantní vzhledem k lokálnímu přeškálování metriky. [1] Nakonec tyto dvě teorie srovnáme, poukážeme na rysy, které vedou ke problémům s kvantováním a připravíme si základní prostředky nutné ke kvantování Weylovi gravitace.

Einsteinova obecná teorie relativity je jedním z pilířů moderní fyziky, revolučním způsobem změnila naše chápání gravitace z univerzální síly na efekt zakřivení časoprostoru.

Navzdory desítkám let snažení se ji ovšem stále nepodařilo učinit kompatibilní s kvantovou teorií, druhým z pilířů moderní fyziky. Ještě předtím, než se ji pokusíme modifikovat, je třeba si upevnit její pochopení. Pro více detailů o obecné teorii relativity odkazujeme na [3].

5.1 Obecná teorie relativity

Jedna z úvah, která vedla Einsteina k obecné teorii relativity, je zobecnění jeho principu relativity na všechny vztažné soustavy. Tedy idea, že fyzikální zákony mají ve všech vztažných soustavách stejnou formu. Ukazuje se, že zákony formulované tenzorově toto splňují. Dalším krokem bylo identifikování gravitace se zakřivením časoprostoru, a právě tento krok byl převratný.

Obecná teorie relativty je takzvanou *metrickou* teorií gravitace, tzn. gravitace a její dynamika je popsána metrickým tenzorem a jeho dynamikou.

Z matematického hlediska požadujeme následující postuláty:

1. *Časoprostorová varieta:* Časoprostor se interpretuje jako Lorentzovská varieta dimenze 4, která je hladká, souvislá a má Hausdorffovskou topologii.

2. *Kauzalita:* Tento požadavek je komplikovanější než první, který je celkem bezesporný. Existuje mnoho formulací požadavku kauzality. My se omezíme na následující tvrzení: Mezi body p a q variety lze vyslat signál pouze pokud existuje taková křivka spojující tyto body, že její tečné vektory nejsou ani v jednom bodě prostoru-podobné

[1] tj. lokální Weylova symetrie, tedy rovnice Weylovi gravitace zůstanou nezměněny pokud se lokálně změní jednotky délky

Tyto předpoklady definují prostor, ve kterém se budeme pohybovat. Dále se postuluje *lokální zachování tenzoru energie a hybnosti*.

Dále je třeba postulovat dynamiku metriky, tedy Einsteinovy polní rovnice, ty lze odvodit následovně. Nejprve zjistíme, jak obecně vypadá kovariantní tenzor druhého řádu, který je takzvaně "form-invariantní"a je funkcí pouze metrického tenzoru a nejvýše jeho druhých derivací, a v druhých derivacích je lineární. Zajímáme se o tenzor druhého řádu, jelikož se snažíme zobecnit Newtonův gravitační zákon $\Delta\Phi = 4\pi\rho$, přirozeným zobecněním ρ je $T^{\mu\nu}$, tenzor hmoty a energie. Hledáme tedy tenzorovou rovnici pro tenzory druhého řádu. Požadavek, aby se jednalo o funkci nejvýše druhých derivací metrického tenzoru, dovoluje jednoduše definovat Cauchyho problém pro počáteční hodnoty. Máme tedy

$$F(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu,\xi}, g^{\mu\nu,\xi\sigma}) = \widetilde{F}(\widetilde{g}^{\mu\nu}, \widetilde{g}^{\mu\nu,\xi}, \widetilde{g}^{\mu\nu,\xi\sigma}) = F(\widetilde{g}^{\mu\nu}, \widetilde{g}^{\mu\nu,\xi}, \widetilde{g}^{\mu\nu,\xi\sigma}). \tag{5.1}$$

Lze ukázat, že obecně musí mít takový tenzor následující tvar,

$$F(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu,\xi}, g^{\mu\nu,\xi\sigma}) = \alpha R^{\mu\nu} + \beta R g^{\mu\nu} + \gamma g^{\mu\nu}, \tag{5.2}$$

budeme tedy předpokládat že gravitační zákon nabývá tvaru

$$\alpha R^{\mu\nu} + \beta R g^{\mu\nu} + \gamma g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \tag{5.3}$$

kde $T^{\mu\nu}$ je tenzor hmoty a energie (například kanonický) a α,β a γ jsou konstanty.

Nyní využijeme faktu, že $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, jelikož má být gravitace vázána na tenzor energie a hybnosti, pak i ona veličina musí mít nulovou divergenci, tedy

$$(\alpha R^{\mu\nu} + \beta R g^{\mu\nu} + \gamma g^{\mu\nu})_{;\mu} = 0. \tag{5.4}$$

Z této rovnice plyne omezení $\beta = -\frac{1}{2}\alpha$, volbou $\alpha = 1$ a přeznačením $\gamma = \lambda$ dostáváme

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \tag{5.5}$$

kde faktor $\frac{8\pi G}{c^4}$ je určen z Newtonovské limity (tzn. slabé pole a pomalý pohyb). Parametr λ se běžně interpretuje jako kosmologická konstanta, pokud ji položíme rovnu nule dostaneme standardní tvar Einsteinových rovnic

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \tag{5.6}$$

K Einsteinovým rovnicím se také lze dostat pomocí akčního principu, příslušná akce se nazývá *Einsteinova akce*

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} R, \tag{5.7}$$

kde R je Ricciho skalár a integrál se bere přes celý časoprostor, variací této akce podle prvků metriky získáme vakuové Einsteinovy rovnice. Pokud akce zahrnuje i Lagrangeovu funkci popisující hmotová pole, tedy

$$S \;=\; \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\,\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}\left(\frac{R}{16\pi}+\mathcal{L}_M\right)=S_{grav}+S_M, \tag{5.8}$$

kde S_{grav} je akce samotné gravitace a S_M je akce hmotových polí, konstanta $\frac{1}{16\pi}$ je určena limitou slabého pole. Variací akce (5.8) dle prvků metriky obdržíme Einsteinovy polní rovnice (5.5). Tenzor hmoty a energie je pak určen vztahem

$$T^{\mu\nu}=\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}. \tag{5.9}$$

Z předpokladů, které jsme uvedli, lze odvodit, že se částice musí pohybovat po geodetikách. Další požadavek je spíše pro zjednodušení práce a umožňuje odvození obecnějších výsledků, aniž by se bylo třeba omezovat na konkrétní typ hmoty.

Na tenzor $T^{\mu\nu}$ jsme zatím nakladli pouze podmínku, že jeho kovariantní divergence je nulová. Na tento tenzor se ovšem kladou též další podmínky, které mají v jistém smyslu zaručit "rozumnost"hmoty, také se používají v důkazech různých teorému vycházejících z obecné relativity. Těmto dodatečným podmínkám se říká *energetické podmínky*, nyní si je projdeme sestupně od nejsilnější.

1. *Dominantní energetická podmínka* vyžaduje splnění následujících dvou nerovností. Za prvé

   $$\rho \;=\; T_{ab}X^aX^b \;\geq\; 0,$$

   pro všechna časupodobná vektorová pole $\boldsymbol{X}$ mířící do budoucnosti, a za druhé vektor $-T^a_bY^b$ je kauzální vektor mířící do budoucnosti, pro všechna kauzální (časupodobná nebo světlupodobná) vektorová pole $\boldsymbol{Y}$.

2. *Slabá energetická podmínka* vyžaduje platnost pouze první z nerovností z bodu 1, tedy

   $$\rho \;=\; T_{ab}X^aX^b \;\geq\; 0$$

   pro všechna časupodobná vektorová pole $\boldsymbol{X}$ mířící do budoucnosti.

3. *Světelná energetická podmínka* požaduje splnění následující nerovnosti

   $$\rho \;=\; T_{ab}n^an^b \;\geq\; 0,$$

   pro všechny do budoucnosti orientované světlupodobné vektory $\boldsymbol{k}$.

Dominantní tedy implikuje slabou energetickou podmínku, a ta implikuje světelnou. Existuje ještě takzvaná *silná energetická podmínka*, jež též implikuje světelnou podmínku, a má následující znění

Pro všechny kauzální vektory $\boldsymbol{X}$ platí nerovnost $R_{ab}X^aX^b \;\geq\; 0$, ekvivalentně
$(T_{ab} \;-\; \frac{1}{2}Tg_{ab})X^aX^b \;\geq\; 0.$

Z řetězce implikací je jasné, že pokud není splněna světelná podmínka, není pak splněna ani žádná další. Ukazuje se, že světelná podmínka (a tedy i ostatní) je porušována kvantovými efekty (například Casimirův jev), proto je vhodnější uvažovat *zprůměrované* energetické podmínky, které zahladí krátkodobé kvantové poruchy. V nich se nevyžaduje platnost nerovností v každém bode, ale pouze jejich platnost při vystředování přes integrální křivky vektorových polí, tedy například zprůměrovaná světelná energetická podmínka má následující tvar

$$\int_C T_{ab}(\lambda) n^a(\lambda) n^b(\lambda) d\lambda \;\geq\; 0. \tag{5.10}$$

5.2 Weylova teorie gravitace

V této části se budeme zabývat Weylovou teorií gravitace, někdy též zvanou Bachova teorie gravitace. Stejně jako obecná teorie relativity, je i tato teorie metrickou teorií gravitace, liší se až v pohybových rovnicích (tedy i v akci). Budeme čerpat převážně z [4]. Začneme diskuzí unikátnosti této akce pro čtyřdimenzionální variety, poté odvodíme pohybové rovnice a sekci zakončíme diskuzí těchto rovnic.

Jak již víme obecná teorie relativity neoplývá konformní symetrií, pokud bychom takovou teorii chtěli najít, musíme tedy pozměnit pohybové rovnice. Nejsnazší způsob odvození je z akčního principu. Budeme požadovat aby integrand v akci byl konformně invariantní a z toho již bude plynout konformní invariance teorie.

