České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika

Kohraniční Lieovské superbialgebry a jejich r-matice
Coboundary Lie superbialgebras and their r-matrices

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Filip Petrásek
Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Rok: 2012

Před svázáním místo téhle stránky $\boxed{\text{vložíte zadání práce}}$ s podpisem děkana (bude to jediný oboustranný list ve Vaší práci) !!!!

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil pouze literaturu uvedenou v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/200 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne ....

....
Filip Petrásek

Poděkování

Děkuji prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc. za vedení mé bakalářské práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily.

Dále bych chtěl poděkovat své rodině a především své přítelkyni za bezmeznou podporu a trpělivost při psaní této práce.

Filip Petrásek

Název práce:
Kohraniční Lieovské superbialgebry a jejich r-matice

Autor: Filip Petrásek

Obor: Matematické inženýrství
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze
Konzultant: —

Abstrakt: Lieovy superalgebry jsou významným zobecněním klasických Lieových algeber, které jsou běžně využívány v různých oblastech fyziky. Lieovy superalgebry tvoří matematický aparát teorie supersymetrií. Lieova bialgebra je Lieova algebra vybavená lineárním zobrazením, jehož transpozice definuje Lieovu závoru na duálu Lieovy algebry. Jedná se o triviální příklad Maninovy trojice. Kohraniční Lieovy bialgebry jsou definovány pomocí tzv. r-matice, jejíž kohranice právě strukturu Lieovy bialgebry definuje. V této práci se snažíme zobecnit pojem kohranice na úrovni Lieových superalgeber, abychom mohli následně uvažovat kohraniční Lieovy superbialgebry a spočítat jejich r-matice pro nízké dimenze.

Klíčová slova: Lieova bialgebra, Lieova superalgebra, Maninova supertrojice, kohranice, r-matice

Title:
Coboundary Lie superbialgebras and their r-matrices

Author: Filip Petrásek

Abstract: Lie superalgebras are a remarkable generalisation of the normally used physical term of Lie algebras. Lie superalgebras form the mathematicel structure for the theory of supersymmetries. A Lie bialgebra is defined as a Lie algebra equipped with a linear map whose transpose defines a Lie bracket on a dual of the Lie algebra. It is a trivial example of a Manin triple. Coboundary Lie bialgebras are defined by so called r-matrix whose coboundary defines the Lie-bialgebra structure. In this work we try to generalize the term of coboundary on the level of Lie superalgebras to consider coboundary Lie superbialgebras and calculate their r-matrixes in low dimensions.

Key words: Lie bialgebra, Lie superalgebra, Manin supertriple, coboundary, r-matrix

Obsah

Úvod

Symetrie patří k ústředním pojmům teoretické fyziky 20. století, zejména díky jejich úzkému vztahu se zákony zachování. Důležitými symetriemi jsou například invariance fyzikálních zákonů vůči časové translaci nebo prostorové rotaci. Teorie symetrií je základním nástrojem pro klasifikaci elementárních částic a interakcí v tzv. standardním modelu částicové fyziky. V 70. letech 20. století byl nalezen netriviální způsob zobecnění symetrií na tzv. supersymetrie, což započalo vývoj supersymetrické teorie, často zkracované jako SuSy. V částicové fyzice se jedná o symetrie interakcí mezi bosony a fermiony. Supersymetrie lze aplikovat na kvantovou teorii pole nebo na standardní model částicové fyziky, kde se snaží řešit problémy vzniklé v těchto teoriích. Nelze opomenout jejich úzký vztah s teorií superstrun.

Lieova bialgebra je Lieova algebra $\mathfrak{g}$ s přídavnou konstrukcí v podobě struktury Lieovy algebry na duálním vektorovém prostoru $\mathfrak{g}^*$ splňující kompatibilní podmínku s Lieovou závorkou na $\mathfrak{g}$. Teorie Lieových bialgeber má velký význam při studiu tzv. Poisson-Lieových grup, což jsou Lieovy grupy vybavené přídavnou strukturou, Poissonovou závorkou, která právě na Lieově grupě indukuje strukturu Lieovy bialgebry. Tyto pojmy hrají významnou úlohu v teorii integrabilních systémů.

V první kapitole se zabýváme základními definicemi týkajících se Lieových bialgeber, přičemž využíváme výhradně práci [2]. Především studujeme kohomologii Lieovy algebry, což je důležitý pojem pro definici Lieovy bialgebry. Diskutujeme Maninovy trojice, jakožto významné trojice Lieových algeber. Dále uvažujeme kohraniční Lieovy bialgebry a podmínky vztažené na tzv. r-matice, jejichž kohranice právě strukturu Lieovy bialgebry definuje.

Matematickým aparátem supersymetrií je teorie Lieových superalgeber, což je pozoruhodné zobecnění teorie klasických Lieových algeber. Základní pojmy spojené s teorií Lieových superalgeber, společně se zavedením pro nás důležitého pojmu Maninových supertrojic a jejich klasifikace jsou předmětem druhé kapitoly. K tomuto účelu používáme definice a výsledky uvedené v práci [3].

Ve třetí nejdůležitější kapitole se pokusíme zobecnit nejpodstatnější pojmy z teorie Lieových bialgeber pro Lieovy superbialgebry, resp. Maninovy supertrojice. Naší snahou je dospět k definici kohraniční Lieovy superbialgebry a diskutovat příslušné r-matice.

Ve čtvrté kapitole použijeme toto zobecnění a pokusíme se klasifikovat kohraniční Lieovy superbialgebry, přičemž budeme vycházet z neisomorfních Lieových superbialgeber, resp. Maninových supertrojic klasifikovaných v práci [3].

Kapitola 1

Lieovy bialgebry

V této kapitole se zabýváme studiem Lieových bialgeber. Za účelem kompaktnosti práce zde shrnujeme poznatky zachycené v práci [2]. Definice a důležité závěry, které zde uvedeme, budeme následně využívat pro zobecnění některých pojmů na úrovni Lieovy superalgebry ve třetí kapitole.

1.1 Kohomologie Lieovy algebry

Definice 1.1.1 *Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$. Pokud M je vektorový prostor reprezentace ρ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, říkáme, že $\mathfrak{g}$ působí na M nebo M je tzv. $\mathfrak{g}$-modul. Pro $x \in \mathfrak{g}$, $a \in M$ označujeme $(\rho(x))(a)$ jednodušeji jako $x.a$.*

Poznámka 1.1.2 *Každá Lieova algebra $\mathfrak{g}$ působí sama na sebe pomocí adjungované reprezentace, $ad : x \in \mathfrak{g} \mapsto ad_x \in End\ \mathfrak{g}$, definované pro $y \in \mathfrak{g}$ vztahem*

$$x.y = ad_x(y) = [x, y].$$

Obecně $\mathfrak{g}$ působí na tenzorový součin $\underbrace{\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}}_{p\text{-krát}} = \overset{p}{\otimes} \mathfrak{g}$ pomocí adjungované reprezentace $ad^{(p)}$ definované pro rozkladné prvky $y_1 \otimes \cdots \otimes y_p \in \overset{p}{\otimes} \mathfrak{g}$ vztahem

$$\begin{aligned} x.(y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) = ad_x^{(p)}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) &= ad_x y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_p \\ &+ y_1 \otimes ad_x y_2 \otimes \cdots \otimes y_p + \cdots + y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_{p-1} \otimes ad_x y_p. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Speciálně pro $p = 2$

$$ad_x^{(2)}(y_1 \otimes y_2) = ad_x y_1 \otimes y_2 + y_1 \otimes ad_x y_2 = [x, y_1] \otimes y_2 + y_1[x, y_2].$$

Poznámka 1.1.3 *Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra konečné dimenze s bází $(e_1, \cdots, e_n)$. Buď $b \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, pak $b = b^{ij} e_i \otimes e_j$ a tedy*

$$ad_x^{(2)} b = b^{ij}([x, e_i] \otimes e_j + e_i \otimes [x, e_j]). \tag{1.2}$$

Tento vztah lze zapsat pomocí strukturních koeficientů Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ a komponent x.

Definice 1.1.4 *Pro každé nezáporné celé k nazveme vektorový prostor antisymetrických k-lineárních zobrazení z $\mathfrak{g}$ s hodnotami v M jako prostor k-kořetězců na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v M, kde M je vektorový prostor reprezentace $\mathfrak{g}$.*

Poznámka 1.1.5 *Podle definice 1.1.4 je tedy 0-kořetězec na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v M prvek M a 1-kořetězec na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v M je lineární zobrazení z $\mathfrak{g}$ do M. Obecně tedy k-kořetězec je antisymetrické k-lineární zobrazení $u : \overset{k}{\otimes}\mathfrak{g} \mapsto M$.*

Definice 1.1.6 *Kohranice k-kořetězce u na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v M, $u : \overset{k}{\otimes}\mathfrak{g} \mapsto M$, je ($k$+1)-kořetězec na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v M, $\delta u : \overset{k+1}{\otimes}\mathfrak{g} \mapsto M$, definován vztahem*

$$\begin{aligned}\delta u(x_0, x_1, \cdots, x_k) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i x_i.(u(x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_k)) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}u([x_i, x_j], x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, \hat{x}_j, \cdots, x_k)\,,\end{aligned} \tag{1.3}$$

pro $x_0, x_1, \cdots, x_k \in g$, kde $\hat{x}_i$ označuje prvek x_i, který je vynechán.

Poznámka 1.1.7 *V dalším textu budeme především pracovat s kořetězci řádu 0 nebo 1. Proto si pro tyto dva případy definici kohranice explicitně uvedeme.*

$$k = 0,\ u \in M,\ x \in \mathfrak{g},\ \delta u(x) = x.u$$

$$k = 1,\ v : \mathfrak{g} \mapsto M,\ x, y \in \mathfrak{g},\ \delta v(x, y) = x.v(y) - y.v(x) - v([x, y])$$

Poznámka 1.1.8 *Z definice kohranice 1.3 plyne pro každý k-kořetězec u, $k \geq 0$, že*

$$\delta(\delta u) = 0 \tag{1.4}$$

Definice 1.1.9 *Řekneme, že k-kořetězec u je k-kocyklus, jestliže $\delta u = 0$.*

Řekneme, že k-kořetězec u, $k \geq 1$, je k-kohranice, jestliže existuje $(k-1)$-kořetězec v takový, že $u = \delta v$.

Poznámka 1.1.10 *Z vlastnosti 1.4 plyne, že každá k-kohranice je k-kocyklus.*

Poznámka 1.1.11 0-*kocyklus na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v M je invariantní prvek v M, tj. prvek $u \in M$ takový, že $x.u = 0$ pro každé $x \in \mathfrak{g}$.*

1.2 Definice Lieovy bialgebry

Předpokládejme, že $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra a γ je lineární zobrazení z $\mathfrak{g}$ do $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, jehož transpozici označíme ${}^t\gamma : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{g}^*$. Připomeňme, že lineární zobrazení na $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ lze ztotožnit s bilineárním zobrazením na $\mathfrak{g}^*$.

Definice 1.2.1 *Lieova bialgebra je Lieova algebra $\mathfrak{g}$ vybavená lineárním zobrazením $\gamma : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ takovým, že*

(i) ${}^t\gamma : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{g}^*$ definuje Lieovu závorku na $\mathfrak{g}^*$, tj. ${}^t\gamma$ je antisymetrické bilineární zobrazení na $\mathfrak{g}^*$ splňující Jacobiho identitu a

(ii) γ je 1-kocyklus na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, kde $\mathfrak{g}$ působí na $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ pomocí adjungované reprezentace $ad^{(2)}$, tj. $\gamma : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, $\delta\gamma : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, $\delta\gamma = 0$.

Poznámka 1.2.2 *Podmínka (ii) je ekvivalentní podmínce*

$$ad_x^{(2)}(\gamma(y)) - ad_y^{(2)}(\gamma(x)) - \gamma([x, y]) = 0, \quad \textit{pro } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Poznámka 1.2.3 *Označme*

$$[\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*} = {}^t\gamma(\xi \otimes \eta), \quad \textit{pro } \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*.$$

Pak podle definice transpozice platí pro $x \in g$

$$\langle \xi \otimes \eta, \gamma(x) \rangle = \langle {}^t\gamma(\xi \otimes \eta), x \rangle = \langle [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, x \rangle.$$

Poznámka 1.2.4 *Podmínka (i) představuje antisymetrii a Jacobiho identitu*

$$[\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*} = -[\eta, \xi]_{\mathfrak{g}^*}$$

$$[\xi, [\eta, \mu]_{\mathfrak{g}^*}]_{\mathfrak{g}^*} + [\eta, [\mu, \xi]_{\mathfrak{g}^*}]_{\mathfrak{g}^*} + [\mu, [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}]_{\mathfrak{g}^*} = 0.$$

Poznámka 1.2.5 *Označme*

$$(ad_x \otimes 1)(y_1 \otimes y_2) = [x, y_1] \otimes y_2 \quad \textit{a} \quad (1 \otimes ad_x)(y_1 \otimes y_2) = y_1 \otimes [x, y_2],$$

kde $x, y_1, y_2 \in \mathfrak{g}$ a 1 představuje identické zobrazení z $\mathfrak{g}$ do $\mathfrak{g}$. Odtud tedy

$$ad_x^{(2)}(u) = (ad_x \otimes 1 + 1 \otimes ad_x)(u),$$

kde $u \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Pak alternativní způsob zápisu podmínky (ii) podle poznámky 1.2.2 a vztahu $\langle \xi \otimes \eta, \gamma([x, y]) \rangle = \langle [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, [x, y] \rangle$ je

$$\langle [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, [x, y] \rangle = \langle \xi \otimes \eta, (ad_x \otimes 1 + 1 \otimes ad_x)(\gamma(y)) \rangle - \langle \xi \otimes \eta, (ad_y \otimes 1 + 1 \otimes ad_y)(\gamma(x)) \rangle.$$

1.3 Koadjungovaná reprezentace

Uvažujme Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ a její duální vektorový prostor $\mathfrak{g}^*$. Pro jednoduchost předpokládejme, že $\mathfrak{g}$ je konečné dimenze. Pro $x \in \mathfrak{g}$ definujeme

$$ad_x^* = -{}^t(ad_x).$$

Tedy ad_x^* je endomorfismus $\mathfrak{g}^*$ splňující pro $y \in \mathfrak{g}$, $\xi \in \mathfrak{g}^*$

$$\langle \xi, ad_x y \rangle = \langle {}^t(ad_x)\xi, y \rangle = -\langle ad_x^* \xi, y \rangle.$$

Pak je snadné dokázat, že zobrazení $x \in \mathfrak{g} \mapsto ad_x^* \in \mathrm{End}\ \mathfrak{g}^*$ je reprezentace $\mathfrak{g}$ v $\mathfrak{g}^*$.

Definice 1.3.1 *Reprezentaci $x \mapsto ad_x^*$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ v duálním vektorovém prostoru $\mathfrak{g}^*$ nazýváme koadjungovaná reprezentace $\mathfrak{g}$.*

1.4 Duál Lieovy bialgebry

Poznámka 1.4.1 *Po zavedení koadjungované reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ v předchozí sekci a podle poznámky 1.2.5 můžeme podmínku (ii) zapsat ve tvaru*

$$\langle[\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^*},[x,y]\rangle+\langle[ad^*_x\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^*},y\rangle+\langle[\xi,ad^*_x\eta]_{\mathfrak{g}^*},y\rangle-\langle[ad^*_y\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^*},x\rangle-\langle[\xi,ad^*_y\eta]_{\mathfrak{g}^*},x\rangle=0.$$

Odtud lze vidět, že existuje symetrie mezi $\mathfrak{g}$ s Lieovou závorkou $[\ ,\ ]$ a $\mathfrak{g}^*$ s Lieovou závorkou $[\ ,\ ]_{\mathfrak{g}^*}$ definovanou zobrazením γ. Definujme tedy analogicky pro $\xi,\eta\in\mathfrak{g}^*$ a $x\in\mathfrak{g}$ výrazy

$$ad_\xi\eta=[\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^*}\quad a\quad \langle ad_\xi\eta,x\rangle=-\langle\eta,ad^*_\xi x\rangle.$$

Pak $\xi\in\mathfrak{g}^*\mapsto ad^*_\xi\in End\ \mathfrak{g}$ je koadjungovaná reprezentace $\mathfrak{g}^*$ v duálu vektorového prostoru $\mathfrak{g}^*$, který je isomorfní $\mathfrak{g}$.

