České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematická fyzika

Yang-Baxterovy sigma modely a jejich Laxovy páry

Yang-Baxter sigma models and their Lax pairs

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval: Bc. Filip Petrásek
Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Rok: 2014

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

1. Seznámit se s teorií Poisson-Lieovy T-duality.
2. Seznámit se podrobně s Yang-Baxterovými sigma modely.
3. Seznámit se s principálními chirálními modely.
4. Porovnat Laxovy páry nalezené v [4] a [7].
5. Pokusit se rozšířit metodu práce [4] na totálně anisotropní $SU(2)$ model.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil pouze literaturu uvedenou v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne ....

....
Bc. Filip Petrásek

Poděkování

Děkuji prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc. za vedení mé diplomové práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily.

Dále bych chtěl poděkovat své rodině a především své přítelkyni za bezmeznou podporu a trpělivost při psaní této práce.

Bc. Filip Petrásek

Název práce:
Yang-Baxterovy sigma modely a jejich Laxovy páry

Autor: Bc. Filip Petrásek

Obor: Matematická fyzika
Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská,
České vysoké učení technické v Praze
Konzultant: —

Abstrakt: Integrabilitu nelineárních σ-modelů lze chápat ve smyslu existence 1-parametrické Laxovy formulace příslušných polních rovnic. V práci [4] se ukázalo, že Yang-Baxterovy σ-modely jsou integrabilní. Na základě obecného výsledku nalezneme Laxův pár Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu. Laxovy páry zobecněného principálního chirálního modelu jsou definovány pomocí Sochenových rovnic. Tyto rovnice řešíme pro případ Lieovy grupy $SU(2)$. V této práci také diskutujeme důležitou vlastnost Laxových párů týkající se Bianchiho identit.

Klíčová slova: Laxův pár, integrabilní model, Yang-Baxterův σ-model, zobecněný principální chirální model, $SU(2)$.

Title:
Yang-Baxter sigma models and their Lax pairs

Author: Bc. Filip Petrásek

Abstract: The integrability of nonlinear σ-models can be considered as the existence of 1-parametric Lax formulation of the field equations. There has been shown in paper [4] that Yang-Baxter σ-models are integrable. Considering the general result we find Lax pair for Yang-Baxter $SU(2)$ model. The Sochen equations that define the Lax pairs for generalized principal chiral models are given. We solve these equations for the case of Lie group $SU(2)$. The important property of Lax pairs relating to Bianchi identities is discussed as well.

Key words: Lax pair, integrable model, Yang-Baxter σ-model, generalized principal chiral model, $SU(2)$.

Obsah

Úvod

Pojem integrability nelineárních parciálních diferenciálních rovnic je možné chápat na úrovni existence jejich 1-parametrické Laxovy formulace. Příslušný Laxův pár lze v určitých případech použít k jejich následné linearizaci tzv. metodou obrácené úlohy rozptylu (ISM), kterou lze považovat za nelineární analogii Fourierově transformaci. Laxovy páry tedy mohou v některých případech představovat nepřímé generátory řešení nelineárních parciálních diferenciálních rovnic ve smyslu ISM. Pro parciální diferenciální rovnici, kterou lze ekvivalentně vyjádřit právě Laxovou formulací, plyne například existence nekonečně mnoha lokálních zákonů zachování. Dále se otázka integrability chápané ve smyslu ISM nakonec redukuje na tzv. Riemann-Hilbertův faktorizační problém. Poznamenejme, že Laxovy páry se také používají při vytváření tzv. hierarchií parciálních diferenciálních rovnic.

Třída známých integrabilních 2-rozměrných nelineárních σ-modelů definovaných na grupových varietách není příliš rozsáhlá. Konkrétně pro každou prostou kompaktní Lieovu grupu G je vzhledem k práci [8] znám Laxův pár tzv. principálního chirálního modelu definovaného akcí ve tvaru

$$S(g) = \int_W d\xi^+ d\xi^- (g^{-1}\partial_+ g, g^{-1}\partial_- g)_{\mathcal{G}}.$$

Pro Lieovu grupu $G = SU(2)$ zkonstruoval I. V. Cherednik dokonce Laxův pár pro jistou 1-parametrickou deformaci principálního chirálního modelu, která se často označuje jako anisotropní principální chirální model. Akce tohoto deformovaného modelu má podle [3] tvar

$$S_\varepsilon(g) = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \int_W d\xi^+ d\xi^- (g^{-1}\partial_+ g, g^{-1}\partial_- g)_{\mathfrak{su}(2)}$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \int_W d\xi^+ d\xi^- ((g^{-1}\partial_+ g)_H, (g^{-1}\partial_- g)_H)_{\mathfrak{su}(2)},$$

kde $(g^{-1}\partial_\pm g)_H$ jsou ortogonální projekce chirálních komponent Maurer-Cartanovy formy na Cartanovu podalgebru Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$. V práci [4] byla následně tato skutečnost zobecněna, přičemž byl nalezen Laxův pár tzv. Yang-Baxterova σ-modelu definovaného na kompaktní prosté Lieově grupě G pomocí akce ve tvaru

$$S_\varepsilon(g) = \int_W d\xi^+ d\xi^- (g^{-1}\partial_+ g, (I - \varepsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathcal{G}},$$

kde R je tzv. Yang-Baxterův operátor.

Dále byly v práci [7], resp. [1] nalezeny Laxovy páry anisotropního, resp. totálně anisotropního případu tzv. zobecněného $SU(2)$ modelu definovaného akcí ve tvaru

$$S(g) = \frac{1}{2} \int_W d\sigma d\tau \; L_{ij}(g) u^i_\mu u^{\mu,j},$$

kde $L(g)$ je symetrická nedegenerovaná bilineární forma na $\mathfrak{su}(2)$.

První čtyři kapitoly představují rešeršní část této diplomové práce.

V první kapitole je na základě práce [5] představena teorie 2-rozměrných nelineárních σ-modelů v rámci tzv. Poisson-Lieovy T-duality užívané v teorii strun. Řešení pohybových rovnic σ-modelu v zakřiveném pozadí lze nalézt právě pomocí Poisson-Lieovy T-duality, která v některých případech umožňuje tyto rovnice převést na pohybové rovnice v plochém pozadí.

Ve druhé kapitole je podle přednášky [6] stručně představen koncept tzv. Laxova formalismu. Na integrabilitu nelineárních parciálních diferenciálních rovnic je zde nahlíženo jako na existenci jim odpovídající Laxovy formulace obsahující závislost na volném spektrálním parametru. Pro účel této práce je podstatná především tzv. reprezentace nulové křivosti.

Ve třetí kapitole je na základě práce [4] podrobně popsána metoda nalezení Laxova páru Yang-Baxterova σ-modelu, který lze také považovat za pravou Poisson-Lieovu ε-deformaci principálního chirálního modelu. Následně se zde zabýváme významnou vlastností týkající se příslušných Bianchiho identit.

Ve čtvrté kapitole je ve smyslu práce [7] upřena pozornost na tzv. zobecněný principální chirální model, kde je Killing-Cartanova forma přirozeně nahrazena symetrickou nedegenerovanou bilineární formou $L(g)$, kterou lze navíc považovat za metriku na grupové varietě. Laxův formalismus zobecněného principálního chirálního modelu je reprezentován tzv. Sochenovými rovnicemi, které mají charakter nelineárních algebraických rovnic. V této části jsou také užity poznatky práce [1].

V poslední nejdůležitější kapitole je pak autorem řešena příslušná problematika a nalezené výsledky lze považovat za přidanou výstupní hodnotu této diplomové práce.

V této páté kapitole se pro konkrétní volbu kompaktní prosté Lieovy grupy $SU(2)$ zabýváme vzájemnou souvislostí Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu a tzv. anisotropního $SU(2)$ modelu. Dále zde zkoumáme Laxův pár nalezený metodou práce [4], resp. metodou práce [7] ve smyslu řešení Sochenových rovnic a následně diskutujeme jeho vztah vzhledem k příslušným Bianchiho identitám. V této části se také pokoušíme zobecnit koncept Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu vzhledem k tzv. totálně anisotropnímu $SU(2)$ modelu. Na závěr detailně zkoumáme Sochenovy rovnice v totálně anisotropním případě zobecněného $SU(2)$ modelu.

Kapitola 1

Poisson-Lieova T-dualita

V této kapitole je představena tzv. Poisson-Lieova T-dualita, přičemž využíváme především práci [5].

Duální symetrie zaujímají významnou úlohu v teorii strun. Představují nástroje pro odhalení jejich symetrické struktury a umožňují nám pochopit geometrii prostoročasu z hlediska právě této teorie.

Definice 1.0.1 *2-rozměrný nelineární σ-model je teorie pole, které je kanonicky přiřazena metrika (symetrický tenzor) G_{ij} a 2-forma (antisymetrický tenzor) B_{ij} na cílové varietě $M[x^i]$.*

Akce takového σ-modelu je v lokálních souřadnicích x^i definována jako

$$S = \int_W d\xi^+ d\xi^- (G_{ij}(x) + B_{ij}(x))\partial_+ x^i \partial_- x^j = \int_W d\xi^+ d\xi^- F_{ij}(x)\partial_+ x^i \partial_- x^j, \qquad (1.1)$$

kde $W[\xi^+, \xi^-]$ je strunová světoplocha v souřadnicích světelného kuželu. Dále $F_{ij}(x)$ představuje tzv. tenzorové pole σ-modelu na varietě M.

Pro σ-model vybavený globální neabelovskou isometrií vzhledem ke grupě G lze nalézt neabelovský duální σ-model, který však postrádá potřebnou isometrii, která by umožňovala provést duální transformaci zpět do původního σ-modelu. Lze ukázat, že tyto modely opravdu duální jsou, avšak v novém tzv. Poisson-Lieově smyslu.

1.1 Maninovy trojice a T-dualita

V této části je popsána konstrukce duálního páru σ-modelů, které jsou ekvivalentní ve smyslu stejných polních rovnic a stejné symplektické struktury jejich fázových prostorů.

Tyto σ-modely jsou duální ve smyslu Poisson-Lieovy T-duality, která je zobecněním standardní abelovské T-duality, přičemž se ukazuje, že v rámci již neabelovské T-duality představuje klíčovou úlohu struktura Drinfeldova doublu.

Definice 1.1.1 *Drinfeldův double je souvislá Lieova grupa D taková, že její Lieovu algebru $\mathcal{D}$, která je vybavená symetrickou, ad-invariantní, nedegenerovanou bilineární formou $\langle\ ,\ \rangle$, lze rozložit na dvě maximálně isotropní Lieovy podalgebry $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ a na úrovni vektorových prostorů je*

$$\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \tilde{\mathcal{G}}.$$

Uspořádanou trojici $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ nazýváme Maninovou trojicí. $M(\mathcal{D})$ pak označuje množinu Maninových trojic odpovídající danému Drinfeldovu doublu D.

Množina $M(\mathcal{D})$ představuje modulární prostor σ-modelů, které jsou vzájemně spojeny Poisson-Lieovou T-duální transformací.

Poznamenejme, že množina $M(\mathcal{D})$ má vždy alespoň dva prvky $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ a duální Maninovu trojici $(\mathcal{D}, \tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{G})$.

Poznámka 1.1.2 *V případě abelovské T-duality je Drinfeldův double $D_{abel} = U(1)^{2n}$ a jeho modulární prostor je $M(\mathcal{D}_{abel}) = O(d, d, \mathbb{Z})$.*

Klasifikace různých T-dualit je popsána odpovídajícím typem Drinfeldova doublu:

i) Abelovské Drinfeldovy doubly, které odpovídají standardní abelovské T-dualitě.

ii) Poloabelovské Drinfeldovy doubly, kde existuje rozklad s jednou abelovskou Lieovou podalgebrou $\tilde{\mathcal{G}}$. Tyto doubly odpovídají standardní neabelovské T-dualitě mezi G-isometrickým σ-modelem s cílovou varietou G a neisometrickým σ-modelem s cílovou varietou $\tilde{\mathcal{G}}$, kterou lze považovat za abelovskou grupu.

iii) Neabelovské Drinfeldovy doubly, které odpovídají netriviální Poisson-Lieově T-dualitě, kde žádný ze σ-modelů duálního páru není isometrický vzhledem k akci grupy, která přirozeně působí na cílovou varietu.

Definice 1.1.3 *Nechť $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ je Maninova trojice. Pak Lieovu grupu G s Lieovou algebrou $\mathcal{G}$ nazýváme grupou duality a Lieovu grupu $\tilde{G}$ s Lieovou algebrou $\tilde{\mathcal{G}}$ nazýváme grupou koduality.*

Lze ukázat, že ke každému rozkladu $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ existují σ-modely takové, že grupa duality G působí volně na jejich cílové variety a že tato akce je Poisson-Lieovsky symetrická vzhledem ke grupě koduality $\tilde{G}$. Každý takový σ-model má svůj duální protějšek, pro který se úlohy grupy duality a koduality pouze zamění. Duální σ-model sdílí tvar polních rovnic s původním modelem a navíc je duální zobrazení symplektomorfismus mezi fázovými prostory obou σ-modelů.

Pro přehlednost nejprve uvažujme případ tzv. atomické duality, kde grupa duality působí na cílovou varietu výsledného σ-modelu nejen volně, ale i tranzitivně. To znamená, že samotnou cílovou varietu lze ztotožnit s grupovou varietou.

Poznámka 1.1.4 *Pokud grupa duality nepůsobí tranzitivně na cílovou varietu σ-modelu, pak volná akce znamená, že cílová varieta je principální G-bundle. Tato situace se označuje jako tzv. Buscherova dualita.*

Poznámka 1.1.5 *V abelovském případě s grupou duality $U(1)$ a další grupou koduality $U(1)$, představuje atomická dualita fakt, že cílová varieta je 1-rozměrná kružnice. Jedná se tedy o standardní $R \mapsto \frac{1}{R}$ dualitu.*

V případě poloabelovského Drinfeldova doublu je nejstandardnější příklad atomické duality tzv. principální chirální model na prosté Lieově grupě G s lagrangiánem

$$\mathcal{L}(g) = Tr(g^{-1}\partial_+ g)(g^{-1}\partial_- g)$$

a jeho duální model s lagrangiánem

$$\tilde{\mathcal{L}}(\chi) = \tilde{F}^{ab}(\chi)\partial_+\chi_a\partial_-\chi_b,$$

kde χ_a jsou souřadnice prvků Lieovy algebry $\tilde{\mathcal{G}}$ a matice $\tilde{F}^{ab}(\chi)$ je definována jako

$$(\tilde{F}^{-1})_{ab}(\chi) = \delta_{ab} + \chi_k {f_{ab}}^k,$$

kde ${f_{ab}}^k$ jsou strukturní koeficienty Lieovy algebry $\mathcal{G}$ odpovídající Lieově grupě G. Grupa koduality je v tomto případě abelovská grupa s počtem generátorů, který odpovídá dimenzi Lieovy algebry $\mathcal{G}$.

Tyto výsledky lze získat volbou Drinfeldova doublu typu i) a ii) v následujícím postupu platném pro obecný Drinfeldův double.

Uvažujme Drinfeldův double D s Lieovou algebrou $\mathcal{D}$ dimenze $2n$ s rozkladem v podobě Maninovy trojice $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$.

Dále nechť $\mathcal{E}^+$ je n-rozměrný vektorový podprostor Lieovy algebry $\mathcal{D}$ a $\mathcal{E}^-$ je odpovídající ortogonální doplněk vzhledem k bilineární formě $\langle\, ,\, \rangle$ takový, že na úrovni vektorových prostorů platí

$$\mathcal{D} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-, \quad \mathcal{E}^\pm \cap \mathcal{G} = \mathcal{E}^\pm \cap \tilde{\mathcal{G}} = \{0\}.$$

Lze ukázat, že tyto předpoklady určují duální pár σ-modelů, jejichž cílovými prostory jsou Lieovy grupy G a $\tilde{G}$.

Postulujme polní rovnice pro zobrazení $l(\xi^+, \xi^-)$ ze strunové světoplochy $W[\xi^+, \xi^-]$ do Drinfeldova doublu D ve tvaru

$$\langle \partial_\pm l\, l^{-1}, \mathcal{E}^\pm \rangle = 0. \tag{1.2}$$

Drinfeld ukázal, že každý prvek $l(\xi^+, \xi^-) \in D$ lze na okolí jednotky jednoznačně zapsat ve tvaru součinu

$$l(\xi^+, \xi^-) = g(\xi^+, \xi^-)\tilde{h}(\xi^+, \xi^-), \tag{1.3}$$

kde $g(\xi^+, \xi^-) \in G$ a $\tilde{h}(\xi^+, \xi^-) \in \tilde{G}$.

Dosazením výrazu (1.3) do rovnice (1.2) dostaneme

$$\langle g^{-1}\partial_\pm g + (\partial_\pm \tilde{h})\tilde{h}^{-1}, g^{-1}\mathcal{E}^\pm g \rangle = 0. \tag{1.4}$$

Poznámka 1.1.6 *Z definice 1.1.1 plyne, že dimenze Lieových algeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ jsou stejné a jejich báze*

$$\{X_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{G}, \quad \{\tilde{X}^i\}_{i=1}^n \in \tilde{\mathcal{G}},$$

lze volit v tzv. duálním tvaru

$$\langle X_i, X_j \rangle = 0, \quad \langle X_i, \tilde{X}^j \rangle = \delta_i^j, \quad \langle \tilde{X}^i, \tilde{X}^j \rangle = 0. \tag{1.5}$$

Lieova závorka je definována strukturními koeficienty

$$[X_i, X_j] = f_{ij}{}^k X_k, \quad [\tilde{X}^i, \tilde{X}^j] = \tilde{f}^{ij}{}_k \tilde{X}^k.$$

Z ad-invariance bilineární formy plyne, že struktura Lieovy algebry $\mathcal{D}$ je určena jako

$$[X_i, \tilde{X}^j] = f_{ki}{}^j \tilde{X}^k + \tilde{f}^{jk}{}_i X_k. \tag{1.6}$$

Pomocí duální báze lze dále definovat matici $E_{ij}(g)$ a zapsat následující výrazy

$$g^{-1}\mathcal{E}^+ g = \mathrm{span}\{X_i + E_{ij}(g)\tilde{X}^j\}_{i=1}^n, \tag{1.7}$$

$$g^{-1}\mathcal{E}^- g = \mathrm{span}\{X_i - E_{ji}(g)\tilde{X}^j\}_{i=1}^n. \tag{1.8}$$

Dosazením (1.7) a (1.8) do rovnice (1.4) dostaneme

$$-(\partial_+ \tilde{h}\, \tilde{h}^{-1})_i = E_{ij}(g)(g^{-1}\partial_+ g)^j =: A_i^+(g), \tag{1.9}$$

$$-(\partial_- \tilde{h}\, \tilde{h}^{-1})_i = -E_{ji}(g)(g^{-1}\partial_- g)^j =: A_i^-(g), \tag{1.10}$$

kde $(\partial_+ \tilde{h}\, \tilde{h}^{-1})_i = \langle \partial_+ \tilde{h}\, \tilde{h}^{-1}, X_i \rangle$ a $(g^{-1}\partial_- g)^j = \langle g^{-1}\partial_- g, \tilde{X}^j \rangle$.