Weyl v roce 1921 odvodil konformně invariantní akci, která je unikátní konformně invariantní akcí zkonstruovanou z Weylova tensoru pro variety dimenze čtyři, jedná se o *Weylovu kvadratickou akci*. Jelikož víme, že Weylův tenzor představuje konformně invariantní část Riemannova tenzoru je přirozené zkoušet jeho kontrakce a mocniny jako akci. Protože také víme, že Weylův tenzor je kompletně bezestopy jeho kontrakce nepřipadají v úvahu, nejjednodušší akcí je pak kvadrát.

$$S \;=\; \int d^4x \sqrt{-g} C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; \int d^4x \sqrt{-g} C^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} C^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} g_{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\gamma\rho} g^{\delta\sigma} \tag{5.11}$$

V kapitole o konformní symetrii ukazujeme konformní váhy veličin v akci, Weylovy tenzory jsou při této poloze indexů konformně invariantní a mají tedy váhu 0, objemový prvek $d^4x \sqrt{-g}$ má váhu n (dimenze variety) a konečně metriky mají dohromady váhu -4. Pro dimenzi čtyři je tedy celková konformní váha 0 a akce je tak konformně invariantní. Je zřejmé, že se jedná o unikátní konformní akci v dimenzi čtyři zkonstruovanou pouze z Weylova tenzoru, pro vyšší mocniny totiž metrické faktory nebudou přesně kompenzovány objemovým elementem a nepřipadají tak v úvahu. Ze stejného důvodu nejsou dovoleny ani konstantní kosmologické členy, jako $d^4x \sqrt{-g}\Lambda$.

Podívejme se nyní na pohybové rovnice a jejich odvození. Prvním krokem bude úprava akce do co nejjednodušší podoby. Z definice Weylova tenzoru lze ukázat následující rovnost

$$C^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \;-\; 2R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \;+\; \frac{1}{3} R^2. \tag{5.12}$$

Další zjednodušení umožní odečtení tzv. *Lanczosova lagrangiánu*, někdy též zvaného Gauss-Bonnetův výraz,

$$\sqrt{-g}(R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^2). \tag{5.13}$$

Tento výraz je shodný s integrandem z Gauss-Bonnetova teorému ve čtyřech dimenzích a proto je pro kompaktní varietu jeho integrál topologickým invariantem, tedy je konstantní a ve variaci akce se neprojeví.

Po těchto úpravách, a se zahrnutím Lagrangeovy hustoty pro hmotová pole, nám zůstává následující akce,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}(R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2 + \mathcal{L}_M), \tag{5.14}$$

jejíž variací získáme kýžené pohybové rovnice

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{3}R^2\right) - \nabla^2\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{6}Rg^{\mu\nu}\right) + 2R^{\mu\sigma;\nu}{}_{\sigma} - \frac{2}{3}R^{;\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}. \tag{5.15}$$

Pokud z akce neodečteme Gauss-Bonnetův člen, pak získáme pohybové rovnice v následujícím tvaru

$$(2\nabla_\sigma\nabla_\rho - R_{\rho\sigma})C^{\mu\nu\rho\sigma} = \kappa T^{\mu\nu}, \tag{5.16}$$

kde ∇_ρ je operátor kovariantní derivace a κ je konstanta, jež musí být určena z experimentu. Tenzor na levé straně je nazýván *Bachův tenzor*, lze ukázat, že je konformně invariantní a jeho divergence je nulová. Tento tvar pohybových rovnic je poněkud kompaktnější než tvar (5.15), ovšem rovnice nejsou o nic jednodušší. Z jejich tvaru je jasné, že se jedná o pohybové rovnice čtvrtého řádu. Oba tvary pohybových rovnic jsou ekvivalentní, jelikož Gauss-Bonnetův člen představuje pouze topologickou charakteristiku a tudíž neovlivní dynamiku.

5.3 Porovnání obecné teorie relativity a Weylovy teorie gravitace

Když jsme se již seznámili se základními rysy obou teorií, můžeme je začít srovnávat více do detailů. Začneme porovnáním pohybových rovnic obou teorií. Einsteinovy pohybové rovnice bez kosmologického členu nabývají tvaru

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{5.17}$$

v geometrizovaných jednotkách[2]. Jedná se nelineární soustavu 10 parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu pro $g_{\mu\nu}$. Pohybové rovnice Weylovy gravitace mohou nabývat dvou tvarů, podle toho

[2]Tedy $G = 1$ a $c = 1$.

jestli odečteme Gauss-Bonnetův člen, pokud ne tvar je

$$(2\nabla_\sigma\nabla_\rho - R_{\rho\sigma})C^{\mu\nu\rho\sigma} = \kappa T^{\mu\nu}, \tag{5.18}$$

kde konstanta κ musí být určena z experimentu, případně, pokud odečteme Gauss-Bonnetův člen

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{3}R^2\right) - \nabla^2\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{6}Rg^{\mu\nu}\right) + 2R^{\mu\sigma;\nu}{}_{\sigma} - \frac{2}{3}R^{;\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}. \tag{5.19}$$

Důležitým faktem je, že Weylovy pohybové rovnice se dají napsat jako funkce pouze Ricciho tenzoru $R_{\mu\nu}$, z toho vyplývá, že pro $R_{\mu\nu} = 0$ se ve Weylově teorii reprodukuje Einsteinovo vakuové řešení. Ovšem z tvaru rovnice (5.19) plyne, že vakuové řešení může existovat i v jiných případech. Dále je zajímavé podívat se na sféricky symetrická vakuová řešení jak Einsteinových rovnic tak i Weylových rovnic. Sféricky symetrické řešení Einsteinových rovnic je známé Schwarzschildovo řešení, metrika nabývá tvaru pro zdroj o hmotnosti M (nerotující a bez náboje)

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{5.20}$$

v geometrizovaných jednotkách. Z Birkhoffova teorému plyne, že v obecné teorii relativity pro libovolné sféricky symetrické nerotující těleso je metrika Scharzschildova. Nyní se podívejme na případ vakuového sféricky symetrického řešení Weylových pohybových rovnic. Jelikož se dá Schwarzschildovo řešení odvodit z podmínky $R_{\mu\nu} = 0$, je tedy i řešením Weylových rovnic. Zůstává ovšem otázkou jestli platí ve Weylově teorii i Birkhoffův teorém, tzn. zda nemůže existovat i jiné takové řešení. Ukazuje se, že existuje i jiné řešení, nesoucí po svých objevitelích jméno Mannheim-Kazanasovo řešení (viz [9]), s metrikou

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2\beta}{r} + \gamma r\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{1 - \frac{2\beta}{r} + \gamma r}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{5.21}$$

kde β a γ jsou konstanty, které je třeba určit. Je jasné, že pro $\frac{2\beta}{r} \gg \gamma r$ se bude blížit Schwarzschildovu řešení. Z tvaru také plyne, že pro dostatečně malé hodnoty konstanty γ by na úrovni solárního systému předpovědi konformní gravitace takřka přesně souhlasily s předpověd'mi obecné teorie relativity. Díky tomu by tyto teorie bylo těžké od sebe odlišit. Vidíme tedy, že, za stejných podmínek, má Weylova teorie gravitace více možných řešení než obecná teorie relativity. Je otázkou, zda jsou tato řešení fyzikální, tedy jestli existuje vhodná konfigurace hmoty vedoucí na tato řešení.

Nyní budeme pokračovat porovnáním dynamických stupňů volnosti obou teorií, za tímto účelem budeme studovat linearizované verze obou. Jako počáteční bod vezmeme rozklad metriky na statické pozadí a malou perturbaci, pro jednoduchost budeme předpokládat, že statické pozadí je ploché. Máme tedy rozklad metriky

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}. \tag{5.22}$$

Pokud nyní dosadíme do Einsteinových pohybových rovnic a bereme pouze do prvního stupně v $f_{\mu\nu}$ obdržíme rovnici

$$\Box f_{\mu\nu} = -16\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right), \tag{5.23}$$

v geometrizovaných jednotkách, kde $T = \eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ a byla použita "harmonická podmínka"

$$f_{\mu\nu,}{}^{\nu} = \frac{1}{2}f^{\nu}{}_{\nu,\mu}. \tag{5.24}$$

Tato podmínka je použita k částečnému zafixování souřadnic. Konkrétně invariance teorie při transformaci

$$x^{\mu} \rightarrow x^{'\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x), \tag{5.25}$$

vede na invarianci linearizované teorie vůči (za podmínky $\epsilon^2 \approx 0$)

$$f_{\mu\nu} \rightarrow f_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu,\nu} - \epsilon_{\nu,\mu}. \tag{5.26}$$

Je výhodné použít následující kombinaci $f_{\mu\nu}$

$$\bar{f}_{\mu\nu} := f_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}f^{\rho}_{\rho}, \tag{5.27}$$

pro zjednodušení rovnice (5.23). Ta nabere tvar

$$\Box\bar{f}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}. \tag{5.28}$$

Pro vakuový případ máme řešení rovnice (5.23)

$$f_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + e^{*}_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{5.29}$$

Při dodržení rovnice (5.24) můžeme provést souřadnicovou transformaci $x^{\mu} \rightarrow x^{'\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x)$ a získat

$$f^{'}_{\mu\nu,}{}^{\nu} - \frac{1}{2}f^{'\nu}{}_{\nu,\mu} = -\Box\epsilon_{\mu}. \tag{5.30}$$

Nyní můžeme zvolit další podmínku a tak plně zafixovat souřadnice. Tou podmínkou je

$$\Box\epsilon_{\mu} = 0. \tag{5.31}$$

Dohromady máme celkem osm podmínek na deset rovnic a obecná teorie relativity má tedy v lineární aproximaci dva nezávislé stupně volnosti. Pokud budeme studovat jejich transformační vlastnosti při rotacích, s využitím TT kalibrace (transverse-traceless) , zjistíme, že mají helicitu ±2. To v kvantové teorii odpovídá jedné nehmotné částici se spinem 2, tedy gravitonu [10].

