České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika

Renormalizace Poisson-Lie T-plurality

Renormalization in Poisson-Lie T-plurality

Výzkumný úkol

Vypracoval: Josef Navrátil
Vedoucí práce: Ing. Libor Šnobl, Ph.D.
Rok: 2011

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svůj výzkumný úkoli vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne 16.8.2011

....

Josef Navrátil

Poděkování

Děkuji Ing. Liborovi Šnoblovi, Ph.D. za vedení mého výzkumného úkolu, za mnoho návrhů jenž ho obohatily a také za opravy chyb a nepřesností.

Josef Navrátil

Název práce:
Renormalizace Poisson-Lie T-plurality

Autor: Josef Navrátil

Obor: Matematické inženýrství
Druh práce: Výzkumný úkol

Vedoucí práce: Ing. Libor Šnobl, Ph.D.
katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze
Konzultant: —

Abstrakt: Tato práce je založena na dvou článcích, autory jednoho jsou C. Klimčík, G. Valent, R. Squellari a autory druhého K.Sfetsos a K. Siampos. V prvně jmenovaném článku bylo dokázáno, že Poisson-Lie T-duální sigma modely jsou renormalizovatelné, a nalezen explicitní tvar counter-členů, v druhém bylo dokázáno, že rovnice renormalizační grupy pro původni sigma model a sigma model po transformaci Poisson-Lie T-duality ekvivalentní. V práci jsou ověřeny závěry obou článků, odhaleno několik chyb a následně je naznačen směr dalšího výzkumu - zobecnění na případ Poisson-Lie T-plurality.

Klíčová slova: Renormalizace, Poisson-Lie T-dualita, sigma model, Riemannův tenzor

Title:
Renormalization in Poisson-Lie T-plurality

Author: Josef Navrátil

Abstract: This work is based on C. Klimčík's, G. Valent's, R. Squelarri's and K. Sfetsos's and K.Siampos's articles. In the first article it was proved that Poisson-Lie T-dual sigma models are renormalizable and also was computed explicit form of counter-terms. In the second article it was proved quantum equivalence in Poisson-Lie T-duality. In this work we check conclusions of these two articles, discover several typos and inaccurancies and suggest a generalization to Poisson-Lie T-plurality.

Key words: Renormalization, Poisson-Lie T-duality, sigma model, Riemann tensor

Obsah

Úvod

V počátcích kvantové teorie pole, začátkem 30. let minulého století zjistili Heisenberg s Paulim, že výsledkem výpočtu některých procesů je divergentní výraz. Krátce poté jejich výsledky potvrdil Oppenheimer a Waller, konkrétně na výpočtu energetických hladin elektronu v atomu vodíku. Weiskopf později navrhnul, aby se problém vyřešil redefinicí některých konstant teorie, čímž položil základy teorie renormalizace. Další velký pokrok učinili v této teorii Pauli (regularizace divergentního výrazu) a t'Hooft s Veltmanem, kteří vymysleli dimenzionální regularizaci. Výrazný příspěvek měl též Feynman.
Pro tuto práci je důležitý článek Fridlinga a Van de Vena, kteří v roce 1986 spočítali příspěvek 1PI grafu, a také našli counter-členy pro sigma model.
V roce 2009 publikovali Klimčík, Valent a Squellari práci "One loop renormalizability of the Poisson-Lie sigma models", kde ukázali, že Poisson-Lie sigma modely jsou renormalizovatelné, avšak již zde není dokázáno, jakým způsobem se mění counter-členy při transformaci Poisson-Lie T-duality. To bylo ukázáno až v práci Sfetsose a Siampose, a sice že rovnice renormalizační grupy pro sigma model na jedné podgrupě Drinfeldova doublu jsou ekvivalentní rovnicím renormalizační grupy na duální grupě Drinfeldova doublu.
V článku [1] byly vynechány některé zdlouhavější výpočty, proto se v této práci zaměříme na jejich ověření, a zda jsou výsledky této práce správné. Také případně opravíme některé chyby a nepřesnosti. Též zavedeme vybrané základní pojmy z diferenciální geometrie a kvantové teorie pole, např. spinovou konexi, Riemannův tenzor, counter členy a také nastíníme základy renormalizace v teorii sigma modelů. Dále ověříme některé závěry článku [2], a pokusíme se naznačit směr dalšího výzkumu.