Úpravou výrazů (1.9) a (1.10) lze odstranit závislost na $\tilde{h}$ a dostat tak rovnice ve tvaru

$$\partial_+ A_i^-(g) - \partial_- A_i^+(g) - \tilde{f}^{kl}{}_i A_k^-(g) A_l^+(g) = 0. \tag{1.11}$$

Lze ukázat, že rovnice (1.11) jsou vlastně polní rovnice σ-modelu s lagrangiánem

$$\mathcal{L} = E_{ij}(g)(g^{-1}\partial_- g)^i (g^{-1}\partial_+ g)^j. \tag{1.12}$$

Podobně lze použít duální rozklad v podobě Maninovy trojice $(\mathcal{D}, \tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{G})$, přičemž

$$l(\xi^+, \xi^-) = \tilde{g}(\xi^+, \xi^-) h(\xi^+, \xi^-),$$

kde $\tilde{g}(\xi^+, \xi^-) \in \tilde{G}$ a $h(\xi^+, \xi^-) \in G$.

Analogickým postupem získáme polní rovnice duálního σ-modelu s lagrangiánem

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{E}^{ij}(\tilde{g})(\tilde{g}^{-1}\partial_- \tilde{g})_i (\tilde{g}^{-1}\partial_+ \tilde{g})_j,$$

kde matice $\tilde{E}^{ij}(\tilde{g})$ je definována jako

$$\tilde{g}^{-1}\mathcal{E}^+ \tilde{g} = \mathrm{span}\{\tilde{X}^i + \tilde{E}^{ij}(\tilde{g}) X_j\}_{i=1}^n,$$

$$\tilde{g}^{-1}\mathcal{E}^- \tilde{g} = \mathrm{span}\{\tilde{X}^i - \tilde{E}^{ji}(\tilde{g}) X_j\}_{i=1}^n.$$

Poznámka 1.1.7 *Pro speciální volbu $g = e$, $\tilde{g} = \tilde{e}$ grupových jednotek dostaneme z definice matice $E_{ij}(g)$, resp. $\tilde{E}^{ij}(\tilde{g})$ rovnost*

$$\mathcal{E}^+ = span\{X_i + E_{ij}(e)\tilde{X}^j\}_{i=1}^n = span\{\tilde{X}^i + \tilde{E}^{ij}(\tilde{e})X_j\}_{i=1}^n,$$

odkud plyne, že matice $E(e)$ a $\tilde{E}(\tilde{e})$ splňují vztah

$$E(e)\tilde{E}(\tilde{e}) = \tilde{E}(\tilde{e})E(e) = I.$$

Poisson-Lieova T-dualita je tedy zobecněním standardní abelovské $R \mapsto \frac{1}{R}$ symetrie.

Explicitní závislost E na g, resp. $\tilde{E}$ na $\tilde{g}$ je dána maticemi adjungované reprezentace. Platí, že

$$\begin{aligned} g^{-1}\mathcal{E}^+ g &= \mathrm{span}\{g^{-1}(X_i + E_{ij}(e)\tilde{X}^j)g\}_{i=1}^n \\ &= \mathrm{span}\{(a(g)_i{}^l + E_{ij}(e)b(g)^{jl})X_l + E_{ij}(e)d(g)^j{}_l\tilde{X}^l\}_{i=1}^n, \end{aligned}$$

kde

$$a(g)_i{}^l X_l = g^{-1}X_i g, \quad b(g)^{jl}X_l + d(g)^j{}_l\tilde{X}^l = g^{-1}\tilde{X}^j g. \tag{1.13}$$

Podle vztahu (1.7) pak vyjádříme matici σ-modelu $E(g)$ jako

$$E(g) = (a(g) + E(e)b(g))^{-1}E(e)d(g). \tag{1.14}$$

Podobně lze získat matici duálního σ-modelu $\tilde{E}(\tilde{g})$ jako

$$\tilde{E}(\tilde{g}) = (\tilde{a}(\tilde{g}) + \tilde{E}(\tilde{e})\tilde{b}(\tilde{g}))^{-1}\tilde{E}(\tilde{e})\tilde{d}(\tilde{g}).$$

Poznámka 1.1.8 *Lieovu grupu G lze zřejmě uvažovat jako maticovou Lieovu grupu, což umožňuje vztahy (1.13) přepsat jako*

$$a(g)_i{}^l X_l = Ad_{g^{-1}}X_i, \quad b(g)^{jl}X_l + d(g)^j{}_l\tilde{X}^l = Ad^{\tilde{\mathcal{G}}}_{g^{-1}}\tilde{X}^j, \tag{1.15}$$

resp. vyjádřit ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a(g) & 0 \\ b(g) & d(g) \end{pmatrix} = \left(Ad^{\mathcal{D}}_{g^{-1}}\right)^T. \tag{1.16}$$

Vzhledem k duálnímu tvaru bází Lieových algeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ podle (1.5), ad-invarianci bilineární formy $\langle\ ,\ \rangle$ a vztahům (1.15) navíc platí

$$\begin{aligned} \delta_i{}^j &= \langle X_i, \tilde{X}^j\rangle = \langle Ad_{g^{-1}}X_i, Ad^{\tilde{\mathcal{G}}}_{g^{-1}}\tilde{X}^j\rangle \\ &= \langle a(g)_i{}^l X_l, b(g)^{jk}X_k + d(g)^j{}_k\tilde{X}^k\rangle = a(g)_i{}^l d(g)^j{}_k\delta_l{}^k = a(g)_i{}^l d(g)^j{}_l, \end{aligned}$$

odkud tedy plyne závislost matice $d(g)$ jako

$$d(g) = a(g)^{-T}. \tag{1.17}$$

Analogické vztahy platí i pro případ duálního σ-modelu.

Existuje-li jiný rozklad Drinfeldova doublu D v podobě Maninovy trojice $(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \tilde{\mathcal{K}})$, získáme další pár duálních σ-modelů s maticemi $E'(k)$ a $\tilde{E}'(\tilde{k})$. Tento nový duální pár opět sdílí polní rovnice (1.2) s předešlým duálním párem. Odtud tedy skutečně plyne, že množina vzájemně ekvivalentních σ-modelů je právě množina $M(\mathcal{D})$.

Poznámka 1.1.9 *Původní polní rovnice (1.2) mají rozsáhlou symetrii ve smyslu*

$$l \mapsto lm, \quad m \in D.$$

V teorii σ-modelu se tato symetrie realizuje tzv. nelokálním způsobem. To znamená, že z hlediska geometrie cílové variety se nejedná o její isometrii.

Pouze v určitých případech abelovské a poloabelovské T-duality je část této symetrie realizována lokálně, což vede k určitým isometriím. Toto je důvod, proč byla T-dualita dlouho spojována s isometriemi cílové variety.

V případě Buscherovy duality lze postupovat velmi podobně. Proto je dále uveden pouze finální tvar duálního páru σ-modelů.

Nechť $\{y^\alpha\}_{\alpha=1}^k$ jsou souřadnice značící orbity Lieovy grupy G v cílové varietě M.

Lagrangián σ-modelu má pak následující tvar

$$\mathcal{L} = E_{\alpha\beta}(y)\partial_- y^\alpha \partial_+ y^\beta + E_{\alpha j}(y,g)\partial_- y^\alpha (g^{-1}\partial_+ g)^j$$
$$+E_{i\beta}(y,g)(g^{-1}\partial_- g)^i \partial_+ y^\beta + E_{ij}(y,g)(g^{-1}\partial_- g)^i (g^{-1}\partial_+ g)^j.$$

Závislost E_{ij} na g je fixována podmínkou (1.22), tj.

$$E(y,g) = (A(g) + E(y,e)B(g))^{-1}E(y,e)D(g), \tag{1.18}$$

kde e je jednotka Lieovy grupy G, $E(y,e)$ lze volit libovolně,

$$A(g) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & a(g) \end{pmatrix}, \quad B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b(g) \end{pmatrix}, \quad D(g) := \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & d(g) \end{pmatrix}$$

jsou matice $(k+n)\times(k+n)$, kde $a(g)$, $b(g)$ a $d(g)$ jsou matice definované dle (1.13).

Matice σ-modelu $E(y,g)$ dána vztahem (1.18) představuje nejobecnější řešení podmínky (1.22) v souřadnicích (y,g).

Pro duální σ-model pak platí

$$\tilde{E}(y,\tilde{g}) = (\tilde{A}(\tilde{g}) + \tilde{E}(y,\tilde{e})\tilde{B}(\tilde{g}))^{-1}\tilde{E}(y,\tilde{e})\tilde{D}(\tilde{g}),$$

kde

$$\tilde{E}(y,\tilde{e}) = (A + E(y,e)B)^{-1}(C + E(y,e)D),$$

přičemž

$$A = D = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix}.$$

1.2 Poisson-Lieova symetrie

Přirozeně nastává otázka, kdy σ-model s volnou pravou akcí Lieovy grupy G na jeho cílové varietě M připouští konstrukci Poisson-Lieova duálního σ-modelu s nějakou grupou koduality $\tilde{G}$. Potřebnou vlastnost představuje tzv. Poisson-Lieova symetrie σ-modelu, která je definována následovně.

Definice 1.2.1 *Řekneme, že σ-model (1.1) s pravou volnou akcí Lieovy grupy G na cílové varietě $M[x^i]$ je Poisson-Lieovsky symetrický vzhledem k akci G na M, pokud*

$$\mathcal{L}_{V_a} F_{ij} = -\tilde{f}^{kl}{}_a V_k^m V_l^n F_{mj} F_{in}, \tag{1.19}$$

kde $V_a(x) = V_a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ jsou levoinvariantní vektorová pole na M odpovídající pravé akci G na M, $\mathcal{L}_{V_a}$ označuje Lieovu derivaci podél vektorového pole V_a definovanou jako

$$\mathcal{L}_{V_a} F_{ij} = F_{ij,l} V_a^l + F_{lj} V_{a,i}^l + F_{il} V_{a,j}^l$$

a $\tilde{f}^{kl}{}_a$ jsou strukturní koeficienty nějaké Lieovy algebry $\tilde{\mathcal{G}}$, přičemž $\dim \tilde{\mathcal{G}} = \dim \mathcal{G}$.

Dále řekneme, že σ-model (1.1) je symetrický ve standardním smyslu, pokud jsou strukturní koeficienty $\tilde{f}^{kl}{}_a$ nulové.

Uvažujme variaci akce σ-modelu (1.1) vzhledem k transformacím daným pravou akcí Lieovy grupy G na cílové varietě M se světoplošně závislými parametry $\epsilon^a(\xi^+, \xi^-)$

$$\delta S = S(x + \epsilon^a V_a) - S(x) = \int_W d\xi^+ d\xi^- \epsilon^a (\mathcal{L}_{V_a} F_{ij}) \partial_+ x^i \partial_- x^j + \int_W J_a \wedge d\epsilon^a, \tag{1.20}$$

kde J_a jsou noetherovské proudové 1-formy na světoploše $W[\xi^+, \xi^-]$ odpovídající uvažované pravé akci G na M definované jako

$$J_a(x) = V_a^i(x) F_{ji}(x) \partial_+ x^j d\xi^+ - V_a^i(x) F_{ij}(x) \partial_- x^j d\xi^-. \tag{1.21}$$

Pomocí podmínky (1.19) a integrace per partes lze variaci (1.20) zapsat jako

$$\delta S = \int_W \epsilon^a (dJ_a - \frac{1}{2} \tilde{f}^{kl}{}_a J_k \wedge J_l).$$

Pro každé řešení polních rovnic σ-modelu (1.1) dále platí, že $\delta S = 0$. To znamená, že proudové 1-formy (1.21) jsou komponenty neabelovské ploché konexe s hodnotami v Lieově algebře $\tilde{\mathcal{G}}$ splňující následující podmínku nulové křivosti

$$dJ_a - \frac{1}{2} \tilde{f}^{kl}{}_a J_k \wedge J_l = 0. \tag{1.22}$$

Poznámka 1.2.2 *Pokud Lieova grupa G působí na M navíc tranzitivně, pak se podmínka nulové křivost (1.22) shoduje s kompletní sadou polních rovnic Poisson-Lieovsky symetrického σ-modelu (1.1).*

Poznámka 1.2.3 *Pokud je akce G na M isometrie, tj. $\mathcal{L}_{V_a} F_{ij} = 0$, pak noetherovské proudy (1.21) jsou na extremálních světoplochách uzavřené 1-formy, tj. na těchto světoplochách platí, že $dJ_a = 0$. Tato situace odpovídá symetrii σ-modelu ve standardním smyslu.*

Poznámka 1.2.4 *Poznamenejme, že σ-modely (1.12) jsou skutečně Poisson-Lieovsky symetrické, což lze ověřit ze vztahů (1.9), (1.10) a (1.11).*

Lagrangián (1.12) lze přepsat jako

$$\mathcal{L} = F_{ij}(x)\partial_+ x^i \partial_- x^j,$$

přičemž matice σ-modelu $F_{ij}(x)$ je dána jako

$$F_{ij}(x) = e_i{}^a(x) E_{ab}(g(x)) e_j{}^b(x), \tag{1.23}$$

kde $e_i{}^j(x)$ je matice vielbeinových souřadnic

$$\partial_\pm x^i e_i{}^j(x) X_j = g^{-1}\partial_\pm g, \quad e_i{}^j(x) = \left(g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x^i}\right)^j$$

a matice $E(g)$ je určena podle vztahu (1.14).

Lze ukázat, že vztah (1.23) představuje s ohledem na (1.14) obecné řešení podmínky Poisson-Lieovy symetrie (1.19).

Pro levoinvariantní vektorová pole $V_a(x)$ na varietě M platí, že

$$[V_a, V_b] = f_{ab}{}^c V_c,$$

kde $f_{ab}{}^c$ jsou strukturní koeficienty Lieovy algebry $\mathcal{G}$.

Z podmínky integrability pro Lieovu derivaci

$$[\mathcal{L}_{V_a}, \mathcal{L}_{V_b}] F_{ij} = \mathcal{L}_{[V_a, V_b]} F_{ij} = f_{ab}{}^c \mathcal{L}_{V_c} F_{ij}$$

a vztahu (1.19) pak dostaneme

$$f_{ac}{}^k \tilde{f}^{cl}{}_b - f_{ac}{}^l \tilde{f}^{ck}{}_b - f_{bc}{}^k \tilde{f}^{cl}{}_a + f_{bc}{}^l \tilde{f}^{ck}{}_a = f_{ab}{}^c \tilde{f}^{kl}{}_c. \tag{1.24}$$

Vztah (1.24) odpovídá kocyklové podmínce kompatibility strukturních koeficientů Lieových algeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ tvořící strukturu Drinfeldova doublu.

Poznamenejme, že každý ze vztahů (1.1), (1.19), (1.21) a (1.22) má příslušný duální protějšek, který odpovídá záměně úloh Lieových algeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$.

Kapitola 2

Laxův formalismus

V této kapitole je představen koncept tzv. Laxova formalismu, přičemž využíváme především práci [6].

Laxův formalismus zaujímá významnou úlohu v otázce integrability dynamických systémů s nekonečně mnoha stupni volnosti. Polní rovnice σ-modelu (1.1) mají podobu nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. V této práci budeme chápat jejich integrabilitu právě z hlediska Laxova formalismu, který poprvé formuloval Peter Lax již v roce 1968.

2.1 Laxova reprezentace

V kontextu Laxova formalismu hraje důležitou roli tzv. Korteweg-de Vriesova (KdV) rovnice, kterou lze vyjádřit například ve tvaru

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{2.1}$$

kde příslušnými indexy označujeme parciální derivace neznámé funkce $u(x,t)$.

KdV rovnice jako nelineární parciální diferenciální rovnice představuje matematický model vln na mělkých vodních hladinách a je integrabilní metodou obrácené úlohy rozptylu. Významnou vlastností KdV rovnice je také existence nekonečně mnoha lokálních zákonů zachování.

Definice 2.1.1 *Nechť A je obyčejný diferenciální operátor v proměnné x tvaru*

$$A = \sum_{j=0}^{n} a_j(x,t) \frac{\partial^j}{\partial x^j},$$

pak jeho časovou derivaci definujeme jako

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t) \frac{\partial^j}{\partial x^j}.$$

Peter Lax ukázal, že pro speciální volbu obyčejných diferenciálních operátorů

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u, \quad M = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - u\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}u_x \tag{2.2}$$

lze KdV rovnici (2.1) ekvivalentně vyjádřit ve tvaru operátorové Laxovy rovnice

$$\frac{dL}{dt} + [L, M] = 0, \tag{2.3}$$

kde

$$[L, M] = L \circ M - M \circ L$$

je standardní operátorový komutátor.

Laxova rovnice (2.3) má však daleko obecnější interpretaci. Uvažujme nyní lineární problém popsaný soustavou rovnic

$$L\phi = \lambda\phi, \quad M\phi = \phi_t, \tag{2.4}$$

kde $\phi(x, t)$ je komplexní funkce reálné proměnné x, t a L je hermitovský, resp. M je antihermitovský lineární operátor působící na příslušném vektorovém prostoru.

Soustava (2.4) dvou lineárních rovnic pro jednu neznámou funkci $\phi(x, t)$ popisuje přeurčený systém, který má netriviální řešení pouze tehdy, jsou-li obě rovnice tzv. kompatibilní. Podmínku kompatibility získáme z rovnosti vztahů

$$\frac{\partial}{\partial t}(L\phi) = \frac{dL}{dt}\phi + L\phi_t = \frac{dL}{dt}\phi + LM\phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda\phi) = \lambda_t\phi + \lambda\phi_t = \lambda_t\phi + ML\phi$$

ve tvaru

$$\frac{dL}{dt} + [L, M] = \lambda_t.$$

Odtud je patrné, že operátor L je isospektrální, tj.

$$\lambda_t = 0,$$

právě tehdy, když splňuje Laxovu rovnici (2.3). Pro isospektrální operátor L má tedy podmínka kompatibility lineárního problému (2.4) podobu Laxovy rovnice (2.3). Parametr λ vyskytující se ve (2.4) nazýváme spektrální parametr.