Tedy podmínku (ii) můžeme zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\langle[\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^*},[x,y]\rangle+\langle ad^*_x\xi,ad^*_\eta y\rangle-\langle ad^*_x\eta,ad^*_\xi y\rangle-\langle ad^*_y\xi,ad^*_\eta x\rangle+\langle ad^*_y\eta,ad^*_\xi x\rangle=0. \tag{1.5}$$

Zde je již zřejmé, že $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}^*$ hrají symetrické role. Označme $\mu:\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\mapsto\mathfrak{g}$ antisymetrické bilineární zobrazení na $\mathfrak{g}$ definující Lieovu závorku na $\mathfrak{g}$. Transformováním vztahu 1.5 zjistíme, že je ekvivalentní podmínce, že ${}^t\mu:\mathfrak{g}^*\mapsto\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*$ je 1-kocyklus na $\mathfrak{g}^*$ s hodnotami v $\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*$, kde $\mathfrak{g}^*$ působí na $\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*$ pomocí adjungované akce. Levá strana vztahu 1.5 má totiž tvar

$$\langle{}^t\mu[\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^*},x\otimes y\rangle-\langle\xi,[x,ad^*_\eta y]\rangle+\langle\eta,[x,ad^*_\xi y]\rangle+\langle\xi,[y,ad^*_\eta x]\rangle-\langle\eta,[y,ad^*_\xi x]\rangle$$

a podmínka (ii) je pak ekvivalentní podmínce

$$\langle{}^t\mu[\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^*},x\otimes y\rangle+\langle(ad_\eta\otimes1+1\otimes ad_\eta)({}^t\mu(\xi)),x\otimes y\rangle-\langle(ad_\xi\otimes1+1\otimes ad_\xi)({}^t\mu(\eta)),x\otimes y\rangle=0$$

nebo

$$ad^{(2)}_\xi(({}^t\mu)(\eta))-ad^{(2)}_\eta(({}^t\mu)(\xi))-({}^t\mu)([\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^*}).$$

Věta 1.4.2 *Pokud $(\mathfrak{g},\gamma)$ je Lieova bialgebra a μ je Lieova závorka na $\mathfrak{g}$, pak $(\mathfrak{g}^*,\ {}^t\mu)$ je Lieova bialgebra, kde ${}^t\gamma$ je Lieova závorka na $\mathfrak{g}^*$.*

Definice 1.4.3 *Lieovu bialgebru $(\mathfrak{g}^*,\ {}^t\mu)$ z věty 1.4.2 nazýváme duál Lieovy bialgebry $(\mathfrak{g},\gamma)$.*

Poznámka 1.4.4 *Z předchozích úvah plyne, že každá Lieova bialgebra má duální Lieovu bialgebru, jejíž duál je původní Lieova bialgebra.*

1.5 Double Lieovy bialgebry

Poznámka 1.5.1 *Bilineární forma* $(\ |\ )$ *je invariantní pro strukturu Lieovy algebry* $\mathfrak{a}$ *s Lieovou závorkou* $[\ ,\ ]$*, pokud pro každé* $u, v, w \in \mathfrak{a}$ *platí*

$$([u,v]|w) = (u|[v,w]).$$

Věta 1.5.2 *Nechť* $(\mathfrak{g}, \gamma)$ *je Lieova bialgebra s duálem* $(\mathfrak{g}^*, {}^t\mu)$*. Pak existuje unikátní struktura Lieovy algebry na vektorovém prostoru* $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ *taková, že* $\mathfrak{g}$ *a* $\mathfrak{g}^*$ *jsou Lieovy subalgebry a přirozená bilineární forma na* $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ *je invariantní.*

Důkaz. Přirozená bilineární forma na $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ je pro $x, y \in \mathfrak{g}$ a $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$ definována jako

$$(x|y) = 0, \quad (\xi|\eta) = 0, \quad (x|\xi) = (\xi|x) = \langle \xi, x \rangle. \tag{1.6}$$

Označme $[u, v]_{\mathfrak{d}}$ Lieovu závorku dvou prvků $u, v \in \mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ a definujme ji vztahy

$$[x, y]_{\mathfrak{d}} = [x, y], \quad [x, \xi]_{\mathfrak{d}} = -ad^*_\xi x + ad^*_x \xi, \quad [\xi, \eta]_{\mathfrak{d}} = [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}. \tag{1.7}$$

Zřejmě $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}^*$ jsou Lieovy subalgebry. Ukážeme, že při této definici je přirozená bilineární forma $(\ |\ )$ na $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ invariantní.

Ze symetrie formy $(\ |\ )$ plyne, že stačí ověřit platnost rovností

$$(y|[x, \xi]_{\mathfrak{d}}) = ([y, x]_{\mathfrak{d}}|\xi), \quad (\eta|[x, \xi]_{\mathfrak{d}}) = ([\eta, x]_{\mathfrak{d}}|\xi), \tag{1.8}$$

$$(y|[x, z]_{\mathfrak{d}}) = ([y, x]_{\mathfrak{d}}|z), \quad (\eta|[\xi, \zeta]_{\mathfrak{d}}) = ([\eta, \xi]_{\mathfrak{d}}|\zeta), \tag{1.9}$$

kde $z \in \mathfrak{g}$, $\zeta \in \mathfrak{g}^*$. Rovnosti 1.9 platí triviálně, neboť obě strany jsou podle 1.6 a faktu, že $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}^*$ jsou Lieovy subalgebry, rovny nule.

Platnost rovností 1.8 ukážeme aplikací 1.7 a 1.6 jako

$$\begin{aligned}(y|[x, \xi]_{\mathfrak{d}}) &= (y| - ad^*_\xi x + ad^*_x \xi) = -\underbrace{(y|ad^*_\xi x)}_{0} + (y|ad^*_x \xi) = \langle ad^*_x \xi, y \rangle \\ &= -\langle \xi, ad_x y \rangle = \langle \xi, [y, x] \rangle = ([y, x]|\xi) = ([y, x]_{\mathfrak{d}}|\xi)\end{aligned}$$

a dále jako

$$(\eta|[x, \xi]_{\mathfrak{d}}) = (\eta| - ad^*_\xi x + ad^*_x \xi) = -(\eta|ad^*_\xi x) + \underbrace{(\eta|ad^*_x \xi)}_{0} = -\langle \eta, ad^*_\xi x \rangle$$

$$= \langle ad_\xi \eta, x \rangle = \langle [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, x \rangle = -\langle ad_\eta \xi, x \rangle = \langle \xi, ad^*_\eta x \rangle = (ad^*_\eta x|\xi)$$

$$= (ad^*_\eta x|\xi) - \underbrace{(ad^*_x \eta|\xi)}_{0} = (ad^*_\eta x - ad^*_x \eta|\xi) = ([\eta, x]_{\mathfrak{d}}|\xi).$$

Ověřili jsme tedy, že při této definici Lieovy závorky $[\ ,\ ]_{\mathfrak{d}}$ je přirozená bilineární forma $(\ |\ )$ na $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ invariantní.

Dále je třeba ukázat, že výrazy 1.7 definují strukturu Lieovy algebry na $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$. Platnost Jacobiho identity plyne z podmínek (i) a (ii) definice Lieovy bialgebry.

$\square$

Definice 1.5.3 *Pokud $\mathfrak{g}$ je Lieova bialgebra, pak $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ vybavené Lieovou závorkou $[\ ,\ ]_{\mathfrak{d}}$ definovanou výrazy 1.7 nazýváme double Lieovy bialgebry $\mathfrak{g}$ a značíme $\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{g}^*$ nebo $\mathfrak{D}$.*

Poznámka 1.5.4 *Poznamenejme, že $\mathfrak{D} = \mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{g}^*$ je také double $\mathfrak{g}^*$. V Lieově algebře $\mathfrak{D}$ jsou podprostory $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}^*$ doplňkové Lieovy subalgebry a oba jsou isotropní, tj. bilineární forma je na $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}^*$ rovna nule.*

Definice 1.5.5 *Maninova trojice je trojice $(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, kde $\mathfrak{p}$ je Lieova algebra vybavená invariantní, nedegenerovanou, symetrickou bilineární formou a $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ jsou doplňkové isotropní Lieovy subalgebry.*

Poznámka 1.5.6 *Tedy pro každou Lieovu bialgebru $\mathfrak{g}$ je $(\mathfrak{D}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ příklad Maninovy trojice.*

Poznámka 1.5.7 *Pro konečnou dimenzi lze ukázat, že naopak, pokud $(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ je Maninova trojice, pak $\mathfrak{a}$ má strukturu Lieovy bialgebry. Tedy $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ hrají symetrické role. Pak má $\mathfrak{b}$ také strukturu Lieovy bialgebry a Lieova bialgebry $\mathfrak{b}$ může být ztotožněna s duálem Lieovy bialgebry $\mathfrak{a}$.*

Nechť $(\ |\ )$ je daná bilineární forma na $\mathfrak{p}$. Pro $b \in \mathfrak{b}$ zaveďme 1-formu $\iota(b)$ na $\mathfrak{a}$ definovanou jako

$$\iota(b)(a) = (a|b).$$

Lineární zobrazení $b \mapsto \iota(b)$ z $\mathfrak{b}$ do $\mathfrak{a}^*$ je injektivní. Pokud $\iota(b) = 0$, pak $(a|b) = 0$ pro každé $a \in \mathfrak{a}$ a tedy i pro každé $a \in \mathfrak{p}$. Odtud pak $\mathfrak{b}$ je isotropní a $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Z nedegenerovanosti bilineární formy pak plyne, že $b = 0$. Porovnáním dimenzí zjistíme, že $\mathfrak{b}$ je isomorfní $\mathfrak{a}^*$. Lieova závorka na $\mathfrak{b}$ tedy definuje Lieovu závorku na $\mathfrak{a}^*$. K ověření, že je tímto definována struktura Lieovy bialgebry na $\mathfrak{a}$, použijeme Jacobiho identitu na $\mathfrak{p}$ a invarianci bilineární formy.

Podle poznámky 1.5.7 lze vyslovit následující věta.

Věta 1.5.8 *Existuje prostá korespondence mezi konečně-dimenzionálními Lieovými bialgebrami a konečně-dimenzionálními Maninovými trojicemi.*

1.6 Kohraniční Lieovy bialgebry

Uvažujme Lieovu algebru $\mathfrak{g}$. V této podkapitole se zabýváme definicí kohraniční Lieovy bialgebry, tj. Lieovy bialgebry $(\mathfrak{g}, \gamma)$ jejíž struktura je definovaná pomocí kocyklu δr, který je kohranicí prvku $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Definice 1.6.1 *Řekneme, že Lieova bialgebra $(\mathfrak{g}, \gamma)$ je kohraniční, pokud existuje prvek $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ takový, že platí*

$$\gamma = \delta r.$$

Takový prvek $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ pak nazýváme r-matice.

Podle definice kohraniční Lieovy bialgebry musí δr splňovat podmínky kladené na zobrazení γ v definici 1.2.1.

Uvažujeme tedy prvek $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Pak r je 0-kořetězec na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Jak už jsme diskutovali v poznámce 1.1.10, tak 1-kohranice δr je nutně 1-kocyklus a tedy podmínka (ii) v definici 1.2.1 je automaticky splněna.

Pak lineární zobrazení $\delta r : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ musí splňovat zbývající podmínku (i) v podobě definování Lieovy závorky na $\mathfrak{g}^*$, tj. musí splňovat následující podmínky

(i.1) ${}^t(\delta r) : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{g}^*$ musí být antisymetrické bilineární zobrazení, což odpovídá antisymetrii Lieovy závorky na $\mathfrak{g}^*$ definovanou δr,

(i.2) musí být splněna Jacobiho identita pro Lieovu závorku na $\mathfrak{g}^*$ definovanou δr.

Jelikož prvek $\delta r(x) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ lze považovat za bilineární formu na $\mathfrak{g}^*$, je podmínka (i.1) ekvivalentní tomu, že δr je lineární zobrazení s hodnotami v $\Lambda^2 \mathfrak{g}$.

Uvažujme konečně-dimenzionální Lieovu algebru $\mathfrak{g}$. Označme $a \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$, resp. $s \in S^2 \mathfrak{g}$ antisymetrickou, resp. symetrickou část $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, pak $r = a + s$. A tedy pro $x \in \mathfrak{g}$ lze psát

$$\delta r(x) = ad_x^{(2)} r = ad_x^{(2)} a + ad_x^{(2)} s = \delta a(x) + \delta s(x).$$

Odtud lze vidět, že podmínka (i.1) je splněna právě tehdy, když $\delta s = 0$, tj. pro každé $x \in \mathfrak{g}$ platí, že

$$\delta s(x) = ad_x^{(2)} s = 0$$

a tedy s je ad-invariantní. Postačující podmínkou pro splnění (i.1) je samozřejmě požadavek, že $s = 0$, tj.

$$r = a \in \Lambda^2 \mathfrak{g}.$$

Pro prvek $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ definujme zobrazení $\underline{r} : \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{g}$ pro $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$ předpisem

$$\underline{r}(\xi)(\eta) = r(\xi, \eta) = \langle \eta, \underline{r}\xi \rangle,$$

kde $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ považujeme za bilineární formu na $\mathfrak{g}^*$ a $\underline{r}(\xi) \in \mathfrak{g}$ za lineární formu na $\mathfrak{g}^*$. Nechť ${}^t\underline{r} : \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{g}$ označuje transpozici zobrazení $\underline{r}$, pak podle definice

$$\underline{a} = \frac{1}{2}(\underline{r} - {}^t\underline{r}), \quad \underline{s} = \frac{1}{2}(\underline{r} + {}^t\underline{r}).$$

Pro prvek $r \in \Lambda^2\mathfrak{g}$ definujeme tzv. algebraickou Schoutenovu závorku $\{r, r\} \in \Lambda^3\mathfrak{g}$ předpisem

$$\{r, r\}(\xi, \eta, \zeta) = -2\langle \zeta, [\underline{r}\xi, \underline{r}\eta]\rangle_{cyclic\{\xi,\eta,\zeta\}},$$

kde jako $cyclic\{\xi, \eta, \zeta\}$ označujeme sumaci přes cyklickou záměnu ξ, η, ζ.

Pro $r \in \Lambda^2\mathfrak{g}$ lze ukázat, že nutná a postačující podmínka, aby zobrazení δr definovalo Lieovu závorku na $\mathfrak{g}^*$, je požadavek, že $\{r, r\} \in \Lambda^3\mathfrak{g}$ je ad-invariantní. Tato podmínka se někdy označuje jako zobecněná Yang-Baxterova rovnice.

Postačující podmínkou pro ad-invarianci $\{r, r\}$ je samozřejmě požadavek, že

$$\{r, r\} = 0.$$

Definice 1.6.2 *Nechť $r \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ a nechť s, resp. a je jeho symetrická, resp. antisymetrická část. Pokud s, $\{a, a\}$ jsou ad-invariantní, pak r nazýváme klasickou r-maticí nebo zkráceně jen r-maticí.*

Kapitola 2

Lieovy superbialgebry

V této kapitole zavádíme pojem Lieovy superalgebry, Drinfeldova superdoublu a především Maninovy supertrojice. V omezeném rozsahu je zde popsán princip klasifikace neisomorfních Lieových algeber a Maninových supertrojic v nízkých dimenzích. Obsahem této kapitoly je také jejich podrobný přehled.

Zdůrazněme, že definice, závěry a výsledky uvedené v této kapitole jsou, není-li řečeno jinak, obsahem práce [3], a které zde za účelem celistvosti práce shrnujeme.

2.1 Lieovy superalgebry

Definice 2.1.1 *Řekneme, že vektorový prostor V nad tělesem T je $\mathbb{Z}_2$-gradovaný, pokud V lze zapsat jako direktní součet prostorů nad tělesem T ve tvaru*

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_2} V_i.$$

Vektorový prostor V tedy lze zapsat jako $V = V_0 \oplus V_1$. Vektorový prostor s takovou strukturou budeme nazývat supervektorový prostor. Vektor $x \in V$ takový, že $x \in V_0$ nebo $x \in V_1$, nazveme homogenní vektor V.

Definice 2.1.2 *Reálná Lieova superalgebra S je definována jako reálný $\mathbb{Z}_2$-gradovaný vektorový prostor $V = V_0 \oplus V_1$ vybavený Lieovou superzávorkou $[\ ,\ ]$ splňující*

(i) $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$,

(ii) $(-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|y||x|}[y, [z, x]] + (-1)^{|z||y|}[z, [x, y]] = 0$,

(iii) $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ *pro* $i, j \in \mathbb{Z}_2$,

kde x, y, z jsou homogenní vektory V. Paritu nenulového homogenního vektoru $x \in V$ definujeme jako

$$|x| := 0 \quad \textit{pokud} \quad x \in V_0, \qquad |x| := 1 \quad \textit{pokud} \quad x \in V_1,$$

kde vektory s paritou 0 nazýváme bosony a vektory s paritou 1 nazýváme fermiony.