Kapitola 1

Základní definice

Nechť $\mathcal{D}$ značí jednoduše souvislou Lieovu grupu, $\mathfrak{d}$ její Lieovu algebru, a nechť $G, \tilde{G}$ jsou dvě Lieovy podgrupy grupy $\mathcal{D}$, jejichž algebry $\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}$ jsou maximálně izotropní vůči symetrické, nedegenerované ad-invariantní bilineární formě. Tuto grupu nazýváme Drinfeldův double.
Vektory bazí $\{T_a\}, \{\tilde{T}^b\}$ podalgeber $\mathfrak{g}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$ algebry Drinfeldova doublu lze vybrat tak, že splňují následující komutační relace:

$$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^s T_s, \quad [\tilde{T}^a, \tilde{T}^b] = \tilde{f}^{ab}{}_s T^s,$$
$$[T_a, \tilde{T}^b] = \tilde{f}^{bs}{}_a T_s - f^b{}_{as} \tilde{T}^s, \tag{1.1}$$

podrobněji viz [3].
Na Lieově grupě lze definovat hladkou funkci $f : G \to \mathbb{R}$. Obecný element Lieovy grupy z okolí jednotky lze zapsat jako exponentu prvku algebry:

$$g = \exp(\chi^s T_s) \in \; G, \quad f = f(\exp(\chi^s T_s)),$$

Dále můžeme definovat směrovou derivaci funkce f v bodě $g \in G$ podle tečného vektoru $v = [\gamma]$:

$$\nabla_v f := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)).$$

Pokud jako tečný vektor použijeme bázový vektor algebry pravoinvariantních vektorových polí, vztah pro derivaci v bodě $g \in G$ podle T_s vypadá následovně:

$$\nabla_s f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\exp(tT_s).g) \equiv \tilde{\partial}_s f,$$

posledního zápisu budeme využívat v dalším textu, v němž bude symbol ∇ vyhrazen pro konexi bez torze. Směrová derivace je lineární, a splňuje Leibnizovo pravidlo.
Dále uvažujme bázi T_a tečného prostoru v jednotce grupy G, a označme R_a pravoinvariantní pole jež jsou z ní generována. Platí následující vztah (viz [4]):

$$R_a(g) = R_{g*} T_a. \tag{1.2}$$

Obdobně lze dokázat pro bázi kotečného prostoru T^a a pravoinvariantní 1-formy následující vztah:

$$R^a(g) = R_{g*} T^a = (R_{g^{-1}})^\star T^a. \tag{1.3}$$

O 1-formách $R^a(g)$ budeme hovořit též jako o vielbeinech.
Uvažujme σ - model na Lieově grupě G, jenž je zadán akcí:

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2x\ G_{\mu\nu}\partial_-\phi^\mu\partial_+\phi^\nu, \quad \mu = 1, 2, ..., \dim G, \tag{1.4}$$

kde zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^2 \to G$ má složky ϕ^μ, jež jsou zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ty získáme složením $\Phi \circ y^\mu$, kde y^μ jsou souřadnicové funkce na G, tj. diffeomorfismy $U_g \to \mathbb{R}^n$, kde U_g je množina otevřeného pokrytí G. Více viz [5]. Dále x_+, x_- jsou souřadnice na světoploše, a $F_{\mu\nu}$ je tenzor 2. řádu na Lieově grupě G. Také lze využít alternativní zápis pomocí pravoinvariantních forem - vielbeinů, jenž označíme $R^a_\pm$:

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x\ G_{ab}R^a_+R^b_-\mathrm{d}x_+\mathrm{d}x_-.$$

Obdobně můžeme definovat σ - model na duální Lieově grupě $\tilde{G}$.