Obdobný postup nyní aplikujeme na Weylovu teorii gravitace. S rozkladem metriky (5.22), kde

$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(+1,-1,-1,-1)$, získáváme linearizované pohybové rovnice ve vakuu

$$-\frac{1}{2}\left(\nabla^4\bar{h}_{\mu\nu} + V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}V^{\lambda}{}_{,\lambda}\right) = 0, \tag{5.32}$$

kde $V_\mu = \frac{1}{3}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha,\beta}{}_{,\mu} - \nabla^2\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}$ a $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}h^{\lambda}{}_{\lambda}$ je bezestopá část $h_{\mu\nu}$. Indexy se zvedají a snižují pomocí statické části metriky. Můžeme si všimnout, že rovnice (5.32) je bezestopá, to reflektuje konformní invarianci plné nelineární teorie. Navíc jsou linearizované polní rovnice invariantní vůči infinetesimálním transformacím, $x^\mu \to x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$. Tenzor $\bar{h}_{\mu\nu}$ se pod takovými to transformaci mění následovně

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu,\nu} + \epsilon_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\,\epsilon^{\lambda}{}_{,\lambda}, \tag{5.33}$$

a V_μ se mění

$$V^{\mu'} = V^\mu - \nabla^4\epsilon^\mu. \tag{5.34}$$

Jelikož máme volnost ve volbě kalibrace, můžeme zvolit ϵ^μ tak, že bude platit

$$V^{\mu'} = 0, \tag{5.35}$$

tato kalibrace se nazývá *konformní*. ϵ ještě není specifikováno unikátně, lze k němu přičíst libovolné infinetesimální funkce $\xi^\mu(x)$ splňující podmínku $\nabla^4\xi^\mu = 0$. Rovnice (5.32) má v této kalibraci tvar vlnové rovnice s vyšší derivací

$$\nabla^4\bar{h}'_{\mu\nu} = 0. \tag{5.36}$$

Řešení této rovnice má tvar (dále čárky u veličin nepíšeme a předpokládáme, že máme konformní kalibraci)

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \left(a_{\mu\nu} + b_{\mu\nu}n_\lambda x^\lambda\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \left(a^*_{\mu\nu} + b^*_{\mu\nu}n_\lambda x^\lambda\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \tag{5.37}$$

kde $a_{\mu\nu}$, $a^*_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$ i $b^*_{\mu\nu}$ jsou bezestopy (hvězdička značí komplexní sdružení matice), $k_\mu k^\mu = 0$ a $n_\mu n^\mu = 0$. Vidíme, že řešení obsahuje kromě normálních rovinných vln také nové vlny $n_\mu x^\mu \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k_\mu x^\mu}$, jejichž amplitudy rostou lineárně s časem, to jsou ona "duchová"řešení. Jelikož jsou tenzory polarizace $a_{\mu\nu}$ a $b_{\mu\nu}$ jsou symetrické a bezestopy, mají celkem 18 nezávislých složek. Konformní kalibrace snižuje tento počet na 14. Dále máme volnost ve volbě $\bar{h}_{\mu\nu}$ podle transformace

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\,\xi^{\lambda}{}_{,\lambda}, \tag{5.38}$$

kde ξ musí splňovat podmínku $\nabla^4\xi^\mu = 0$. Pokud do rovnice (5.38) dosadíme (5.37) a obdobné řešení rovnice $\bar{h}_{\mu\nu}$, získáme omezení na kalibrační transformace, které nám umožní odstranit dalších osm nezávislých složek. Po těchto operacích tedy máme nezávislých pouze šest složek. Ty odpovídají šesti dynamickým stupňům volnosti Weylovy teorie gravitace. Jsou to, po provedení rotace, abychom zjistili jejich helicitu, nehmotný stav se spinem 2, tedy graviton, nehmotný stav se spinem 1 a duchový stav se spinem 2.

Vidíme tedy, že rozdíl mezi Weylovou gravitací a obecnou teorií relativity je, že Weylova gravitace má navíc vektorový boson a duchovou částici se spinem 2. Informace o linearizované obecné teorii relativity jsme čerpali z [10] a informace o linearizované Weylově teorii pochází z [11], v nich lze také dohledat další detaily výpočtů.

Kapitola 6

Kvantování gravitace

Jedním z největších nevyřešených problémů moderní fyziky je otázka kvantové gravitace. V současné době jsou tři ze čtyř základních interakcí popsány pomocí kvantových teorií pole (z matematického hlediska kalibračními teoriemi). Na druhé straně je gravitace popsána čistě klasicky pomocí Einsteinovy obecné teorie relativity. Motivací pro kvantování gravitace je mnoho, jednou z nich je například fakt, že veškerá hmota je popsána pomocí kvantových teorií a tedy i tenzor hmoty a energie by měl mít kvantový charakter, z Einsteinových rovnic pak tedy i gravitace by měla mít tento charakter.

V této kapitole nejprve projdeme různé přístupy k tomuto problému a zvážíme jejich pro a proti, a kapitolu zakončíme využitím funkcionálního integrálu ke kvantování Weylovi gravitace. Informace čerpáme hlavně z [10] a [12].

6.1 Přístupy ke kvantování gravitace

Jak jsme již v úvodu naznačili, možných přístupů ke kvantování gravitace je vícero, základní rozdělení je na *kanonické* a *kovariantní* přístupy. V kanonických kvantizacích gravitace je základní krok převod teorie gravitace do Hamiltonova formalismu volbou vhodných proměnných, poté se provede kanonická kvantizace ve smyslu Diraca, tedy místo Poissonovy závorky se kvantuje Diracova závorka. Je třeba používat tento obecnější formalismus, jelikož se v teorie vyskytují omezení (angl. *constraints*). Nevýhodou tohoto přístupu je, že přechodem do Hamiltonova formalismu vybíráme preferovaný čas, a tady se ztrácí jasná kovariantnost teorie. Přehledem těchto přístupů začneme v následující sekci.

V kovariantních kvantizacích je důležitá snaha zachovat kovariantnost teorie, tedy se drží Lagrangeova formalismu. Do této kategorie spadá například kvantování pomocí dráhového integrálu nebo teorie implementující supersymetrie, jako teorie supergravitace.

Zcela jiným přístupem je snaha vytvořit teorie, která bude v jednotném rámci popisovat všechny známé interakce. Taková teorie by pak měla popisovat tedy i gravitaci a byla by tedy kvantovou teorií gravitace. Takové teorie se nazývají teorie všeho, jedním z kandidátů na takový typ teorie je například strunová teorie.

6.1.1 Kanonické kvantování gravitace

Jak jsme již zmínili, tento přístup vychází z kanonické kvantizace systému, tu lze ovšem provést pouze pro systémy popsané v Hamiltonovském formalismu. V této sekci se podíváme na takzvaný ADM formalismus a poté na využití takzvaných Ashtekarových proměnných.

Jelikož v Hamiltonově formalismu je třeba znát časovou souřadnici, aby bylo možné vypočíst sdružené hybnosti daných souřadnic. Je nutné převést obecnou teorii relativity do tvaru, kde toto je možné. Tomuto procesu se říká *foliace* časoprostorové variety (M, g) na prostorupodobné řezy Σ_t ekvivalentního času, tento postup se používá i v jiných oblastech například v numerické relativitě pro výpočty. Dynamickými proměnnými jsou v tomto formalismu metriky na jednotlivých řezech Σ_t indukované metrikou na M,

$$h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \tag{6.1}$$

kde n_μ je normála k Σ_t a platí $n^\mu n_\mu = -1$ a k nim sdružené hybnosti $\pi_{\mu\nu}$, v dalším textu budeme značit h_{ij} a π_{ij}, jelikož se jedná o třídimenzionální objekty. Lze ukázat že sdružené hybnosti se dají napsat pomocí vnější křivosti Σ_t neboli druhé fundamentální formy. Konzistenci řezů mezi sebou zajišťuje takzvaná *lapse N* funkce, konzistenci na daném řezu pak zajišťují *posuny vektorového pole N_i*. Tyto funkce jsou Lagrangeovými multiplikátory.

Pokud úspěšně provedeme tuto dekompozici časoprostorové variety máme již vše nutné pro klasické kvantování, tedy $h_{ij} \to \hat{h}_{ij}$ a $\pi_{ij} \to \hat{\pi}_{ij}$ za splnění komutačních relací

$$[h_{ij}, h_{kl}] = 0 \qquad [\pi_{ij}, \pi_{kl}] = 0 \qquad [h_{ij}(x), \pi_{kl}(y)] = \delta_{ik}\delta_{jl}\delta^3(x - y). \tag{6.2}$$

Celý postup odvození Hamiltoninánu zde psát nebudeme, lze ho dohledat například v [10]. Hustota Hamiltoniánu vypadá našich proměnných následovně

$$\mathcal{H}^g = 16\pi G N G_{abcd} p^{ab} p^{cd} - N\frac{\sqrt{h}\left({}^{(3)}R - 2\Lambda\right)}{16\pi G} - 2N_b\left(D_a p^{ab}\right) \tag{6.3}$$

kde $G_{abcd} := \dfrac{1}{2\sqrt{h}}\left(h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - h_{ab}h_{cd}\right)$ je takzvaná DeWittova metrika. Integrací přes objem získáme plný Hamiltonián

$$H^g := \int d^3x\, \mathcal{H}^g := \int d^3x \left(N\mathcal{H}^g_\perp + N^a\mathcal{H}^g_a\right), \tag{6.4}$$

kde

$$\mathcal{H}^g_\perp = 16\pi G G_{abcd} p^{ab} p^{cd} - \frac{\sqrt{h}\left({}^{(3)}R - 2\Lambda\right)}{16\pi G}$$
$$\mathcal{H}^g_a := -2D_b p_a^{\ a)b}.$$