Poznámka 2.1.3 *Podmínka (i) se nazývá superantikomutativita a vyjadřuje symetrii Lieovy superzávorky* $[\ ,\ ]$ *pro dvojici fermion-fermion a antisymetrii pro ostatní případy. Podmínka (ii) se nazývá super-Jacobiho identita. Pro* $V_1 = \{\theta\}$ *přechází super-Jacobiho identita na klasickou Jacobiho identitu a totéž platí i pro Lieovu závorku. V tomto případě je tedy pojem Lieovy superalgebry totožný s klasickou Lieovou algebrou.*

Poznámka 2.1.4 *Nechť* $N, M \subseteq V$ *jsou libovolné neprázdné podmnožiny* V*. Symbolem* $[M, N]$ *označujeme množinu* $span(\{[x, y] | x \in M, y \in N\})$*.*

Definice 2.1.5 *Řekneme, že Lieova superalgebra je superdimenze* (m, n) *právě tehdy, když* $dim V_0 = m$ *a* $dim V_1 = n$*. Vždy můžeme zvolit tzv. homogenní bázi* $\{X_I\}$ *ve* V *tak, že*

$$\{X_I\}_{I=1}^{m+n} = \{b_i, f_\alpha\}_{i,\alpha=1}^{m,n}, \quad |b_i| = 0, \quad |f_\alpha| = 1. \tag{2.1}$$

Poznámka 2.1.6 *Intuitivně zde označujeme symboly* $\{b_i\}$ *bázi bosonové části* V*, tedy* V_0*, resp.* $\{f_\alpha\}$ *bázi fermionové části* V*, tedy* V_1*.*

Definice 2.1.7 *Bilineární forma* $\langle\ ,\ \rangle$ *na Lieově superalgebře* S *se nazývá supersymetrická právě tehdy, když*

$$\langle x, y\rangle = (-1)^{|x||y|}\langle y, x\rangle$$

a super-ad-invariantní právě tehdy, když

$$\langle [x, y], z\rangle + (-1)^{|x||y|}\langle y, [x, z]\rangle = 0$$

pro libovolné nenulové homogenní vektory x, y, z*.*

Definice 2.1.8 *Nechť* S *je Lieova superalgebra definována na supervektorovém prostoru* V*,* $[\ ,\ ]$ *je její Lieova superzávorka a* $M \subseteq V$ *je libovolná neprázdná podmnožina* V*. Pak definujeme*

1. *Lieovu podsuperalgebru Lieovy superalgebry* S *jako podprostor* $M \subset\subset V$ *takový, že* $[M, M] \subseteq M$*,*

2. *ideál Lieovy superalgebry* S *jako podprostor* $M \subset\subset V$ *takový, že* $[M, V] \subseteq M$*,*

3. *centrum Lieovy superalgebry* S *jako největší ideál ve smyslu inkluze takový, že* $[M, V] = 0$*.*

Definice 2.1.9 *Lieova superalgebra* S *se nazývá*

1. *abelovská, jestliže* $[V, V] = 0$

2. *řešitelná, jestliže existuje* $k \in \mathbb{N}$ *takové, že* $S^{(k)} = 0$*, kde* $S^{(n)} = [S^{(n-1)}, S^{(n-1)}]$ *a* $S^{(0)} = V$*.*

3. nilpotentní, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $S_{(k)} = 0$, kde $S_{(n)} = [V, S_{(n-1)}]$ a $S_{(0)} = V$.

Definice 2.1.10 *Nechť V je supervektorový prostor vybavený bilineární formou $\langle\ ,\ \rangle$ a $A \subset\subset V$ je podprostor. Řekneme, že A je isotropní vzhledem k formě $\langle\ ,\ \rangle$ právě tehdy, když platí $\langle A, A\rangle = 0$, tj. pro každé $x, y \in A$ je $\langle x, y\rangle = 0$. Řekneme, že A je maximálně isotropní vzhledem k formě $\langle\ ,\ \rangle$ právě tehdy, když je maximálním prvkem inkluzí uspořádané množiny všech isotropních podprostorů.*

2.2 Klasifikace Lieových superalgeber

Definice 2.2.1 *Nechť S, resp. S' je Lieova superalgebra definována na supervektorovém prostoru $V = V_0 \oplus V_1$, resp. $V' = V_0' \oplus V_1'$ a $[\ ,\ ]$, resp. $[\ ,\ ]'$ je její Lieova superzávorka. Lieovy superalgebry S a S' nazýváme isomorfní právě tehdy, když existuje lineární isomorfismus $P : S \mapsto S'$ takový, že pro každé $x, y \in S$ platí*

$$P[x, y] = [Px, Py]'$$

a který navíc zachovává paritu, tj. $P(V_0) = V_0'$, $P(V_1) = V_1'$.

Klasifikace Lieových superalgeber v nízkých dimenzích byla provedena v práci [4].

Pod pojmem klasifikace Lieových superalgeber dimenze (m, n) rozumíme přehled vzájemně neisomorfních tříd Lieových superalgeber superdimenze (m, n) vzhledem k isomorfismu zavedeném v definici 2.2.1.

Předpokládáme Lieovu superalgebru S s Lieovou superzávorkou $[\ ,\ ]$. Vzhledem k linearitě je Lieova superalgebra plně určena strukturními koeficienty ${F_{IJ}}^K$ pro homogenní bázi 2.1 jako

$$[X_I, X_J] = {F_{IJ}}^K X_K.$$

Strukturní koeficienty ${F_{IJ}}^K$ nemohou nabývat libovolných hodnot, neboť jsou omezeny podmínkami v podobě platnosti super-Jacobiho identity (*ii*) a vlastnosti (*iii*) v definici 2.1.2. Obecné transformace báze 2.1 jsou navíc podmíněny zachováním parity vektoru. Všechny tyto podmínky omezují dovolené bazické transformace a dovolují tak určit vzájemně neisomorfní Lieovy superalgebry.

Podrobnějším postupem klasifikace se v této práci zabývat nebudeme a odvoláme se na již klasifikované Lieovy superalgebry v práci [4].

V dalším textu budeme výhradně uvažovat dvou a třírozměrné Lieovy superalgebry s netriviální jak bosonovou, tak fermionovou částí, tedy Lieovy superalgebry superdimenze $(1, 1)$, $(2, 1)$ a $(1, 2)$.

2.2.1 Lieovy superalgebry superdimenze $(1, 1)$

Přehled neisomorfních Lieových superalgeber superdimenze $(1, 1)$ s poznámkou o typu dané Lieovy superalgebry je uveden v tabulce 2.1.

2.2.2 Lieovy superalgebry superdimenze $(2,1)$

Přehled neisomorfních Lieových superalgeber superdimenze $(2,1)$ společně s jejich automorfismy je uveden v tabulce 2.2.

2.2.3 Lieovy superalgebry superdimenze $(1,2)$

Přehled neisomorfních Lieových superalgeber superdimenze $(1,2)$ společně s jejich automorfismy je uveden v tabulce 2.3.

Tabulka 2.1: Neisomorfní Lieovy superalgebry superdimenze $(1,1)$

Označení	Nenulové Lieovy superzávorky	Poznámka
A_{11}		abelovská
N_{11}	$[f_1, f_1] = b_1$	řešitelná
S_{11}	$[b_1, f_1] = f_1$	nilpotentní

Tabulka 2.2: Neisomorfní Lieovy superalgebry superdimenze $(2,1)$

Označení	Nenulové Lieovy superzávorky	Automorfismy	Poznámka
A_{21}		$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$	
N_{21}	$[f_1, f_1] = b_1$	$\begin{pmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$N_{11} \oplus A_{10}$
S_{21}	$[b_1, f_1] = f_1$	$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$S_{11} \oplus A_{10}$
C_p^1	$[b_1, b_2] = b_2,\ [b_1, f_1] = pf_1$	$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$p \in \mathbb{R}$
F	$[b_1, b_2] = b_2,\ [b_1, f_1] = \frac{1}{2} f_1,\ [f_1, f_1] = b_2$	$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	

Tabulka 2.3: Neisomorfní Lieovy superalgebry superdimenze $(1,2)$

Označení	Nenulové Lieovy superzávorky	Automorfismy
A_{12}		$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$
N_{12}^0	$[f_1, f_1] = b_1$	$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$
N_{12}^ϵ $\epsilon = \pm 1$	$[f_1, f_1] = b_1,\ [f_2, f_2] = \epsilon b_1$	$\begin{pmatrix} d^2 + \epsilon c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mp\epsilon d & \pm c \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$
C_{-1}^2	$[b_1, f_1] = f_1\ [b_1, f_2] = -f_2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & c & o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$
C_p^2 $-1 < p < 1$	$[b_1, f_1] = f_1,\ [b_1, f_2] = pf_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$
C_1^2	$[b_1, f_1] = f_1,\ [b_1, f_2] = f_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$
C^3	$[b_1, f_2] = f_1$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & ad & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$
C^4	$[b_1, f_1] = f_1,\ [b_1, f_2] = f_1 + f_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$
C_p^5 $p > 0$	$[b_1, f_1] = pf_1 - f_2,\ [b_1, f_2] = f_1 + pf_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$
C_0^5	$[b_1, f_1] = -f_2,\ [b_1, f_2] = f_1$	$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm a & \mp c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$

2.3 Lieovy superbialgebry

Za účelem vyhnout se problému definice pojmu supergrupy, je Drinfeldův superdouble definován pouze na algebraické úrovni.

Definice 2.3.1 *Lieovu superalgebru D vybavenou nedegenerovanou, supersymetrickou a super-ad-invariantní bilineární formou $\langle \, , \, \rangle$ nazýváme Drinfeldův superdouble, jestliže existuje rozklad na dvě maximálně isotropní Lieovy podsuperalgebry $S, \tilde{S}$ takové, že $D = S \oplus \tilde{S}$. Trojici $(D, S, \tilde{S})$ nazýváme Maninova supertrojice.*

Poznámka 2.3.2 *Z vlastností formy $\langle \, , \, \rangle$ plyne, že $dim S = dim \tilde{S}$ a tedy dimenze Drinfeldova superdoublu D je vždy sudá.*

Definice 2.3.3 *Nechť D a D' jsou Drinfeldovy superdoubly s bilineárními formami $\langle \, , \, \rangle$ a $\langle \, , \, \rangle'$. Drinfeldovy superdoubly D a D' nazýváme isomorfní právě tehdy, když existuje isomorfismus $P : D \mapsto D'$ Lieových superalgeber takový, že pro každé $x, y \in D$ platí*

$$\langle x, y \rangle = \langle Px, Py \rangle'.$$

Maninovy supertrojice $(D, S, \tilde{S})$, $(D', S', \tilde{S}')$ nazýváme isomorfní právě tehdy, když existuje isomorfismus P jejich Drinfeldových superdoublů takový, že

$$P(S) = S', \quad P(\tilde{S}) = \tilde{S}'.$$

Poznámka 2.3.4 *V dalším textu budeme Maninovu supertrojici $(D, S, \tilde{S})$ zkráceně označovat jako $(S|\tilde{S})$.*

Definice 2.3.5 *Maninova supertrojice $(S|\tilde{S})$ se nazývá boson-fermion ortogonální právě tehdy, když*

$$\langle S_0, \tilde{S}_1 \rangle = \langle S_1, \tilde{S}_0 \rangle = 0,$$

kde $S = S_0 \oplus S_1$ a $\tilde{S} = \tilde{S}_0 \oplus \tilde{S}_1$.

Dále uvažujeme pouze boson-fermion ortogonální Maninovy supertrojice.

Poznámka 2.3.6 *Z boson-fermion ortogonality Maninovy supertrojice $(S|\tilde{S})$ plyne, že superdimenze S a $\tilde{S}$ si navzájem odpovídají, tj. $(m, n) = (\tilde{m}, \tilde{n})$.*

V takových Maninových supertrojicích lze tedy zvolit tzv. duální homogenní báze

$$\{X_I, \tilde{X}^J\}_{I,J=1}^{m+n} = \{b_i, f_\alpha, \tilde{b}^j, \tilde{f}^\beta\}_{i,\alpha,j,\beta=1}^{m,n,m,n}, \tag{2.2}$$

kde

$$|b_i| = |\tilde{b}^j| = 0, \quad |f_\alpha| = |\tilde{f}^\beta| = 1,$$

$$\langle b_i, \tilde{b}^j \rangle = \langle \tilde{b}^j, b_i \rangle = \delta_i^j, \quad \langle f_\alpha, \tilde{f}^\beta \rangle = -\langle \tilde{f}^\beta, f_\alpha \rangle = \delta_\alpha^\beta,$$

$$\langle b_i, b_j \rangle = \langle b_i, f_\alpha \rangle = \langle b_i, \tilde{f}^\beta \rangle = \langle f_\alpha, b_j \rangle = \langle f_\alpha, f_\beta \rangle = \langle f_\alpha, \tilde{b}^j \rangle = 0,$$

$$\langle \tilde{b}^j, \tilde{b}^i \rangle = \langle \tilde{b}^j, f_\alpha \rangle = \langle \tilde{b}^j, \tilde{f}^\beta \rangle = \langle \tilde{f}^\beta, b_j \rangle = \langle \tilde{f}^\beta, \tilde{b}^j \rangle = \langle \tilde{f}^\beta, \tilde{f}^\alpha \rangle = 0.$$

Bloková matice bilineární formy $\langle\ ,\ \rangle$ má v této bázi tvar

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_n \\ 1_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1_n & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde 1_k je matice identity dimenze k.

Dále je zřejmé, že superdimenze takovýchto Maninových supertrojic a Drinfeldových superdoublů je $(2m, 2n)$.

Poznámka 2.3.7 *Speciálním typem isomorfismu Drinfeldových superdoublů je tzv. T-dualita definována jako lineární transformace $T : D \mapsto D$ taková, že*

$$T : b_i \mapsto \tilde{b}^i, f_\alpha \mapsto \tilde{f}^\alpha, \tilde{b}^j \mapsto b_j, \tilde{f}^\beta \mapsto -f_\beta.$$

Matice této transformace je rovna právě matici B.

Pro Maninovy supertrojice zřejmě platí, že

$$T(S|\tilde{S}) = (\tilde{S}|S)$$

a pak Maninovu supertrojici $(\tilde{S}|S)$ nazýváme duální k Maninově supertrojici $(S|\tilde{S})$. Maninovy supertrojice $(S|\tilde{S})$ a $(\tilde{S}|S)$ nejsou obecně isomorfní.

Poznámka 2.3.8 *Důsledkem super-ad-invariance $\langle\ ,\ \rangle$ jsou strukturní koeficienty Maninovy supertrojice $(S|\tilde{S})$ v duální bázi jednoznačně určeny strukturními koeficienty Lieových podsuperalgeber S a $\tilde{S}$ jako*

$$[X_I, \tilde{X}^J] = \tilde{F}^{JK}{}_I X_K + F_{KI}{}^J \tilde{X}^K, \tag{2.3}$$

kde

$$[X_I, X_J] = F_{IJ}{}^K X_K, \quad [\tilde{X}^I, \tilde{X}^J] = \tilde{F}^{IJ}{}_K \tilde{X}^K. \tag{2.4}$$

Super-Jacobiho identita (ii) pro Drinfeldův superdouble pak implikuje kompatibilní podmínky pro podsuperalgebry Maninovy supertrojice $(S|\tilde{S})$.

2.4 Klasifikace Maninových supertrojic

Klasifikace Maninových supertrojic v nízkých dimenzích byla provedena v práci [3]. V této podkapitole shrnujeme poznatky z metody této klasifikace a především uvádíme přehledy neisomorfních Maninových supertrojic v nízkých dimenzích jako výsledky práce [3], které budeme dále využívat ve čtvrté kapitole.

Pod pojmem klasifikace Maninových supertrojic superdimenze $(2m, 2n)$ rozumíme přehled vzájemně neisomorfních tříd Maninových supertrojic superdimenze $(2m, 2n)$ vzhledem k isomorfismu zavedeném v definici 2.3.3.

Předpokládáme Lieovu superalgebru S superdimenze (m, n) a hledáme strukturní koeficienty duální Lieovy superalgebry $\tilde{S}$. Metoda této klasifikace spočívá v řešení super-Jacobiho identit, které lze psát ve tvaru

$$(-1)^{|\tilde{X}^I||\tilde{X}^K|}[\tilde{X}^I, [\tilde{X}^J, \tilde{X}^K]]_{cyclic\{I,J,K\}} = 0 \tag{2.5}$$

a

$$(-1)^{|\tilde{X}^I||X_K|}[\tilde{X}^I, [\tilde{X}^J, X_K]]_{cyclic\{I,J,K\}} = 0, \tag{2.6}$$

kde jako $cyclic\{I, J, K\}$ označujme sumaci přes cyklickou záměnu indexů I, J, K. Při řešení uvažujeme duální homogenní bázi 2.2 a tedy, že Lieovy superzávorky bazických vektorů vyhovují vztahům 2.3 a 2.4.

Další krok je hledání seznamu různých tříd isomorfních Maninových supertrojic a volba „kanonického" tvaru strukturních koeficientů $\tilde{F}^{IJ}{}_K$ pro každou třídu. Tento tvar podle práce [4] odpovídá volbě báze Lieovy superalgebry $\tilde{S}$, při které je bilineární forma v kanonickém tvaru, tj.

$$\langle b_i, \tilde{b}^j \rangle = \delta^j{}_i, \quad \langle f_\alpha, \tilde{f}^\beta \rangle = \delta^\beta{}_\alpha.$$

Vzájemně isomorfní Maninovy supertrojice jsou spojeny transformací duální homogenní báze, kterou lze v blokovém tvaru zapsat jako

$$\begin{pmatrix} X' \\ \tilde{X}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^{-1})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \tilde{X} \end{pmatrix},$$

kde $(X, \tilde{X})^T$ a $(X', \tilde{X}')^T$ jsou duální homogenní báze Maninových supertrojic a A je blokově diagonální matice dovolených automorfismů Lieovy superalgebry S.

Podrobnějším postupem klasifikace se zde zabývat nebudeme a odvoláme se na již klasifikované Maninovy supertrojice v práci [3].

V dalším textu budeme opět uvažovat pouze Lieovy superalgebry s netriviální jak bosonovou, tak fermionovou částí, přičemž vycházíme z klasifikace dvou a třírozměrných Lieových superalgeber a tedy tabulek 2.1, 2.2 a 2.3.

2.4.1 Maninovy supertrojice superdimenze $(2,2)$

Maximálně isotropní Lieovy podsuperalgebry S a $\tilde{S}$ Maninovy supertrojice superdimenze $(2,2)$ odpovídají superdimenzi $(1,1)$ a musí být isomorfní Lieovým superalgebrám uvedených v tabulce 2.1. Lieovy závorky na S předpokládáme také ve tvaru podle tabulky 2.1.