Na Laxově pozorování je důležitá především jeho obecnost. Každá rovnice, kterou lze ekvivalentně formulovat ve tvaru Laxovy rovnice (2.3) pro nějaké obecné lineární operátory L a M, má automaticky řadu vlastností KdV rovnice, speciálně nekonečně mnoho lokálních zákonů zachování. Obecně v takovém případě říkáme, že uvažovaná rovnice má tzv. Laxovu reprezentaci.

2.2 Reprezentace nulové křivosti

Laxův formalismus popsaný Laxovou reprezentací v podobě lineárních operátorů L, M a Laxovy rovnice (2.3) lze také ekvivalentně formulovat tzv. reprezentací nulové křivosti. Za tímto účelem nejprve znovu zkoumejme případ KdV rovnice (2.1) pro speciální volbu operátorů L, M podle (2.2).

Pokud nahlížíme na integrabilní nelineární systémy jako na podmínky kompatibility dvou lineárních problémů zahrnující volný spektrální parametr λ, lze v takovém případě přejít od lineárních operátorů k maticové reprezentaci, přičemž se nevyhnutelně v rovnicích začnou objevovat různé mocniny tohoto spektrálního parametru.

Označme

$$\phi_1(x,t) = \phi(x,t), \quad \phi_2(x,t) = \phi_x(x,t).$$

Pak s ohledem na (2.2) lze rovnici druhého řádu

$$L\phi = \lambda\phi$$

přepsat maticově na rovnici prvního řádu

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

kde U je matice tvaru

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u+\lambda}{6} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Dále podle (2.2) platí

$$\phi_{1t} = \phi_t = M\phi = \frac{u_x}{6}\phi_1 + \frac{2\lambda - u}{3}\phi_2, \tag{2.6}$$

$$\phi_{2t} = \phi_{xt} = (M\phi)_x = -\frac{2\lambda^2 + \lambda u - u^2 - 3u_{xx}}{18}\phi_1 - \frac{u_x}{6}\phi_2. \tag{2.7}$$

Podle (2.6) a (2.7) tedy dostaneme v maticovém zápisu rovnici prvního řádu

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

kde V je matice tvaru

$$V = \begin{pmatrix} \frac{u_x}{6} & \frac{2\lambda-u}{3} \\ -\frac{2\lambda^2+\lambda u-u^2-3u_{xx}}{18} & -\frac{u_x}{6} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Soustava rovnic prvního řádu

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi = U\Phi, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Phi = V\Phi \tag{2.9}$$

představují dvě lineární rovnice pro neznámou vektorovou funkci

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Odpovídající podmínku kompatibility získáme z rovnosti vztahů

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi\right) = \frac{\partial}{\partial t}(U\Phi) = \frac{\partial U}{\partial t}\Phi + UV\Phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) = \frac{\partial}{\partial x}(V\Phi) = \frac{\partial V}{\partial x}\Phi + VU\Phi$$

ve tvaru maticové rovnice

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0, \tag{2.10}$$

kterou označujeme jako tzv. podmínku nulové křivosti.

Podmínka kompatibility (2.10) musí být splněna pro všechny hodnoty spektrálního parametru $\lambda \in \mathbb{C}$. Pokud dosadíme explicitní tvary matic (2.5), (2.8) do (2.10) a separujeme koeficienty odpovídající různým mocninám spektrálního parametru, zjistíme, že koeficienty příslušející mocninám λ^3, λ^2 a λ jsou identicky rovny nule. Absolutnímu členu pak odpovídá maticová rovnice ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t + uu_x + u_{xxx} & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

která je ekvivalentní KdV rovnici (2.1).

Podmínka kompatibility soustavy lineárních rovnic (2.9) má ve smyslu podmínky nulové křivosti (2.10) následující geometrickou interpretaci. Rovnice

$$(\partial_x - U)\Phi = 0, \quad (\partial_t - V)\Phi = 0 \tag{2.11}$$

totiž definují konexi na 2-rozměrném vektorovém bundlu nad rovinou (x, t), přičemž rovnice (2.11) popisují jak paralelně přenášet vektor Φ ve směru x, resp. ve směru t. Matice U a V jsou pak komponenty této uvažované konexe.

Říkáme, že konexe má nulovou křivost, pokud paralelní přenos vektoru Φ nezávisí na zvolené cestě spojující dané body. Tento požadavek je ekvivalentní existenci úplné 2-rozměrné báze sestavené ze společných řešení rovnic (2.11). To znamená, že komponenty této konexe musejí splňovat patřičnou podmínku kompatibility (2.10).

Odtud tedy také plyne, že každé řešení KdV rovnice definuje plochou konexi.

Obecně říkáme, že dvě lineární rovnice tvaru (2.9) definující plochou konexi, tj. příslušné komponenty konexe splňují podmínku nulové křivosti (2.10), tvoří Laxův pár. V takovém případě mluvíme o reprezentaci nulové křivosti.

Pak jednou z nejpodstatnějších úvah v teorii integrabilních systémů je, že každý integrabilní nelineární systém lze reprezentovat jako podmínku kompatibility dvou přidružených lineárních rovnic Laxova páru.

Poznamenejme, že podmínku nulové křivosti (2.10) lze ekvivalentně přepsat jako

$$[\mathcal{X}_t, \mathcal{X}_x] = 0,$$

kde

$$\mathcal{X}_t = \partial_t - V, \quad \mathcal{X}_x = \partial_x - U.$$

Kapitola 3

Yang-Baxterův σ-model

V této kapitole je představen tzv. Yang-Baxterův σ-model a nalezen jeho Laxův pár, přičemž využíváme výhradně práci [4].

3.1 Principální chirální model

Uvažujme jednoduše souvislou plochou světoplochu $W[\tau, \sigma]$, tj. 2-rozměrný prostoročas parametrizovaný prostorovou souřadnicí σ a časovou souřadnicí τ. Souřadnice světelného kuželu jsou pak definovány jako

$$\xi^{\pm} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma), \quad \partial_{\pm} = \partial_{\tau} \pm \partial_{\sigma}.$$

Nechť G je kompaktní souvislá a jednoduše souvislá prostá Lieova grupa s Lieovou algebrou $\mathcal{G}$. Principálním chirálním polem nazýváme každé hladké zobrazení

$$g : W[\xi^+, \xi^-] \mapsto G$$

vyhovující polním rovnicím

$$\partial_+(g^{-1}\partial_- g) + \partial_-(g^{-1}\partial_+ g) = 0. \tag{3.1}$$

Lze ukázat, že akce ve tvaru

$$S(g) = \int_W d\xi^+ d\xi^- (g^{-1}\partial_+ g, g^{-1}\partial_- g)_{\mathcal{G}}, \tag{3.2}$$

kde $(\ , \ )_{\mathcal{G}}$ je Killing-Cartanova forma Lieovy algebry $\mathcal{G}$, vede dle principu stacionární akce na polní rovnice (3.1). Akci (3.2) přiřazujeme tzv. principálnímu chirálnímu modelu.

Dále je kladen důraz především na dynamiku a proto nejsou specifikovány žádné hraniční podmínky.

Lze ukázat, že každému řešení $g(\xi^+,\xi^-)$ polních rovnic (3.1) odpovídá plochá Laxova konexe s hodnotami v $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ tvaru

$$A^0(\lambda) = A^0_+(\lambda)d\xi^+ + A^0_-(\lambda)d\xi^-, \tag{3.3}$$

kde odpovídající Zakharov-Mikhailovův Laxův pár má tvar

$$A^0_\pm = -\frac{g^{-1}\partial_\pm g}{1\pm\lambda}. \tag{3.4}$$

To znamená, že zobrazení $A^0_\pm(\lambda) : W \mapsto \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ vyhovují podmínce nulové křivosti v $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$, tj. pro každé $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\pm1\}$ platí

$$\partial_+ A^0_-(\lambda) - \partial_- A^0_+(\lambda) + [A^0_-(\lambda), A^0_+(\lambda)] = 0.$$

Uvažujme naopak dvě pole $u_\pm(\xi^+,\xi^-)$ s hodnotami v $\mathcal{G}$ a konexi

$$A^0(\lambda) = A^0_+(\lambda)d\xi^+ + A^0_-(\lambda)d\xi^-, \tag{3.5}$$

s hodnotami v $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$, kde

$$A^0_\pm = -\frac{u_\pm}{1\pm\lambda}. \tag{3.6}$$

Plochost konexe (3.5) pro každou povolenou hodnotu spektrálního parametru λ pak implikuje dvě rovnosti pro $u_\pm$ ve tvaru

$$\partial_+ u_- - \partial_- u_+ - [u_-, u_+] = 0, \tag{3.7}$$

$$\partial_+ u_- + \partial_- u_+ = 0. \tag{3.8}$$

Vztah (3.7) odpovídá přímo podmínce nulové křivosti v kompaktní Lieově algebře $\mathcal{G}$. To znamená, že existuje pole $g(\xi^+,\xi^-)$ s hodnotami v G takové, že

$$u_\pm = g^{-1}\partial_\pm g.$$

Rovnost (3.8) pak představuje skutečnost, že toto pole $g(\xi^+,\xi^-)$ splňuje polní rovnice (3.1) principálního chirálního modelu.

3.2 Yang-Baxterův operátor

V dalším textu představuje důležitou roli jistý $\mathbb{R}$-lineární operátor $R : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$. Za účelem jeho definice je třeba zvolit vhodnou bázi Lieovy algebry $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$.

Bez změny značení uvažujme lineární rozšíření Killing-Cartanovy formy $(\, , \,)_{\mathcal{G}}$ na $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$. Označme $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ Cartanovu podalgebru Lieovy algebry $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ a uvažujme její kořenový rozklad ve tvaru

$$\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathbb{C}E_\alpha, \tag{3.9}$$

kde Φ je množina kořenů Lieovy algebry $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ vzhledem k $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ a $\mathbb{C}E_\alpha$ je komplexní lineární obal kořenového vektoru E_α.

Pro každé $\alpha \in \Phi$ existuje právě jeden vektor $H_\alpha \in \mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ takový, že pro každé $H \in \mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ platí $\alpha(H) = (H, H_\alpha)_{\mathcal{G}}$. Z těchto vektorů lze v Cartanově podalgebře $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ vytvořit hermitovskou ortonormální bázi $\{H_\mu\}_{\mu\in\Phi^p}$, kde Φ^p značí množinu prostých kořenů.

Kořenové vektory E_α lze zvolit tak, že splňují vztahy

$$\begin{gathered} [H_\mu, E_\alpha] = \alpha(H_\mu)E_\alpha, \quad E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}, \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^\vee, \quad [\alpha^\vee, E_{\pm\alpha}] = \pm 2E_{\pm\alpha}, \quad (E_\alpha, E_{-\alpha})_{\mathcal{G}} = \tfrac{2}{|\alpha|^2}, \end{gathered} \tag{3.10}$$

kde $|\alpha|^2 = (H_\alpha, H_\alpha)_{\mathcal{G}}$ a $\alpha^\vee \in \mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ je tzv. kokořen definovaný jako $\alpha^\vee = \frac{2}{|\alpha|^2}H_\alpha$.

Z kořenového rozkladu (3.9) tedy plyne, že

$$\{H_\mu\}_{\mu\in\Phi^p}, \{E_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$$

je standardní Cartan-Weylova báze komplexní Lieovy algebry $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$.

Bázi reálné Lieovy algebry $\mathcal{G}$ lze pak zvolit jako

$$\{T_\mu\}_{\mu\in\Phi^p}, \{B_\alpha, C_\alpha\}_{\alpha>0},$$

kde

$$T_\mu = iH_\mu, \quad B_\alpha = \frac{i}{\sqrt{2}}(E_\alpha + E_{-\alpha}), \quad C_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_\alpha - E_{-\alpha}). \tag{3.11}$$

Definice 3.2.1 *$\mathbb{R}$-lineární operátor $R : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ definovaný vztahy*

$$RT_\mu = 0, \quad RB_\alpha = C_\alpha, \quad RC_\alpha = -B_\alpha$$

nazýváme Yang-Baxterovým operátorem.

Lze ukázat, že Yang-Baxterův operátor R splňuje pro $X, Y \in \mathcal{G}$ identitu

$$[RX, RY] = R([RX, Y] + [X, RY]) + [X, Y], \tag{3.12}$$

a podmínku antisymetrie vzhledem ke Killing-Cartanově formě

$$(RX, Y)_{\mathcal{G}} + (X, RY)_{\mathcal{G}} = 0.$$

Pro $X, Y \in \mathcal{G}$ definujme antisymetrické bilineární zobrazení $[\ ,\ ]_R : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ jako

$$[X, Y]_R = [RX, Y] + [X, RY]. \tag{3.13}$$

S ohledem na (3.12) splňuje zobrazení (3.13) také příslušnou Jacobiho identitu a tedy definuje na vektorovém prostoru $\mathcal{G}$ novou strukturu Lieovy algebry $\mathcal{G}_R = (\mathcal{G}, [\ ,\ ]_R)$.

Uvažujme komplexifikaci $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ Lieovy algebry $\mathcal{G}$ a považujme ji za reálnou Lieovu algebru. Násobení imaginární jednotkou i je pak $\mathbb{R}$-lineární operátor na $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ a tedy operátor $(R - i)$ lze chápat jako $\mathbb{R}$-lineární operátor zobrazující $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^{\mathbb{C}} \mapsto \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$.

S ohledem na identitu (3.12) je operátor $(R - i) : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ ve skutečnosti prostý homomorfismus reálných Lieových algeber $\mathcal{G}_R$ a $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ a tedy lze na $\mathcal{G}_R$ nahlížet jako na reálnou Lieovu podalgebru Lieovy algebry $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$.

Uvažujme příslušnou Lieovu podgrupu G_R Lieovy grupy $G^{\mathbb{C}}$, která odpovídá Lieově podalgebře $\mathcal{G}_R$ Lieovy algebry $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$. Lze ukázat, že tato Lieova podgrupa G_R není nic jiného než tzv. Lieova grupa AN, jejíž prvek $b \in AN$ lze jednoznačně reprezentovat pomocí exponenciálního zobrazení jako

$$b = e^{\phi} \exp(\textstyle\sum_{\alpha>0} v^{\alpha} E_{\alpha}) = e^{\phi} n,$$

kde $v_{\alpha} \in \mathbb{C}$ a ϕ je hermitovský prvek Cartanovy podalgebry $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ Lieovy algebry $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$.

Poznámka 3.2.2 *Speciálně pro $G^{\mathbb{C}} = SL(n, \mathbb{C})$ lze Lieovu grupu AN ztotožnit s Lieovou grupou horních trojúhelníkových matic, které mají jednotkový determinant a reálná kladná čísla na diagonále.*

3.3 Poisson-Lieova symetrie

Uvažujme nyní případ σ-modelu jehož cílová varieta M je kompaktní prostá Lieova grupa G. Pravá akce Lieovy grupy G na sebe je standardní pravé grupové násobení a Lieova algebra $\tilde{\mathcal{G}}$ je právě Lieova algebra $\mathcal{G}_R$ definována pomocí Yang-Baxterova operátoru R.

Lze ukázat, že nejobecnější forma akce Poisson-Lieovsky symetrického σ-modelu má v tomto případě tvar

$$S_{\varepsilon}(E)(g) = \int_W d\xi^+ d\xi^- (g^{-1}\partial_+ g, (E_g - \varepsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathcal{G}}, \tag{3.14}$$

kde ε je Poisson-Lieův deformační parametr, $E_g = Ad_{g^{-1}} E Ad_g$ a E je libovolný $\mathbb{R}$-lineární operátor $E : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$.

Poznamenejme, že akci σ-modelu (3.14) tedy lze pomocí Yang-Baxterova operátoru R vyjádřit nezávisle na bázi. Totéž platí také pro noetherovskou proudovou 1-formu $J(g)$ na světoploše $W[\xi^+, \xi^-]$ s hodnotami v Lieově algebře $\mathcal{G}_R$. Obecný vztah (1.21) lze nyní totiž zapsat jako

$$\begin{aligned} J(g) &= J_+(g) d\xi^+ + J_-(g) d\xi^- \\ &= -(E_g^t + \varepsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_+ g \, d\xi^+ + (E_g - \varepsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_- g \, d\xi^-, \end{aligned} \tag{3.15}$$

kde $E^t : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ je transpozice operátoru E vzhledem ke Killing-Cartanově formě

$$(EX, Y)_{\mathcal{G}} = (X, E^t Y)_{\mathcal{G}}, \quad X, Y \in \mathcal{G}.$$

Polní rovnice σ-modelu (3.14) mají podle poznámky 1.2.2 tvar podmínky nulové křivosti (1.22) v Lieově algebře $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_R$

$$\partial_+ J_-(g) - \partial_- J_+(g) + \varepsilon [J_-(g), J_+(g)]_R = 0. \tag{3.16}$$

Význam Poisson-Lieova deformačního parametru ε je tedy ve škálování komutátoru Lieovy algebry $\mathcal{G}_R$, přičemž jsou strukturní koeficienty $\tilde{f}^{kl}{}_a$ nahrazeny strukturními koeficienty $\varepsilon\tilde{f}^{kl}{}_a$.

Podle sekce 1.2 jsme dosud uvažovali, že ke každému řešení g Poisson-Lieovsky symetrického σ-modelu (3.14) existuje plochá konexe $J(g)$ s hodnotami v $\mathcal{G}_R$. Navíc lze ukázat, že přirozeně existuje plochá konexe $B^\varepsilon(g)$ s hodnotami v $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ odpovídající stejnému řešení g. Tuto konexi lze zkonstruovat tak, že pomocí homomorfismu $\varepsilon(R-i)$ přeneseme plochou konexi $J(g)$ do Lieovy algebry $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ a následně provedeme g-kalibrační transformaci. Přičemž obě tyto operace zachovávají plochost konexe.