V této chvíli již můžeme přepsat Einstein-Hilbertovu akci do tvaru

$$16\pi G\, S_{EH} = \int dt d^3x \left(p^{ab}\dot{h}_{ab} - N\mathcal{H}^g_\perp - N^a\mathcal{H}^g_a\right). \tag{6.5}$$

Variace akce vzhledem k multiplikátorům N, N^a vede na vazby první třídy

$$\mathcal{H}^g_\perp = 16\pi G G_{abcd} p^{ab} p^{cd} - \frac{\sqrt{h}\left({}^{(3)}R - 2\Lambda\right)}{16\pi G} \approx 0, \tag{6.6}$$

$$\mathcal{H}^g_a := -2D_b p_a^{a)b} \approx 0. \tag{6.7}$$

Nyní můžeme přistoupit k formálnímu kvantování. Jelikož proměnné jsou samy funkcemi, základním objektem kvantované teorie nebude vlnová funkce ale *vlnový funkcionál* $\Psi[h_{ab}(x)]$. Operátory $\hat{h}_{ab}$ a $\hat{\pi}_{ab}$ splňující komutační relace pak působí následovně

$$\hat{h}_{ab}\Psi[h_{ab}(x)] := h_{ab}\Psi[h_{ab}(x)], \tag{6.8}$$

$$\hat{\pi}^{cd}\Psi[h_{ab}(x)] := \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta h_{cd}}\Psi[h_{ab}(x)]. \tag{6.9}$$

Další krok je kvantování vazeb, to vede na takzvanou *Wheeler-DeWittovu rovnici*

$$\hat{\mathcal{H}}^g_\perp\Psi := \left(-16\pi G\hbar^2 G_{abcd}\frac{\delta^2}{\delta h_{ab}\delta h_{cd}} - \frac{\sqrt{h}\left({}^{(3)}R - 2\Lambda\right)}{16\pi G}\right)\Psi = 0, \tag{6.10}$$

a na hybnostní omezení

$$\hat{\mathcal{H}}^g_a\Psi := -2D_b h_{ac}\frac{\hbar}{i}\frac{\delta\Psi}{\delta h_b c} = 0. \tag{6.11}$$

Někdy se těmto rovnicím říká společně Wheeler-DeWittovi rovnice. Fyzikální interpretace první z těchto rovnic není zcela jasná, ani interpretace samotného operátoru není vůbec jednoduchá. Lze na ni nahlížet tak, že dává podmínku na fyzikalitu funkcionálů, tedy že fyzikální stavy popisují funkcionály, které patří do jádra tohoto operátoru. Interpretace druhé sady rovnic je jednoduší, popisují invarianci fyzikálních stavů vůči infinitesimálním diffeomorfismům.

Je nutné poznamenat, že toto je pouze formální kvantování, např. rovnice (6.10) není zcela dobře definovaná (například přítomnost odmocniny). Není tedy jasné, jak prakticky provést tyto výpočty, ukazuje se ovšem, že existují alternativní proměnné, *Ashtekarovy proměnné*, které tento problém nemají.

Pro jejich zavedení je třeba nejprve vzít triádu (dreibeine) na řezu Σ definovanou

$$\delta_{ij} = h_{ab} e^a_i e^b_j,$$

tři prvky triády definují ortonormální souřadný systém v každém bodě. Z tohoto vztahu lze získat

$$h^{ab} = \delta^{ij} e^a_i e^b_j \equiv e^a_i e^b_i, \tag{6.12}$$

triáda tedy přímočaře souvisí s inverzní metrikou a lze ji do jisté míry chápat jako "odmocninu"z metriky. Triády samotné nejsou zobecněnými souřadnicemi, tou jsou jejich *densitized* verze,

$$E^a_i(x) := \sqrt{|det(e^i_a)|}(x) e^i_a(x). \tag{6.13}$$

Kanonicky sdružené souřadnice lze získat z konexe a vnější křivosti, někdy se jim také říká *konexní proměnné*.

Nejprve je třeba připravit si takzvanou *spin konexi*,

$$\omega_a{}^i{}_j := \Gamma^i_{jk} e^k_a, \tag{6.14}$$

kde Γ^i_{jk} jsou Levi-Civitovy konexe vzhledem k triádě. Pomocí spin konexe definujeme běžným způsobem paralelní transport a kovariantní derivace a to vůči indexům triády (vnitřním indexům).

Dále definujeme

$$\Gamma^i_a = -\tfrac{1}{2}\omega_{ajk}\epsilon^{ijk},$$

kde ϵ_{ijk} je permutační symbol. Tato veličina odpovídá konexi při paralelním transportu infinitesimální rotací.

Ashtekarův klíčový krok bylo zavedení následující proměnné

$$GA^i_a(x) = \Gamma^i_a(x) + \beta K_{ab}(x) e^{bi}(x), \tag{6.15}$$

kde K_{ab} je vnější křivost řezu Σ a faktor β je takzvaný *Barbero-Immirziho parametr*, který může být libovolné nenulové komplexní číslo (z hlediska reálnosti veličin se většinou bere reálné číslo, většinou -1). Tyto proměnné splňují následující komutační relace

$$\left\{A^i_a(x),\, E^b_j(y)\right\} = 8\pi\beta\delta^i_j\delta^b_a\delta^3(x-y).$$

Proměnná A^i_a se bere jako nová konfigurační proměnná, a E^b_j jako příslušná sdružená hybnost. Kvantování by už nyní probíhalo stejně jako v případě ADM formalismu, podíváme se ještě nyní na tvar vazeb (a tedy i Hamiltoniánu) v těchto nových souřadnicích.

$$\tilde{\mathcal{H}}_\perp = -\frac{\sigma}{2}\frac{\epsilon^{ijk}F_{abk}}{\sqrt{|detE^a_i|}}E^a_i E^b_j + \frac{\beta^2\sigma - 1}{\beta^2\sqrt{|detE^a_i|}}E^a_i E^b_j \left(GA^i_a - \Gamma^i_a\right)\left(GA^j_b - \Gamma^j_b \approx 0\right) \tag{6.16}$$

a

$$\tilde{\mathcal{H}}_a = F^i_{ab}E^b_i \approx 0, \tag{6.17}$$

kde F^i_{ab} je křivost asociovaná s konexí A^i_a.

Ze zápisu je jasně vidět, že z hlediska kvantování vazeb jsou Ashtekarovy proměnné do jisté míry výhodnější, ovšem stále trpí silně nelineární závislostí Hamiltonovské vazby na proměnných, která komplikuje její řádné kvantování, resp. interpretaci. Další možností volby proměnných jsou *smyčkové proměnné*, na které se podíváme v další části.

6.1.2 Smyčková kvantová gravitace

Smyčková kvantová gravitace je po strunové teorie asi nejznámějším přístupem k problému kvantové gravitace. Technicky vzato tato teorie spadá do kategorie kanonického kvantování, jelikož též kvantuje klasické proměnné a jejich sdružené hybnosti, klíčový rozdíl je ovšem právě v použitých proměnných. Slovo smyčková v názvu totiž pochází z názvu proměnných, které využívá, tzv. *smyčkových proměnných*.

Vezměme uzavřenou smyčku na Σ, tedy spojité, po částech hladké zobrazení z intervalu [0,1] do Σ

$$\gamma : [0,1] \to \Sigma, \quad s \mapsto \{\gamma^a(s)\}. \tag{6.18}$$

Holonomií U[A, α] odpovídající $A_\alpha = A^i_a \tau_i$ podél křivky α je dána

$$U[A,\alpha] \in \mathrm{SU}(2), \quad U[A,\alpha](0) = \mathbb{I}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} U[A,\alpha](s) - GA_\alpha(\alpha(s))\dot{\alpha}(s)U[A,\alpha](s) = 0, \tag{6.19}$$

kde tečka značí derivaci dle parametru s. Holonomie samotné nejsou kalibračně invariantní vůči grupě SU(2), toho lze docílit výpočtem stopy. Tak dostaneme *Wilsonovy smyčky*

$$\mathcal{T}[\alpha] = \mathrm{tr}\, U[A,\alpha] \tag{6.20}$$

Následující veličina je velmi důležitá, je totiž sdružená k holonomii U[A, α]

$$E[\mathcal{S}, f] := \int \mathrm{d}\sigma_a\, E^a_i f^i, \tag{6.21}$$

kde $\mathcal{S}$ je dvou dimenzionální povrch v Σ a $f = f^i\tau_i$, $\tau_i = \frac{i}{2}\sigma_i$ kde σ_i je Pauliho matice, pro vyšší dimenze se definuje obdobně. Tato proměnná popisuje tok E^a_i (densitized triády z předchozí sekce) tímto dvou dimenzionálním povrchem.

Zajímavou vlastností těchto proměnných je fakt, že se nejedná o funkce ale o distribuce, jelikož jejich supporty jsou jedno- a dvoudimenzionální podvariety v Σ. Další důležitou vlastností je také fakt, že jsou nelokální, a je to právě tento fakt který umožňuje úspěšné kvantování.

Prvním krokem v kvantizaci je převedení vlnových funkcionálů z konexní reprezentace do smyčkové, to se provádí následovně,

$$\Psi[\alpha] = \int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} \mathcal{D}\mu[\alpha]\,\mathcal{T}[\alpha]\,\Psi[\alpha], \tag{6.22}$$

toto je možné díky existenci míry na prostoru $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. V jistém smyslu se vlastně jedná o Fourierovu transformaci mezi těmito dvěma prostory, v tomto kontextu se tato transformace nazývá *smyčková*.

Problém těchto nových stavů je, že tvoří překompletní bázi, je tedy třeba je nějakým způsobem omezit a vytvořit z nich kompletní bázi. Lineární kombinací této báze lze vytvořit bázi kompletní, jedná se o *bázi spinových sítí*.

Začněme s grafem $\Gamma_n = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, kde α_i jsou orientované po částech analytické křivky (zvané též hrany). Pokud se dvě setkají, je to pouze v jejich koncových bodech (neboli uzlech). Každé hraně je pak přiřazena holonomie $U[A,\alpha]$. Nyní se definují funkce na tomto objektu, a to pomocí tzv.