Pro každou Lieovu superalgebru S z tabulky 2.1 snadno určíme strukturní koeficienty duální Lieovy superalgebry $\tilde{S}$, tak aby splňovaly vztahy 2.5 a 2.6. Užitím příslušných automorfismů Lieovy superalgebry S získáme 5 tříd neisomorfních Maninových supertrojic $(S|\tilde{S})$ superdimenze $(2,2)$ až na T-duality.

Přehled neisomorfních Maninových supertrojic superdimenze $(2,2)$ až na T-duality, tedy bez uvažování příslušných duálních Maninových supertrojic, je uveden v tabulce 2.4.

2.4.2 Maninovy supertrojice superdimenze $(4,2)$

Uvažujeme Lieovu superalgebru S podle tabulky 2.2. Ověřením super-Jacobiho identit 2.5, 2.6 a užitím příslušných automorfismů Lieovy superalgebry S získáme 14 tříd neisomorfních Maninových supertrojic $(S|\tilde{S})$ superdimenze $(4,2)$ až na T-duality.

Přehled neisomorfních Maninových supertrojic superdimenze $(4,2)$ až na T-duality, tedy bez uvažování příslušných duálních Maninových supertrojic, je uveden v tabulce 2.5.

2.4.3 Maninovy supertrojice superdimenze $(2,4)$

Uvažujeme Lieovu superalgebru S podle tabulky 2.3. Ověřením super-Jacobiho identit 2.5 a 2.6 zjistíme, že Maninovy supertrojice superdimenze $(2,4)$ mohou nabývat pouze tvaru $(C|N_{12}^{\alpha,\beta,\gamma})$ nebo jejich T-dualit, kde $C = A_{12}, C_p^2, C^3, C^4, C_p^5$ a $N_{12}^{\alpha,\beta,\gamma}$ jsou Lieovy superalgebry jejichž Lieovy superzávorky splňují

$$[\tilde{f}^1,\tilde{f}^1] = \alpha\tilde{b}^1, \quad [\tilde{f}^1,\tilde{f}^2] = \beta\tilde{b}^1, \quad [\tilde{f}^2,\tilde{f}^2] = \gamma\tilde{b}^1.$$

Tyto Lieovy superalgebry jsou isomorfní $N_{12}^{\epsilon} = N_{12}^{1,0,\epsilon}$ nebo $N_{12}^{0} = N_{12}^{1,0,0}$ nebo $A_{12}^{\epsilon} = N_{12}^{0,0,0}$.

Užitím automorfismů Lieových superalgeber $A_{12}, C_p^2, C^3, C^4, C_p^5$ uvedených v tabulce 2.6 získáme 31 tříd neisomorfních Maninových supertrojic $(S|\tilde{S})$ superdimenze $(2,4)$ až na T-duality.

Přehled neisomorfních Maninových supertrojic superdimenze $(2,4)$ až na T-duality, tedy bez uvažování příslušných duálních Maninových supertrojic, je uveden v tabulce 2.6.

Tabulka 2.4: Neisomorfní Maninovy supertrojice superdimenze $(2,2)$ až na T-duality

	$(S,\tilde{S})$	Nenulové Lieovy superzávorky	Backhouseova klasifikace
1	(A_{11}, A_{11})		abelovská
2	$(N_{11}\|A_{11})$	$[f_1, f_1] = b_1,\ [f_1, \tilde{b}^1] = \tilde{f}^1$	$(C^3 + A)$
3	$(S_{11}\|A_{11})$	$[b_1, f_1] = f_1, \quad [b_1, \tilde{f}^1] = -\tilde{f}^1$ $[f_1, \tilde{f}^1] = \tilde{b}^1$	$(C^2_{-1} + A)$
4,5	$(S_{11}\|N^{\epsilon}_{11})$ $\epsilon = \pm 1$	$[b_1, f_1] = f_1, \quad [b_1, \tilde{f}^1] = \epsilon f_1 - \tilde{f}^1,$ $[f_1, \tilde{f}^1] = \tilde{b}^1, \quad [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = \epsilon \tilde{b}^1$	$\cong (C^2_{-1} + A)$

Tabulka 2.5: Neisomorfní Maninovy supertrojice superdimenze $(4,2)$ až na T-duality

	S	$\tilde{S}$	Nenulové Lieovy superzávorky	Poznámka
1	A_{21}	A_{21}		
	N_{21}		$[f_1, f_1] = b_1$	
2		A_{21}		
	S_{21}		$[b_1, f_1] = f_1$	
3		A_{21}		
4		N_{21}^{ϵ}	$[\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = \epsilon \tilde{b}^1$	$\epsilon = \pm 1$
5		S_{21}	$[\tilde{b}^2, \tilde{f}^1] = \tilde{f}^1$	
	C_p^1		$[b_1, b_2] = b_2,\ [b_1, f_1] = p f_1$	$p \in \mathbb{R}$
6		A_{21}		
7		N_{21}^{ϵ}	$[\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = \epsilon \tilde{b}^1$	$\epsilon = \pm 1$
8		$\tilde{C}_{-p}^1$	$[\tilde{b}^1, \tilde{b}^2] = \tilde{b}^1,\ [\tilde{b}^2, \tilde{f}^1] = p \tilde{f}^1$	
9		$\tilde{N}_{21}$	$[\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = \tilde{b}^2$	$p = \frac{1}{2}$
10		C_0^1, κ	$[\tilde{b}^1, \tilde{b}^2] = \kappa \tilde{b}^2$	$p = 0,\ \kappa \neq 0$
	F		$[b_1, b_2] = b_2,\ [b_1, f_1] = \frac{1}{2} f_1,\ [f_1, f_1] = b_2$	
11		A_{21}		
12		$C_{p=-\frac{1}{2}}^{1,\epsilon}$	$[\tilde{b}^1, \tilde{b}^2] = \epsilon \tilde{b}^1,\ [\tilde{b}^2, \tilde{f}^1] = \frac{1}{2} \epsilon \tilde{f}^1$	$\epsilon = \pm 1$
13		$F.i, \epsilon$	$[\tilde{b}^1, \tilde{b}^2] = \epsilon \tilde{b}^1,\ [\tilde{b}^2, \tilde{f}^1] = -\frac{1}{2} \epsilon \tilde{f}^1,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = \epsilon \tilde{b}^1$	$\epsilon = \pm 1$
14		$F.ii, \kappa$	$[\tilde{b}^1, \tilde{b}^2] = \epsilon \tilde{b}^2,\ [\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = \frac{1}{2} \kappa \tilde{f}^1,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = \kappa \tilde{b}^2$	$\kappa \neq 0$

Tabulka 2.6: Neisomorfní Maninovy supertrojice superdimenze $(2,4)$ až na T-duality

	S	$\tilde{S}$	Poznámka
			$\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1,\ \delta \in \{0,1\}$
1 - 3	A_{12}	$A_{12},\ N_{12}^{1,0,0},\ N_{12}^{1,0,\epsilon}$	
4 - 8	C_p^2	$A_{12},\ N_{12}^{0,1,0},\ N_{12}^{0,\delta,\epsilon},\ N_{12}^{\epsilon,\delta,0},\ N_{12}^{\epsilon_1,\kappa,\epsilon_2}$	$\lvert p\rvert < 1,\ \kappa \geq 0$
9 - 12	C_1^2	$A_{12},\ N_{12}^{\epsilon,0,\epsilon},\ N_{12}^{1,0,-1},\ N_{12}^{0,0,\epsilon}$	
13 - 17	C_{-1}^2	$A_{12},\ N_{12}^{0,1,0},\ N_{12}^{0,\delta,\epsilon},\ N_{12}^{1,\kappa,1},\ N_{12}^{\epsilon,\kappa,-\epsilon}$	$\kappa \geq 0$
18 - 22	C^3	$A_{12},\ N_{12}^{\epsilon,0,1},\ N_{12}^{1,0,0},\ N_{12}^{0,\epsilon,0},\ N_{12}^{0,0,1}$	
23 - 26	C^4	$A_{12},\ N_{12}^{\epsilon,0,0},\ N_{12}^{0,\epsilon,0},\ N_{12}^{\kappa,0,\epsilon}$	$\kappa \in \mathbb{R}$
27 - 29	C_p^5	$A_{12},\ N_{12}^{\kappa,0,\epsilon},\ N_{12}^{-1,0,-1}$	$p > 0,\ -1 < \kappa \leq 1$
30, 31	$C_{p=0}^5$	$A_{12},\ N_{12}^{\kappa,0,1}$	$-1 \leq \kappa \leq 1$

Kapitola 3

Kohomologie Lieovy superalgebry

Jak již víme podle věty 1.5.8, tak v případě konečné dimenze existuje prostá korespondence mezi Lieovou bialgebrou a Maninovou trojicí. Tento fakt využijeme při popisu Lieovy superbialgebry, neboť pracujeme výhradně na prostorech konečné dimenze. Budeme tedy pojem Lieovy superbialgebry nahrazovat Maninovou supertrojicí. V této kapitole bude naším cílem definovat kohomologii Lieovy superalgebry do takové míry, abychom mohli zkoumat, kdy je daná Lieova superbialgebra, resp. Maninova supertrojice kohraniční. Zdůrazněme, že tato a následující kapitola by měla být vrcholem této práce.

3.1 Adjungovaná reprezentace Lieovy superalgebry

Na další úvahy má zásadní vliv adjungovaná reprezentace Lieovy superalgebry. Je zcela rozumné předpokládat, že Lieova superalgebra S bude působit sama na sebe prostřednictvím adjungované reprezentace ad a že tuto úlohu bude stejně jako v klasickém případě hrát samotná Lieova závorka, v našem případě tedy Lieova superzávorka. Připomeňme tedy její vlastnosti.

Pro každé $x, y, z \in S$ platí, že

$$[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x] \tag{3.1}$$

$$(-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|y||x|}[y, [z, x]] + (-1)^{|z||y|}[z, [x, y]] = 0 \tag{3.2}$$

$$[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j} \quad \text{pro} \quad i, j \in \mathbb{Z}_2 \tag{3.3}$$

Definujme tedy zobrazení $ad : x \in S \mapsto ad_x \in \text{End } S$, předpisem pro $y \in S$ jako

$$x.y = ad_x(y) = [x, y],$$

kde $[\ ,\ ]$ je Lieova superzávorka z definice 2.1.2.

Takto definované zobrazení by mělo být reprezentací Lieovy superalgebry S. Musí tedy pro každé $x, y, z \in S$ splňovat podmínku reprezentace

$$ad_{[x,y]}z = [ad_x, ad_y](z).$$

V dalším textu užijeme s výhodou následující vlastnost.

Lemma 3.1.1 *Nechť S je Lieova superalgebra a $[\ ,\ ]$ je její Lieova superzávorka. Pak pro každé $x, y \in S$ platí*

$$(-1)^{|[x,y]|} = (-1)^{|x|+|y|}.$$

Důkaz. Tato vlastnost plyne přímo z vlastnosti 3.3 Lieovy superzávorky a definice parity, které aplikujeme na všechny kombinace uspořádané dvojice $(|x|, |y|)$, kde $x \in V_i$ a $y \in V_j$, $i, j \in \{0, 1\}$.

$(\lvert x\rvert, \lvert y\rvert)$	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$\lvert [x, y]\rvert$
$(0, 0)$	0	0
$(1, 0)$	1	1
$(0, 1)$	1	1
$(1, 1)$	2	0

Odtud pak plyne tvrzení lemmatu.

□

Podívejme se nejprve na výraz $ad_x[y, z]$, který upravíme pomocí super-Jacobiho identity 3.2 a supersymetrie 3.1 jako

$$\begin{aligned} ad_x[y, z] = [x, [y, z]] &= -(-1)^{|x||z|}(-1)^{|y||x|}[y, [z, x]] - (-1)^{|x||z|}(-1)^{|z||y|}[z, [x, y]] \\ &= (-1)^{|y||x|}[y, [x, z]] + \underbrace{(-1)^{|x||z|}(-1)^{|z||y|}(-1)^{|z||[x,y]|}}_{a}[[x, y], z] \\ &= (-1)^{|y||x|}[y, [x, z]] + a[[x, y], z] \end{aligned}$$

Podle lemmatu 3.1.1 nahlédneme, že výraz

$$a = (-1)^{|x||z|}(-1)^{|z||y|}(-1)^{|z||[x,y]|} = (-1)^{|x||z|}(-1)^{|z||y|}(-1)^{|z|(|x|+|y|)}$$

$$= (-1)^{2|z|(|x|+|y|)} = 1^{|z|(|x|+|y|)} \equiv 1 \tag{3.4}$$

pro každé $x, y, z \in S$.

Platí tedy, že

$$ad_x[y, z] = [x, [y, z]] = (-1)^{|y||x|}[y, [x, z]] + [[x, y], z] = (-1)^{|y||x|}ad_y ad_x z + ad_{[x,y]}z$$

neboli

$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] - (-1)^{|y||x|}[y,[x,z]] \tag{3.5}$$

pro každé $x, y, z \in S$.

Odtud pak můžeme vyjádřit hledaný výraz pro podmínku reprezentace jako

$$ad_{[x,y]}z = ad_x ad_y z - (-1)^{|y||x|} ad_y ad_x z = (ad_x ad_y - (-1)^{|y||x|} ad_y ad_x)(z) = [ad_x, ad_y](z),$$

kde jsme definovali

$$[ad_x, ad_y] := ad_x ad_y - (-1)^{|y||x|} ad_y ad_x.$$

Tedy při takto definované Lieově superzávorce dvou lineárních operátorů ad_x, ad_y na S je zobrazení ad adjungovaná reprezentace Lieovy superalgebry S v S.

Definice 3.1.2 *Nechť S je Lieova superalgebra a $[\ ,\ ]$ je její Lieova superzávorka. Lieovu superzávorku dvou lineárních operátorů ad_x, ad_y na S definujeme předpisem*

$$[ad_x, ad_y] := ad_x ad_y - (-1)^{|y||x|} ad_y ad_x.$$

Pak zobrazení $ad : x \in S \mapsto ad_x \in End\ S$ definované pro $x, y \in S$ předpisem

$$ad_x(y) = [x, y] \tag{3.6}$$

nazýváme adjungovaná reprezentace Lieovy superalgebry S v S.

Poznámka 3.1.3 *Důsledkem tohoto zobecnění je samozřejmě fakt, že pro $V_1 = \{\theta\}$ přechází tato definice na klasickou Lieovu závorku dvou lineárních operátorů*

$$[ad_x, ad_y] = ad_x ad_y - ad_y ad_x.$$

Poznámka 3.1.4 *Podle práce [4] lze lineární operátory na Lieově algebře S superdimenze (m,n) ztotožnit s blokovými maticemi $T^{(m+n),(m+n)}$ tvaru*

$$T = \begin{pmatrix} P^{(m,m)} & Q^{(m,n)} \\ R^{(n,m)} & S^{(n,n)} \end{pmatrix}.$$

Prostor takovýchto matic lze rozložit na sudou a lichou část, kde sudá, resp. lichá zobrazení představují matice blokově diagonální, resp. blokově mimo-diagonální.

Na tomto supervektorovém prostoru definujeme Lieovu superzávorku jako

$$[T_1, T_2] = T_1 T_2 - (-1)^{|T_2||T_1|} T_2 T_1,$$

kde $|T| = 0$ pro sudé zobrazení a $|T| = 1$ pro liché zobrazení.

Podívejme se dále, jak působí Lieova superalgebra S na tenzorový součin dvou Lieových superalgeber $S \otimes S$. Chceme nalézt analogické vyjádření výrazu

$$x.u = ad_x^{(2)} u$$

pro $x \in S$ a $u \in S \otimes S$.

Uvažujme tedy zobrazení $ad^{(2)} : x \in S \mapsto ad_x^{(2)} \in \text{End } S \otimes S$. Naším cílem je nalézt předpis, jak obecně působí $ad_x^{(2)}$ na rozkladné prvky $y_1 \otimes y_2 \in S \otimes S$, tedy vyjádřit výraz $ad_x^{(2)}(y_1 \otimes y_2)$. Přičemž směrodatnou podmínkou bude opět požadavek, aby zobrazení $ad^{(2)}$ byla reprezentace Lieovy superalgebry S v $S \otimes S$. Musí tedy platit pro každé $u \in S \otimes S$, že

$$ad_{[x,y]}^{(2)} u = [ad_x^{(2)}, ad_y^{(2)}](u),$$

kde podle předchozí části definujeme

$$[ad_x^{(2)}, ad_y^{(2)}] = ad_x^{(2)} ad_y^{(2)} - (-1)^{|x||y|} ad_y^{(2)} ad_x^{(2)}.$$

Označme $u_1, u_2 \in S$ rozkladné prvky $u \in S \otimes S$, $u = u_1 \otimes u_2$, pak musí být splněna rovnost

$$ad_{[x,y]}^{(2)}(u_1 \otimes u_2) = ad_x^{(2)} ad_y^{(2)}(u_1 \otimes u_2) - (-1)^{|x||y|} ad_y^{(2)} ad_x^{(2)}(u_1 \otimes u_2)$$

pro každé $u_1, u_2 \in S$.