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2x\tilde{G}_{\mu\nu}\partial_-\tilde{\phi}^\mu\partial_+\tilde{\phi}^\nu, \quad \mu = 1, 2, ..., \dim \tilde{G}.$$

Jak je ukázáno v [5], tak ve speciálním případě, kdy mají G_{ab}, $\tilde{G}_{ab}$ tvar:

$$G_{ab} = (M + \Pi(g))^{-1}_{ab}, \quad \tilde{G}_{ab} = (M^{-1} + \tilde{\Pi}(\tilde{g}))^{-1}_{ab}, \tag{1.5}$$

existuje těsný vztah mezi σ - modely zadanými G_{ab} a $\tilde{G}_{ab}$. Označili jsme M konstantní matici a Π je matice určená přidruženou reprezentací grupy G, resp. $\tilde{\Pi}$ je určena přidruženou reprezentací grupy $\tilde{G}$. Konkrétní tvar je uveden v další kapitole. Podrobněji se celou problematikou zabývají články [5], resp. je popsán v práci [3]. Matici G_{ab} lze rozložit na symetrickou a antisymetrickou část, tj. pseudoriemannovskou metriku a tzv. torzní potenciál:

$$g_{ab} = \frac{1}{2}(G_{ab} + G_{ba}), \quad h_{ab} = \frac{1}{2}(G_{ab} - G_{ba}). \tag{1.6}$$

Dále označíme $\Gamma^{bc} = (G^{-1})^{bc}$, s využitím předchozího vidíme, že
$\Gamma^{bc} = (M + \Pi(g))^{bc}$.
Na grupě G máme zavedeny souřadnice, můžeme tedy použít souřadnicový zápis metriky a torzního potenciálu.

$$G_{\mu\nu} = G_{ab}R^a_\mu R^b_\nu = (g_{ab} + h_{ab})R^a_\mu R^b_\nu. \tag{1.7}$$

Jak vidíme, tak souřadnicový zápis má tvar:

$$g_{\mu\nu} = g_{ab}R^a_\mu R^b_\nu, \quad h_{\mu\nu} = h_{ab}R^a_\mu R^b_\nu \tag{1.8}$$

Definujeme inverzní metriku $g^{\alpha\mu}$:

$$g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu} = \delta^\alpha_\nu, \quad g_{\mu\nu}g^{\alpha\mu} = \delta^\alpha_\nu, \quad g^{ab} = R^a_\mu R^b_\nu g^{\mu\nu}. \tag{1.9}$$

Protože $h_{\mu\nu}$ je antisymetrický tenzor 2. řádu, určuje 2-formu H:

$$H = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\mathrm{d}y^\mu \wedge \mathrm{d}y^\nu = \frac{1}{2}h_{ab}R^a \wedge R^b$$

Z torzního potenciálu získáme už snadno torzní 3-formu:

$$\mathcal{T} = dH = \frac{1}{3!}\mathcal{T}_{abc}R^a \wedge R^b \wedge R^c \tag{1.10}$$

Uvažujme konexi D na G, oblast $\mathcal{O} \subset G$, pole R^a na $\mathcal{O}$, označíme V pravoinvariantní vektorové pole na G a ω^a_b 1-formy konexe vůči R^a, které definujeme vztahy:

$$D_V R^a = -\omega^a_b(V) R^b. \tag{1.11}$$

Protože ω^a_b je 1-forma, lze jí zapsat pomocí báze tečného prostoru $\mathrm{d}\xi^\mu$:

$$\omega^a_b = \omega^a_{b,\mu} \mathrm{d}\xi^\mu.$$

Konexi můžeme také vyjádřit pomocí Christoffelových symbolů a torze. Pro další užití zavádíme dva druhy konexe D^+ a D^-. 1-formy jenž je určují (viz (1.11)) pak značíme Ω^+, Ω^- v závislosti na tom, zda se torze v následující definici přičítá či odečítá:

$$D^\pm_\mu R^a_\nu = \partial_\mu R^a_\nu - \gamma^\rho_{\mu\nu} R^a_\rho \pm \frac{1}{2} \mathcal{T}^\rho_{\mu\nu} R^a_\rho.$$