"cylindrických"funkcí. Nechť

$$f_n \ : \ [\mathrm{SU}(2)]^n \to \mathbb{C}, \tag{6.23}$$

pak následující funkce nazýváme "cylindrické"

$$\Psi_{\Gamma_n, f_n} \ = \ f_n \left(U_1, \dots, U_n \right). \tag{6.24}$$

Pro dvě skalární funkce lze následujícím způsobem definovat skalární součin

$$\langle \Psi_{\Gamma,f} | \Psi_{\Gamma,g} \rangle \ = \ \int_{[SU(2)]^n} \mathrm{d}U_1 \dots \mathrm{d}U_n \, f^*(U_1, \dots, U_n) g(U_1, \dots, U_n), \tag{6.25}$$

kde $\mathrm{d}U_1, \dots, \mathrm{d}U_n$ je Haarova míra. Pro různé grafy je tento skalární součin roven nule. Nyní můžeme přistoupit k definici samotných spinových sítí.

Spinová síť je definována tak, že každé hraně α_i grafu je přiřazen spin j_i,tedy netriviální ireducibilní reprezentaci SU(2) působící na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}_{j_i}$, kde $j_i \in \{1/2, 1, 3/2, \dots\}$. Tato přiřazení nazýváme "obarvením hran."

Nyní lze přiřadit každému vrcholu Hilbertův prostor následujícím způsobem, mějme vrchol p ve kterém se setkává k hran, pak definujeme

$$\mathcal{H}_p \ = \ \mathcal{H}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_k}. \tag{6.26}$$

V tomto prostoru nyní vezmeme ortonormální bázi a nazveme prvek této báze "obarvením"vrcholu. *Spinová síť* je tedy trojice $S\left(\Gamma, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{N}\right)$, kde Γ je graf, $\overrightarrow{j}$ jsou spiny na hranách a $\overrightarrow{N}$ je množina bazických prvků z jednotlivých vrcholů, je třeba si dávat pozor, aby nedošlo k záměnně za dvoudimenzionální plochu $\mathcal{S}$. *Stavem spinové sítě* $\Psi_S\left[A\right]$ je pak cylindrická funkce f_S asociovaná s S. Konstrukce probíhá následovně, vezmeme holonomii každé hrany v reprezentaci odpovídající j_i (lze popsat maticemi $R^{j_i}\left(U_i\right)$) a tyto matice se pak kontrahují se zvoleným prvkem báze v každém uzlu, kde se tyto hrany setkají. Výsledkem tohoto výpočtu je komplexní číslo

$$\Psi_S\left[A\right] \ = \ f_s\left(U_1, \dots, U_n\right) \ = \ \prod_{\text{hrany } i} R^{j_i}\left(U_i\right) \otimes \prod_{\text{uzly } p} N_p, \tag{6.27}$$

kde $\otimes$ značí kontrakci přes všechny indexy, vždy právě jeden index R^{j_i} odpovídá indexu prvku z N_p. Lze dokázat, že libovolné dva stavy jsou ortonormální. Tyto stavy tvoří kompletní bázi Hilberova prostoru $\mathcal{H}_{kin}$, kde stavy ještě nebyly podrobeny vazbám.

Nyní již můžeme uvažovat působení operátorů na stavech spinové sítě. Operátor holonomie působí standardně jako násobení, tedy takto

$$\hat{U}\left[A, \alpha\right] \Psi\left[\alpha\right] \ = \ U\left[A, \alpha\right] \Psi\left[\alpha\right]. \tag{6.28}$$

Sdružený operátor je definován následovně

$$\hat{E}_i\,[\mathcal{S}] \;:=\; -8\pi\beta\hbar i \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\sigma^1 \mathrm{d}\sigma^2 s\, n_a(\overrightarrow{\sigma}) \frac{\delta}{\delta A_a^i[\boldsymbol{x}(\overrightarrow{\sigma})]}, \tag{6.29}$$

kde vnoření $\mathcal{S}$ do Σ je dáno $\overrightarrow{\sigma} \equiv (\sigma^1, \sigma^2) \;\mapsto\; x^a(\sigma^1, \sigma^2)$ a $n_a(\overrightarrow{\sigma})$ je element nadplochy $\mathcal{S}$

$$n_a(\overrightarrow{\sigma}) \;=\; \epsilon_{abc} \frac{\partial x^b(\overrightarrow{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c(\overrightarrow{\sigma})}{\partial \sigma^2}.$$

Tyto operátory splňují následující komutační vztah

$$\left[\hat{U}\,[A,\alpha]\,, \hat{E}_i\,[\mathcal{S}]\right] = \mathrm{i} l_P^2 \beta \iota\,(\alpha, \mathcal{S})\, U\,[\alpha_1, A]\, \tau_i U\,[\alpha_2, A]\,, \tag{6.30}$$

kde $\iota\,(\alpha, \mathcal{S}) = \pm 1, 0$ je "průnikové číslo", které závisí na orientaci křivky α a plochy $\mathcal{S}$.

Samotný operátor $\hat{E}_i$ není kalibračně invariantní, jeho formální kvadrát už ovšem ano. Definujme

$$\hat{E}^2\,[\mathcal{S}] := \hat{E}_i\,[\mathcal{S}]\,\hat{E}_i\,[\mathcal{S}]\,, \tag{6.31}$$

působení tohoto operátoru, za předpokladu že S a $\mathcal{S}$ se pronikají pouze v jednom bodě, na spinový stav je následující,

$$\hat{E}^2\,[\mathcal{S}]\,\Psi_S\,[A] = \left(8\pi\beta l_p^2\right)^2 j\,(j+1)\,\Psi_S\,[A]\,, \tag{6.32}$$

kde l_P je Planckova délka. Pro případ více bodů průniku je třeba plochu $\mathcal{S}$ rozdělit na menší plošky kde v každé už je jen jeden průnik. Nyní lze uvažovat následující operátor

$$\hat{\mathcal{A}}\,[S] := \lim_{\rho\to\infty} \sum_{n(\rho)} \sqrt{\hat{E}_i\,[\mathcal{S}_n]\,\hat{E}_i\,[\mathcal{S}_n]}, \tag{6.33}$$

kde ρ je rozdělení plochy $\mathcal{S}$ na $n\,(\rho)$ menších plošek $\mathcal{S}_n$ tak jak jsme uvažovali výše. Tento operátor se nazývá *operátorem plochy*. Pokud na ploše $\mathcal{S}$ nejsou žádné uzly a jen konečný počet průniků P lze získat poměrně zajímavý výsledek

$$\hat{\mathcal{A}}\,[\mathcal{S}]\,\Psi_S\,[A] = 8\pi\beta l_P^2 \sum_{P\in\mathcal{S}\cap S} \sqrt{j_p\left(j_p+1\right)}\Psi_S\,[A] \;:=\; A\,[\mathcal{S}]\,\Psi_S\,[A] \tag{6.34}$$

Vlastními vektory operátoru $\hat{\mathcal{A}}\,[\mathcal{S}]$ jsou stavy spinové sítě, a je na nich reálný. Spektrum je diskrétní díky diskrétnosti spinové sítě. Nyní demonstrujeme, že název operátor plochy je oprávněný, tedy že klasická verze operátoru $\hat{\mathcal{A}}\,[\mathcal{S}]$ je opravdu plocha $\mathcal{S}$.

Za předpokladu, že rozdělení plochy $\mathcal{S}$ na plošky $\mathcal{S}_n$ je dostatečně jemné, lze psát

$$E_i\,[\mathcal{S}_n] = \int_{\mathcal{S}_n} \mathrm{d}\sigma^1 \mathrm{d}\sigma^2 n_a\left(\overrightarrow{\sigma}\right) E_i^a\left(\boldsymbol{x}\left(\overrightarrow{\sigma}\right)\right) \approx \Delta\sigma^1 \Delta\sigma^2 n_a\left(\overrightarrow{\sigma}\right) E_i^a\left(\left(\boldsymbol{x}_n \overrightarrow{\sigma}\right)\right), \tag{6.35}$$

kde $xx_n\left(\vec{\sigma}\right)$ je libovolný bod na $\mathcal{S}_n$. Pro operátor plochy nyní získáme

$$
\begin{aligned}
A\left[\mathcal{S}\right] &= \lim_{\rho\to\infty}\sum_{n(\rho)}\Delta\sigma^1\Delta\sigma^2\sqrt{n_a\left(\vec{\sigma}\right)E_i^a\left(\boldsymbol{x}_n\left(\vec{\sigma}\right)\right)n_b\left(\vec{\sigma}\right)E_i^b\left(\boldsymbol{x}_n\left(\vec{\sigma}\right)\right)}\\
&= \int_{\mathcal{S}}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{n_a\left(\vec{\sigma}\right)E_i^a\left(\boldsymbol{x}_n\left(\vec{\sigma}\right)\right)n_b\left(\vec{\sigma}\right)E_i^b\left(\boldsymbol{x}_n\left(\vec{\sigma}\right)\right)},
\end{aligned}
$$

nyní využijeme vzorce (6.12) a (6.13)

$$
A\left[\mathcal{S}\right] = \int_{\mathcal{S}}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{\det\left(h^{ab}\left(\boldsymbol{x}\right)\right)h^{33}\left(\boldsymbol{x}\right)} = \int_{\mathcal{S}}\sqrt{h_{11}h_{22}-h_{12}h_{21}} = \int_{\mathcal{S}}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{^{(2)}h}, \tag{6.36}
$$

kde ${}^{(2)}h$ je determinant dvou dimenzionální metriky na $\mathcal{S}$. Vzhledem k faktu, že klasická verze operátoru $\hat{\mathcal{A}}$ je plocha, značí předchozí výsledky, že plocha je kvantována v jednotkách proporcionálních Planckově ploše l_p^2. Tento výsledek je doposud jedním z největších přínosů smyčkové kvantové gravitace.