Tvrzení 3.1.5 *Nechť S je Lieova superalgebra, $u_1, u_2 \in S$ a definujeme působení $ad_x^{(2)}$ na rozkladné prvky $u_1 \otimes u_2 \in S \otimes S$ předpisem*

$$ad_x^{(2)}(u_1 \otimes u_2) = ad_x u_1 \otimes u_2 + (-1)^{|x||u_1|} u_1 \otimes ad_x u_2. \tag{3.7}$$

Pak zobrazení $ad^{(2)} : x \in S \mapsto ad_x^{(2)} \in End\ S \otimes S$ je reprezentace Lieovy superalgebry S v $S \otimes S$.

Důkaz. Podle předchozích úvah stačí dokázat, že pro každé $x, y, u_1, u_2 \in S$ platí rovnost

$$\underbrace{ad_{[x,y]}^{(2)}(u_1 \otimes u_2)}_{L} = \underbrace{ad_x^{(2)} ad_y^{(2)}(u_1 \otimes u_2) - (-1)^{|x||y|} ad_y^{(2)} ad_x^{(2)}(u_1 \otimes u_2)}_{P}$$

Podle 3.7 upravíme postupně levou stranu jako

$$\begin{aligned} L &= ad_{[x,y]} u_1 \otimes u_2 + (-1)^{|[x,y]||u_1|} u_1 \otimes ad_{[x,y]} u_2 \\ &= [[x,y],u_1] \otimes u_2 + (-1)^{|[x,y]||u_1|} u_1 \otimes [[x,y],u_2] \\ &= \underbrace{[[x,y],u_1]}_{l_1} \otimes u_2 + u_1 \otimes \underbrace{(-1)^{|[x,y]||u_1|}[[x,y],u_2]}_{l_2} \\ &= l_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes l_2 \end{aligned}$$

a pravou stranu jako

$$
\begin{aligned}
P &= ad_x^{(2)}([y,u_1]\otimes u_2 + (-1)^{|y||u_1|}u_1\otimes[y,u_2]) \\
&-(-1)^{|x||y|}ad_y^{(2)}([x,u_1]\otimes u_2 + (-1)^{|x||u_1|}u_1\otimes[x,u_2]) \\
&= [x,[y,u_1]]\otimes u_2 + (-1)^{|x||[y,u_1]|}[y,u_1]\otimes[x,u_2] \\
&+(-1)^{|y||u_1|}[x,u_1]\otimes[y,u_2] + (-1)^{|y||u_1|}(-1)^{|x||u_1|}u_1\otimes[x,[y,u_2]] \\
&-(-1)^{|x||y|}[y,[x,u_1]]\otimes u_2 - (-1)^{|x||y|}(-1)^{|y||[x,u_1]|}[x,u_1]\otimes[y,u_2] \\
&-(-1)^{|x||y|}(-1)^{|x||u_1|}[y,u_1]\otimes[x,u_2] - (-1)^{|x||y|}(-1)^{|x||u_1|}(-1)^{|y||u_1|}u_1\otimes[y,[x,u_2]] \\
&= \underbrace{([x,[y,u_1]] - (-1)^{|x||y|}[y,[x,u_1]])}_{p_1}\otimes u_2 \\
&+u_1\otimes\underbrace{((-1)^{|y||u_1|}(-1)^{|x||u_1|}([x,[y,u_2]] - (-1)^{|x||y|}[y,[x,u_2]]))}_{p_2} \\
&+\underbrace{((-1)^{|y||u_1|} - (-1)^{|x||y|}(-1)^{|y||[x,u_1]|})}_{p_3}[x,u_1]\otimes[y,u_2] \\
&+\underbrace{((-1)^{|x||[y,u_1]|} - (-1)^{|x||y|}(-1)^{|x||u_1|})}_{p_4}[y,u_1]\otimes[x,u_2] \\
&= p_1\otimes u_2 + u_1\otimes p_2 + p_3[x,u_1]\otimes[y,u_2] + p_4[y,u_1]\otimes[x,u_2]
\end{aligned}
$$

Výrazy p_3 a p_4 jsou podle lemmatu 3.1.1 pro každé $x, y, u_1 \in S$ rovny nule, neboť

$$
\begin{aligned}
p_3 = (-1)^{|y||u_1|} - (-1)^{|x||y|}(-1)^{|y||[x,u_1]|} &= (-1)^{|y||u_1|} - (-1)^{2|x||z|}(-1)^{|y||u_1|} \\
&= (-1)^{|y||u_1|} - (-1)^{|y||u_1|} \equiv 0,
\end{aligned}
$$

$$
p_4 = (-1)^{|x||[y,u_1]|} - (-1)^{|x||y|}(-1)^{|x||u_1|} = (-1)^{|x||y|}(-1)^{|x||u_1|} - (-1)^{|x||y|}(-1)^{|x||u_1|} \equiv 0.
$$

Platí tedy, že

$$
L = l_1\otimes u_2 + u_1\otimes l_2, \quad P = p_1\otimes u_2 + u_1\otimes p_2.
$$

Porovnáním zjistíme, že rovnost $L = P$ je splněna nezávisle na $x, y, u_1, u_2 \in S$, pokud platí, že

$$
l_1 = p_1, \quad l_2 = p_2.
$$

První podmínka znamená, že musí platit

$$
[[x,y],u_1] = [x,[y,u_1]] - (-1)^{|x||y|}[y,[x,u_1]],
$$

což je přímo výraz 3.5, který platí pro každé $x, y, u_1 \in S$.

Druhá podmínka znamená, že musí platit rovnost

$$
(-1)^{|[x,y]||u_1|}[[x,y],u_2] = (-1)^{|y||u_1|}(-1)^{|x||u_1|}([x,[y,u_2]] - (-1)^{|x||y|}[y,[x,u_2]]),
$$

která po úpravě přejde na tvar

$$\underbrace{(-1)^{|y||u_1|}(-1)^{|x||u_1|}(-1)^{|[x,y]||u_1|}}_{a}[[x,y],u_2] = [x,[y,u_2]] - (-1)^{|x||y|}[y,[x,u_2]],$$

kde podle 3.4 je výraz $a \equiv 1$ pro každé $x, y, u_1 \in S$.

Pak podmínka $l_2 = p_2$ má tvar

$$[[x,y],u_2] = [x,[y,u_2]] - (-1)^{|x||y|}[y,[x,u_2]],$$

což je opět výraz 3.5, který platí pro každé $x, y, u_1 \in S$.

Rovnost $L = P$ tak platí pro každé $x, y, u_1, u_2 \in S$ a tedy zobrazení $ad^{(2)}$ je adjungovaná reprezentace Lieovy superalgebry S v $S \otimes S$.

□

Předchozí tvrzení nás tedy opravňuje k následující definici.

Definice 3.1.6 *Nechť S je Lieova superalgebra. Pak zobrazení $ad^{(2)}$ z tvrzení 3.1.5, $ad^{(2)} : x \in S \mapsto ad^{(2)}_x \in End\ S \otimes S$, definované pro $x \in S$ a rozkladné prvky $y_1 \otimes y_2 \in S \otimes S$ předpisem*

$$x.(y_1 \otimes y_2) = ad^{(2)}_x(y_1 \otimes y_2) = ad_x y_1 \otimes y_2 + (-1)^{|x||y_1|} y_1 \otimes ad_x y_2 \tag{3.8}$$

nazýváme adjungovaná reprezentace Lieovy superalgebry S v $S \otimes S$.

3.2 Pojem kohranice na úrovni Lieovy superalgebry

Uvažujme Lieovu superalgebru S superdimenze (m, n) a její homogenní bázi $\{X_I\}_{I=1}^{m+n}$. Pak můžeme S zapsat jako lineární obal své homogenní báze, tedy jako

$$S = span\{\{X_I\}_{I=1}^{m+n}\}.$$

Tenzorový součin $S \otimes S$ definujeme jako

$$S \otimes S = span\{\{X_I\}_{I=1}^{m+n}\} \otimes span\{\{X_J\}_{J=1}^{m+n}\} = span\{\{X_I \otimes X_J\}_{I,J=1}^{m+n}\}.$$

Tedy báze $S \otimes S$ má tvar $\{X_I \otimes X_J\}_{I,J=1}^{m+n}$.

Naší motivací je zjistit, jak definovat k-kořetězec na úrovni Lieovy superalgebry. Vzhledem k tomu, že dále budeme využívat pouze kořetězce řádu 0 a 1, tak se na tyto dva případy omezíme.

Jak již víme, tak podle definice 1.1.4 pro klasickou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ a její vektorový prostor reprezentace M je 0-kořetězec na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v M prvek M a 1-kořetězec na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v M je lineární zobrazení z $\mathfrak{g}$ do M. V případě Lieovy superalgebry S můžeme za M považovat tenzorový součin $S \otimes S$, kde Lieova superalgebra S působí na $S \otimes S$ pomocí adjungované reprezentace $ad^{(2)}$ z definice 3.1.6. Tedy můžeme vyslovit následující definici.

Definice 3.2.1 *Nechť S je Lieova superalgebra. Pak definujeme 0-kořetězec na S s hodnotami v $S \otimes S$ jako prvek $S \otimes S$ a 1-kořetězec na S s hodnotami v $S \otimes S$ jako lineární zobrazení z S do $S \otimes S$.*

Kohranice k-kořetězce je v klasickém případě definována jako (k+1)-kořetězec. Tento fakt budeme předpokládat analogicky pro Lieovu superalgebru. Jelikož jsme zavedli pouze kořetězce řádu 0 a 1, smíme tedy definovat pouze kohranici 0-kořetězce, což však je pro naše účely zcela postačující.

Definice 3.2.2 *Kohranice 0-kořetězce na S s hodnotami v $S \otimes S$, tj. prvku $u \in S \otimes S$, je 1-kořetězec na S s hodnotami v $S \otimes S$, tj. lineární zobrazení $\delta u : S \mapsto S \otimes S$ definované pro $x \in S$ vztahem*

$$\delta u(x) = x.u = ad_x^{(2)} u. \tag{3.9}$$

Lieova bialgebra je v klasickém případě definována jako dvojice $(\mathfrak{g}, \gamma)$, kde $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra a γ je lineární zobrazení z $\mathfrak{g}$ do $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ splňující vlastnosti podle definice 1.2.1. Především podmínka (i) znamená, že její transpozice definuje Lieovu závorku na $\mathfrak{g}^*$. Pak podmínka na kohraniční Lieovu bialgebru znamená požadavek na existenci prvku $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ takového, že jeho kohranice δr právě toto zobrazení γ definuje, tj.

$$\gamma = \delta r.$$

Maninovy supertrojice, které nám představují Lieovy superbialgebry, jsou klasifikovány v kapitole 2 a jejich přehledy jsou uvedeny v tabulkách 2.4, 2.5 a 2.6. Je zcela zřejmé, že Lieova superalgebra $\tilde{S}$, resp. její Lieova superzávorka je určena strukturními koeficienty $\tilde{F}^{IJ}{}_K$. Tyto koeficienty nám tak nahrazují lineární zobrazení γ, resp. jeho transpozici ${}^t\gamma : \tilde{S} \otimes \tilde{S} \mapsto \tilde{S}$. Lze tedy pro homogenní bázi $\{\tilde{X}^I\}_{I=1}^{m+n}$ Lieovy superalgebry $\tilde{S}$ psát

$${}^t\gamma(\tilde{X}^I, \tilde{X}^J) = [\tilde{X}^I, \tilde{X}^J] = \tilde{F}^{IJ}{}_K \tilde{X}^K.$$

Na základě těchto úvah zavádíme následující definici.

Definice 3.2.3 *Řekneme, že Maninova supertrojice $(S|\tilde{S})$ superdimenze $(2m, 2n)$ s duální homogenní bází $\{X_I, \tilde{X}^J\}_{I,J=1}^{m+n}$ je kohraniční, pokud existuje prvek $r \in S \otimes S$ takový, že jeho kohranice definuje Lieovu superzávorku na $\tilde{S}$, tj. pokud platí, že*

$$(\delta r)^{IJ}{}_K = \tilde{F}^{IJ}{}_K, \tag{3.10}$$

kde $\tilde{F}^{IJ}{}_K$ jsou strukturní koeficienty Lieovy superalgebry $\tilde{S}$ a $(\delta r)^{IJ}{}_K$ jsou souřadnice obrazu bazického vektoru X_K při zobrazení $\delta r : S \mapsto S \otimes S$, tj.

$$\delta r(X_K) = (\delta r)^{IJ}{}_K X_I \otimes X_J.$$

Takový prvek $r \in S \otimes S$ pak nazýváme r-matice.

Podívejme se nyní blíže na vztah 3.10.

Uvažujme tedy Maninovu supertrojici $(S|\tilde{S})$ s duální homogenní bází $\{X_I, \tilde{X}^J\}_{I,J=1}^{m+n}$ a příslušné strukturní koeficienty ${F_{IJ}}^K$, ${\tilde{F}^{IJ}}_K$ definované jako

$$[X_I, X_J] = {F_{IJ}}^K X_K, \quad [\tilde{X}^I, \tilde{X}^J] = {\tilde{F}^{IJ}}_K \tilde{X}^K. \tag{3.11}$$

Označme bázi $S \otimes S$ jako $\{X_I \otimes X_J\}_{I,J=1}^{m+n}$. Předpokládejme prvek $r \in S \otimes S$, pak jeho vyjádření v bázi $S \otimes S$ má tvar

$$r = r^{IJ} X_I \otimes X_J. \tag{3.12}$$

Z definice 3.2.2 plyne, že $\delta r : S \mapsto S \otimes S$. Pak podle vztahu 3.9 a 3.12 pro bazický vektor $X_K \in S$ platí, že

$$\delta r(X_K) = X_K.r = ad^{(2)}_{X_K} r = ad^{(2)}_{X_K}(r^{IJ} X_I \otimes X_J) = r^{IJ} ad^{(2)}_{X_K}(X_I \otimes X_J).$$

Podle vztahu 3.8, 3.6 a 3.11 upravíme dále jako

$$\begin{aligned} r^{IJ} ad^{(2)}_{X_K}(X_I \otimes X_J) &= r^{IJ}(ad_{X_K} X_I \otimes X_J + (-1)^{|X_K||X_I|} X_I \otimes ad_{X_K} X_J) \\ &= r^{IJ}([X_K, X_I] \otimes X_J + (-1)^{|X_K||X_I|} X_I \otimes [X_K, X_J]) \\ &= r^{IJ}({F_{KI}}^L X_L \otimes X_J + (-1)^{|X_K||X_I|} X_I \otimes {F_{KJ}}^L X_L) \\ &= r^{IJ} {F_{KI}}^L X_L \otimes X_J + r^{IJ}(-1)^{|X_K||X_I|} {F_{KJ}}^L X_I \otimes X_L \\ &= {F_{KI}}^L r^{IJ} X_L \otimes X_J + (-1)^{|X_K||X_I|} {F_{KJ}}^L r^{IJ} X_I \otimes X_L \end{aligned}$$

Přeznačme v prvním členu sčítací indexy I, L jako $I \leftrightarrow L$ a ve druhém členu sčítací indexy J, L jako $J \leftrightarrow L$. Pak upravovaný výraz přejde na tvar

$$({F_{KL}}^I r^{LJ} + (-1)^{|X_K||X_I|} {F_{KL}}^J r^{IL}) X_I \otimes X_J.$$

Tedy platí, že

$$\delta r(X_K) = ({F_{KL}}^I r^{LJ} + (-1)^{|X_K||X_I|} {F_{KL}}^J r^{IL}) X_I \otimes X_J,$$

což je vyjádření $\delta r(X_K) \in S \otimes S$ v bázi $\{X_I \otimes X_J\}_{I,J=1}^{m+n}$.

Pak hledané koeficienty ${(\delta r)^{IJ}}_K$, které splňují $\delta r(X_K) = {(\delta r)^{IJ}}_K X_I \otimes X_J$, mají tvar

$${(\delta r)^{IJ}}_K = {F_{KL}}^I r^{LJ} + (-1)^{|X_K||X_I|} {F_{KL}}^J r^{IL}.$$

Pro přehlednost zavedeme paritu indexu K jako paritu bazického vektoru $X_K \in S$ příslušejícího indexu K jako

$$|K| := |X_K|.$$

Podle předchozích úvah můžeme vyslovit následující tvrzení.

Tvrzení 3.2.4 *Nechť* $(S|\tilde{S})$ *je Maninova supertrojice superdimenze* $(2m, 2n)$ *a nechť* $\{X_I, \tilde{X}^J\}_{I,J=1}^{m+n}$ *je její duální homogenní báze. Pak Maninova supertrojice* $(S|\tilde{S})$ *je kohraniční, pokud existuje řešení* r^{IJ} *obecně nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic*

$$F_{KL}{}^{I} r^{LJ} + (-1)^{|K||I|} F_{KL}{}^{J} r^{IL} = \tilde{F}^{IJ}{}_{K}\,, \tag{3.13}$$

která je generována strukturními koeficienty Lieových superalgeber S *a* $\tilde{S}$ *splňující vztahy*

$$[X_I, X_J] = F_{IJ}{}^{K} X_K, \quad [\tilde{X}^I, \tilde{X}^J] = \tilde{F}^{IJ}{}_{K} \tilde{X}^K.$$

Pro kohraniční Maninovu trojici má pak příslušná r-matice tvar

$$r = r^{IJ} X_I \otimes X_J.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z předchozích úvah a z definice 3.2.3.