Chirální komponenty takto získané ploché konexe mají tvar

$$B^\varepsilon_\pm(g) = Ad_g(g^{-1}\partial_\pm g + \varepsilon(R-i)J_\pm(g)) = \partial_\pm g\, g^{-1} + g\varepsilon(R-i)J_\pm(g)g^{-1}.$$

S využitím (3.15) dostaneme explicitně

$$\begin{aligned} B^\varepsilon_+(g) &= (E^t + i\varepsilon)(E^t + \varepsilon R_{g^{-1}})^{-1}\partial_+ g\, g^{-1}, \\ B^\varepsilon_-(g) &= (E - i\varepsilon)(E - \varepsilon R_{g^{-1}})^{-1}\partial_- g\, g^{-1}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

kde $R_{g^{-1}} = Ad_g R Ad_{g^{-1}}$.

Pokud je tedy g řešení Poisson-Lieovsky symetrického σ-modelu (3.14), pak chirální komponenty (3.17) splňují podmínku nulové křivosti v Lieově algebře $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$

$$\partial_+ B^\varepsilon_-(g) - \partial_- B^\varepsilon_+(g) + [B^\varepsilon_-(g), B^\varepsilon_+(g)] = 0.$$

3.4 Yang-Baxterův σ-model

Ze sekce 3.3 tedy plyne, že existuje tolik Poisson-Lieovsky symetrických σ-modelů na cílové Lieově grupě G, kolik je $\mathbb{R}$-lineárních operátorů $E : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$. Mezi těmito operátory představuje významnou úlohu volba identického operátoru $E = I$. Akci σ-modelu (3.14) pak v takovém případě přiřazujeme tzv. Yang-Baxterovu σ-modelu.

Definice 3.4.1 *Poisson-Lieovsky symetrický σ-model s akcí ve tvaru*

$$S_\varepsilon(g) = \int_W d\xi^+ d\xi^- (g^{-1}\partial_+ g, (I - \varepsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathcal{G}} \tag{3.18}$$

nazýváme Yang-Baxterovým σ-modelem.

Významnost této speciální volby spočívá v tom, že Yang-Baxterův σ-model je nejen Poisson-Lieovsky symetrický vzhledem k pravé akci Lieovy grupy G na sebe, ale také symetrický ve standardním smyslu vzhledem k levé akci Lieovy grupy G na sebe.

Poznámka 3.4.2 *Poznamenejme, že principální chirální model (3.2) je symetrický ve standardním smyslu vzhledem k levé i pravé akci Lieovy grupy G na sebe.*

Podle poznámky 3.4.2 lze Yang-Baxterův σ-model (3.18) považovat za pravou Poisson-Lieovu deformaci principálního chirálního modelu (3.2) zachovávající jeho levou standardní symetrii.

Důležitým pozorováním je podobnost ve tvaru ploché Laxovy konexe (3.3), (3.4) odpovídající principálnímu chirálnímu modelu (3.2) a ploché konexe (3.17), která v případě Yang-Baxterova σ-modelu (3.18) přejde na tvar

$$B_{\pm}^{\varepsilon}(g_{\varepsilon}) = -\frac{u_{\pm}^{\varepsilon}}{1 \mp i\varepsilon}, \tag{3.19}$$

kde

$$u_{\pm}^{\varepsilon} = -\frac{1+\varepsilon^2}{I \pm \varepsilon R_{g_{\varepsilon}^{-1}}} \partial_{\pm} g_{\varepsilon}\, g_{\varepsilon}^{-1}.$$

Pokud se pro každé ε podaří nalézt řešení g_{ε} Yang-Baxterova σ-modelu (3.18) tak, aby $u_{\pm}^{\varepsilon} \in \mathcal{G}$ nezávisely na parametru ε, pak vztah (3.19) přejde na Zakharov-Makhailovy Laxovy páry (3.6) principálního chirálního modelu (3.2) pro $\lambda = -i\varepsilon$. Podle úvah ze sekce (3.1) pak tímto způsobem získáme řešení $g(\xi^+, \xi^-)$ principálního chirálního modelu takové, že $u_{\pm} = g^{-1}\partial_{\pm} g$. Dokonce lze ukázat, že každé řešení g principálního chirálního modelu lze získat tímto způsobem.

Existuje tedy určitý vztah mezi plochou konexí s hodnotami v $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ (3.19) kanonicky přiřazené Yang-Baxterovu σ-modelu (3.18) a plochou Laxovou konexí s hodnotami v $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ (3.6) odpovídající principálnímu chirálnímu modelu (3.2). Navíc vztah tohoto typu platí dokonce i v obecnějším kontextu a umožňuje tak nalézt Laxovy páry Yang-Baxterova σ-modelu.

3.5 Bi-Yang-Baxterův σ-model

Podle sekce 3.4 existuje Poisson-Lieovsky deformovaný (Yang-Baxterův) σ-model takový, že deformační parametr ε lze interpretovat jako spektrální parametr vyskytující se v Laxovu páru nedeformovaného (principálního chirálního) modelu. Tato skutečnost umožňuje hledat Laxův pár Yang-Baxterova σ-modelu následovně.

Uvažujme další Poisson-Lieovu deformaci samotného Yang-Baxterova σ-modelu tak, že nový deformační parametr η bude spojen se spektrálním parametrem Laxova páru Yang-Baxterova σ-modelu. Úlohu nedeformovaného modelu tedy v tomto případě zaujímá Yang-Baxterův σ-model, přičemž se vlastně jedná o 2-parametrickou deformaci principálního chirálního modelu.

Yang-Baxterův σ-model je výsledkem Poisson-Lieovy deformace standardní pravé G-symetrie principálního chirálního modelu, přičemž tato pravá deformace ponechává standardní levou G-symetrii nedotčenou. Lze tedy dále Poisson-Lieovsky deformovat tuto levou symetrii Yang-Baxterova σ-modelu.

Je tedy třeba nalézt levou deformaci Yang-Baxterova σ-modelu, která by zachovávala pravou Poisson-Lieovu symetrii, tj. σ-model na kompaktní prosté cílové Lieově grupě G, který je Poisson-Lieovsky symetrický zleva i zprava.

Podle sekce 3.3 má každý zprava Poisson-Lieovsky symetrický σ-model tvar (3.14)

$$S_{\varepsilon_r}(E)(g) = \int_W d\xi^+ d\xi^- (g^{-1}\partial_+ g, (E_g - \varepsilon_r R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathcal{G}}, \tag{3.20}$$

kde deformační parametr ε_r odpovídá pravé Poisson-Lieově symetrii.

Chceme tedy nalézt operátor $E : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ tak, aby zprava Poisson-Lieovsky symetrický σ-model (3.20) byl zároveň Poisson-Lieovsky symetrický zleva. Za tímto účelem poznamenejme, že difeomorfismus $g \mapsto g^{-1}$ zaměňuje levou akci Lieovy grupy G na sebe za akci pravou a naopak.

Odtud plyne, že zprava Poisson-Lieovsky symetrický σ-model (3.20) bude navíc Poisson-Lieovsky symetrický zleva, pokud existuje dvojice operátorů

$$E, E' : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$$

splňující podmínku

$$S_{\varepsilon_r}(E)(g^{-1}) = S_{\varepsilon_l}(E')(g), \tag{3.21}$$

přičemž

$$S_{\varepsilon_l}(E')(g) = \int_W d\xi^+ d\xi^- (g^{-1}\partial_+ g, (E'_g - \varepsilon_l R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathcal{G}},$$

kde deformační parametr ε_l odpovídá levé Poisson-Lieově symetrii.

Lze ukázat, že podmínce (3.21) vyhovují operátory

$$E = I - \varepsilon_l R, \quad E' = I - \varepsilon_r R.$$

To znamená, že σ-model s akcí

$$S_{\varepsilon_r,\varepsilon_l}(g) = S_{\varepsilon_r}(I - \varepsilon_l R)(g)$$

je tedy vybaven jak pravou, tak levou Poisson-Lieovou symetrií. Takovou akci pak přiřazujeme bi-Yang-Baxterovu σ-modelu.

Definice 3.5.1 *Zprava i zleva Poisson-Lieovsky symetrický σ-model s akcí ve tvaru*

$$S_{\varepsilon_r,\varepsilon_l}(g) = \int_W d\xi^+ d\xi^- (g^{-1}\partial_+ g, (I - \varepsilon_l R_g - \varepsilon_r R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathcal{G}} \tag{3.22}$$

nazýváme bi-Yang-Baxterovým σ-modelem.

Bi-Yang-Baxterův σ-model (3.22) je tedy ε_l-deformace Yang-Baxterova σ-modelu (3.18) a zároveň 2-parametrická deformace principálního chirálního modelu (3.2).

3.6 Laxův pár Yang-Baxterova σ-modelu

Bi-Yang-Baxterův σ-model (3.22) je speciálně zprava Poisson-Lieovsky symetrický. Pak tedy lze použít explicitní vztah (3.17) pro plochou konexi $B^{\varepsilon_r}(E)$ s hodnotami v $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ při konkrétní volbě $E = I - \varepsilon_l R$.

Pokud je tedy $g_{\varepsilon_r,\varepsilon_l}$ řešení polních rovnic bi-Yang-Baxterova σ-modelu (3.22), pak chirální komponenty ploché konexe $B^{\varepsilon_r}(I - \varepsilon_l R)$ s hodnotami v $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ mají tvar

$$B_\pm(g_{\varepsilon_r,\varepsilon_l}) = (I \pm \varepsilon_l R \pm i\varepsilon_r) f v_\pm, \tag{3.23}$$

přičemž

$$f v_\pm = (I \pm \varepsilon_l R \pm \varepsilon_r R_{g^{-1}})^{-1} \partial_\pm g_{\varepsilon_r,\varepsilon_l}\, g^{-1}_{\varepsilon_r,\varepsilon_l},$$

kde f je normalizační parametr.

S ohledem na vztahy (3.19) a (3.23) lze předpokládat Laxův pár Yang-Baxterova σ-modelu (3.18) ve tvaru

$$A^\varepsilon_\pm(-i\eta) = (I \pm \varepsilon_l(\varepsilon,\eta) R \pm i\varepsilon_r(\varepsilon,\eta)) f(\varepsilon,\eta) v^\varepsilon_\pm, \tag{3.24}$$

kde ε je deformační parametr vyskytující se v akci Yang-Baxterova σ-modelu (3.18), $-\eta$ je imaginární část spektrálního parametru λ, $\varepsilon_l(\varepsilon,\eta)$, resp. $\varepsilon_r(\varepsilon,\eta)$ a $f(\varepsilon,\eta)$ jsou neznámé funkce závisející na ε, η a $v^\varepsilon_\pm$ jsou neznámá pole s hodnotami v $\mathcal{G}$ závisející pouze na deformačním parametru ε.

Laxův pár (3.24) musí splňovat podmínku nulové křivosti v $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$

$$\partial_+ A^\varepsilon_-(-i\eta) - \partial_- A^\varepsilon_+(-i\eta) + [A^\varepsilon_-(-i\eta), A^\varepsilon_+(-i\eta)] = 0. \tag{3.25}$$

Jelikož $v^\varepsilon_\pm$ jsou pole s hodnotami v $\mathcal{G}$, lze podmínku nulové křivosti v $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ (3.25) přepsat na dvě podmínky v $\mathcal{G}$ pro reálnou a imaginární část jako

$$\partial_+ v^\varepsilon_- + \partial_- v^\varepsilon_+ + \varepsilon_l f [v^\varepsilon_-, v^\varepsilon_+]_R = 0, \tag{3.26}$$

$$(I - \varepsilon_l R)\partial_+ v^\varepsilon_- - (I + \varepsilon_l R)\partial_- v^\varepsilon_+ + f[(I - \varepsilon_l R) v^\varepsilon_-, (I + \varepsilon_l R) v^\varepsilon_+] + \varepsilon_r^2 f [v^\varepsilon_-, v^\varepsilon_+] = 0. \tag{3.27}$$

Zapůsobením operátoru R na podmínku (3.26) a použitím identity (3.12) dostaneme

$$R\partial_+ v^\varepsilon_- + R\partial_- v^\varepsilon_+ = \varepsilon_l f([v^\varepsilon_-, v^\varepsilon_+] - [R v^\varepsilon_-, R v^\varepsilon_+]), \tag{3.28}$$

Pokud dosadíme (3.28) do (3.27), získáme podmínku

$$\partial_+ v^\varepsilon_- - \partial_- v^\varepsilon_+ + (\varepsilon_r^2 - \varepsilon_l^2 + 1) f [v^\varepsilon_-, v^\varepsilon_+] - \varepsilon_l f [R v^\varepsilon_-, v^\varepsilon_+] + \varepsilon_l f [v^\varepsilon_-, R v^\varepsilon_+] = 0. \tag{3.29}$$

Pole $v^\varepsilon_\pm$ podle předpokladu nezávisejí na η. Odtud pak z podmínky (3.26), resp. (3.29) plyne, že výraz $\varepsilon_l f$, resp. $(\varepsilon_r^2 - \varepsilon_l^2 + 1) f$ také nezávisí na η. Závislost na deformačním parametru ε lze určit uvažováním polních rovnic a Bianchiho identity Yang-Baxterova σ-modelu (3.18). Polní rovnice mají tvar (3.16), tj.

$$\partial_+ J_- - \partial_- J_+ + \varepsilon [J_-, J_+]_R = 0, \tag{3.30}$$

kde podle (3.15) pro případ Yang-Baxterova σ-modelu platí

$$J_{\pm} = \mp(I \pm \varepsilon R)^{-1} g^{-1} \partial_{\pm} g, \tag{3.31}$$

resp. také ekvivalentně

$$g^{-1}\partial_{\pm} g = \mp(I \pm \varepsilon R) J_{\pm}. \tag{3.32}$$

Podle sekce (3.1) zřejmě platí

$$\partial_{+}(g^{-1}\partial_{-}g) - \partial_{-}(g^{-1}\partial_{+}g) - [g^{-1}\partial_{-}g, g^{-1}\partial_{+}g] = 0,$$

odkud dosazením (3.32) získáme Bianchiho identity jako

$$(I - \varepsilon R)\partial_{+} J_{-} + (I + \varepsilon R)\partial_{-} J_{+} + [(I - \varepsilon R)J_{-}, (I + \varepsilon R)J_{+}] = 0. \tag{3.33}$$

Zapůsobením operátoru R na (3.30) a použitím identity (3.12) dostaneme

$$R\partial_{+} J_{-} - R\partial_{-} J_{+} = \varepsilon([J_{-}, J_{+}] - [RJ_{-}, RJ_{+}]), \tag{3.34}$$

Pokud dosadíme (3.34) do (3.33), získáme Bianchiho identity ve tvaru

$$\partial_{+} J_{-} + \partial_{-} J_{+} + (1 - \varepsilon^2)[J_{-}, J_{+}] - \varepsilon[RJ_{-}, J_{+}] + \varepsilon[J_{-}, RJ_{+}] = 0. \tag{3.35}$$

Následným porovnáním podmínky (3.26) s polními rovnicemi (3.30), resp. podmínky (3.29) s Bianchiho identitou (3.35) dostaneme následující identifikaci

$$v^{\varepsilon}_{\pm} = \mp J_{\pm} = (I \pm \varepsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_{\pm} g, \tag{3.36}$$

$$\varepsilon_l f = -\varepsilon, \tag{3.37}$$

$$(\varepsilon_r^2 - \varepsilon_l^2 + 1) f = \varepsilon^2 - 1. \tag{3.38}$$

Podle vztahu (3.37) lze Laxův pár (3.24) přepsat jako

$$A^{\varepsilon}_{\pm}(-i\eta) = (f(\varepsilon, \eta) \mp \varepsilon R \pm i f(\varepsilon, \eta)\varepsilon_r(\varepsilon, \eta)) v^{\varepsilon}_{\pm}, \tag{3.39}$$

odkud je patrné, že koeficient odpovídající operátoru R nezávisí na spektrálním parametru η. To umožňuje předefinovat předpoklad Laxova páru (3.24) jako

$$A^{\varepsilon}_{\pm}(\lambda) = \left(F(\varepsilon) \mp \varepsilon R + \frac{G(\varepsilon)}{1 \pm \lambda} \right) v^{\varepsilon}_{\pm}, \tag{3.40}$$

kde λ je plnohodnotný komplexní spektrální parametr.

Pro volbu $\lambda = -i\eta$ přejde (3.40) na tvar

$$A^{\varepsilon}_{\pm}(-i\eta) = \left(F(\varepsilon) + \frac{G(\varepsilon)}{1 + \eta^2} \mp \varepsilon R \pm i \frac{G(\varepsilon)\eta}{1 + \eta^2} \right) v^{\varepsilon}_{\pm},$$

odkud porovnáním se vztahem (3.39) dostaneme podmínky ve tvaru

$$f(\varepsilon, \eta) = F(\varepsilon) + \frac{G(\varepsilon)}{1 + \eta^2}, \quad f(\varepsilon, \eta)\varepsilon_r(\varepsilon, \eta) = \frac{G(\varepsilon)\eta}{1 + \eta^2}. \tag{3.41}$$

Dosazením podmínek (3.37) a (3.41) do vztahu (3.38) dostaneme

$$\frac{G(G+2F+1-\varepsilon^2)}{1+\eta^2} = \varepsilon^2 + F(\varepsilon^2-1) - F^2. \tag{3.42}$$

Rovnost (3.42) musí být splněna pro libovolné η, což znamená, že obě strany této rovnosti musí být nutně nulové, přičemž navíc požadujeme, aby výsledný Laxův pár (3.40) obsahoval závislost na spektrálním parametru λ, což implikuje, že $G(\varepsilon) \neq 0$. Na základě těchto úvah dostaneme rovnice pro neznámé funkce $F(\varepsilon), G(\varepsilon)$ ve tvaru

$$G + 2F + 1 - \varepsilon^2 = 0, \quad \varepsilon^2 + F(\varepsilon^2-1) - F^2 = 0. \tag{3.43}$$

Soustava rovnic (3.43) má s ohledem na kvadratickou rovnici pro funkci $F(\varepsilon)$ právě dvě řešení ve tvaru

$$F(\varepsilon) = \varepsilon^2, \quad G(\varepsilon) = -(1+\varepsilon^2), \tag{3.44}$$

$$\tilde{F}(\varepsilon) = -1, \quad \tilde{G}(\varepsilon) = 1+\varepsilon^2. \tag{3.45}$$

Avšak pouze řešení (3.44) vyhovuje požadovanému limitnímu přechodu pro $\varepsilon \to 0$, kde by Laxův pár (3.40) Yang-Baxterova σ-modelu měl přecházet na Zakharov-Mikhailovův Laxův pár (3.4) principálního chirálního modelu.