Porovnáním těchto dvou vyjádření získáme rovnice pro 1-formy konexe, jež mají následující tvar:

$$D^\pm_\mu R^a_\nu = -\Omega^a{}_{b,\mu} R^b_\nu. \tag{1.12}$$

Pokud je pole R^a ortonormální, a symetrická část konexe je metrická, hovoříme o tzv. spinové konexi.
Pozn.: Název spinová konexe není náhodný, lze definovat konexi na tzv. spinovém bundlu, která splňuje výše uvedené rovnice.

Kapitola 2

Renormalizace v QED

Uvažujme QED s interakcí Diracova a elektromagnetického pole:

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi A_{\mu},$$

kde ψ je bispinor, jenž řeší Diracovu rovnici, a A_μ je řešením rovice rovnice pro EM potenciál. Pokud uvažujeme například proces $e + \mu \;\; \rightarrow \;\; e + \mu$, a označíme impulsy částic p, p', k, k' kde čárkované impulsy jsou impulsy částic po srážce, pak ve druhém řádu dostáváme následující maticový element:

$$i\mathcal{M}^{(2)} = -e^2[\bar{u}(p')\gamma_{\mu}u(p)]\frac{g^{\alpha\beta}}{q^2}[\bar{u}(k')\gamma_{\beta}u(k)],$$

kde $q = k + p$, a g je klasická Minkowského metrika. Pokud provedeme výpočet ve 4. řádu poruchové teorie, dostaneme výraz:

$$\mathcal{M}^{(4)} = -e^2[\bar{u}(p')\gamma_{\alpha}u(p)]\frac{g^{\alpha\beta}}{q^2}[\bar{u}(k')\gamma_{\beta}u(k)](-i\Pi(q^2)),$$

kde jsme označili $\Pi(q^2)$ výraz, jenž je divergentní. Tento výraz se upraví pomocí tzv. dimenzionální regularizace, která spočívá v tom, že se do výrazu přidá dimenzionální člen $\mu^{4-\epsilon}$. Tím se změní dimenze daného výrazu. Po symetrické integraci se provede rozvoj výsledného výrazu do mocnin ϵ. Výsledek má poté v dimenzionální regularizaci tvar

$$\Pi^{DR}(q^2) = \frac{e^2}{2\pi^2}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi\right) - \int_0^1 \mathrm{d}x x(1-x)\frac{\ln m^2 - x(1-x)q^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon)\right],$$

kde $\epsilon \rightarrow 0$, μ je konstanta rozměru hmotnosti, m je hmotnost elektronu a γ_E je Eulerova konstanta. Pokud provedeme limitu $\epsilon \;\rightarrow\;\; 0$ dostaneme $\Pi(q^2)$, ale zároveň vidíme, že tento výraz není konečný, tj. nemůže nám dát žádný fyzikální výsledek. Proto se přišlo s myšlenkou renormalizace, tj. redefinice konstant v teorii. Součet maticových elementů pro 2. a 4. řád lze zapsat ve tvaru:

$$\tilde{\mathcal{M}}^{(2)} + \tilde{\mathcal{M}}^{(4)} = e^2(1 - e^2\tilde{\Pi}(0))\tilde{\mathcal{M}}^2 - e^4(\tilde{\Pi}(q^2) - \tilde{\Pi}(0))\tilde{\mathcal{M}}^{(2)}, \tag{2.1}$$

kde $\mathcal{M}^{(2)} = e^2\tilde{\mathcal{M}}^(2)$, a $\Pi(q^2) = e^2\tilde{\Pi}(q^2)$. Jak vidíme, jako vhodná redefinice se hodí $e_R = e^2(1 - e^2\tilde{\Pi}(0))$, neboť druhý sčítanec je konečný. Původní náboj označujeme jako tzv. holý náboj (bare coupling), a e_R je renormalizovaný náboj. Obdobně lze provést i renormalizaci hmoty, a pole.