$\square$

V následující kapitole se budeme zabývat řešením soustavy lineárních rovnic 3.13 pro již klasifikované dvou a třírozměrné neisomorfní třídy Maninových supertrojic jejichž přehledy jsou uvedeny v tabulkách 2.4, 2.5 a 2.6.

Kapitola 4

Kohraniční Lieovy superbialgebry

4.1 Úvod

Hledáme řešení r^{IJ} obecně nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic

$$F_{KL}{}^{I} r^{LJ} + (-1)^{|K||I|} F_{KL}{}^{J} r^{IL} = \tilde{F}^{IJ}{}_{K}\,, \tag{4.1}$$

kde $[X_I, X_J] = F_{IJ}{}^{K} X_K$, $[\tilde{X}^I, \tilde{X}^J] = \tilde{F}^{IJ}{}_{K} \tilde{X}^K$, $\{X_I, \tilde{X}^J\}_{I,J=1}^{m+n}$ je duální homogenní báze $(S|\tilde{S})$ superdimenze $(2m, 2n)$.

Jedná se o soustavu $(m+n)^3$ rovnic o $(m+n)^2$ neznámých. Řešitelnost soustavy je podmíněna tvarem strukturních koeficientů Lieových superalgeber S, resp. $\tilde{S}$, kde strukturní koeficienty $F_{IJ}{}^{K}$ generují matici soustavy, resp. strukturní koeficienty $\tilde{F}^{IJ}{}_{K}$ generují příslušné pravé strany.

Pokud řešení r^{IJ} existuje, pak danou Maninovu supertrojici nazveme kohraniční a hledanou r-matici vyjádříme v bázi $S \otimes S$ jako $r = r^{IJ} X_I \otimes X_J$.

Poznámka 4.1.1 *Pro Lieovy superbialgebry typu $(A|\tilde{S})$, kde A je libovolná abelovská superalgebra a $\tilde{S}$ je libovolná neabelovská superalgebra, tj. $F_{IJ}{}^{K} = 0$ a $\tilde{F}^{IJ}{}_{K} \neq 0$, platí, že soustava 4.1 nemá řešení, neboť rovnice pro pevné indexy $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$ takové, že $\tilde{F}^{\bar{I}\bar{J}}{}_{\bar{K}} \neq 0$, má tvar $0 = \tilde{F}^{\bar{I}\bar{J}}{}_{\bar{K}} \neq 0$. Tedy obecně platí, že Lieova superbialgebra $(A|\tilde{S})$ není kohraniční.*

Poznámka 4.1.2 *Strukturní koeficienty $F_{IJ}{}^{K}$, kde $I, J, K \in \widehat{m+n}$, splňují obecně pro indexy $i, j, k \in \hat{m}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{m+1, \cdots, m+n\}$ komutační relace $[X_i, X_j] = F_{ij}{}^{k} X_k$ pro $i \neq j$, $[X_i, X_i] = 0$, $[X_i, X_\alpha] = F_{i\alpha}{}^{\beta} X_\beta$, $[X_\alpha, X_\beta] = F_{\alpha\beta}{}^{k} X_k$. Platí tedy, že*

$$F_{ij}{}^{\alpha} = 0, \quad F_{ii}{}^{I} = 0, \quad F_{i\alpha}{}^{j} = 0, \quad F_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0$$

a ze supersymetrie navíc plyne, že

$$F_{ji}{}^{k} = -F_{ij}{}^{k}, \quad F_{ji}{}^{\alpha} = 0, \quad F_{\alpha i}{}^{\beta} = -F_{i\alpha}{}^{\beta}, \quad F_{\alpha i}{}^{j} = 0, \quad F_{\beta\alpha}{}^{k} = F_{\alpha\beta}{}^{k}, \quad F_{\beta\alpha}{}^{\gamma} = 0.$$

Stejné vlastnosti platí analogicky pro $\tilde{F}^{IJ}{}_{K}$.

4.2 Maninovy supertrojice superdimenze $(2,2)$

Podle poznámky 4.1.2 má soustava 4.1 pro superdimenzi $(2,2)$ obecný tvar

$$F_{22}{}^{1}(r^{12}+r^{21})=0,\quad F_{12}{}^{2}r^{12}=0,\quad -F_{12}{}^{2}r^{11}+F_{22}{}^{1}r^{22}=\tilde{F}^{12}{}_{2},\quad F_{12}{}^{2}r^{21}=0$$
$$-F_{12}{}^{2}r^{11}-F_{22}{}^{1}r^{22}=-\tilde{F}^{12}{}_{2},\quad 2F_{12}{}^{2}r^{22}=\tilde{F}^{22}{}_{1},\quad F_{12}{}^{2}(r^{21}-r^{12})=0$$

Poznámka 4.2.1 *Rovnice pro $I=J=K=1$ je triviálně splněna.*

V dalším textu vycházíme z přehledu neisomorfních Maninových supertrojic superdimenze $(2,2)$ podle tabulky 2.4, přičemž ještě navíc diskutujeme i příslušnou duální Maninovu supertrojici. Duální homogenní báze $(S|\tilde{S})$ má v tomto případě tvar

$$\{X_I,\tilde{X}^J\}_{I,J=1}^{2}=\{X_1,X_2,\tilde{X}^1,\tilde{X}^2\}=\{b_1,f_1,\tilde{b}^1,\tilde{f}^1\}.$$

A tedy pro triviálně nenulové nezávislé strukturní koeficienty platí

$$[b_1,f_1]=F_{12}{}^{2}f_1,\quad [f_1,f_1]=F_{22}{}^{1}b_1,$$

$$[\tilde{b}^1,\tilde{f}^1]=\tilde{F}^{12}{}_{2}\tilde{f}^1,\quad [\tilde{f}^1,\tilde{f}^1]=\tilde{F}^{22}{}_{1}\tilde{b}^1.$$

4.2.1 Maninova supertrojice $(A_{11}|A_{11})$

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix},\ c_i\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(A_{11}|A_{11})=(A_{11}|A_{11})$ je totožná s původní Maninovou supertrojicí.

4.2.2 Maninova supertrojice $(N_{11}|A_{11})$

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2\\ -c_2 & 0\end{pmatrix},\ c_i\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(N_{11}|A_{11})=(A_{11}|N_{11})$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.2.3 Maninova supertrojice $(S_{11}|A_{11})$

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(S_{11}|A_{11}) = (A_{11}|S_{11})$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.2.4 Maninova supertrojice $(S_{11}|N_{11}^{\epsilon})\quad \epsilon = \pm 1$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(S_{11}|N_{11}^{\epsilon}) = (N_{11}^{\epsilon}|S_{11})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix},\ c_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{kohraniční}$$

4.3 Maninovy supertrojice superdimenze $(4, 2)$

Podle poznámky 4.1.2 má soustava 4.1 pro superdimenzi $(4, 2)$ obecný tvar

$$
\begin{gathered}
F_{12}{}^{1}(r^{12}+r^{21})=0\\
-2F_{12}{}^{1}r^{11}=0\\
F_{33}{}^{1}(r^{13}+r^{31})=0\\
F_{12}{}^{2}r^{12}+F_{12}{}^{1}r^{22}=\tilde{F}^{12}{}_{1}\\
-F_{12}{}^{2}r^{11}-F_{12}{}^{1}r^{12}=\tilde{F}^{12}{}_{2}\\
F_{33}{}^{2}r^{13}+F_{33}{}^{1}r^{32}=0\\
F_{13}{}^{3}r^{13}+F_{12}{}^{1}r^{23}=0\\
(F_{23}{}^{3}-F_{12}{}^{1})r^{13}=0\\
-F_{13}{}^{3}r^{11}-F_{23}{}^{3}r^{12}+F_{33}{}^{1}r^{33}=\tilde{F}^{13}{}_{3}\\
F_{12}{}^{2}r^{21}+F_{12}{}^{1}r^{22}=-\tilde{F}^{12}{}_{1}\\
-F_{12}{}^{2}r^{11}-F_{12}{}^{1}r^{21}=-\tilde{F}^{12}{}_{2}\\
F_{33}{}^{1}r^{23}+F_{33}{}^{2}r^{31}=0\\
2F_{12}{}^{2}r^{22}=0\\
-F_{12}{}^{2}(r^{12}+r^{21})=0\\
F_{33}{}^{2}(r^{23}+r^{32})=0\\
(F_{12}{}^{2}+F_{13}{}^{3})r^{23}=0\\
-F_{12}{}^{2}r^{13}+F_{23}{}^{3}r^{23}=0\\
-F_{13}{}^{3}r^{21}-F_{23}{}^{3}r^{22}+F_{33}{}^{2}r^{33}=\tilde{F}^{23}{}_{3}\\
F_{13}{}^{3}r^{31}+F_{12}{}^{1}r^{32}=0\\
(F_{23}{}^{3}-F_{12}{}^{1})r^{31}=0\\
-F_{13}{}^{3}r^{11}-F_{23}{}^{3}r^{21}-F_{33}{}^{1}r^{33}=-\tilde{F}^{13}{}_{3}\\
(F_{12}{}^{2}+F_{13}{}^{3})r^{32}=0\\
-F_{12}{}^{2}r^{31}+F_{23}{}^{3}r^{32}=0\\
-F_{13}{}^{3}r^{12}-F_{23}{}^{3}r^{22}-F_{33}{}^{2}r^{33}=-\tilde{F}^{23}{}_{3}\\
2F_{13}{}^{3}r^{33}=\tilde{F}^{33}{}_{1}\\
2F_{23}{}^{3}r^{33}=\tilde{F}^{33}{}_{2}\\
F_{13}{}^{3}(r^{31}-r^{13})+F_{23}{}^{3}(r^{32}-r^{23})=0
\end{gathered}
$$

V dalším textu vycházíme z přehledu neisomorfních Maninových supertrojic superdimenze $(4, 2)$ podle tabulky 2.5, přičemž ještě navíc diskutujeme i příslušnou duální Maninovu supertrojici. Duální homogenní báze $(S|\tilde{S})$ má v tomto případě tvar

$$\{X_I, \tilde{X}^J\}_{I,J=1}^{3} = \{X_1, X_2, X_3, \tilde{X}^1, \tilde{X}^2\, \tilde{X}^3\} = \{b_1, b_2, f_1, \tilde{b}^1, \tilde{b}^2, \tilde{f}^1\}.$$

A tedy pro triviálně nenulové nezávislé strukturní koeficienty platí

$$[b_1, b_2] = {F_{12}}^1 b_1 + {F_{12}}^2 b_2, \quad [b_1, f_1] = {F_{13}}^3 f_1, \quad [b_2, f_1] = {F_{23}}^3 f_1,$$
$$[f_1, f_1] = {F_{33}}^1 b_1 + {F_{33}}^2 b_2,$$

$$[\tilde{b}^1, \tilde{b}^2] = \tilde{F}^{12}{}_1 \tilde{b}^1 + \tilde{F}^{12}{}_2 \tilde{b}^2, \quad [\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = \tilde{F}^{13}{}_3 \tilde{f}^1, \quad [\tilde{b}^2, \tilde{f}^1] = \tilde{F}^{23}{}_3 \tilde{f}^1,$$
$$[\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = \tilde{F}^{33}{}_1 \tilde{b}^1 + \tilde{F}^{33}{}_2 \tilde{b}^2.$$

4.3.1 Maninova supertrojice $(A_{21}|A_{21})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix}, \; c_i \in \mathbb{R} \; \Rightarrow \; \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(A_{21}|A_{21}) = (A_{21}|A_{21})$ je totožná s původní Maninovou supertrojicí.

4.3.2 Maninova supertrojice $(N_{21}|A_{21})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & 0 \\ -c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; c_i \in \mathbb{R} \; \Rightarrow \; \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(N_{21}|A_{21}) = (A_{21}|N_{21})$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.3.3 Maninova supertrojice $(S_{21}|A_{21})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{R} \; \Rightarrow \; \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(S_{21}|A_{21}) = (A_{21}|S_{21})$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.3.4 Maninova supertrojice $(S_{21}|N_{21}^{\epsilon})$ $\epsilon = \pm 1$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{R} \; \Rightarrow \; \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(S_{21}|N_{21}^{\epsilon})) = (N_{21}^{\epsilon})|S_{21})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & 0 \\ -c_3 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}, \; c_i \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

4.3.5 Maninova supertrojice $(S_{21}|S_{21})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(S_{21}|S_{21}) = (S_{21}|S_{21})$ je totožná s původní Maninovou supertrojicí.

4.3.6 Maninova supertrojice $(C_p^1|A_{21})$ $p \in \mathbb{R}$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}_{p=0}, \; c \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}_{p=-1}, \; c_i \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p \notin \{0,-1\}} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_p^1|A_{21}) = (A_{21}|C_p^1)$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.3.7 Maninova supertrojice $(C_p^1|N_{21}^{\epsilon})$ $p \in \mathbb{R}$, $\epsilon = \pm 1$

Pro $p = 0$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C_0^1|N_{21}^{\epsilon})$ není kohraniční.

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & -\frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}_{p=-1}, \; c_i \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2p} \end{pmatrix}_{p \notin \{0,-1\}} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^1_p|N^\epsilon_{21}) = (N^\epsilon_{21}|C^1_p)$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N^\epsilon_{21}|C^1_p)$ není kohraniční.

4.3.8 Maninova supertrojice $(C^1_p|\tilde{C}^1_{-p})$ $\;p \in \mathbb{R}$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}_{p=0}, \; c \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}_{p=-1}, \; c_i \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p\notin\{0,-1\}} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^1_p|\tilde{C}^1_{-p}) = (\tilde{C}^1_{-p}|C^1_p)$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}_{p=0}, \; c \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p=-1}, \; c_i \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p\notin\{0,-1\}} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

4.3.9 Maninova supertrojice $(C^1_{p=\frac{1}{2}}|\tilde{N}_{21})$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C^1_{p=\frac{1}{2}}|\tilde{N}_{21})$ není kohraniční.

Duální Maninova supertrojice $T(C^1_{p=\frac{1}{2}}|\tilde{N}_{21}) = (\tilde{N}_{21}|C^1_{p=\frac{1}{2}})$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(\tilde{N}_{21}|C^1_{p=\frac{1}{2}})$ není kohraniční.

4.3.10 Maninova supertrojice $(C^1_{p=0}|C^1_0, \kappa)$ $\;\kappa \neq 0$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C^1_{p=0}|C^1_0, \kappa)$ není kohraniční.

Duální Maninova supertrojice $T(C^1_{p=0}|C^1_0,\kappa) = (C^1_0,\kappa|C^1_{p=0})$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C^1_0,\kappa|C^1_{p=0})$ není kohraniční.

4.3.11 Maninova supertrojice $(F|A_{21})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(F|A_{21}) = (A_{21}|F)$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.3.12 Maninova supertrojice $(F|C^{1,\epsilon}_{p=-\frac{1}{2}})$ $\epsilon = \pm 1$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(F|C^{1,\epsilon}_{p=-\frac{1}{2}}) = (C^{1,\epsilon}_{p=-\frac{1}{2}}|F)$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\epsilon} & 0 \\ \frac{1}{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kohraniční}$$

4.3.13 Maninova supertrojice $(F|F.i,\epsilon)$ $\epsilon = \pm 1$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(F|F.i,\epsilon)$ není kohraniční.

Duální Maninova supertrojice $T(F|F.i,\epsilon) = (F.i,\epsilon|F)$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(F.i,\epsilon|F)$ není kohraniční.

4.3.14 Maninova supertrojice $(F|F.ii,\kappa)$ $\kappa \neq 0$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(F|F.ii,\kappa)$ není kohraniční.

Duální Maninova supertrojice $T(F|F.ii,\kappa) = (F.ii,\kappa|F)$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(F.ii,\kappa|F)$ není kohraniční.