Laxův pár Yang-Baxterova σ modelu (3.18) má tedy s ohledem na vztah (3.36) a řešení (3.44) podle (3.40) tvar

$$A^{\varepsilon}_{\pm}(\lambda) = \mp\left(\varepsilon^2 \mp \varepsilon R - \frac{1+\varepsilon^2}{1\pm\lambda}\right) J_{\pm}, \tag{3.46}$$

resp.

$$A^{\varepsilon}_{\pm}(\lambda) = \left(\varepsilon^2 \mp \varepsilon R - \frac{1+\varepsilon^2}{1\pm\lambda}\right)(I \pm \varepsilon R)^{-1} g^{-1}\partal_{\pm}\, g. \tag{3.47}$$

Poznámka 3.6.1 *Laxův pár Yang-Baxterova σ-modelu (3.18) odpovídající druhému řešení (3.45) má s ohledem na vztah (3.36) podle (3.40) tvar*

$$\tilde{A}^{\varepsilon}_{\pm}(\tilde{\lambda}) = (-1 \mp \varepsilon R + \frac{1+\varepsilon^2}{1\pm\tilde{\lambda}})(I \pm \varepsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_{\pm} g. \tag{3.48}$$

Druhý Laxův pár (3.48) je však pouze jinou variantou Laxova páru (3.47) ve smyslu transformace volného parametru $\tilde{\lambda}$. Lze totiž ukázat, že pro konkrétní transformaci volného parametru dané vztahem

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

přechází druhý Laxův pár (3.48) na Laxův pár (3.47) a naopak. Z tohoto důvodu se tento druhý Laxův pár stává nezajímavým a není ho třeba dále uvažovat.

Poznámka 3.6.2 *Poznamenejme, že vzhledem k odvozování tvaru Laxova páru (3.47) Yang-Baxterova σ-modelu (3.18) podle práce [4] představuje vztah (3.40) nicméně určitou formu nepřímého intuitivního ansatzu.*

Stejně jako v případě principálního chirálního modelu (3.2) lze Laxův pár Yang-Baxterova σ-modelu (3.18) interpretovat dvěma způsoby.

V první formulaci uvažujeme $J_\pm : W \mapsto \mathcal{G}$ taková, že $A^\varepsilon_\pm(\lambda) : W \mapsto \mathcal{G}^\mathbb{C}$ definována podle (3.46) vyhovují pro každé komplexní λ podmínce nulové křivosti ve tvaru

$$\partial_+ A^\varepsilon_-(\lambda) - \partial_- A^\varepsilon_+(\lambda) + [A^\varepsilon_-(\lambda), A^\varepsilon_+(\lambda)] = 0. \tag{3.49}$$

Pak lze ukázat, že $J_\pm$ musí mít tvar (3.31), kde $g : W \mapsto G$ splňuje polní rovnice Yang-Baxterova σ-modelu (3.18).

Ve druhé formulaci uvažujeme řešení $g : W \mapsto G$ polních rovnic Yang-Baxterova σ-modelu (3.18), kterému přiřazujeme $A^\varepsilon_\pm(\lambda) : W \mapsto \mathcal{G}^\mathbb{C}$ podle vztahu (3.47). Pak lze ukázat, že takto definovaná $A^\varepsilon_\pm(\lambda)$ vyhovují pro každé komplexní λ nulové podmínce křivosti (3.49).

Dosazením Laxova páru (3.46) do podmínky nulové křivosti (3.49) dostaneme

$$-\frac{1}{1-\lambda^2}\left(B + (1+\varepsilon^2)P\lambda + C\lambda^2\right) = 0, \tag{3.50}$$

kde

$$\begin{gathered} B = (I - \varepsilon R)\partial_+ J_- + (I + \varepsilon R)\partial_- J_+ + [(I - \varepsilon R)J_-, (I + \varepsilon R)J_+], \\ P = \partial_+ J_- - \partial_- J_+ + \varepsilon [J_-, J_+]_R, \\ C = \varepsilon^2 \tilde{B} + \varepsilon R P, \end{gathered}$$

přičemž

$$\tilde{B} = \partial_+ J_- + \partial_- J_+ + (1-\varepsilon^2)[J_-, J_+] - \varepsilon [RJ_-, J_+] + \varepsilon [J_-, RJ_+].$$

Platnost podmínky nulové křivosti (3.50) pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ pak implikuje nulovost koeficientů B a P. To ekvivalentně odpovídá platnosti Bianchiho identit (3.33) a polních rovnic (3.30). Koeficient C je vzhledem k modifikovanému tvaru Bianchiho identit (3.35) roven nule automaticky. Analogicky lze postupovat i naopak.

S ohledem na tyto úvahy lze vyslovit následující věta.

Věta 3.6.3 *Laxova formulace (3.46) a (3.49) je ekvivalentní polním rovnicím (3.30) Yang-Baxterova σ-modelu (3.18) a platnosti Bianchiho identit (3.33).*

Skutečnost, že Laxova formulace implikuje kromě polních rovnic také Bianchiho identity je charakteristická právě pro Yang-Baxterův σ-model. V dalším textu se pak ukazuje, že v kontextu tzv. zobecněného principálního chirálního modelu nemáme tuto užitečnou vlastnost obecně zaručenou.

Kapitola 4

Zobecněný principální chirální model

V této kapitole je představen tzv. zobecněný principální chirální model, přičemž používáme především práci [7], resp. [1].

4.1 Zobecněný principální chirální model (GPCM)

Principální chirální model (3.2) na cílové Lieově grupě G lze ekvivalentně definovat pomocí akce

$$S(g) = \frac{1}{2}\int_W d\sigma d\tau\ \eta^{\mu\nu}(u_\mu, u_\nu)_{\mathcal{G}}, \tag{4.1}$$

kde

$$u_\mu = g^{-1}\partial_\mu g \in \mathcal{G}, \tag{4.2}$$

přičemž $g : \mathbb{R}^2 \mapsto G$, $\mu, \nu \in \{0, 1\}$, $\eta = \mathrm{diag}(1, -1)$ a $(\ ,\ )_{\mathcal{G}}$ je Killing-Cartanova forma příslušné Lieovy algebry $\mathcal{G}$.

Uvažujme nyní určité zobecnění akce (4.1), přičemž Killing-Cartanovu formu $(\ ,\ )_{\mathcal{G}}$ nahradíme obecnou symetrickou nedegenerovanou bilineární formou $L(g)$ definovanou na Lieově algebře $\mathcal{G}$ a obsahující navíc závislost na prvku Lieovy grupy $g \in G$.

Bilineární formu $L(g)$ lze dále uvažovat jako metriku na grupové varietě G.

Označme bázi Lieovy algebry $\mathcal{G}$ jako

$$\{X_i\}_{i=1}^n, \quad \dim G = n,$$

přičemž Lieova závorka je definována strukturními koeficienty

$$[X_i, X_j] = f_{ij}{}^k X_k.$$

Ve stejné bázi definujme souřadnice pole u_μ jako

$$u_\mu = g^{-1}\partial_\mu g = u_\mu^i X_i$$

a symetrickou invertovatelnou matici $n \times n$ odpovídající bilineární formě $L(g)$ jako

$$L_{ij}(g) = L(g)(X_i \otimes X_j).$$

Pak dostaneme

$$L(g)(u_\mu \otimes u_\nu) = L(g)(X_i \otimes X_j)u^i_\mu u^j_\nu = L_{ij}(g)u^i_\mu u^j_\nu.$$

Definice 4.1.1 *σ-model s akcí ve tvaru*

$$S(g) = \frac{1}{2}\int_W d\sigma d\tau\ \eta^{\mu\nu} L_{ij}(g)u^i_\mu u^j_\nu \tag{4.3}$$

nazýváme zobecněným principálním chirálním modelem.

Poznamenejme, že pole u_μ automaticky splňují Bianchiho identity

$$\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu + [u_\mu, u_\nu] = 0. \tag{4.4}$$

Variací akce (4.3) vzhledem ke $g^{-1}\delta g$ získáme polní rovnice zobecněného principálního chirálního modelu ve tvaru

$$\partial_\mu u^{\mu,i} + \Gamma^i{}_{jk} u^j_\mu u^{\mu,k} = 0, \tag{4.5}$$

kde

$$\Gamma^i{}_{jk} = S^i{}_{jk} + \gamma^i{}_{jk}, \tag{4.6}$$

přičemž $S^i{}_{jk}$ je tzv. plochá konexe definována strukturními koeficienty jako

$$S^i{}_{jk} = \frac{1}{2}\left(L^{-1}\right)^{il}\left(f_{lj}{}^m L_{mk} + f_{lk}{}^m L_{mj}\right)$$

a $\gamma^i{}_{jk}$ jsou tzv. Christoffelovy symboly pro metriku $L_{ij}(g)$ definované jako

$$\gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}\left(L^{-1}\right)^{il}\left(U_j L_{kl} + U_k L_{jl} - U_l L_{jk}\right).$$

Vektorová pole U_j jsou definována v lokálních grupových souřadnicích x^i jako

$$U_j = U_j{}^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

kde matice $U_j{}^i$ je inverzní k matici e_i^j vielbeinových souřadnic

$$U_j{}^i(x) = \left(e^{-1}\right)_j{}^i(x), \quad e_i^j(x) = \left(g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x^i}\right)^j.$$

Poznamenejme, že konexe (4.6) je symetrická v dolních indexech, tj.

$$\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}.$$

4.2 Laxův formalismus GPCM

Ze vztahu (4.2) plyne, že polní rovnice (4.5) zobecněného principálního chirálního modelu mají tvar nelineárního systému parciálních diferenciálních rovnic. Podle sekce 2.2 považujeme takový systém za integrabilní, pokud lze příslušné polní rovnice reprezentovat jako podmínku kompatibility lineárních rovnic Laxova páru.

Příslušnou podmínku nulové křivosti lze v kontextu teorie σ-modelu formulovat jako

$$[\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1] = 0, \tag{4.7}$$

kde $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ jsou diferenciální operátory obsahující závislost na volném parametru.

S ohledem na tvar polních rovnic (4.5) lze Laxův pár $M_0(\nu)$, $M_1(\nu)$ zobecněného principálního chirálního modelu (4.3) předpokládat ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &= \partial_0 - M_0(\nu) = \partial_0 + P_{ij} u_0^j X_i + Q_{ij} u_1^j X_i, \\ \mathcal{X}_1 &= \partial_1 - M_1(\nu) = \partial_1 + Q_{ij} u_0^j X_i + P_{ij} u_1^j X_i, \end{aligned} \tag{4.8}$$

kde P, Q jsou dvě pomocné matice $n \times n$.

Předpoklad (4.8) je zobecněním Laxova páru pro Killing-Cartanovu formu

$$\kappa_{ij} = (X_i, X_j)_{\mathcal{G}} = Tr(adX_i \; adX_j),$$

přičemž v takovém případě jsou P a Q násobky jednotkových matic.

Dosazením předpokladu (4.8) do podmínky nulové křivosti (4.7), dále s využitím Bianchiho identit (4.4) a polních rovnic (4.5) získáme nutné podmínky pro neznámé matice P, Q ve tvaru Sochenových rovnic

$$\partial_0 P = \partial_1 Q, \quad \partial_0 Q = \partial_1 P, \tag{4.9}$$

$$(P_{ij} P_{mk} - Q_{ij} Q_{mk}) f_{im}{}^{l} = P_{li} f_{jk}{}^{i}, \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{2} f_{mn}{}^{l} (P_{mj} Q_{nk} + P_{mk} Q_{nj}) = Q_{li} \Gamma^{i}{}_{jk}, \tag{4.11}$$

kdy diferenciální operátory (4.8) tvoří Laxův pár pro polní rovnice (4.5).

Jelikož navíc nejsou předem dané podmínky pro první derivace polí g, tj. derivace lokálních grupových souřadnic x^i, pak z podmínky (4.9) dostaneme

$$\frac{\partial P}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x^i} = 0.$$

Dále uvažujme, že P a Q jsou konstantní matice jako ekvivalenci podmínce (4.9).

S využitím platnosti podmínek (4.10), (4.11) a Bianchiho identit (4.4) dostaneme

$$[\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1] = Q_{ij} (\partial_\mu u^{\mu,j} + \Gamma^{j}{}_{kl} u^k_\mu u^{\mu,l}) X_i,$$

odkud plyne, že pokud je matice Q invertovatelná, což lze v následujícím textu uvažovat, pak jsou podmínky (4.10), (4.11) dokonce postačující.

Věta 4.2.1 *Laxova formulace (4.7) a (4.8) je ekvivalentní polním rovnicím (4.5) zobecněného principálního chirálního modelu (4.3) právě tehdy, když konstantní pomocné matice P a Q splňují podmínky (4.10), (4.11) a matice Q je invertovatelná.*

Vztah (4.11) lze navíc při invertovatelnosti Q ekvivalentně zapsat jako

$$\frac{1}{2}\left(Q^{-1}\right)^{il} {f_{mn}}^{l}(P_{mj}Q_{nk} + P_{mk}Q_{nj}) = {\Gamma^{i}}_{jk}, \tag{4.12}$$

což implikuje podmínku na konexi $\Gamma(L)$, neboť levá strana (4.12) je konstantní.

Věta 4.2.2 *Pouze zobecněný principální chirální model (4.3) vybavený konstantní konexí $\Gamma(L)$ definovanou podle (4.6) připouští Laxovu formulaci (4.7) a (4.8).*

Poznamenejme, že podmínka (4.10) je nezávislá na bilineární formě $L(g)$. Lze tedy nejprve řešit rovnici (4.10) a následně pak hledat bilineární formy $L(g)$ připouštějící řešení rovnice (4.11).

4.3 Teorie zobecněného $SU(2)$ modelu

Uvažujme nyní případ zobecněného $SU(2)$ principálního chirálního modelu, přičemž využíváme především práci [1]. V této sekci především odvodíme důležitou omezující podmínku na metriku $L(g)$. Při odvození je užitečné pracovat v souřadnicích (τ, σ).

Zvolme bázi $\{X_i\}_{i=1}^{3}$ příslušné Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$ jako

$$X_i = \frac{1}{2\mathrm{i}}\sigma_i, \quad \dim SU(2) = 3, \tag{4.13}$$

kde σ_j jsou Pauliho matice.

Potom strukturní koeficienty Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$ mají v bázi (4.13) tvar totálně antisymetrického Levi-Civitova tenzoru

$${f_{ij}}^{k} = \varepsilon_{ijk}. \tag{4.14}$$

S využitím (4.14) lze rovnici (4.10) přepsat jako

$$(\mathrm{Adj}\ Q)_{ij} = R_{ij}(P), \tag{4.15}$$

kde

$$R_{ij}(P) = (\mathrm{Adj}\ P)_{ij} - P_{ji},$$

přičemž Adj N označuje matici adjungovanou k matici N definovanou jako

$$(\mathrm{Adj}\ N)_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ji},$$

kde M_{ji} je matice, která vznikne z příslušné matice N vynecháním j-tého řádku a i-tého sloupce.

Řešení rovnice (4.15) má obecný tvar

$$Q_{ij} = \pm\sqrt{\det R}\, R^{-1}_{ij}. \tag{4.16}$$

Pro invertovatelnou matici Q je řešení (4.16) až na znaménko jednoznačné.

S využitím (4.14) a (4.16) lze rovnici (4.11) přepsat jako

$$G^i{}_{jk}(P) = \Gamma^i{}_{jk}(L), \tag{4.17}$$

kde

$$G^i{}_{jk}(P) = \frac{1}{2} R_{il}\varepsilon_{mnl}(P_{mj}R^{-1}_{nk} + P_{mk}R^{-1}_{nj}). \tag{4.18}$$

Matice $L_{ij}(g)$ je podle předpokladu symetrická, lze ji tedy diagonalizovat ortogonální transformací, přičemž strukturní koeficienty (4.14) zůstanou invariantní.

Pro zobecněný $SU(2)$ principální chirální model lze tedy bez újmy na obecnosti uvažovat metriku $L(g)$ v diagonálním tvaru

$$L(g) = \mathrm{diag}(L_1(g), L_2(g), L_3(g)). \tag{4.19}$$

S využitím (4.14) a (4.19) lze pak konexi $\Gamma(L)$ definovanou podle (4.6) zapsat jako

$$\Gamma^i{}_{jk} = \varepsilon_{ijk}\frac{L_k(g) - L_j(g)}{2L_i(g)} \quad i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k, \quad \text{bez sumace}, \tag{4.20}$$

$$\Gamma^i{}_{jj} = -\frac{U_i L_j(g)}{2L_i(g)}, \quad i \neq j, \quad \text{bez sumace},$$

$$\Gamma^i{}_{ij} = \Gamma^i{}_{ji} = \frac{U_j L_i(g)}{2L_i(g)}, \quad \text{bez sumace}. \tag{4.21}$$

Dále lze ukázat, že z antisymetrie Levi-Civitova tenzoru plynou vzhledem k výrazu (4.18) dvě důležité identity platné pro libovolnou matici P ve tvaru

$$G^i{}_{ij}(P) = 0. \tag{4.22}$$

$$G^i{}_{jj}(P) = 0.$$

Sumací výrazu (4.21) a porovnáním s identitou (4.22) podle (4.17) dostaneme

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{U_j L_i(g)}{2L_i(g)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} U_j \log(L_i(g)) = \frac{1}{2} U_j \log(\det L(g)) = \frac{U_j \det L(g)}{2\det L(g)} = 0,$$

odkud plyne, že determinant metriky $L(g)$ je konstantní na $SU(2)$, tj.

$$\det L(g) = L_1(g)L_2(g)L_3(g) = const. \tag{4.23}$$

Explicitním rozepsáním vztahu (4.20) pro různé volby indexů dostaneme

$$\Gamma^1{}_{23} = \frac{L_3(g) - L_2(g)}{2L_1(g)}, \quad \Gamma^2{}_{31} = \frac{L_1(g) - L_3(g)}{2L_2(g)}, \quad \Gamma^3{}_{12} = \frac{L_2(g) - L_1(g)}{2L_3(g)}.$$

Po příslušné úpravě pak platí

$$
\begin{aligned}
(2\Gamma^1{}_{23} - 1)L_1(g) + (2\Gamma^2{}_{31} + 1)L_2(g) &= 0, \\
(2\Gamma^1{}_{23} + 1)L_1(g) + (2\Gamma^3{}_{12} - 1)L_3(g) &= 0, \\
(2\Gamma^2{}_{31} - 1)L_2(g) + (2\Gamma^3{}_{12} + 1)L_3(g) &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Vzhledem k nesingularitě metriky $L(g)$ lze nulovostí příslušných koeficientů triviálně splnit nejvýše jednu z rovnic (4.24). Dále pak ze zbývajících netriviálních rovnic, konstantnosti konexe $\Gamma(L)$ na grupové varietě a vztahu (4.23) plyne, že metrika $L(g)$ je konstantní na $SU(2)$.