Tímto bychom uzavřeli diskuzi kanonických přístupů ke kvantování gravitace a podívali se na kovariantní přístupy. Začneme dráhovým, respektive funkcionálním integrálem.

6.1.3 Přístup přes dráhový/funkcionální integrál

V této části projdeme pro tuto práci nejdůležitější přístup a to kvantování s využitím dráhového integrálu. Tato metoda se řadí mezi kovariantní přístupy ke kvantování gravitace, jelikož využívá Einstein-Hilbertovu akci, a tedy nevyžaduje preferovanou časovou souřadnici.

Zobecnění dráhového integrálu, tj. sumy přes historie, pro pole se často nazývá *funkcionálním integrálem*, jelikož se integruje přes všechny možné polní konfigurace, což jsou funkce. Kvantová partiční funkce pro reálné skalární pole má funkcionálně-integrální reprezentaci

$$
Z\left[\phi\right] = \int\mathcal{D}\Phi\left(x\right)\ e^{\mathrm{i}S\left[\phi(x)\right]}. \tag{6.37}
$$

Partiční funkci lze (alespoň formálně) přímočaře zobecnit pro obecná tenzorová pole, konkrétně pro nás zajímavé gravitační pole dostaneme

$$
Z\left[g\right] = \int\mathcal{D}g_{\mu\nu}\left(x\right)e^{\mathrm{i}S\left[g_{\mu\nu}(x)\right]}, \tag{6.38}
$$

kde integrál probíhá přes všechny metriky na čtyřdimenzionální časoprostorové varietě $\mathcal{M}$ modulo grupa diffeomorfismů Diff$\mathcal{M}$ této variety. Tuto funkcionální integrál byl prvně formulován Misnerem v roce 1957 a později rigorózněji B. DeWittem. Někdy se také zahrnuje suma přes všechny možné topologie variety M, v takovém případě vypadá partiční funkce následovně

$$
Z\left[g\right] = \sum_{topologie}\int\mathcal{D}g_{\mu\nu}\left(x\right)e^{\mathrm{i}S\left[g_{\mu\nu}(x)\right]}, \tag{6.39}
$$

ovšem je nutné poznamenat že pro čtyřrozměrné časoprostory je tato procedura značně problematická, díky neklasifikovatelnosti čtyřdimenzionálních variet (viz kapitola 3).

Důležitou součástí funkcionálních integrálů je definice míry $\mathcal{D}g_{\mu\nu}$ na konfiguračním prostoru. Abychom mohli na tomto prostoru definovat objemový element, potřebujeme metriku. Za tímto účelem nejprve definujeme invariantní normu pro deformace metriky

$$\|\delta g\|^2 = \int \mathrm{d}^d x \delta g_{\mu\nu}(x) G^{\mu\nu,\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}(x), \tag{6.40}$$

kde d je dimenze variety, na které se pohybujeme, a $G^{\mu\nu,\alpha\beta}$ je takzvaná ultra-lokální supermetrika definovaná

$$G^{\mu\nu,\alpha\beta}[g(x)] = \frac{1}{2}\sqrt{g(x)}\left[g^{\mu\alpha}(x) g^{\nu\beta}(x) + g^{\mu\beta}(x) g^{\nu\alpha}(x) + \lambda g^{\mu\nu}(x) g^{\alpha\beta}(x)\right], \tag{6.41}$$

kde $\lambda \neq -\frac{2}{d}$ je reálný parametr a $g(x) = \det g_{\mu\nu}(x)$. Tuto konstrukci zavedl De Witt (De Witt, 1962,1964) a nazývá se po něm *De Wittova supermetrika*. Tato metrika nám již definujeme objemový element $\sqrt{G}$ ve funkčním prostoru, integrační míra přes $g_{\mu\nu}$ pak nabývá tvaru

$$\int \mathcal{D}g_{\mu\nu} = \int \prod_x \left[\det G[g(x)]\right]^{1/2} \prod_{\mu\geq\nu} \mathrm{d}g_{\mu\nu}(x). \tag{6.42}$$

Determinant je, až na multiplikativní konstantu, daný

$$\det G[g(x)] \propto \left(1 + \frac{1}{2} d\lambda\right)[g(x)]^{(d-4)(d+1)/4}. \tag{6.43}$$

V dimenzi čtyři tedy pro míru dostáváme

$$\int \mathcal{D}g_{\mu\nu} = \int \prod_x \prod_{\mu\geq\nu} \mathrm{d}g_{\mu\nu}(x), \tag{6.44}$$

tato míra se nazývá *DeWittova míra*.

Můžeme se zamyslet nad otázkou jestli je tato konstrukce jednoznačná, můžeme zkusit definovat supermetriku $\tilde{G}^{\mu\nu,\alpha\beta}$ takto

$$\tilde{G}^{\mu\nu,\alpha\beta}[g(x)] = \frac{1}{2}\left[g^{\mu\alpha}(x) g^{\nu\beta}(x) + g^{\mu\beta}(x) g^{\nu\alpha}(x) + \lambda g^{\mu\nu}(x) g^{\alpha\beta}(x)\right], \tag{6.45}$$

tedy stejně jako $G^{\mu\nu,\alpha\beta}$ až na prefaktor $\sqrt{g(x)}$. V čtyřech dimenzích pak pro tento případ nabírá míra následující tvar

$$\int \mathcal{D}g_{\mu\nu} = \int \prod_x [g(x)]^{-5/2} \prod_{\mu\geq\nu} \mathrm{d}g_{\mu\nu}(x), \tag{6.46}$$

a nazývá se *Misnerova míra*. Zajímavou vlastností této míry je to, že je invariantní vůči Weylovým transformacím $g_{\mu\nu} \to \Omega^2 g_{\mu\nu}$, jelikož $\prod_{\mu\geq\nu} \mathrm{d}g_{\mu\nu}(x)$ přispívá do transformace $\left(\Omega^2\right)^{10}$ a faktor $[g(x)]^{-5/2}$

přispívá $\left(\Omega^2\right)^{-10}$, a tedy se míra nemění.

Obecně můžeme uvažovat, že v supermetrice G přejdeme od faktoru $\sqrt{g} \to \sqrt{g}^{(1-\omega)}$, pak DeWittova míra odpovídá volbě $\omega = 0$ a volba $\omega = 1$ odpovídá Misnerově míře. Tato změna vede na modifikovanou gravitační míru v obecném tvaru

$$\int \mathcal{D}g_{\mu\nu} = \int \prod_x \left[g(x)\right]^{\frac{\sigma}{2}} \prod_{\mu\geq\nu} \mathrm{d}g_{\mu\nu}(x), \tag{6.47}$$

kde bereme σ je volný parametr. Existují náznaky, že je tento parametr fyzikálně irelevantní, a to z procedur využívajících dimenzionální regularizace.

Je důležité poznamenat, že navzdory jednoduchému zápisu je integrál (6.39) značně komplikovaný, což jsme například viděli díky nejednoznačnosti integrační míry. Dále je problém s konvergencí integrandu, jelikož je silně oscilující, což lze korigovat pomocí takzvané *Wickovi rotace*. Ta převede integrál do prostoru s Euklidovskou signaturou pomocí analytického pokračování z t do $-\mathrm{i}\tau$. Tato transformace zlepší konvergenci integrálu a vede k eliptickým rovnicím místo hyperbolických. Ovšem je třeba poznamenat, že ne všechny Euklidovské metriky mají takzvanou *Lorentzovskou sekci*, tedy po Wickově rotaci nedostaneme signaturu $(-, +, +, +)$, to platí pouze pro metriky s jistými symetriemi a tedy Wickova rotace není invariantní vůči diffeomorfismům.

Suma přes topologie je též problematická a to z důvodu neklasifikovatelnosti čtyřdimenzionálních variet. Další problém se dá snadno zpozorovat, pokud provedeme Wickovu rotaci pro Einstein-Hilbertovu akci s kosmologickou konstantou, z ní dostáváme

$$S_{\mathrm{E}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\,(R - 2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^3x\,\sqrt{h}K, \tag{6.48}$$

kde K je křivost na hranici $\mathcal{M}$. Pokud provedeme Weylovu transformaci metriky, $g_{\mu\nu} \to \tilde{g_{\mu\nu}} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$[1], lze ukázat neomezenost akce zdola

$$S_{\mathrm{E}}[\tilde{g}] = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\left(\Omega^2 R + 6\Omega_{;\mu}\Omega_{;\nu}g^{\mu\nu} - 2\Lambda\Omega^4\right) - \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^3x\,\sqrt{h}\Omega^2 K. \tag{6.49}$$

Kovariantní derivace u Ω lze nahradit parciálními derivacemi, jelikož se jedná o skalární pole. Je jasné, že akce (6.49) může nabývat libovolně záporných hodnot, pokud je gradient konformního faktoru Ω dostatečně velký, tomuto problému se říká *problém konformního faktoru*. Vzhledem ke komplikované struktuře integrálu (6.39) se používá zjednodušujících metod, a to buď diskretizace a přechodu ke spojité limitě (Regge kalkulus, kauzální dynamická triangulace, či grupově-polní kvantování) anebo poruchového rozvoje. My se budeme držet tohoto druhého postupu.

Hned na úvod zmiňme, že poruchový přístup má v případě kvantizace obecné teorie relativity jednu velkou slabinu, a to její *nerenormalizovatelnost*. Stručně tento termín znamená, že jelikož se v teorii mohou objevovat libovolně malé vzdálenosti (v důsledku lokálních polních operátorů), objevují se také libovolně velké hybnosti, což obecně vede k divergencím v integrálech přes hybností prostor.

[1]Připomínáme, že Ω je skalární pole.