4.4 Maninovy supertrojice superdimenze $(2,4)$

Podle poznámky 4.1.2 má soustava 4.1 pro superdimenzi $(2,4)$ obecný tvar

$$
\begin{gathered}
{F_{22}}^1(r^{12}+r^{21})+{F_{23}}^1(r^{13}+r^{31})=0\\
{F_{23}}^1(r^{12}+r^{21})+{F_{33}}^1(r^{13}+r^{31})=0\\
{F_{12}}^2r^{12}+{F_{13}}^2r^{13}=0\\
-{F_{12}}^2r^{11}+{F_{22}}^1r^{22}+{F_{23}}^1r^{32}=\tilde{F}^{12}{}_2\\
-{F_{13}}^2r^{11}+{F_{23}}^1r^{22}+{F_{33}}^1r^{32}=\tilde{F}^{12}{}_3\\
{F_{12}}^3r^{12}+{F_{13}}^3r^{13}=0\\
-{F_{12}}^3r^{11}+{F_{22}}^1r^{23}+{F_{23}}^1r^{33}=\tilde{F}^{13}{}_2\\
-{F_{13}}^3r^{11}+{F_{23}}^1r^{23}+{F_{33}}^1r^{33}=\tilde{F}^{13}{}_3\\
{F_{12}}^2r^{21}+{F_{13}}^2r^{31}=0\\
-{F_{12}}^2r^{11}-{F_{22}}^1r^{22}-{F_{23}}^1r^{23}=-\tilde{F}^{12}{}_2\\
-{F_{13}}^2r^{11}-{F_{23}}^1r^{22}-{F_{33}}^1r^{23}=-\tilde{F}^{12}{}_3\\
2{F_{12}}^2r^{22}+{F_{13}}^2(r^{23}+r^{32})=\tilde{F}^{22}{}_1\\
{F_{12}}^2(r^{21}-r^{12})=0\\
{F_{13}}^2(r^{21}-r^{12})=0\\
{F_{12}}^3r^{22}+({F_{12}}^2+{F_{13}}^3)r^{23}+{F_{13}}^2r^{33}=\tilde{F}^{23}{}_1\\
-{F_{12}}^2r^{13}+{F_{12}}^3r^{21}=0\\
-{F_{13}}^2r^{13}+{F_{13}}^3r^{21}=0\\
{F_{12}}^3r^{21}+{F_{13}}^3r^{31}=0\\
-{F_{12}}^3r^{11}-{F_{22}}^1r^{32}-{F_{23}}^1r^{33}=-\tilde{F}^{13}{}_2\\
-{F_{13}}^3r^{11}-{F_{23}}^1r^{32}-{F_{33}}^1r^{33}=-\tilde{F}^{13}{}_3\\
{F_{12}}^3r^{22}+({F_{12}}^2+{F_{13}}^3)r^{32}+{F_{13}}^2r^{33}=\tilde{F}^{23}{}_1\\
-{F_{12}}^3r^{12}+{F_{12}}^2r^{31}=0\\
-{F_{13}}^3r^{12}+{F_{13}}^2r^{31}=0\\
{F_{12}}^3(r^{23}+r^{32})+2{F_{13}}^3r^{33}=\tilde{F}^{33}{}_1\\
{F_{12}}^3(r^{31}-r^{13})=0\\
{F_{13}}^3(r^{31}-r^{13})=0
\end{gathered}
$$

Poznámka 4.4.1 *Rovnice pro $I=J=K=1$ je triviálně splněna.*

V dalším textu vycházíme z přehledu neisomorfních Maninových supertrojic superdimenze $(2,4)$ podle tabulky 2.6, přičemž ještě navíc diskutujeme i příslušnou duální Maninovu supertrojici. Duální homogenní báze $(S|\tilde{S})$ má v tomto případě tvar

$$\{X_I, \tilde{X}^J\}_{I,J=1}^3 = \{X_1, X_2, X_3, \tilde{X}^1, \tilde{X}^2\, \tilde{X}^3\} = \{b_1, f_1, f_2, \tilde{b}^1, \tilde{f}^1, \tilde{f}^2\}.$$

A tedy pro triviálně nenulové nezávislé strukturní koeficienty platí

$$[b_1, f_1] = F_{12}{}^2 f_1 + F_{12}{}^3 f_2, \quad [b_1, f_2] = F_{13}{}^2 f_1 + F_{13}{}^3 f_2,$$
$$[f_1, f_1] = F_{22}{}^1 b_1, \quad [f_1, f_2] = F_{23}{}^1 b_1, \quad [f_2, f_2] = F_{33}{}^1 b_1,$$

$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = \tilde{F}^{12}{}_2 \tilde{f}^1 + \tilde{F}^{12}{}_3 \tilde{f}^2, \quad [\tilde{b}^1, \tilde{f}^2] = \tilde{F}^{13}{}_2 \tilde{f}^1 + \tilde{F}^{13}{}_3 \tilde{f}^2,$$
$$[\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = \tilde{F}^{22}{}_1 \tilde{b}^1, \quad [\tilde{f}^1, \tilde{f}^2] = \tilde{F}^{23}{}_1 \tilde{b}^1, \quad [\tilde{f}^2, \tilde{f}^2] = \tilde{F}^{33}{}_1 \tilde{b}^1.$$

4.4.1 Maninova supertrojice $(A_{12}|A_{12})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix}, \; c_i \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(A_{12}|A_{12}) = (A_{12}|A_{12})$ je totožná s původní Maninovou supertrojicí.

4.4.2 Maninova supertrojice $(A_{12}|N_{12}^{1,0,0})$

Podle poznámky 4.1.1 je Maninova supertrojice $(A_{12}|N_{12}^{1,0,0})$ nekohraniční.

Duální Maninova supertrojice $T(A_{12}|N_{12}^{1,0,0}) = (N_{12}^{1,0,0}|A_{12})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 0 \\ c_4 & 0 & c_5 \end{pmatrix}, \; c_i \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

4.4.3 Maninova supertrojice $(A_{12}|N_{12}^{1,0,\epsilon})$ $\epsilon = \pm 1$

Podle poznámky 4.1.1 je Maninova supertrojice $(A_{12}|N_{12}^{1,0,\epsilon})$ nekohraniční.

Duální Maninova supertrojice $T(A_{12}|N_{12}^{1,0,\epsilon}) = (N_{12}^{1,0,\epsilon}|A_{12})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 0 \\ -c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; c_i \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

4.4.4 Maninova supertrojice $(C_p^2|A_{12})$ $|p|<1$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}_{p=0}, \; c \in \mathbb{R} \; \Rightarrow \text{ kohraniční}$$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\substack{p\neq 0 \\ |p|<1}} \; \Rightarrow \text{ kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_p^2|A_{12}) = (A_{12}|C_p^2)$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.4.5 Maninova supertrojice $(C_p^2|N_{12}^{0,1,0})$ $|p|<1$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}_{p=0}, \; c \in \mathbb{R} \; \Rightarrow \text{ kohraniční}$$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+p} \\ 0 & \frac{1}{1+p} & 0 \end{pmatrix}_{\substack{p\neq 0 \\ |p|<1}} \; \Rightarrow \text{ kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_p^2|N_{12}^{0,1,0}) = (N_{12}^{0,1,0}|C_p^2)$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{0,1,0}|C_p^2)$ není kohraniční.

4.4.6 Maninova supertrojice $(C_p^2|N_{12}^{0,\delta,\epsilon})$ $|p|<1$, $\delta \in \{0,1\}$, $\epsilon = \pm 1$

Pro $p = 0$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C_0^2|N_{12}^{0,\delta,\epsilon})$ není kohraniční.

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{1+p} \\ 0 & \frac{\delta}{1+p} & \frac{\epsilon}{2p} \end{pmatrix}_{\substack{p\neq 0 \\ |p|<1}} \; \Rightarrow \text{ kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_p^2|N_{12}^{0,\delta,\epsilon}) = (N_{12}^{0,\delta,\epsilon}|C_p^2)$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{0,\delta,\epsilon}|C_p^2)$ není kohraniční.

4.4.7 Maninova supertrojice $(C_p^2|N_{12}^{\epsilon,\delta,0})$ $|p|<1$, $\delta\in\{0,1\}$, $\epsilon=\pm1$

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{\epsilon}{2}&\delta\\0&\delta&c\end{pmatrix}_{p=0},\ c\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{\epsilon}{2}&\frac{\delta}{1+p}\\0&\frac{\delta}{1+p}&0\end{pmatrix}_{\substack{p\neq0\\|p|<1}}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_p^2|N_{12}^{\epsilon,\delta,0})=(N_{12}^{\epsilon,\delta,0}|C_p^2)$

Pro $\delta=0$, $p\neq0$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{\epsilon,0,0}|C_p^2)$ není kohraniční.

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix}c_1&c_2&c_3\\-c_2&\frac{1}{\epsilon}&0\\c_4&0&c_5\end{pmatrix}_{\substack{\delta=0\\p=0}},\ c_i\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

Pro $\delta=1$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{\epsilon,1,0}|C_p^2)$ není kohraniční.

4.4.8 Maninova supertrojice $(C_p^2|N_{12}^{\epsilon_1,\kappa,\epsilon_2})$ $|p|<1$, $\kappa\geq0$, $\epsilon_i=\pm1$

Pro $p=0$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C_0^2|N_{12}^{\epsilon_1,\kappa,\epsilon_2})$ není kohraniční.

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{\epsilon_1}{2}&\frac{\kappa}{1+p}\\0&\frac{\kappa}{1+p}&\frac{\epsilon_2}{2p}\end{pmatrix}_{\substack{p\neq0\\|p|<1}}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_p^2|N_{12}^{\epsilon_1,\kappa,\epsilon_2})=(N_{12}^{\epsilon_1,\kappa,\epsilon_2}|C_p^2)$

Pro $\kappa\neq0$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{\epsilon_1,\kappa,\epsilon_2}|C_p^2)$ není kohraniční.

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix}c_1&c_2&c_3\\-c_2&\frac{1}{\epsilon_1}&0\\-c_3&0&\frac{p}{\epsilon_2}\end{pmatrix}_{\kappa=0},\ c_i\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

4.4.9 Maninova supertrojice $(C_1^2|A_{12})$

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_1^2|A_{12}) = (A_{12}|C_1^2)$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.4.10 Maninova supertrojice $(C_1^2|N_{12}^{\epsilon,0,\epsilon})$ $\epsilon = \pm 1$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_1^2|N_{12}^{\epsilon,0,\epsilon}) = (N_{12}^{\epsilon,0,\epsilon}|C_1^2)$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & \frac{1}{\epsilon} & 0 \\ -c_3 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}, \ c_i \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \text{kohraniční}$$

4.4.11 Maninova supertrojice $(C_1^2|N_{12}^{1,0,-1})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_1^2|N_{12}^{1,0,-1}) = (N_{12}^{1,0,-1}|C_1^2)$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 1 & 0 \\ -c_3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ c_i \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \text{kohraniční}$$

4.4.12 Maninova supertrojice $(C_1^2|N_{12}^{0,0,\epsilon})$ $\epsilon = \pm 1$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_1^2|N_{12}^{0,0,\epsilon}) = (N_{12}^{0,0,\epsilon}|C_1^2)$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{0,0,\epsilon}|C_1^2)$ není kohraniční.

4.4.13 Maninova supertrojice $(C_{-1}^2|A_{12})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}, \ c_i \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^2_{-1}|A_{12}) = (A_{12}|C^2_{-1})$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.4.14 Maninova supertrojice $(C^2_{-1}|N_{12}^{0,1,0})$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C^2_{-1}|N_{12}^{0,1,0})$ není kohraniční.

Duální Maninova supertrojice $T(C^2_{-1}|N_{12}^{0,1,0}) = (N_{12}^{0,1,0}|C^2_{-1})$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{0,1,0}|C^2_{-1})$ není kohraniční.

4.4.15 Maninova supertrojice $(C^2_{-1}|N_{12}^{0,\delta,\epsilon})$ $\delta \in \{0,1\}$, $\epsilon = \pm 1$

Pro $\delta = 1$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C^2_{-1}|N_{12}^{0,1,\epsilon})$ není kohraniční.

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & -\frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}_{\delta=0}, \; c_i \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^2_{-1}|N_{12}^{0,\delta,\epsilon}) = (N_{12}^{0,\delta,\epsilon}|C^2_{-1})$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{0,\delta,\epsilon}|C^2_{-1})$ není kohraniční.

4.4.16 Maninova supertrojice $(C^2_{-1}|N_{12}^{1,\kappa,1})$ $\kappa \geq 0$

Pro $\kappa \neq 0$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C^2_{-1}|N_{12}^{1,\kappa,1})$ není kohraniční.

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & c_1 \\ 0 & c_2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\kappa=0}, \; c_i \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^2_{-1}|N_{12}^{1,\kappa,1}) = (N_{12}^{1,\kappa,1}|C^2_{-1})$

Pro $\kappa \neq 0$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{1,\kappa,1}|C^2_{-1})$ není kohraniční.

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 1 & 0 \\ -c_3 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\kappa=0}, \; c_i \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{kohraniční}$$

4.4.17 Maninova supertrojice $(C^2_{-1}|N^{\epsilon,\kappa,-\epsilon}_{12})$ $\kappa \geq 0$, $\epsilon = \pm 1$

Pro $\kappa \neq 0$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C^2_{-1}|N^{\epsilon,\kappa,-\epsilon}_{12})$ není kohraniční.

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} & c_1 \\ 0 & c_2 & \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}_{\kappa=0}, \ c_i \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^2_{-1}|N^{\epsilon,\kappa,-\epsilon}_{12}) = (N^{\epsilon,\kappa,-\epsilon}_{12}|C^2_{-1})$

Pro $\kappa \neq 0$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N^{\epsilon,\kappa,-\epsilon}_{12}|C^2_{-1})$ není kohraniční.

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & \frac{1}{\epsilon} & 0 \\ -c_3 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}_{\kappa=0}, \ c_i \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

4.4.18 Maninova supertrojice $(C^3|A_{12})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & -c_3 & 0 \end{pmatrix}, \ c_i \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^3|A_{12}) = (A_{12}|C^3)$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.4.19 Maninova supertrojice $(C^3|N^{\epsilon,0,1}_{12})$ $\epsilon = \pm 1$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C^3|N^{\epsilon,0,1}_{12})$ není kohraniční.

Duální Maninova supertrojice $T(C^3|N^{\epsilon,0,1}_{12}) = (N^{\epsilon,0,1}_{12}|C^3)$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N^{\epsilon,0,1}_{12}|C^3)$ není kohraniční.

4.4.20 Maninova supertrojice $(C^3|N^{1,0,0}_{12})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 1-c_3 & 0 \end{pmatrix}, \ c_i \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^3|N^{1,0,0}_{12}) = (N^{1,0,0}_{12}|C^3)$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 1 \\ c_4 & 1 & c_5 \end{pmatrix}, \ c_i \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

4.4.21 Maninova supertrojice $(C^3|N_{12}^{0,\epsilon,0})$ $\epsilon = \pm 1$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & -c_3 & \epsilon \end{pmatrix},\ c_i \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^3|N_{12}^{0,\epsilon,0}) = (N_{12}^{0,\epsilon,0}|C^3)$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 0 \\ -c_3 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix},\ c_i \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

4.4.22 Maninova supertrojice $(C^3|N_{12}^{0,0,1})$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C^3|N_{12}^{0,0,1})$ není kohraniční.

Duální Maninova supertrojice $T(C^3|N_{12}^{0,0,1}) = (N_{12}^{0,0,1}|C^3)$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{0,0,1}|C^3)$ není kohraniční.

4.4.23 Maninova supertrojice $(C^4|A_{12})$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^4|A_{12}) = (A_{12}|C^4)$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.4.24 Maninova supertrojice $(C^4|N_{12}^{\epsilon,0,0})$ $\epsilon = \pm 1$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^4|N_{12}^{\epsilon,0,0}) = (N_{12}^{\epsilon,0,0}|C^4)$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{\epsilon,0,0}|C^4)$ není kohraniční.

4.4.25 Maninova supertrojice $(C^4|N_{12}^{0,\epsilon,0})$ $\epsilon = \pm 1$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^4|N_{12}^{0,\epsilon,0}) = (N_{12}^{0,\epsilon,0}|C^4)$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \\ -c_3 & \frac{1}{\epsilon} & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix},\ c_i \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

4.4.26 Maninova supertrojice $(C^4|N_{12}^{\kappa,0,\epsilon})$ $\kappa \in \mathbb{R}$, $\epsilon = \pm 1$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\kappa+\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} \\ 0 & -\frac{\epsilon}{4} & \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C^4|N_{12}^{\kappa,0,\epsilon}) = (N_{12}^{\kappa,0,\epsilon}|C^4)$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{\kappa,0,\epsilon}|C^4)$ není kohraniční.

4.4.27 Maninova supertrojice $(C_p^5|A_{12})$ $p > 0$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_p^5|A_{12}) = (A_{12}|C_p^5)$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.4.28 Maninova supertrojice $(C_p^5|N_{12}^{\kappa,0,\epsilon})$ $p > 0$, $-1 < \kappa \leq 1$, $\epsilon = \pm 1$

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon+\kappa(1+2p^2)}{4p(1+p^2)} & \frac{\kappa-\epsilon}{4(1+p^2)} \\ 0 & \frac{\kappa-\epsilon}{4(1+p^2)} & \frac{\kappa+\epsilon(1+2p^2)}{4p(1+p^2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_p^5|N_{12}^{\kappa,0,\epsilon}) = (N_{12}^{\kappa,0,\epsilon}|C_p^5)$

Pro $\epsilon = 1$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{\kappa,0,1}|C_p^5)$ není kohraniční.

Pro $\kappa \neq 1$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{\kappa,0,\epsilon}|C_p^5)$ není kohraniční.

$$r^{IJ} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & p & 1 \\ -c_3 & 1 & -p \end{pmatrix}_{\substack{\epsilon=-1 \\ \kappa=1}},\ c_i \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \text{kohraniční}$$

4.4.29 Maninova supertrojice $(C_p^5|N_{12}^{-1,0,-1})\ \ p>0$

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-\frac{1}{2p}&0\\0&0&-\frac{1}{2p}\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_p^5|N_{12}^{-1,0,-1})=(N_{12}^{-1,0,-1}|C_p^5)$

Soustava 4.1 nemá řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{-1,0,-1}|C_p^5)$ není kohraniční.

4.4.30 Maninova supertrojice $(C_{p=0}^5|A_{12})$

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&c_1&c_2\\0&-c_2&c_1\end{pmatrix},\ c_i\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_{p=0}^5|A_{12})=(A_{12}|C_{p=0}^5)$ je podle poznámky 4.1.1 nekohraniční.

4.4.31 Maninova supertrojice $(C_{p=0}^5|N_{12}^{\kappa,0,1})\ \ -1\le\kappa\le 1$

Pro $\kappa\neq -1$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(C_{p=0}^5|N_{12}^{\kappa,0,1})$ není kohraniční.