Věta 4.3.1 *Pouze zobecněný $SU(2)$ principální chirální model (4.3) vybavený konstantní metrikou L připouští Laxovu formulaci (4.7) a (4.8).*

Pro úvahy spojené s Yang-Baxterovým $SU(2)$ modelem se ukazuje být výhodné formulovat zobecněný principální chirální model v souřadnicích světelného kuželu.

4.4 GPCM v souřadnicích (ξ^+, ξ^-)

Uvažujme zobecněný principální chirální model v souřadnicích světelného kuželu

$$
\xi^\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma), \quad \partial_\pm = \partial_0 \pm \partial_1,
$$

$$
\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu \in \{+, -\}.
$$

Akce (4.3) zobecněného principálního chirálního modelu má pak tvar

$$
S(g) = \int_W d\xi^+ d\xi^- \; L_{ij}(g) u_+^i u_-^j, \tag{4.25}
$$

Bianchiho identity (4.4) lze přepsat jako

$$
\partial_+ u_-^i - \partial_- u_+^i + f_{jk}{}^i u_+^j u_-^k = 0 \tag{4.26}
$$

a příslušné polní rovnice (4.5) přejdou na tvar

$$
\partial_+ u_-^i + \partial_- u_+^i + 2\Gamma^i{}_{jk} u_+^j u_-^k = 0. \tag{4.27}
$$

Podmínku nulové křivosti (4.7) lze v souřadnicích světelného kuželu ekvivalentně formulovat jako

$$
[\mathcal{X}_+, \mathcal{X}_-] = 0, \tag{4.28}
$$

kde $\mathcal{X}_+$, $\mathcal{X}_-$ jsou diferenciální operátory obsahující závislost na volném parametru.

S ohledem na tvar polních rovnic (4.27) lze Laxův pár $M_{\pm}(\nu)$ zobecněného principálního chirálního modelu (4.25) předpokládat ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_+ &= \partial_+ - M_+(\nu) = \partial_+ + N^i_{+j} u^j_+ X_i, \\ \mathcal{X}_- &= \partial_- - M_-(\nu) = \partial_- + N^i_{-j} u^j_- X_i, \end{aligned} \tag{4.29}$$

kde N_+, N_- jsou podle úvah v sekci 4.2 dvě pomocné konstantní matice $n \times n$.

Poznámka 4.4.1 *Laxova formulace (4.7) a (4.8) je vzhledem ke vztahům*

$$\partial_{\pm} = \partial_0 \pm \partial_1, \quad u_{\pm} = u_0 \pm u_1,$$

$$N_{\pm} = P \pm Q.$$

ekvivalentní Laxově formulaci (4.28) a (4.29) v souřadnicích světelného kuželu.

Poznamenejme, že Laxova formulace polní rovnice (3.1) principálního chirálního modelu (3.2) má v souřadnicích světelného kuželu tvar

$$[\partial_+ - A^0_+(\nu), \partial_- - A^0_-(\nu)] = 0,$$

kde odpovídající Zakharov-Mikhailovův Laxův pár (3.4) má tvar

$$A^0_{\pm}(\nu) = -\frac{g^{-1}\partial_{\pm} g}{1 \pm \nu} = -\frac{u_{\pm}}{1 \pm \nu}.$$

Dosazením předpokladu (4.29) do podmínky nulové křivosti (4.28), dále s využitím polních rovnic (4.27) a Bianchiho identit (4.26) získáme nutné podmínky pro neznámé matice $N_{\pm}$ ve tvaru Sochenových rovnic v souřadnicích světelného kuželu

$$\Gamma^l{}_{jk}(N^i_{+l} - N^i_{-l}) = \frac{1}{2} f_{jk}{}^l (N^i_{+l} + N^i_{-l}) - f_{mn}{}^i N^m_{+j} N^n_{-k}. \tag{4.30}$$

Označme dále

$$N = N_+ - N_-.$$

Podle poznámky 4.4.1 plyne automaticky platnost následujících vět pro zobecněný principální chirální model v souřadnicích světelného kuželu, které ekvivalentním způsobem odpovídají větám 4.2.1 a 4.2.2.

Věta 4.4.2 *Laxova formulace (4.28) a (4.29) je ekvivalentní polním rovnicím (4.27) zobecněného principálního chirálního modelu (4.25) právě tehdy, když konstantní pomocné matice $N_{\pm}$ splňují Sochenovy rovnice (4.30) a matice N je invertovatelná.*

Věta 4.4.3 *Pouze zobecněný principální chirální model (4.25) vybavený konstantní konexí $\Gamma(L)$ definovanou podle (4.6) připouští Laxovu formulaci (4.28) a (4.29).*

Kapitola 5

$SU(2)$ modely

V této kapitole je podrobně zkoumána vzájemná souvislost Yang-Baxterova σ-modelu a zobecněného principálního chirálního modelu v rámci konkrétní volby kompaktní souvislé a jednoduše souvislé prosté Lieovy grupy

$$G = SU(2).$$

5.1 Yang-Baxterův $SU(2)$ model

Uvažujme nyní případ Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu, přičemž klíčovou úlohu nyní představuje Yang-Baxterův operátor R na $\mathfrak{su}(2)$.

5.1.1 Yang-Baxterův operátor na $\mathfrak{su}(2)$

Yang-Baxterův operátor nalezneme podle definice 3.2.1, přičemž je nutné nalézt Cartanovu podalgebru komplexifikace Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$.

Zvolme bázi $\{X_i\}_{i=1}^3$ příslušné Lieovy algebry $\mathcal{G} = \mathfrak{su}(2)$ jako

$$X_i = \frac{1}{2\mathrm{i}}\sigma_i, \quad \dim SU(2) = 3, \tag{5.1}$$

kde σ_j jsou Pauliho matice.

Potom strukturní koeficienty Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$ mají v bázi (5.1) tvar totálně antisymetrického Levi-Civitova tenzoru

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k. \tag{5.2}$$

Příslušnou komplexifikaci reálné Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$ nalezneme jako

$$\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(2) + \mathrm{i}\,\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),$$

přičemž $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ je komplexní poloprostá Lieova algebra.

Bázi Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ pak lze zvolit jako $\{Y_+, Y_-, Y_3\}$, kde

$$Y_\pm = \pm X_1 + \mathrm{i}X_2, \quad Y_3 = \mathrm{i}X_3 \tag{5.3}$$

a pro odpovídající komutační relace následně dostaneme

$$[Y_3, Y_\pm] = \pm Y_\pm, \quad [Y_+, Y_-] = 2Y_3. \tag{5.4}$$

Z komutačních relací (5.4) následně plyne, že operátor adY_3 je diagonalizovatelný. Příslušnou Cartanovu podalgebru $\mathcal{H}^\mathbb{C}$ komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ lze pak zvolit jako

$$\mathcal{H}^\mathbb{C} = \mathrm{span}(Y_3).$$

Unikátní vektor $H_\alpha \in \mathcal{H}^\mathbb{C}$ příslušející kořenu α následně nalezneme jako

$$H_\alpha = \frac{1}{2}Y_3.$$

Dále nalezneme bázi $\{E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha\}$ splňující vztahy (3.10) jako

$$E_{\pm\alpha} = Y_\pm, \quad H_\alpha = \frac{1}{2}Y_3. \tag{5.5}$$

Podle (3.11) zvolme bázi $\{T, B, C\}$ Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$ jako

$$T = \mathrm{i}H_\alpha, \quad B = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(E_\alpha + E_{-\alpha}), \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_\alpha + E_{-\alpha}),$$

přičemž ze vztahů (5.3) a (5.5) následně plyne

$$T = -\frac{1}{2}X_3, \quad B = -\sqrt{2}X_2, \quad C = \sqrt{2}X_1. \tag{5.6}$$

Podle definice 3.2.1 a vztahu (5.6) dostaneme

$$RX_1 = X_2, \quad RX_2 = -X_1,, \quad RX_3 = 0. \tag{5.7}$$

Yang-Baxterův operátor R tedy přímo odpovídá operátoru adX_3 a v původní bázi $\{X_i\}_{i=1}^3$ Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$ má tvar

$$R = adX_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Explicitní tvar Yang-Baxterova operátoru R dále snadno umožňuje nalézt konkrétní tvar Laxova páru pro Yang-Baxterův $SU(2)$ model.

5.1.2 Laxův pár Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu

S využitím explicitního tvaru (5.8) Yang-Baxterova operátoru R dostaneme

$$(I-\varepsilon R)^{-1} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}(I+\varepsilon R+\varepsilon^2 I_{33}), \tag{5.9}$$

kde I_{33} je projektor na bazický vektor X_3.

Dosazením (5.9) do obecného tvaru Laxova páru (3.47) Yang-Baxterova σ-modelu získáme Laxův pár Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu ve tvaru

$$\begin{aligned} A_+^\varepsilon(\lambda) &= -\frac{1}{1+\lambda}\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon\lambda & 0 \\ \varepsilon\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\varepsilon^2\lambda \end{pmatrix}^i_{\ j}(g^{-1}\partial_+ g)^j X_i, \\ A_-^\varepsilon(\lambda) &= -\frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon\lambda & 0 \\ \varepsilon\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon^2\lambda \end{pmatrix}^i_{\ j}(g^{-1}\partial_- g)^j X_i. \end{aligned} \tag{5.10}$$

5.1.3 Yang-Baxterův $SU(2)$ model jako GPCM

Na Yang-Baxterův σ-model (3.18) lze ve smyslu sekce 1.1 nahlížet jako na nelineární σ-model s lagrangiánem (1.12) ve tvaru

$$\mathcal{L} = E_{ij}(g^{-1}\partial_- g)^i (g^{-1}\partial_+ g)^j,$$

kde

$$E_{ij} = (X_i, (I-\varepsilon R)^{-1} X_j)_{\mathcal{G}}. \tag{5.11}$$

V případě Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu z tvaru Killing-Cartanovy formy na $\mathfrak{su}(2)$

$$\kappa_{ij} = (X_i, X_j)_{\mathfrak{su}(2)} = -2\delta_{ij}$$

a vztahů (5.9), (5.11) dostaneme

$$E = -\frac{2}{1+\varepsilon^2}(I+\varepsilon R+\varepsilon^2 I_{33}) = L + T,$$

kde

$$L = -\frac{2}{1+\varepsilon^2}(I+\varepsilon^2 I_{33}) = -\frac{2}{1+\varepsilon^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

$$T = -\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}R = -\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Podle práce [4] lze ukázat, že torzní člen odpovídající antisymetrické matici (5.13) je v případě Lieovy grupy $SU(2)$ obsažen v lagrangiánu akce (1.1) jako totální derivace a lze jej tedy úplně vynechat.

Akci Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu lze tedy vynecháním antisymetrického torzního členu odpovídajícímu Yang-Baxterovu operátoru R zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(g) = & \frac{1}{1+\varepsilon^2}\int_W d\xi^+ d\xi^- (g^{-1}\partial_+ g, g^{-1}\partial_- g)_{\mathfrak{su}(2)} \\ & + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\int_W d\xi^+ d\xi^- (g^{-1}\partial_+ g, I_{33}\, g^{-1}\partial_- g)_{\mathfrak{su}(2)} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Akce (5.14) pak tedy odpovídá Cherednikově 1-parametrické deformaci principálního chirálního $SU(2)$ modelu, pro kterou v práci [3] explicitně zkonstruoval Laxův pár. Deformace (5.14) se označuje jako anisotropní principální chirální $SU(2)$ model.

Vzájemná souvislost integrabilního Cherednikova $SU(2)$ modelu a Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu právě vedla k otázce integrability obecného Yang-Baxterova σ-modelu, která byla následně vyřešena nalezením Laxova páru (3.47) v práci [4].

Na základě těchto úvah tedy lze na Yang-Baxterův $SU(2)$ model dále nahlížet jako na anisotropní zobecněný principální chirální $SU(2)$ model s konstantní diagonální metrikou (5.12).

5.1.4 Drinfeldův double Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu

Nelineární σ-model je podle sekce (1.1) určen rozkladem Drinfeldova doublu $(\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ a volbou matice $E(e)$. Příslušnou matici σ-modelu pak získáme podle vztahu (1.14).

Porovnáním akce obecného Poisson-Lieovsky symetrického σ-modelu (3.14) a vztahů (1.12) a (1.14) dostaneme

$$(E_g - \varepsilon R)^{-1} = (a(g) + E(e)b(g))^{-1}E(e)a(g)^{-T},$$

resp.

$$a(g)^T E\, a(g)^{-T} - \varepsilon R = a(g)^T E(e)^{-1}(a(g) + E(e)b(g)). \tag{5.15}$$

Odtud po dosazení $g = e$ s využitím vztahu (1.16) dostaneme

$$E(e) = (E - \varepsilon R)^{-1}.$$

Yang-Baxterův σ-model pak odpovídá konstrukci

$$(\mathcal{G}, \mathcal{G}_R), \quad E(e) = (I - \varepsilon R)^{-1}.$$

Uvažujme Yang-Baxterův $SU(2)$ model, tj. $\mathcal{G} = \mathfrak{su}(2)$. Pak komutační relace Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)_R$ mají podle (3.13), (5.2) a (5.7) tvar

$$[X_1, X_2]_R = 0, \quad [X_2, X_3]_R = X_2, \quad [X_3, X_1]_R = -X_1.$$

S využitím Bianchiho klasifikace reálných třírozměrných algeber, kterou lze nalézt v příloze A převzaté z práce [2], dostaneme

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathbf{9}, \quad \mathfrak{su}(2)_R \cong \mathbf{5}.$$

Poznámka 5.1.1 *Poznamenejme, že příslušný isomorfismus mezi Lieovou algebrou $\tilde{\mathcal{G}} = \mathbf{5}$ s bází $\{\tilde{X}^i\}_{i=1}^3$ a Lieovou algebrou $\mathfrak{su}(2)_R$ s bází $\{X_i\}_{i=1}^3$ má tvar*

$$\tilde{X}^1 = X_3, \quad \tilde{X}^2 = X_1, \quad \tilde{X}^3 = X_2,$$

odkud plyne, že $R = ad\tilde{X}^1$.

Z klasifikace reálných šestirozměrných Drinfeldových doublů nalezené v práci [2] pak plyne, že Yang-Baxterův $SU(2)$ model je nelineární σ-model odpovídající konstrukci

$$(\mathbf{9}|\mathbf{5}|\beta), \quad E(e) = (I - \varepsilon R)^{-1},$$

kde

$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\beta\tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, \quad [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \beta\tilde{X}^3.$$

Poznámka 5.1.2 *V okolí jednotky lze na $SU(2)$ zavést souřadnice (x_1, x_2, x_3) jako*

$$Ad_g^{\mathcal{D}} = \prod_{i=1}^{3} \exp(x_i\, ad^{\mathcal{D}} X_i), \tag{5.16}$$

kde $ad^{\mathcal{D}}$ je adjungovaná reprezentace Lieovy algebry $\mathcal{G}$ na $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \tilde{\mathcal{G}}$.

Pro adjungovanou reprezentaci Lieovy grupy $SU(2)$ pak dále platí

$$a(g)^T = a(g)^{-1},$$

odkud lze vztah (5.15) přepsat jako

$$b(g) = \varepsilon(R\, a(g) - a(g)R). \tag{5.17}$$

Závislost parametru Maninovy trojice β na deformačním parametru ε lze následně explicitně určit s využitím souřadnic (5.16) a vztahu (5.17) ve tvaru

$$b(g, \beta) = \varepsilon(R\, a(g) - a(g)R)$$

jako

$$\beta(\varepsilon) = -\varepsilon.$$

Principální chirální $SU(2)$ model je nelineární σ-model odpovídající konstrukci

$$(\mathbf{9}|\mathbf{1}), \quad E(e) = I.$$

Bi-Yang-Baxterův $SU(2)$ model je nelineární σ-model odpovídající konstrukci

$$(\mathbf{9}|\mathbf{5}|\beta), \quad E(e) = (I - \varepsilon_l R - \varepsilon_r R)^{-1},$$

přičemž závislost parametru Maninovy trojice β na deformačním parametru ε_r lze dále explicitně určit s využitím souřadnic (5.16) a vztahu (5.17) ve tvaru

$$b(g, \beta) = \varepsilon_r(R\, a(g) - a(g)R)$$

jako

$$\beta(\varepsilon_r) = -\varepsilon_r.$$

5.1.5 Pohled za Yang-Baxterův σ-model

Zabývejme se nyní otázkou jakým způsobem zobecnit Yang-Baxterův σ-model, abychom pro volbu Lieovy grupy $G = SU(2)$ získali totálně anisotropní $SU(2)$ model.

Yang-Baxterův σ-model odpovídá konkrétní volbě $\mathbb{R}$-lineárního operátoru $E = I$ v obecném tvaru akce Poisson-Lieově symetrického σ-modelu

$$S_\varepsilon(E)(g) = \int_W d\xi^+ d\xi^- (g^{-1}\partial_+ g, (E_g - \varepsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathcal{G}},$$

kde $E_g = Ad_{g^{-1}} E Ad_g$.

Přirozeně se tedy nabízí použít pro uvažované zobecnění jinou volbu operátoru E. Vzhledem k použité metodě v sekci 3.6 a současně také větě 4.3.1 nelze operátor E volit zcela libovolně. S ohledem na zobecněný $SU(2)$ model je touto podmínkou požadavek konstantnosti příslušné matice σ-modelu

$$E_{ij} = (X_i, (E_g - \varepsilon R)^{-1} X_j)_{\mathfrak{su}(2)}. \tag{5.18}$$

To znamená, že operátor E musí vyhovovat podmínce

$$Ad_{g^{-1}} E Ad_g = C, \tag{5.19}$$

kde $C : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ je libovolný konstantní $\mathbb{R}$-lineární operátor.