O teorii se pak říká, že je *renormalizovatelná*, pokud redefinicí *konečného* počtu fyzikálních konstant jsme schopni tyto divergence zahrnout do redefinice paremetrů a polí. Tyto renormalizované hodnoty je třeba určit experimentálně. Teorie, která je nerenormalizovatelná, by pak potřebovala experimentálně určit nekonečně mnoho těchto parametrů, a tudíž by neměla žádnou prediktivní schopnost.

Teorie které nejsou renormalizovatelné jsou dnes interpretovány jako *efektivní teorie*, tedy že se předpokládá jejich platnost na omezené energetické škále.

Při poruchovém rozvoji použijeme takzvanou *"background-field method"*, kde metriku rozvineme okolo libovolného řešení Einsteinových rovnic

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \sqrt{32\pi G} f_{\mu\nu}, \tag{6.50}$$

kde $\bar{g}_{\mu\nu}$ je metrika časoprostorového pozadí, vůči které chceme zachovat kovarianci[2], $f_{\mu\nu}$ je pak kvantované pole popisující fluktuace na tomto fixním pozadí. Na tento rozklad nyní aplikujeme funkcionální integrál (6.39), dostaneme tak integrál přes kvantové pole $f_{\mu\nu}$ za předpokladu triviální topologie

$$Z = \int \mathcal{D} f_{\mu\nu}\, e^{\mathrm{i}S\left[f_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}\right]}. \tag{6.51}$$

Tento integrál je formálně divergentní, jelikož $f_{\mu\nu}$ je invariantní vůči kalibračním transformacím $f_{\mu\nu} \to f^{\epsilon}_{\mu\nu} := f_{\mu\nu} - \partial_\nu \epsilon_\mu - \partial_\mu \epsilon_\nu$, divergence je způsobena právě kalibračními orbitami. Pro tento případ je třeba ve výpočtu zahrnout volbu kalibrace, obecný předpis pro tento problém vytvořili Faddeev a Popov (1967) v teorii Yang-Millsových (kalibračních) polí. Postup vypadá následovně.

Nejprve je třeba zvolit kalibraci, pro gravitaci se jedná o čtyři podmínky $G_\alpha\left[f, \bar{g}\right] = 0$, ($f$ a $\bar{g}$ jsou myšleny $f_{\mu\nu}$ a $\bar{g}_{\mu\nu}$). Obecně chceme, aby kalibrace byla jednoznačná, tedy že každá kalibrační orbita je protnuta právě jednou. To bohužel není v obecném případě možné, jedná se o takzvané *Gribovovi nejednoznačnosti* (známé např. z neabelovských Yang-Millsových teorií v Coulombovské kalibraci), pro poruchový rozvoj to ovšem není relevantní. Po volbě kalibrace tedy ve funkcionálním integrálu integrujeme již jen přes oblast definovanou $G_\alpha\left[f, \bar{g}\right] = 0$. K dosažení tohoto cíle definujeme funkcionál $\Delta_G\left[f, \bar{g}\right]$, takzvaný *Faddeev-Popovův determinant* (tento název je níže ospravedlněn),

$$\Delta_G\left[f, \bar{g}\right] \cdot \int \mathcal{D}\epsilon \prod_\alpha \delta\left(G_\alpha\left[f^\epsilon, \bar{g}\right]\right) = 1. \tag{6.52}$$

Integrační míra je formální integrací přes kalibrační grupu a je zleva invariantní $\mathcal{D}\epsilon = \mathcal{D}\left(\epsilon' \epsilon\right)$. Nyní tuto jedničku vložíme do integrálu (6.51), kde s využitím kalibrační invariance Δ obdržíme

$$\int \mathcal{D}\epsilon \int \mathcal{D} f^\epsilon \prod_\alpha \delta\left(G_\alpha\left[f^\epsilon, \bar{g}\right]\right) \Delta_G\left[f, \bar{g}\right] e^{\mathrm{i}S\left[f, \bar{g}\right]}. \tag{6.53}$$

Divergentní termín z integrace přes kalibrační grupu je nyní možno vynechat, tak získáme následující

[2]Většinou se používá plochá metrika $\eta_{\mu\nu}$ pro usnadnění výpočtu.

definic integrálu:

$$Z := N \int \mathcal{D}f \prod_{\alpha} \delta\left(G_{\alpha}\left[f, \bar{g}\right]\right) \Delta_G\left[f, \bar{g}\right] e^{\mathrm{i}S\left[f, \bar{g}\right]}. \tag{6.54}$$

Na této rovnici je zajímavé to, že navzdory formální závislosti na volbě kalibrace G je ve skutečnosti kalibračně invariantní.

Díky přítomnosti delta funkce ve výrazu (6.54) můžeme rozložit $G_{\alpha}\left[f, \bar{g}\right]$ okolo $\epsilon = 0$, to nám pomůže s vyhodnocením $\Delta_G\left[f, \bar{g}\right]$,

$$G_{\alpha}\left[f^{\epsilon}, \bar{g}\right] = G_{\alpha}\left[f, \bar{g}\right] + \left(\hat{A}\epsilon\right)_{\alpha}, \tag{6.55}$$

kde $\hat{A}$ je matice s prvky $A_{\alpha\beta}$ derivací G_{α} dle ϵ^{β}. Celkem tedy máme $\Delta_G\left[f, \bar{g}\right] = \det\hat{A}$, to ospravedlňuje název Faddeev-Popův determinant.

Operátorový determinant se dá vypočíst například pomocí spektrální $\zeta-$funkce, jak bylo zmíněno v sekci o efektivní akci.

6.1.4 Další přístupy (f(R) gravitace, "higher-order"gravitace, struny)

Dalších možných přístupů ke kvantové gravitace je mnoho, jmenujme například ještě $f(R)$ gravitaci a takzvané "higher-order" teorie gravitace. Informace v této sekci jsou čerpány primárně z [12].

Začněme první zmiňovanou teorií, tedy $f(R)$ teorií gravitace. Jak název naznačuje, tento přístup vychází ze zobecnění akčního principu, místo akce ve tvaru

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} \left(R + \mathcal{L}_M\right), \tag{6.56}$$

kde $\mathcal{L}_M$ je Lagrangeova hustota hmotových polí, předpokládáme akci ve tvaru

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} \left(f(R) + \mathcal{L}_M\right). \tag{6.57}$$

Tento typ teorií byl motivován snahou renormalizovat obecnou teorii relativity, ta odpovídá volbě $f(R) = R$. Další motivace jsou pak snahy vysvětlit temnou hmotu tím, že gravitační zákon je na velkých vzdálenostech modifikován. Nejčastěji používané jsou teorie s kvadratickými korekcemi, tedy $f(R) = R + \alpha R^2$, kde α je konstanta. Tyto teorie jsou často využívány v kosmologii, jelikož umožňují konstrukci konzistentních inflačních modelů, jedním z příkladu je *Starobinskyho model gravitace*. Zajímavou poznámkou je, že se dá ukázat ekvivalence tohoto typu teorií s jiným typem modifikované gravitace, a to s takzvanými *skalárními-tenzorovými* teoriemi gravitace. To jsou teorie které předpokládají, že gravitace závisí, kromě metrického tenzoru, i na nějakém skalárním poli.

"Higher-order" teorie gravitace, někdy zvané též "higher derivate"teorie, jsou teorie jejichž pohybové rovnice obsahují derivace vyššího než druhého řádu. Stejně jako $f(R)$ teorie, i tyto teorie jsou motivovány tím, že jsou renormalizovatelné, na rozdíl od obecné teorie relativity. Jejich hlavní nevýhodou je fakt, že se v nich objevují duchové stavy narušující unitaritu případné kvantové teorie. Konformní teorie gravitace se dá chápat jako příklad higher derivative teorie. Další detaily lze dohledat v [14].

Tuto kapitolu zakončíme stručnou poznámkou o *strunové teorii*. Tato teorie původně vznikla jako kandidát na vysvětlení chování hadronů, posléze se stala kandidátem na kvantovou teorii gravitace, a to díky objevu nehmotné částice se spinem 2 ve spektru struny. Taková částice je ekvivalentní gravitonu a v nízkoenergetické limitě tak vede na obecnou teorii relativity.

Základní rozdíl mezi strunovou teorií a teoriemi pole je fakt, že základní objekt strunové teorie jsou jednodimenzionální objekty (zvané struny), místo polí definovaných v jednotlivých bodech časoprostoru. Ukazuje se také, že strunová teorie přirozeně obsahuje i vícedimenzionální struktury (angl. *brane*). Částice se v této teorii objevují právě jako excitace jednodimenzionální struny, jejich hmotnosti by tedy měly být dány hmotnostní škálou struny.

Nevýhodou této teorie je takzvaný *problém krajiny (angl. landscape problem)*, strunová teorie totiž předpovídá mnoho nepravých vakuí (odhady se liší od řádově 10^{10} až po 10^{500}) a není jasné, jak jednoznačně zvolit správné vakuum, vedoucí k našemu vesmíru.

V této chvíli ukončíme přehled přístupů ke kvantování gravitace, a v další kapitole se pokusíme naznačit jak jednu z těchto metod aplikovat na Weylovu teorii gravitace.

Kapitola 7

Kvantování Weylovy gravitace funkcionálním integrálem

V této kapitole stručně zopakujeme hlavní rysy Weylovy teorie gravitace, a poté přistoupíme k jejímu kvantování pomocí funkcionálního integrálu. Na konci naznačíme postup pro výpočet efektivní akce, resp. jednosmyčkových příspěvků do partiční funkce, využívající regularizace pomocí spektrální $\zeta-$funkce.