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&c_1&c_2\\0&-1-c_2&c_1\end{pmatrix}_{\kappa=-1},\ c_i\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

Duální Maninova supertrojice $T(C_{p=0}^5|N_{12}^{\kappa,0,1})=(N_{12}^{\kappa,0,1}|C_{p=0}^5)$

Pro $\kappa\neq -1$ nemá soustava 4.1 řešení $\Rightarrow$ Maninova supertrojice $(N_{12}^{\kappa,0,1}|C_{p=0}^5)$ není kohraniční.

$$r^{IJ}=\begin{pmatrix}c_1&c_2&c_3\\-c_2&0&-1\\-c_3&-1&0\end{pmatrix}_{\kappa=-1},\ c_i\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \text{kohraniční}$$

Závěr

V prvních dvou kapitolách jsme se úspěšně seznámili s důležitými pojmy z teorie Lieových bialgeber a Lieových superalgeber, resp. Lieových superbialgeber, přičemž jsme vycházeli z poznatků uvedených v pracích [2] a [3].

V kapitole třetí se nám úspěšně podařilo zobecnit pojem adjungované reprezentace Lieovy superalgebry, abychom následně diskutovali definici kohraniční Lieovy superbialgebry. Tady jsme především narazili na problém obecné definice k-kořetězce na úrovni Lieovy superalgebry. Proto jsme se omezili, vzhledem k definici kohraniční Lieovy bialgebry a požadavku intuitivní korespondence, na uvažování kořetězců 0. a 1. řádu s hodnotami v $S \otimes S$, kde Lieova superalgebra S působí na $S \otimes S$ pomocí adjungované reprezentace $ad^{(2)}$ z definice 3.1.6. Tento fakt nám umožnil definovat kohranici prvku $r \in S \otimes S$ analogicky jako pro Lieovy algebry s tím rozdílem, že uvažujeme nově zavedenou adjungovanou akci $ad^{(2)}$ na úrovni Lieovy superalgebry.

Dále jsme uvažovali Maninovy supertrojice klasifikované v práci [3], které představují klasifikované Lieovy superbialgebry. Diskutovali jsme fakt, že kohranice prvku $r \in S \otimes S$ definuje strukturu Maninovy supertrojice, pokud generuje strukturní koeficienty Lieovy superalgebry $\tilde{S}$. Touto úvahou jsme dospěli k definice kohraniční Maninovy supertrojice a její r-matice. A pokud uvažujeme prostou korespondenci mezi Lieovými superbialgebrami a Maninovými supertrojicemi, tak jsme tím i definovali kohraniční Lieovy superbialgebry.

Společně s touto definicí jsme získali i nutnou a postačující podmínku vztaženou na strukturní koeficienty Maninovy supertrojice, podle které můžeme rozhodnou zda Maninova supertrojice je nebo není kohraniční. Tato podmínka má charakter řešitelnosti obecně nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic, která je generována příslušnými strukturními koeficienty dané Maninovy supertrojice, a její případné řešení odpovídá souřadnicím r-matice v odpovídající bázi $S \otimes S$. Ve čtvrté kapitole se nám tuto soustavu podařilo analyzovat pro všechny klasifikované Maninovy supertrojice superdimenze $(2, 2)$, $(4, 2)$ a $(2, 4)$. Přehledný seznam kohraničních Maninových supertrojic příslušných superdimenzí je uveden v příloze A.

Seznam použitých zdrojů

[1] A. O. Barut and R. Raczka. *Theory of group representation and applications.* PWN Warszawa, 1980.

[2] Y. Kosmann-Schwarzbach. Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations. *Integrability of Nonlinear Systems*, Lecture Notes in Physics, 638, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 107-173.

[3] L. Hlavatý, V. Štěpán and J. Vysoký. *Drinfel'd superdoubles and Poisson-Lie T-plurality in low dimensions.* J. Math. Phys., 51 (2010) 062304.

[4] J. Vysoký. *Supersymetrie, Lieovské superalgebry, Maninovy supertrojice: bakalářská práce.* Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2009. 57 s., 20 s. příloh. Vedoucí bakalářské práce prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

Přílohy

Příloha A

Přehledy kohraničních Maninových supertrojic a jejich r-matic

Poznámka A.0.2 *Ve všech následujících přehledech platí, že konstanty* $c, c_i \in \mathbb{R}$*. Pokud pro danou povolenou hodnotu některého parametru nejsou souřadnice r-matice* r^{IJ} *v bázi* $S \otimes S$ *uvedeny, pak pro tuto hodnotu parametru není příslušná Maninova supertrojice kohraniční. Symbolem „–“ označujeme nekohraniční Maninovy supertrojice pro všechny povolené hodnoty parametrů.*

Tabulka A.1: Kohraniční Maninovy supertrojice superdimenze (2,2)

	$(S, \tilde{S})$	r^{IJ}	$T(S, \tilde{S})$	r^{IJ}
1	(A_{11}, A_{11})	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$	(A_{11}, A_{11})	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$
2	(N_{11}, A_{11})	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & 0 \end{pmatrix}$	(A_{11}, N_{11})	–
3	(S_{11}, A_{11})	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	(A_{11}, S_{11})	–
4,5	$(S_{11} \vert N_{11}^{\epsilon})$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}$	$(N_{11}^{\epsilon} \vert S_{11})$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}$

Tabulka A.2: Kohraniční Maninovy supertrojice superdimenze (4,2) část I.

	$(S\|\tilde{S})$	r^{IJ}	$T(S\|\tilde{S})$	r^{IJ}
1	$(A_{21}\|A_{21})$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix}$	$(A_{21}\|A_{21})$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix}$
2	$(N_{21}\|A_{21})$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & 0 \\ -c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(A_{21}\|N_{21})$	–
3	$(S_{21}\|A_{21})$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(A_{21}\|S_{21})$	–
4	$(S_{21}\|N_{21}^{\epsilon})$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}$	$(N_{21}^{\epsilon}\|S_{21})$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & 0 \\ -c_3 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}$
5	$(S_{21}\|S_{21})$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(S_{21}\|S_{21})$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6	$(C_p^1\|A_{21})$ $p \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}_{p=0}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}_{p=-1}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p \notin \{0,-1\}}$	$(A_{21}\|C_p^1)$ $p \in \mathbb{R}$	–
7	$(C_p^1\|N_{21}^{\epsilon})$ $p \in \mathbb{R}$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & -\frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}_{p=-1}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2p} \end{pmatrix}_{p \notin \{0,-1\}}$	$(N_{21}^{\epsilon}\|C_p^1)$	–

Tabulka A.3: Kohraniční Maninovy supertrojice superdimenze (4,2) část II.

	$(S\|\tilde{S})$	r^{IJ}	$T(S\|\tilde{S})$	r^{IJ}
8	$(C^1_p\|\tilde{C}^1_{-p})$ $p \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}_{p=0}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}_{p=-1}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p\notin\{0,-1\}}$	$(\tilde{C}^1_{-p}\|C^1_p)$ $p \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}_{p=0}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p=-1}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p\notin\{0,-1\}}$
9	$(C^1_{p=\frac{1}{2}}\|\tilde{N}_{21})$	–	$(\tilde{N}_{21}\|C^1_{p=\frac{1}{2}})$	–
10	$(C^1_{p=0}\|C^1_0, \kappa)$ $\kappa \neq 0$	–	$(C^1_0, \kappa\|C^1_{p=0})$ $\kappa \neq 0$	–
11	$(F\|A_{21})$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(A_{21}\|F)$	–
12	$(F\|C^{1,\epsilon}_{p=-\frac{1}{2}})$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & \epsilon & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(C^{1,\epsilon}_{p=-\frac{1}{2}}\|F)$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\epsilon} & 0 \\ \frac{1}{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}$
13	$(F\|F.i, \epsilon)$ $\epsilon = \pm 1$	–	$(F.i, \epsilon\|F)$ $\epsilon = \pm 1$	–
14	$(F\|F.ii, \kappa)$ $\kappa \neq 0$	–	$(F.ii, \kappa\|F)$ $\kappa \neq 0$	–

Tabulka A.4: Kohraniční Maninovy supertrojice superdimenze (2,4) část I.

	$(S\|\tilde{S})$	r^{IJ}	$T(S\|\tilde{S})$	r^{IJ}
1	$(A_{12}\|A_{12})$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix}$	$(A_{12}\|A_{12})$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix}$
2	$(A_{12}\|N_{12}^{1,0,0})$	–	$(N_{12}^{1,0,0}\|A_{12})$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 0 \\ c_4 & 0 & c_5 \end{pmatrix}$
3	$(A_{12}\|N_{12}^{1,0,\epsilon})$ $\epsilon = \pm 1$	–	$(N_{12}^{1,0,\epsilon}\|A_{12})$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 0 \\ -c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4	$(C_p^2\|A_{12})$ $\|p\| < 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}_{p=0}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\substack{p\neq 0 \\ \|p\|<1}}$	$(A_{12}\|C_p^2)$ $\|p\| < 1$	–
5	$(C_p^2\|N_{12}^{0,1,0})$ $\|p\| < 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}_{p=0}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+p} \\ 0 & \frac{1}{1+p} & 0 \end{pmatrix}_{\substack{p\neq 0 \\ \|p\|<1}}$	$(N_{12}^{0,1,0}\|C_p^2)$ $\|p\| < 1$	–
6	$(C_p^2\|N_{12}^{0,\delta,\epsilon})$ $\|p\| < 1$ $\delta \in \{0,1\}$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{1+p} \\ 0 & \frac{\delta}{1+p} & \frac{\epsilon}{2p} \end{pmatrix}_{\substack{p\neq 0 \\ \|p\|<1}}$	$(N_{12}^{0,\delta,\epsilon}\|C_p^2)$ $\|p\| < 1$ $\delta \in \{0,1\}$ $\epsilon = \pm 1$	–

Tabulka A.5: Kohraniční Maninovy supertrojice superdimenze (2,4) část II.

	$(S\|\tilde{S})$	r^{IJ}	$T(S\|\tilde{S})$	r^{IJ}
7	$(C_p^2\|N_{12}^{\epsilon,\delta,0})$ $\|p\| < 1$ $\delta \in \{0,1\}$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} & \delta \\ 0 & \delta & c \end{pmatrix}_{p=0}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} & \frac{\delta}{1+p} \\ 0 & \frac{\delta}{1+p} & 0 \end{pmatrix}_{\substack{p \neq 0 \\ \|p\| < 1}}$	$(N_{12}^{\epsilon,\delta,0}\|C_p^2)$ $\|p\| < 1$ $\delta \in \{0,1\}$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & \frac{1}{\epsilon} & 0 \\ c_4 & 0 & c_5 \end{pmatrix}_{\substack{\delta = 0 \\ p = 0}}$
8	$(C_p^2\|N_{12}^{\epsilon_1,\kappa,\epsilon_2})$ $\|p\| < 1$ $\kappa \geq 0$ $\epsilon_i = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_1}{2} & \frac{\kappa}{1+p} \\ 0 & \frac{\kappa}{1+p} & \frac{\epsilon_2}{2p} \end{pmatrix}_{\substack{p \neq 0 \\ \|p\| < 1}}$	$(N_{12}^{\epsilon_1,\kappa,\epsilon_2}\|C_p^2)$ $\|p\| < 1$ $\kappa \geq 0$ $\epsilon_i = \pm 1$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & \frac{1}{\epsilon_1} & 0 \\ -c_3 & 0 & \frac{p}{\epsilon_2} \end{pmatrix}_{\kappa = 0}$
9	$(C_1^2\|A_{12})$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(A_{12}\|C_1^2)$	$-$
10	$(C_1^2\|N_{12}^{\epsilon,0,\epsilon})$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}$	$(N_{12}^{\epsilon,0,\epsilon}\|C_1^2)$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & \frac{1}{\epsilon} & 0 \\ -c_3 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}$
11	$(C_1^2\|N_{12}^{1,0,-1})$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$(N_{12}^{1,0,-1}\|C_1^2)$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 1 & 0 \\ -c_3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
12	$(C_1^2\|N_{12}^{0,0,\epsilon})$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}$	$(N_{12}^{0,0,\epsilon}\|C_1^2)$ $\epsilon = \pm 1$	$-$
13	$(C_{-1}^2\|A_{12})$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}$	$(A_{12}\|C_{-1}^2)$	$-$
14	$(C_{-1}^2\|N_{12}^{0,1,0})$	$-$	$(N_{12}^{0,1,0}\|C_{-1}^2)$	$-$

Tabulka A.6: Kohraniční Maninovy supertrojice superdimenze (2,4) část III.

	$(S\|\tilde{S})$	r^{IJ}	$T(S\|\tilde{S})$	r^{IJ}
15	$(C^2_{-1}\|N_{12}^{0,\delta,\epsilon})$ $\delta \in \{0,1\}$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & -\frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}_{\delta=0}$	$(N_{12}^{0,\delta,\epsilon}\|C^2_{-1})$ $\delta \in \{0,1\}$ $\epsilon = \pm 1$	$-$
16	$(C^2_{-1}\|N_{12}^{1,\kappa,1})$ $\kappa \geq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & c_1 \\ 0 & c_2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\kappa=0}$	$(N_{12}^{1,\kappa,1}\|C^2_{-1})$ $\kappa \geq 0$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 1 & 0 \\ -c_3 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\kappa=0}$
17	$(C^2_{-1}\|N_{12}^{\epsilon,\kappa,-\epsilon})$ $\kappa \geq 0$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} & c_1 \\ 0 & c_2 & \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}_{\kappa=0}$	$(N_{12}^{\epsilon,\kappa,-\epsilon}\|C^2_{-1})$ $\kappa \geq 0$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & \frac{1}{\epsilon} & 0 \\ -c_3 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}_{\kappa=0}$
18	$(C^3\|A_{12})$	$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & -c_3 & 0 \end{pmatrix}$	$(A_{12}\|C^3)$	$-$
19	$(C^3\|N_{12}^{\epsilon,0,1})$ $\epsilon = \pm 1$	$-$	$(N_{12}^{\epsilon,0,1}\|C^3)$	$-$
20	$(C^3\|N_{12}^{1,0,0})$	$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 1-c_3 & 0 \end{pmatrix}$	$(N_{12}^{1,0,0}\|C^3)$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 1 \\ c_4 & 1 & c_5 \end{pmatrix}$
21	$(C^3\|N_{12}^{0,\epsilon,0})$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & -c_3 & \epsilon \end{pmatrix}$	$(N_{12}^{0,\epsilon,0}\|C^3)$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 0 \\ -c_3 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}$
22	$(C^3\|N_{12}^{0,0,1})$	$-$	$(N_{12}^{0,0,1}\|C^3)$	$-$
23	$(C^4\|A_{12})$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(A_{12}\|C^4)$	$-$
24	$(C^4\|N_{12}^{\epsilon,0,0})$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(N_{12}^{\epsilon,0,0}\|C^4)$ $\epsilon = \pm 1$	$-$
25	$(C^4\|N_{12}^{0,\epsilon,0})$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$(N_{12}^{0,\epsilon,0}\|C^4)$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \\ -c_3 & \frac{1}{\epsilon} & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}$

Tabulka A.7: Kohraniční Maninovy supertrojice superdimenze (2,4) část IV.

	$(S\|\tilde{S})$	r^{IJ}	$T(S\|\tilde{S})$	r^{IJ}
26	$(C^4\|N_{12}^{\kappa,0,\epsilon})$ $\kappa \in \mathbb{R}$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\kappa+\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} \\ 0 & -\frac{\epsilon}{4} & \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}$	$(N_{12}^{\kappa,0,\epsilon}\|C^4)$ $\kappa \in \mathbb{R}$ $\epsilon = \pm 1$	$-$
27	$(C_p^5\|A_{12})$ $p > 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(A_{12}\|C_p^5)$ $p > 0$	$-$
28	$(C_p^5\|N_{12}^{\kappa,0,\epsilon})$ $p > 0$ $\|\kappa\| \leq 1$ $\kappa \neq -1$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon+\kappa(1+2p^2)}{4p(1+p^2)} & \frac{\kappa-\epsilon}{4(1+p^2)} \\ 0 & \frac{\kappa-\epsilon}{4(1+p^2)} & \frac{\kappa+\epsilon(1+2p^2)}{4p(1+p^2)} \end{pmatrix}$	$(N_{12}^{\kappa,0,\epsilon}\|C_p^5)$ $p > 0$ $\|\kappa\| \leq 1$ $\kappa \neq -1$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & p & 1 \\ -c_3 & 1 & -p \end{pmatrix}_{\substack{\epsilon=-1 \\ \kappa=1}}$
29	$(C_p^5\|N_{12}^{-1,0,-1})$ $p > 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2p} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2p} \end{pmatrix}$	$(N_{12}^{-1,0,-1}\|C_p^5)$ $p > 0$	$-$
30	$(C_{p=0}^5\|A_{12})$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & -c_2 & c_1 \end{pmatrix}$	$(A_{12}\|C_{p=0}^5)$	$-$
31	$(C_{p=0}^5\|N_{12}^{\kappa,0,1})$ $\|\kappa\| \leq 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & -1-c_2 & c_1 \end{pmatrix}_{\kappa=-1}$	$(N_{12}^{\kappa,0,1}\|C_{p=0}^5)$ $\|\kappa\| \leq 1$	$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & -1 \\ -c_3 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{\kappa=-1}$