Z teorie Lieových grup pak plyne, že pro $G = SU(2)$ existuje řešení podmínky (5.19) pouze v případě $C = E$ a příslušné obecné řešení lze zapsat ve tvaru

$$E = \omega I. \tag{5.20}$$

Dosazením (5.20) do (5.18) dostaneme

$$E = -\frac{2}{\omega(\omega^2 + \varepsilon^2)} \begin{pmatrix} \omega^2 & -\varepsilon\omega & 0 \\ \varepsilon\omega & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 + \varepsilon^2 \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Antisymetrickou část matice (5.21) lze stejně jako v sekci 5.1.3 s ohledem na neměnné pohybové rovnice σ-modelu zanedbat. Symetrická část matice (5.21) ve tvaru

$$L = -\frac{2}{\omega(\omega^2 + \varepsilon^2)} \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 + \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

následně bohužel odpovídá pouze ω-deformovanému anisotropnímu $SU(2)$ modelu. Volbou operátoru E tedy totálně anisotropní $SU(2)$ model nezískáme.

Autor si dále není vědom jiného možného způsobu zobecnění.

5.2 Zobecněný $SU(2)$ model

S ohledem na symetrii matice L_{ij} a ortogonální transformace lze stejně jako v sekci 4.3 bez újmy na obecnosti uvažovat následující předpoklady

$$f_{ij}{}^{k} = \varepsilon_{ijk}, \quad L = \mathrm{diag}(L_1, L_2, L_3). \tag{5.22}$$

Podle poznámky 4.4.1 plyne automaticky platnost následující věty pro zobecněný $SU(2)$ principální chirální model v souřadnicích světelného kuželu, která ekvivalentním způsobem odpovídá větě 4.3.1.

Věta 5.2.1 *Pouze zobecněný $SU(2)$ principální chirální model (4.25) vybavený konstantní metrikou L připouští Laxovu formulaci (4.28) a (4.29).*

Pro zobecněný $SU(2)$ principální chirální model se lze tedy omezit pouze na případy konstantní metriky L, neboť nekonstantní metrika podle věty 5.2.1 nedovoluje Laxovu formulaci (4.28) a (4.29).

V případě konstantní metriky L má nyní již plochá konexe $\Gamma(L)$ podle (5.22) tvar

$$\Gamma^{i}{}_{jk} = \varepsilon_{ijk}\frac{L_k - L_j}{2L_i}. \tag{5.23}$$

Poznamenejme, že pro zobecněný $SU(2)$ model mají Bianchiho identity (4.26) tvar

$$\partial_+ u^i_- - \partial_- u^i_+ + \varepsilon_{jki} u^j_+ u^k_- = 0 \tag{5.24}$$

a polní rovnice (4.27) tvar

$$\partial_+ u^i_- + \partial_- u^i_+ + 2\Gamma^{i}{}_{jk} u^j_+ u^k_- = 0, \tag{5.25}$$

přičemž konexe $\Gamma(L)$ je určena podle (5.23).

S využitím (5.22) lze Sochenovy rovnice (4.30) zapsat jako

$$\Gamma^{l}{}_{jk}(N^i_{+l} - N^i_{-l}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}(N^i_{+l} + N^i_{-l}) - \varepsilon_{mni} N^m_{+j} N^n_{-k}. \tag{5.26}$$

V dalším textu budeme hledat řešení Sochenových rovnic (5.26) ve smyslu ansatzu pomocných matic $N_\pm$, přičemž výsledný Laxův pár nalezneme ve tvaru

$$M_\pm(\nu) = -N^i_{\pm j} u^j_\pm X_i \tag{5.27}$$

a budeme diskutovat, zda nalezený 1-parametrický Laxův pár po zpětném dosazení do podmínky nulové křivosti (4.28) podle (4.29) a předpokladu její platnosti pro všechny hodnoty volného parametru implikuje platnost Bianchiho identit (5.24).

5.2.1 Anisotropní $SU(2)$ model

Uvažujme nyní anisotropní případ zobecněného $SU(2)$ modelu, tj.

$$L_1 = L_2 \neq L_3.$$

V anisotropním případě mají nenulové složky konexe $\Gamma(L)$ podle (5.23) tvar

$$\Gamma^1{}_{23} = \Gamma^1{}_{32} = \frac{k}{2}, \quad \Gamma^2{}_{31} = \Gamma^2{}_{13} = -\frac{k}{2}, \tag{5.28}$$

kde k označuje vstupní parametr anisotropního zobecněného $SU(2)$ modelu

$$k = \frac{L_3 - L_1}{L_1}. \tag{5.29}$$

Diagonální ansatz

V práci [7] byl N. Sochenem nalezen 1-parametrický Laxův pár

$$M_0(\nu) = -P_{ij} u_0^j X_i - Q_{ij} u_1^j X_i,$$

$$M_1(\nu) = -Q_{ij} u_0^j X_i - P_{ij} u_1^j X_i$$

jako řešení Sochenových rovnic (4.9) a (4.10) v souřadnicích (τ, σ) anisotropního $SU(2)$ modelu vzhledem k diagonálnímu ansatzu pomocných matic P a Q.

Odpovídající řešení ekvivalentně nalezneme v souřadnicích světelného kuželu.

Předpokládejme matice $N_\pm$ formující Laxův pár (5.27) zobecněného $SU(2)$ modelu pro anisotropní případ v diagonálním tvaru

$$N_+ = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, \quad N_- = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix}, \tag{5.30}$$

kde uvažujeme $x_1 \neq 0$, $x_3 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, $y_3 \neq 0$ a $x_1 \neq y_1$, $x_3 \neq y_3$.

Pro anisotropní zobecněný $SU(2)$ model a předpokládaný diagonální tvar Laxova páru podle (5.30) mají netriviální nezávislé Sochenovy rovnice (5.26) tvar

$$\begin{aligned} x_1(1+k) + y_1(1-k) &= 2x_3 y_1, \\ x_1(1-k) + y_1(1+k) &= 2x_1 y_3, \\ x_3 + y_3 &= 2x_1 y_1. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Soustava rovnic (5.31) představuje soustavu 3 rovnic pro 4 neznámé, což umožňuje hledat parametrické řešení ve tvaru

$$x_1 = x_1(\nu), \quad x_3 = x_3(\nu), \quad y_1 = y_1(\nu), \quad y_3 = y_3(\nu),$$

kde volný parametr ν zavedeme jako

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{1-\nu}{1+\nu}.$$

Pak vyřešením soustavy (5.31) dostaneme

$$\begin{gathered} x_1(\nu) = \kappa\frac{\sqrt{1+k\nu^2}}{1+\nu}, \quad y_1(\nu) = \kappa\frac{\sqrt{1+k\nu^2}}{1-\nu}, \quad \kappa^2 = 1, \\ x_3(\nu) = \frac{1-k\nu}{1+\nu}, \quad y_3(\nu) = \frac{1+k\nu}{1-\nu}. \end{gathered} \tag{5.32}$$

Laxův pár anisotropního zobecněného $SU(2)$ modelu má tedy podle vztahů (5.27), (5.30) a (5.32) tvar

$$\begin{aligned} M_+(\nu) &= -\frac{1}{1+\nu}\begin{pmatrix} \kappa\sqrt{1+k\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa\sqrt{1+k\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-k\nu \end{pmatrix}^i_{\ j} u_+^j X_i, \\ M_-(\nu) &= -\frac{1}{1-\nu}\begin{pmatrix} \kappa\sqrt{1+k\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa\sqrt{1+k\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1+k\nu \end{pmatrix}^i_{\ j} u_-^j X_i. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Poznamenejme, že v isotropním případě $k = 0$ a pro volbu $\kappa = 1$ přechází Laxův pár (5.33) na Zakharov-Mikhailovův Laxův pár (3.4) principálního chirálního modelu.

Dále provedeme v Laxově páru (5.33) regulární transformaci volného parametru jako

$$\nu = \frac{\sinh\mu}{\sqrt{k}}, \quad k \neq 0. \tag{5.34}$$

Podle (5.34) lze Laxův pár (5.33) přepsat jako

$$\begin{aligned} M_+(\mu) &= -\frac{1}{1+\frac{\sinh\mu}{\sqrt{k}}}\begin{pmatrix} \kappa\cosh\mu & 0 & 0 \\ 0 & \kappa\cosh\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{k}\sinh\mu \end{pmatrix}^i_{\ j} u_+^j X_i, \\ M_-(\mu) &= -\frac{1}{1-\frac{\sinh\mu}{\sqrt{k}}}\begin{pmatrix} \kappa\cosh\mu & 0 & 0 \\ 0 & \kappa\cosh\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{k}\sinh\mu \end{pmatrix}^i_{\ j} u_-^j X_i. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Dosazením Laxova páru (5.35) do podmínky nulové křivosti (4.28), (4.29) dostaneme

$$\begin{gathered} s(\mu)B^\iota + l(\mu)P^\iota = 0, \quad \iota = 1,2, \\ s_3(\mu)B^3 + l_3(\mu)P^3 = 0, \end{gathered} \tag{5.36}$$

kde

$$s(\mu) = \frac{\cosh\mu}{1 - \frac{\sinh^2\mu}{k}}, \quad l(\mu) = \frac{\sinh\mu}{\sqrt{k}} s(\mu),$$

$$s_3(\mu) = \cosh\mu \; s(\mu) \quad l_3(\mu) = \frac{1+k}{\cosh\mu}\, l(\mu),$$

$$B^i = \partial_+ u_-^i - \partial_- u_+^i + \varepsilon_{jki} u_+^j u_-^k,$$
$$P^i = \partial_+ u_-^i + \partial_- u_+^i + 2{\Gamma^i}_{jk} u_+^j u_-^k,$$

přičemž nenulové složky konexe $\Gamma(L)$ jsou určeny podle (5.28).

Funkce $s(\mu)$, $s_3(\mu)$, resp. $l(\mu)$, $l_3(\mu)$ jsou sudé, resp. liché funkce vzhledem k volnému parametru μ. Odtud tedy platnost podmínky nulové křivosti (5.36) pro každé $\mu \in \mathbb{C}$ implikuje nulovost koeficientů B^i a P^i. To ekvivalentně odpovídá platnosti Bianchiho identit (5.24) a polních rovnic (5.25). Analogicky lze postupovat i naopak.

S ohledem na tyto úvahy lze vyslovit následující věta.

Věta 5.2.2 *Laxova formulace (5.33) a (4.28), (4.29) je ekvivalentní polním rovnicím (5.25) anisotropního $SU(2)$ modelu (4.25) a platnosti Bianchiho identit (5.24).*

Blokově diagonální ansatz

Uvažujme nyní případ blokově diagonálního ansatzu, přičemž ukážeme shodnost Laxova páru (5.10) Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu a Laxova páru anisotropního $SU(2)$ modelu v rámci blokově diagonálním ansatzu.

S ohledem na tvar Laxova páru (5.10) Yang-Baxterova SU(2) modelu

$$A_+^\varepsilon(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda} {\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon\lambda & 0 \\ \varepsilon\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\varepsilon^2\lambda \end{pmatrix}^i}_j u_+^j X_i,$$

$$A_-^\varepsilon(\lambda) = -\frac{1}{1-\lambda} {\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon\lambda & 0 \\ \varepsilon\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon^2\lambda \end{pmatrix}^i}_j u_-^j X_i,$$

předpokládejme matice $N_\pm$ formující Laxův pár (5.27) zobecněného $SU(2)$ modelu pro anisotropní případ v blokově diagonálním tvaru

$$N_+ = \begin{pmatrix} x & -ax & 0 \\ ax & x & 0 \\ 0 & 0 & (1-b)x \end{pmatrix}, \quad N_- = \begin{pmatrix} y & -ay & 0 \\ ay & y & 0 \\ 0 & 0 & (1+b)y \end{pmatrix}, \tag{5.37}$$

kde uvažujeme $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Pro anisotropní zobecněný $SU(2)$ model a předpokládaný blokově diagonální tvar Laxova páru podle (5.37) mají netriviální nezávislé Sochenovy rovnice (5.26) tvar

$$\begin{aligned}\frac{1+b}{x}+\frac{1-b}{y}&=2(1+a^2),\\ \frac{1-k}{x}+\frac{1+k}{y}&=2(1-b),\\ \frac{1+k}{x}+\frac{1-k}{y}&=2(1+b).\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme soustavu třech rovnic pro čtyři neznámé (x, y, a, b) se vstupním parametrem k anisotropního zobecněného $SU(2)$ modelu ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{1+b}{x}+\frac{1-b}{y}&=2(1+a^2),\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=2,\\ b&=\frac{k}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right).\end{aligned}\tag{5.38}$$

Vzhledem k neurčitosti soustavy rovnic (5.38) hledejme parametrické řešení

$$x=x(\nu),\quad y=y(\nu),\quad a=a(\nu),\quad b=b(\nu),$$

kde volný parametr ν zavedeme jako

$$x(\nu)=\frac{1}{1+\nu}.$$

Pak vyřešením soustavy (5.38) dostaneme

$$x(\nu)=\frac{1}{1+\nu},\quad y(\nu)=\frac{1}{1-\nu},\quad a(\nu)=\kappa\sqrt{k}\nu,\quad \kappa^2=1,\quad b(\nu)=k\nu. \tag{5.39}$$

Laxův pár anisotropního zobecněného $SU(2)$ modelu má tedy podle vztahů (5.27), (5.37) a (5.39) tvar

$$\begin{aligned}M_+(\nu)&=-\frac{1}{1+\nu}\begin{pmatrix}1 & -\kappa\sqrt{k}\nu & 0\\ \kappa\sqrt{k}\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1-k\nu\end{pmatrix}^i_j u^j_+X_i,\\ M_-(\nu)&=-\frac{1}{1-\nu}\begin{pmatrix}1 & -\kappa\sqrt{k}\nu & 0\\ \kappa\sqrt{k}\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+k\nu\end{pmatrix}^i_j u^j_-X_i.\end{aligned}\tag{5.40}$$

Vstupní parametr k anisotropního zobecněného $SU(2)$ modelu odpovídá podle vztahů (5.12) a (5.29) deformačnímu parametru ε Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu jako

$$k = \varepsilon^2.$$

Odtud plyne, že Laxův pár (5.40) anisotropního zobecněného $SU(2)$ modelu se shoduje s Laxovým párem (5.10) Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu pro hodnotu $\kappa = 1$.

Podobně jako v případě diagonálního ansatzu lze ověřit, že Laxův pár (5.40) také vyhovuje větě 5.2.2. Tento fakt odpovídá skutečnosti, že pro Yang-Baxterův σ-model platí věta 3.6.3 pro libovolnou kompaktní prostou Lieovu grupu G.

5.2.2 Totálně anisotropní $SU(2)$ model

Uvažujme nyní totálně anisotropní případ zobecněného $SU(2)$ modelu

$$L_1 \neq L_2, \quad L_1 \neq L_3, \quad L_2 \neq L_3.$$

V totálně anisotropním případě mají nenulové složky konexe $\Gamma(L)$ podle (5.23) tvar

$$\Gamma^1{}_{23} = \Gamma^1{}_{32} = \frac{k_1}{2}, \quad \Gamma^2{}_{31} = \Gamma^2{}_{13} = \frac{k_2}{2}, \quad \Gamma^3{}_{12} = \Gamma^3{}_{21} = \frac{k_3}{2},$$

kde k_i označují vstupní parametry totálně anisotropního zobecněného $SU(2)$ modelu

$$k_1 = \frac{L_3 - L_2}{L_1}, \quad k_2 = \frac{L_1 - L_3}{L_2}, \quad k_3 = \frac{L_2 - L_1}{L_3}. \tag{5.41}$$

Poznamenejme, že vhledem ke vztahu (5.41) plyne pro vstupní parametry k_i identita

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_1 k_2 k_3 = 0, \tag{5.42}$$

resp. ekvivalentně ve tvaru

$$\frac{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)}{(1-k_1)(1-k_2)(1-k_3)} = 1. \tag{5.43}$$

Sochenovy rovnice totálně anisotropního $SU(2)$ modelu

V této části zkoumáme možné ansatzy pomocných matic $N_\pm$, které by připouštěly parametrické řešení Sochenových rovnic (5.26) totálně anisotropního $SU(2)$ modelu. Rovnice (5.26) lze obecně zapsat formou tzv. první a druhé sady Sochenových rovnic.

První sada Sochenových rovnic má tvar

$$\begin{aligned}
&N_{+11}N_{-21} = N_{+21}N_{-11}, \;\; N_{+11}N_{-31} = N_{+31}N_{-11}, \;\; N_{+21}N_{-31} = N_{+31}N_{-21}, \\
&N_{+12}N_{-22} = N_{+22}N_{-12}, \;\; N_{+12}N_{-32} = N_{+32}N_{-12}, \;\; N_{+22}N_{-32} = N_{+32}N_{-22}, \\
&N_{+13}N_{-23} = N_{+23}N_{-13}, \;\; N_{+13}N_{-33} = N_{+33}N_{-13}, \;\; N_{+23}N_{-33} = N_{+33}N_{-23}.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Druhá sada Sochenových rovnic má tvar

$$
\begin{aligned}
N_{+11}(1+k_1)+N_{-11}(1-k_1) &= 2(N_{+33}N_{-22}-N_{+23}N_{-32}), && (123)\\
N_{+11}(1-k_1)+N_{-11}(1+k_1) &= 2(N_{+22}N_{-33}-N_{+32}N_{-23}), && (132)\\[1em]
N_{+21}(1+k_1)+N_{-21}(1-k_1) &= 2(N_{+13}N_{-32}-N_{+33}N_{-12}), && (223)\\
N_{+21}(1-k_1)+N_{-21}(1+k_1) &= 2(N_{+32}N_{-13}-N_{+12}N_{-33}), && (232)\\[1em]
N_{+31}(1+k_1)+N_{-31}(1-k_1) &= 2(N_{+23}N_{-12}-N_{+13}N_{-22}), && (323)\\
N_{+31}(1-k_1)+N_{-31}(1+k_1) &= 2(N_{+12}N_{-23}-N_{+22}N_{-13}), && (332)\\[1em]
N_{+22}(1+k_2)+N_{-22}(1-k_2) &= 2(N_{+11}N_{-33}-N_{+31}N_{-13}), && (231)\\
N_{+22}(1-k_2)+N_{-22}(1+k_2) &= 2(N_{+33}N_{-11}-N_{+13}N_{-31}), && (213)\\[1em]
N_{+32}(1+k_2)+N_{-32}(1-k_2) &= 2(N_{+21}N_{-13}-N_{+11}N_{-23}), && (331)\\
N_{+32}(1-k_2)+N_{-32}(1+k_2) &= 2(N_{+13}N_{-21}-N_{+23}N_{-11}), && (313)\\[1em]
N_{+12}(1+k_2)+N_{-12}(1-k_2) &= 2(N_{+31}N_{-23}-N_{+21}N_{-33}), && (131)\\
N_{+12}(1-k_2)+N_{-12}(1+k_2) &= 2(N_{+23}N_{-31}-N_{+33}N_{-21}), && (113)\\[1em]
N_{+33}(1+k_3)+N_{-33}(1-k_3) &= 2(N_{+22}N_{-11}-N_{+12}N_{-21}), && (312)\\
N_{+33}(1-k_3)+N_{-33}(1+k_3) &= 2(N_{+11}N_{-22}-N_{+21}N_{-12}), && (321)\\[1em]
N_{+13}(1+k_3)+N_{-13}(1-k_3) &= 2(N_{+32}N_{-21}-N_{+22}N_{-31}), && (112)\\
N_{+13}(1-k_3)+N_{-13}(1+k_3) &= 2(N_{+21}N_{-32}-N_{+31}N_{-22}), && (121)\\[1em]
N_{+23}(1+k_3)+N_{-23}(1-k_3) &= 2(N_{+12}N_{-31}-N_{+32}N_{-11}), && (212)\\
N_{+23}(1-k_3)+N_{-23}(1+k_3) &= 2(N_{+31}N_{-12}-N_{+11}N_{-32}). && (221)
\end{aligned}
\tag{5.45}
$$

Obecné řešení první sady Sochenových rovnic (5.44) lze zapsat ve tvaru

$$N_+ = \begin{pmatrix} x_1 & b_2x_2 & a_3x_3 \\ a_1x_1 & x_2 & b_3x_3 \\ b_1x_1 & a_2x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad N_- = \begin{pmatrix} y_1 & b_2y_2 & a_3y_3 \\ a_1y_1 & y_2 & b_3y_3 \\ b_1y_1 & a_2y_2 & y_3 \end{pmatrix}. \tag{5.46}$$

Vzhledem k obecnému řešení (5.46) první sady Sochenových rovnic (5.44) jsme úlohu zredukovali na 18 rovnic druhé sady Sochenových rovnic (5.45) pro 12 neznámých x_i, y_i, a_i a b_i, kde $i = 1, 2, 3$.