Celkem přirozeně se nabízí možnost změnit konstanty v Lagrangiánu, tak aby odpovídaly fyzikálním. To se provede přidáním tzv. counter členů. Volné elektromagnetické pole je popsáno hustotou lagrangiánu

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

Příslušný counter-člen bude mít tvar

$$\mathcal{L} = -\frac{K}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

Zbývá určit konstantu K. Příslušná divergentní smyčka ve Feynmanově grafu je tvaru

$$\Pi^{\mu\nu} = \Pi(q^2)(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu),$$

Neupravovaný element matice rozptylu ve 4. řádu má tvar:

$$\mathcal{M}^{(4)} = -e^2[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)]\frac{-g^{\alpha\mu}}{q^2}(-\Pi^{\mu\nu})\frac{-g^{\nu\beta}}{q^2}[\bar{u}(k')\gamma_\beta u(k)] \tag{2.2}$$

Counter člen musí vyrušit divergentní část maticového elementu, z rovnice (2.1) je patrné, že divergentní část maticového elementu je obsažena v $\Pi(0)$, a aby byla vyrušena counter členem, tak musí zřejmě platit:

$$-K(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) - \Pi(0)(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) = 0,$$

z toho je zřejmé, že $\Pi(0) = -K$. Celkově máme

$$\mathcal{L}^{(EM)} + \mathcal{L}^{(CT)} = -(1+K)(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}).$$

Protože je Lagrangián kvadratickou funkcí potenciálu A^μ, můžeme provést redefinici pole:

$$A_0^\mu = (1+K)^{1/2}A^\mu.$$

Obdobně lze postup zopakovat pro renormalizaci hmotnosti. Nakonec lze tímto postupem získat kompletní renormalizovaný Lagrangián pro interakci elektromagnetického a Diracova pole. V další kapitole se podíváme, jak se provádí renormalizace v případě sigma modelů.

Kapitola 3

Renormalizace sigma modelů

Uvažujme sigma model, jenž je zadán akcí (1.4), tj.:

$$S = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^2 x \; G_{\mu\nu} \partial_+ \phi^\mu \partial_- \phi^\nu . \tag{3.1}$$

Akce je reparametrizačně invariantní, pokud provedeme infinitezimální transformaci

$$\phi' = \phi + v^i(\phi),$$

tak se akce nemění, nezávisí proto na souřadnicích, a můžeme říct i více, v [6] je dokázáno že i Lagrangián tohoto tvaru je reparametrizačně invariantní za předpokladu, že se metrika transformuje vhodným způsobem (viz [6]). Zavedením metriky $\epsilon^{\nu\mu}$, kterou reprezentujeme maticí

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

můžeme akci zapsat ve tvaru:

$$S = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^2 x \left(g_{\mu\nu} \partial^\rho \phi^\mu \partial_\rho \phi^\nu + \epsilon^{\rho\sigma} h_{\mu\nu} \partial_\rho \phi^\mu \partial_\sigma \phi^\nu \right) . \tag{3.2}$$

Pravděpodobnost přechodu systému z jednoho stavu do druhého lze zapsat pomocí dráhového integrálu:

$$\langle x_b | \exp(-iHt) | x_a \rangle = U(x_a, x_b; T) = \int \mathcal{D}x(t) \exp(iS[x(t)]). \tag{3.3}$$