Jak již bylo zmíněno, Weylova teorie gravitace se od Einsteinovy obecné teorie relativity odlišuje ve třech klíčových aspektech. Za prvé, teorie je ve čtyřech dimenzích lokálně konformně invariantní, což je z hlediska kosmologie dobrá vlastnost pro popis raných fází vesmíru. Druhý rozdíl, důležitý pro kvantování, je fakt, že tato teorie je poruchově renormalizovatelná. Ovšem třetí odlišnost vede spíše ke komplikacím, a sice, že akce vede na pohybové rovnice čtvrtého řádu. Tato poslední odlišnost může vést ke komplikacím jako je neunitarita časového vývoje (díky přítomnosti takzvaných *duchových stavů*). V posledních letech se ovšem objevují typicky neporuchové analýzy systémů se zespoda neomezeným spektrem, ve kterých se tento problém neobjevuje, jako například *Pais-Uhlenbeckův oscilátor* (viz [15]). Výše uvedené naznačuje, že to, že pohybové rovnice jsou čtvrtého řádu ještě neznamená nefyzikalitu či patologie v teorii.

Základním stavebním prvkem Weylovy gravitace je Weylův tenzor křivosti $C^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$, ze kterého zkonstruujeme akci

$$S_{conf} = \int_M \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}x\, C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{7.1}$$

Pohybové rovnice této akce mají tvar

$$\left(2\nabla_\nu\nabla_\mu - R_{\mu\nu}\right)C^{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \tag{7.2}$$

a nazývají se *Bachovými rovnicemi*, podle tenzoru na levé straně.

Ekvivalentní akci v jednoduší formě získáme odečtením topologického členu, Eulerova invariantu, (v čtyřech dimenzích) jako v kapitole 5, výsledná akce má tvar

$$S_{konf} = \int_M \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2\right), \tag{7.3}$$

s pohybovými rovnicemi

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{3}R^2\right) - \nabla^2\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{6}Rg^{\mu\nu}\right) + 2R^{\mu\sigma;\nu}{}_{\sigma} - \frac{2}{3}R^{;\mu\nu} = 0. \tag{7.4}$$

Z akce (7.3) můžeme odvodit generující funkcionál

$$Z = N\sum_{topologie}\int \mathcal{D}g_{ij}\exp\left\{\int_M \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2\right)\right\}, \tag{7.5}$$

kde N je normalizující konstanta. Označíme-li akci jako $I\left[g_{\mu\nu}\right]$, potom dostáváme

$$Z = N\sum_{topologie}\int \mathcal{D}g_{ij}\exp\left\{I\left[g_{\mu\nu}\right]\right\}. \tag{7.6}$$

Jelikož chceme naznačit metodu výpočtu kvantové korekce k partiční funkci do prvního řádu (one-loop aproximation), budeme se zajímat pouze o malé variace okolo nějakého fixní časoprostoru $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Za tímto účelem nahradíme pole $g_{\mu\nu}$ polem $\tilde{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, kde $\tilde{g}_{\mu\nu}$ je nějaký klasický časoprostor, tedy řešení Bachových pohybových rovnic, a $\delta g_{\mu\nu} = \alpha h_{\mu\nu}$ je kvantová variace a α je konstanta. Akci $I\left[g_{\mu\nu} + \alpha h_{\mu\nu}\right]$ pak můžeme aproximovat okolo klasické metriky $\tilde{g}_{\mu\nu}$ jako

$$I\left[\tilde{g}_{\mu\nu} + \alpha h_{\mu\nu}\right] \cong I\left[\tilde{g}_{\mu\nu}\right] + \frac{1}{2}\alpha^2\int_M \mathrm{d}^4x_1\int_M \mathrm{d}^4x_2\left[\frac{\delta^2 I\left[g_{\mu\nu}\right]}{\delta g_{\mu\nu}(x_1)\,\delta g_{\mu\nu}(x_2)}h_{\mu\nu}(x_1)\,h_{\mu\nu}(x_2)\right] + o\left(\alpha^3\right). \tag{7.7}$$

První variace se v rovnici neobjevuje, jelikož je díky klasickým pohybovým rovnicím nulová. Budeme tedy akci aproximovat do druhého řádu v mocninách α, po dosazení do generujícího funkcionálu (7.5) dostáváme

$$Z \cong N\sum_{topologie}\exp\left\{I\left[\tilde{g}_{\mu\nu}\right]\right\}\int \mathcal{D}h_{ij}\exp\left\{\frac{1}{2}\alpha^2\int_M \mathrm{d}^4x_1\int_M \mathrm{d}^4x_2\left[\frac{\delta^2 I\left[g_{\mu\nu}\right]}{\delta g_{\mu\nu}(x_1)\,\delta g_{\mu\nu}(x_2)}h_{\mu\nu}(x_1)\,h_{\mu\nu}(x_2)\right]\right\}, \tag{7.8}$$

kde jsme mohli $I\left[\tilde{g}_{\mu\nu}\right]$ dát před funkcionální integrál, jelikož se jedná o statické pozadí.

Tento integrál se dá formálně vyřešit (viz [8], Apendix A) s výsledkem

$$Z \cong \tilde{N}\sum_{topologie}\exp\left\{I\left[\tilde{g}_{\mu\nu}\right]\right\}\det\left[\frac{\delta^2 I\left[g_{\mu\nu}\right]}{\delta g_{\mu\nu}(x_1)\,\delta g_{\mu\nu}(x_2)}\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{7.9}$$

kde $\tilde{N}$ v sobě zahrnuje konstanty co jsme dostali z integrace.

Nyní využijeme toho, že [8]

$$\det A = e^{\zeta_A'(0)}, \tag{7.10}$$

jak demonstrujeme v sekci o efektivní akci. V našem případě platí

$$A = \frac{\delta^2 I\left[g_{\mu\nu}\right]}{\delta g_{\mu\nu}(x_1)\,\delta g_{\mu\nu}(x_2)}. \tag{7.11}$$

Zde si dovolíme poznamenat, že toto regularizační schéma má oproti jiným metodám (jako například dimenzionální regularizace) tu výhodu že je provedeno ve fixní dimenzi. To je obzvláště vhodné u teorií gravitace, jelikož chování variet různých dimenzí a tenzorů popisujících křivost je velmi citlivé na volbě dimenzi. Například pokud je dim $=3$ je nutnou a postačující podmínkou plochosti prostoru nulovost takzvaného *Cottonova tenzoru*, na rozdíl od případů s dim ≥ 4, kde je touto podmínkou vymizení Weylova tenzoru. Jelikož není jasné, jak by se tyto a další podmínky mohly chovat v dimenzích $4-\epsilon$, tzn. jaké tenzory je korektní používat, je lepší volit regularizaci, jež operuje v pevně dané dimenzi.

Závěr

V této práci jsme se seznámili s obecnou teorií relativity a jejím konformně invariantním zobecněním - Weylovou teorií gravitace, zvanou též konformní gravitace. Taktéž jsme se seznámili s různými metodami kvantování, které jsou typicky používány při kvantování gravitace. V rámci studia kvantování gravitace jsme viděli, jaké rysy Weylovy gravitace vedou k problémům, a v kterých ohledech je Weylova gravitace lepší (například je renormalizovatelná a bez konformní nestability). Zaměřili jsme se převážně na kvantování pomocí metod funkcionálního integrování a s ní související efektivní akce. Též jsme viděli, jak lze využít spektrální $\zeta-$funkci k regularizaci efektivní akce ve fixní dimenzi d=4 a tím umožnit koncepčně bezproblémový výpočet funkcionálních determinantů.

V dalším výzkumu bychom rádi dokončili výpočet naznačený v poslední kapitole s možným zobecněním do dvou smyček, a zahrnutí diskuze dynamiky poblíž konformního fázového přechodu. Očekáváme, že odvozená dynamika bude značnou měrou určovat tvar inflačního potenciálu a případný mechanismus "re-heatingu"a "graceful exitu"(takzané "close to criticality behavior").

Literatura

[1] T. Frankel: *The Geometry of Physics: An Introduction, Second Edition*, (Cambridge University Press, New York, 2006)

[2] M. Fecko: *Differential Geometry and Lie Algebra for Physicists*, (Cambridge University Press, New York, 2006)

[3] S. Carroll: *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, (Pearson, London, 2003)

[4] J. Aalbers: *Conformal Symmetry in Classical Gravity, Master thesis* [online], Dostupné z `https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/280136`

[5] S. Friedl: *Lecture notes, An Introduction to 3-manifolds and their fundamental groups*

[6] R. E. Gompf: *Three Exotic R4'S and other anomalies* [online], Dostupné z `http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.jdg/1214437666`

[7] S. Rosenberg: *Gauss-Bonnet theorems for noncompact surfaces* [online], Dostupné z `http://www.ams.org/journals/proc/1982-086-01/S0002-9939-1982-0663893-8/S0002-9939-1982-0663893-8.pdf`

[8] P. Ramond: *Field Theory: A Modern Primer*, (Avalon Publishing, 1997)

[9] P.D. Mannheim a D. Kazanas : *Exact vacuum solution to conformal weyl gravity and galactic rotation curves*, (Astrophysical Journal, part 1, 342: 635-638, 1989) `http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?bibcode=1989ApJ...342..635M&db_key=AST&page_ind=2&plate_select=NO&data_type=GIF&type=SCREEN_GIF&classic=YES`

[10] C. Kiefer: *Quantum Gravity: Third Edition*, (Oxford University Press, 2012)

[11] R.J. Riegert: *The particle content of linearized conformal gravity*, Phys. Lett. A 105, 110 (1984)

[12] S. Capozziello a V. Faraoni: *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theorie for Cosmology and Astrophysics*, (Springer, New York, 2011)

[13] H.W. Hamber: *Quantum Gravitation: The Feynman Path Integral Approach*, (Springer, London, 2009)

[14] S. A. Woolliams: *Higher Derivative Theories of Gravity, Master thesis* [online], Dostupné z http://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/theoretical-physics/msc/dissertations/2013/LI_INCOMPACT3D2014.pdf

[15] I. B. Ihlan a A. Kovner: *Some Comments on Ghosts and Unitarity: The Pais-Uhlenbeck Oscillator Revisited*, (arXiv:1301.4879)

[16] P. Jizba, H. Kleinert a F. Scardigli: *Inflationary cosmology from quantum Conformal Gravity*, (Eur. Phys. J C 75 (2015) 245)