Chceme-li, aby Sochenovy rovnice (5.45) připouštěly alespoň 1-parametrické řešení, je nutné nějakým způsobem snížit počet vzájemně nezávislých rovnic a zároveň zachovat dostatečný počet neznámých.

Lze ukázat, že vhodnou volbou neznámých a_i a b_i lze docílit určité závislosti rovnic druhé sady. Tato závislost odpovídá skutečnosti, kdy splnění rovnice (ijk) implikuje platnost rovnic (jjk), (kjk) pro $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$. Takto lze vytvořit celkem 6 trojčlenných skupin vzájemně závislých rovnic.

Podmínky potřebné pro tuto uvažovanou závislost lze zapsat jako

$$\begin{aligned} a_2a_3 - b_2 &= a_1(1 - a_2b_3), \quad & b_2b_3 - a_3 &= b_1(1 - a_2b_3), \\ a_3a_1 - b_3 &= a_2(1 - a_3b_1), \quad & b_3b_1 - a_1 &= b_2(1 - a_3b_1), \\ a_1a_2 - b_1 &= a_3(1 - a_1b_2), \quad & b_1b_2 - a_2 &= b_3(1 - a_1b_2). \end{aligned} \tag{5.47}$$

Podle věty 4.4.2 musí být navíc matice $N = N_+ - N_-$ invertovatelná, tj.

$\det(N_+ - N_-) = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2)(x_3 - y_3)(1 + a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 - a_1b_2 - a_2b_3 - a_3b_1) \neq 0,$

odkud plynou podmínky

$$x_i \neq y_i, \tag{5.48}$$

$$1 + a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 - a_1b_2 - a_2b_3 - a_3b_1 \neq 0. \tag{5.49}$$

Podmínky závislosti (5.47) jako 6 rovnic pro 6 neznámých a_i a b_i obecně parametrické řešení nepřipouští. Uvažujme tedy speciální třídu řešení určené hodnotou $a_3 = 0$, přičemž řešení podmínek závislosti (5.47) pak nalezneme ve 2-parametrickém tvaru

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = 0, \quad b_1 = ab, \quad b_2 = -a(1 + b^2), \quad b_3 = -b \tag{5.50}$$

s omezující podmínkou (5.49) ve tvaru

$$(1 + b^2)(1 + a^2(1 + b^2)) \neq 0. \tag{5.51}$$

Ansatz (5.46) odpovídající řešení (5.50) má tedy tvar

$$\begin{aligned} N_+ &= \begin{pmatrix} x_1 & -a(1 + b^2)x_2 & 0 \\ ax_1 & x_2 & -bx_3 \\ abx_1 & bx_2 & x_3 \end{pmatrix}, \\ N_- &= \begin{pmatrix} y_1 & -a(1 + b^2)y_2 & 0 \\ ay_1 & y_2 & -by_3 \\ aby_1 & by_2 & y_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.52}$$

přičemž zbylé netriviální Sochenovy rovnice mají tvar

$$
\begin{aligned}
x_1(1+k_1)+y_1(1-k_1) &= 2(1+b^2)x_3y_2,\\
x_1(1-k_1)+y_1(1+k_1) &= 2(1+b^2)x_2y_3,\\
x_2(1+k_2)+y_2(1-k_2) &= 2x_1y_3,\\
x_2(1-k_2)+y_2(1+k_2) &= 2x_3y_1,\\
x_3(1+k_3)+y_3(1-k_3) &= 2(1+a^2(1+b^2))x_2y_1,\\
x_3(1-k_3)+y_3(1+k_3) &= 2(1+a^2(1+b^2))x_1y_2.
\end{aligned}
\tag{5.53}
$$

Sochenovy rovnice (5.26) se nám tedy vzhledem k ansatzu (5.52) podařilo zredukovat na 6 nelineárních rovnic (5.53) pro 8 neznámých x_i, y_i, a a b s omezujícími podmínkami (5.48) a (5.51).

Poznámka 5.2.3 *Vzhledem k ansatzu (5.52) a soustavě (5.53) je teoreticky možné nalézt dokonce 2-parametrický Laxův pár totálně anisotropního $SU(2)$ modelu. V této práci se ale touto možností nebudeme zabývat a proto položme fixně $b = 0$.*

Diagonální ansatz $a = b = 0$

Pro hodnoty $a = b = 0$ dostaneme podle (5.52) diagonální ansatz

$$
N_+ = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, \quad N_- = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix}.
$$

Poznamenejme, že v tomto případě nejsou vzhledem ke specifické identitě uvedené v práci [1] příslušné netriviální Sochenovy rovnice nezávislé a lze tedy hledat řešení obsahující volný parametr.

V práci [1] byl L. Hlavatým nalezen 1-parametrický Laxův pár

$$
\begin{aligned}
M_0(\nu) &= -P_{ij}u_0^jX_i - Q_{ij}u_1^jX_i,\\
M_1(\nu) &= -Q_{ij}u_0^jX_i - P_{ij}u_1^jX_i
\end{aligned}
$$

jako řešení Sochenových rovnic (4.9) a (4.10) v souřadnicích (τ, σ) totálně anisotropního $SU(2)$ modelu vzhledem k diagonálnímu ansatzu pomocných matic P a Q.

Ukázalo se ale, že toto nalezené řešení po dosazení do podmínky nulové křivosti (4.7) podle (4.8) a předpokladu její platnosti pro všechny hodnoty volného parametru bohužel neimplikuje platnost Bianchiho identit (4.4).

Za účelem získání této vlastnosti, kterou naopak případ anisotropního $SU(2)$ modelu přirozeně vykazoval, se zdá být nutné použít v případě totálně anisotropního $SU(2)$ modelu jiný než diagonální ansatz.

Blokově diagonální ansatz $b = 0$

Pro hodnotu $b = 0$ dostaneme podle (5.52) blokově diagonální ansatz

$$N_+ = \begin{pmatrix} x_1 & -ax_2 & 0 \\ ax_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, \quad N_- = \begin{pmatrix} y_1 & -ay_2 & 0 \\ ay_1 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix} \tag{5.54}$$

Netriviální Sochenovy rovnice (5.53) mají pak tvar

$$\begin{aligned} x_1(1+k_1) + y_1(1-k_1) &= 2x_3y_2, \\ x_1(1-k_1) + y_1(1+k_1) &= 2x_2y_3, \\ x_2(1+k_2) + y_2(1-k_2) &= 2x_1y_3, \\ x_2(1-k_2) + y_2(1+k_2) &= 2x_3y_1, \\ x_3(1+k_3) + y_3(1-k_3) &= 2(1+a^2)x_2y_1, \\ x_3(1-k_3) + y_3(1+k_3) &= 2(1+a^2)x_1y_2. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Soustava (5.55) se ale zdá být pro explicitní řešení stále příliš komplikovaná.

Nicméně lze ukázat, že díky identitě (5.42) umožňuje volba $y_3 = 0$ triviálně vyřešit jednu z modifikovaných Sochenových rovnic (5.55). Poznamenejme, že pro $x_3 \neq 0$ nejsme v rozporu s omezující podmínkou (5.48). Příslušným volným parametrem se v tomto případě stane přímo neznámá a.

Vyřešením soustavy (5.55) vzhledem k ansatzu (5.54) s dodatkem $y_3 = 0$ následně dostaneme Laxův pár totálně anisotropního $SU(2)$ modelu ve tvaru

$$\begin{aligned} M_+(\nu) &= -\begin{pmatrix} n_{+1}\operatorname{sech}\nu & -n_{+2}\tanh\nu & 0 \\ n_{+1}\tanh\nu & n_{+2}\operatorname{sech}\nu & 0 \\ 0 & 0 & n_{+3} \end{pmatrix}^i_{\ j} u^j_+ X_i, \\ M_-(\nu) &= -\begin{pmatrix} n_{-1}\operatorname{sech}\nu & -n_{-2}\tanh\nu & 0 \\ n_{-1}\tanh\nu & n_{-2}\operatorname{sech}\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^i_{\ j} u^j_- X_i. \end{aligned} \tag{5.56}$$

kde ν je volný parametr zavedený předpisem $a = \sinh\nu$ a $n_{\pm j}$ jsou funkce závislé pouze na vstupních parametrech k_i totálně anisotropního $SU(2)$ modelu

$$n_{+1} = \kappa_1 \left(\frac{1+k_1}{1-k_1}\right)\sqrt{\frac{k_2(1+k_3)}{k_2-1}}, \quad \kappa_1^2 = 1,$$

$$n_{+2} = \kappa_2 \left(\frac{1-k_2}{1+k_2}\right)\sqrt{\frac{k_1(1-k_3)}{k_1+1}}, \quad \kappa_2^2 = 1,$$

$$n_{+3} = -\frac{2(1-k_1)}{(1+k_1)(1+k_3)} n_{+1} n_{+2},$$

$$n_{-1} = -\left(\frac{1-k_1}{1+k_1}\right) n_{+1}, \quad n_{-2} = -\left(\frac{1+k_2}{1-k_2}\right) n_{+2}.$$

Po dosazení Laxova páru (5.56) do podmínky nulové křivosti (4.28) podle (4.29) se však ukázalo, že stejně jako v případě diagonálního ansatzu v práci [1] splnění podmínky nulové křivosti pro všechny hodnoty volného parametru ν bohužel také neimplikuje platnost Bianchiho identit (5.24).

Z provedených výpočtů navíc plyne, že na vině je právě požadavek $y_3 = 0$, který paradoxně umožnil soustavu Sochenových rovnic (5.55) vyřešit.

Závěr

V první kapitole jsme se úspěšně seznámili s teorií 2-rozměrných nelineárních σ-modelů dualizovatelných ve smyslu Poisson-Lieovy T-duality, přičemž byla podrobně využita práce [5]. Ve druhé kapitole bylo vzhledem k charakteru diplomové práce stručně zpracováno téma Laxova formalismu podle přednášky [6]. V dalších kapitolách jsme se následně podrobně seznámili s teorií Yang-Baxterova σ-modelu, resp. zobecněného principálním chirálním modelu a příslušnými Laxovými formulacemi jejich pohybových rovnic, přičemž byly podrobně využity práce [4] resp. [7].

Ve třetí kapitole jsme navíc ukázali, že platnost podmínky nulové křivosti (3.49) pro každou hodnotu spektrálního parametru a nalezený Laxův pár (3.46) Yang-Baxterova σ-modelu podle [4] dokonce obecně implikuje platnost Bianchiho identit (3.33). Tato skutečnost se zdá být pozoruhodná především vzhledem k Laxově formalismu v rámci zobecněného principálního chirálního modelu, kde je platnost Bianchiho identit předem předpokládána.

Ve čtvrté kapitole jsme s využitím poznatků nalezených v práci [1] ukázali, že pouze zobecněný $SU(2)$ principální chirální model vybavený konstantní metrikou L připouští uvažovanou Laxovu formulaci. Tato skutečnost následně vedla na obecný tvar Sochenových rovnic (5.26) pro zobecněný $SU(2)$ model.

V páté kapitole jsme explicitně nalezli Laxův pár Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu ve tvaru (5.10). Dále jsme ukázali, že na Yang-Baxterův $SU(2)$ model lze nahlížet jako na anisotropní $SU(2)$ model s konstantní diagonální metrikou (5.12), přičemž vstupní parametr k anisotropního $SU(2)$ modelu odpovídá deformačnímu parametru ε Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu jako $k = \varepsilon^2$. Yang-Baxterův $SU(2)$ model jsme pak zkoumali jako dualizovatelný σ-model, přičemž jsme ukázali, že odpovídá konstrukci v podobě rozkladu Drinfeldova doublu $(\mathbf{9}|\mathbf{5}|-\varepsilon)$ a matici $E(e) = (I - \varepsilon R)^{-1}$.

V této části jsme se také zabývali otázkou jakým způsobem zobecnit Yang-Baxterův σ-model, abychom pro volbu Lieovy grupy $G = SU(2)$ získali totálně anisotropní $SU(2)$ model. Navrhovaný postup nicméně vedl pouze na určitou další deformaci anisotropního $SU(2)$ modelu. Autor si nadále není vědom jiného způsobu zobecnění.

Sochenovy rovnice (5.26) jsme v případě anisotropního $SU(2)$ modelu úspěšně vyřešili jak pomocí diagonálního ansatzu (5.33), tak pomocí blokově diagonálního ansatzu (5.40), kterým jsme ve skutečnosti zreprodukovali Laxův pár (5.10) Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu. Následně jsme zjistili, že oba tyto Laxovy páry nalezené řešením anisotropních Sochenových rovnic po dosazení do podmínky nulové křivosti a předpokladu její platnosti pro všechny hodnoty spektrálního parametru implikují odpovídající Bianchiho identity (5.24). V tomto ohledu tedy autor považuje nalezené Laxovy páry (5.33), resp. (5.40) anisotropního SU(2) modelu a Laxův pár (5.10) Yang-Baxterova $SU(2)$ modelu za rovnocenné.

V poslední části jsme podrobně provedli rozbor Sochenových rovnic (5.26) v případě totálně anisotropního $SU(2)$ modelu. Vzhledem ke skutečnosti, že Laxův pár nalezený pomocí diagonálního ansatzu v práci [1] neimplikuje platnost odpovídajících Bianchiho identit, jsme se zabývali možností jiného ansatzu. Nalezli jsme jistý 8-parametrický ansatz (5.52), který následně vedl na soustavu 6 nelineárních Sochenových rovnic (5.53). Tyto rovnice jsme pak vyřešili pouze pro speciální volbu $b = 0$, $y_3 = 0$, přičemž jsme však ukázali, že nalezený Laxův pár (5.56) bohužel neimplikuje platnost Bianchiho identit (5.24). Otázka Laxova páru totálně anisotropního $SU(2)$ modelu s touto přídavnou vlastností tak zůstává nadále nezodpovězena.

Seznam použitých zdrojů

[1] L. Hlavatý. *On the Lax formulation of generalized $SU(2)$ principal models*. Phys. Lett. A271 (2000) 207.

[2] L. Hlavatý and L. Šnobl. *Clasification of 6-dimensional Drinfeld doubles*. Int. J. Mod. Phys. A17 (2002) 4043.

[3] I. V. Cherednik. *Relativistic-invariant quasiclassical limits of integrable two-dimensional quantum models*. Theor. Math. Phys. 47 (1981) 225.

[4] C. Klimčík. *On integrability of the Yang-Baxter σ-model*. J. Math. Phys. 50 (2008) 11. arXiv.org: 0802.3518.

[5] C. Klimčík. *Poisson-Lie T-duality*. Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) B46 (1996) 116. arXiv.org: hep-th/9509095.

[6] P. Miller. *Lecture Notes: Math 529 - Universality*. University of Arizona. (2008). URL http://math.arizona.edu/~mcl/MATH529_Spring08.html.

[7] N. Sochen. *Integrable generalized principal chiral models*. Phys. Lett. B391 (1997) 374. arXiv.org: hep-th/9607009.

[8] V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov. *Relativistically invariant two-dimensional model of field theory which is integrable by means of the inverse scattering method*. Sov. Phys. JETP 47 (1978) 1017.

Přílohy

Příloha A

Bianchiho algebry

Každou reálnou třírozměrnou Lieovu algebru lze změnou báze převést na jednu z 11 tvarů Bianchiho algeber, které reprezentují neisomorfní Lieovy algebry.

$$\mathbf{9}: \quad [X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2, \quad \text{tj. } \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2),$$

$$\mathbf{8}: \quad [X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2, \quad \text{tj. } \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}),$$

$$\mathbf{7}_a: \quad [X_1, X_2] = aX_2 + X_3, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, \quad a > 0,$$

$$\mathbf{7}_0: \quad [X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2,$$

$$\mathbf{6}_a: \quad [X_1, X_2] = -aX_2 - X_3, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, \quad a > 0, a \neq 0,$$

$$\mathbf{6}_0: \quad [X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = -X_2,$$

$$\mathbf{5}: \quad [X_1, X_2] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = X_3,$$

$$\mathbf{4}: \quad [X_1, X_2] = -X_2 + X_3, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = X_3,$$

$$\mathbf{3}: \quad [X_1, X_2] = -X_2 - X_3, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = X_2 + X_3,$$

$$\mathbf{2}: \quad [X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = 0,$$

$$\mathbf{1}: \quad [X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = 0.$$