Tento vzorec je dokázán v [7], kde je i celá metoda podrobně rozepsána. Další velice důležitou funkcí je tzv. kvantová korelační funkce, či kvantová partiční funkce. Ta má tvar:

$$Z[S(\phi)] = \int \mathrm{d}[\hat{\phi}] \exp[-\hbar^{-1} S_J], \tag{3.4}$$

kde jsme označili S_J akci ke které byl přidán ještě další člen s vlastnostmi proudu. Užitím dráhového integrálu lze ukázat (viz [7]), že pro vakuovou střední hodnotu časově uspořádaného součinu (tzv. T-součinu) dvou funkcí platí vztah:

$$\langle 0 | T(\phi(x_1)\phi(x_2)) | 0 \rangle = \frac{1}{Z[J=0]} \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) Z[J] \bigg|_{J=0} . \tag{3.5}$$

Užitím Wickova teorému lze nalézt i vakuové střední hodnoty pro T-součin většího počtu funkcí.

V případě kdy je grupa G izomorfní $\mathbb{R}^n$ má upravená akce tvar:

$$S_J = S + \int d^n x J_i(x)\phi^i(x) = S + \phi.J, \tag{3.6}$$

a kvantová partiční suma lze potom zapsat ve tvaru:

$$Z_J = \int [\mathrm{d}\phi] \exp(-\hbar^{-1}(S[\phi] + \phi.J)) = \exp[-\hbar^{-1}W]. \tag{3.7}$$

Definujeme variaci pole ("mean field") následovně:

$$\bar{\phi}^i(x) = \frac{\delta W}{\delta J_i}. \tag{3.8}$$

Dále potřebujeme vyjádřit veličinu J pomocí $\bar{\phi}$, abychom mohli zavést "fluktuaci pole". Za tímto účelem provedeme Legendreovu transformaci W:

$$\Gamma[\bar{\phi}] = W[J(\bar{\phi})] - \bar{\phi}.J(\bar{\phi}), \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\phi}^i} = -J_i. \tag{3.9}$$

Dosazením do předchozího vzorce vidíme, že

$$\exp(-\hbar^{-1}\Gamma[\bar{\phi}]) = \int [\mathrm{d}\phi] \exp\left[-\hbar^{-1}(S[\phi] - (\phi - \bar{\phi}).\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\phi}}\right]. \tag{3.10}$$

Nyní se přirozeně nabízí definovat fluktuaci pole jako

$$\pi(x) = \phi^i - \bar{\phi}^i. \tag{3.11}$$

Vidíme, že výraz (3.10) lze poté zapsat ve tvaru:

$$\exp(-\bar{h}^{-1}\Gamma[\bar{\phi}]) = \int [\mathrm{d}\pi] \exp\left[-\hbar^{-1}(S[\bar{\phi} + \pi] - \pi.\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\phi}}\right]. \tag{3.12}$$

Nyní lze poruchovým rozvojem v mocninách $\hbar$ spočítat Γ. Člen lineárně úměrný π obsahuje všechny vertexy a 1PI grafy, viz [8].
Naznačený postup lze dále zobecnit i pro variety, které nejsou izomorfní R^n. Podrobněji viz [6].
Kvantové pole $\pi^i(x)$ není vektorem. Proto vyjádříme $\pi^i(x)$ pomocí zatím neznámého kovariantního pole ξ, s kterým budeme dále pracovat místo $\pi^i(x)$.

$$\pi^i(x) = \xi^i(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} M^i{}_{j_1 \dots j_n} \xi^{j_1}\xi^{j_2} \dots \xi^{j_n}. \tag{3.13}$$

kde $M^i{}_{j_1 \dots j_n}(\bar{\phi})$ jsou koeficienty rozvoje. Předpokládáme, že tento vztah lze invertovat, tj. nalézt $\xi(\pi, \bar{\phi})$.Můžeme ϕ rozepsat pomocí $\phi(x) = \bar{\phi}(x) + \pi(\xi(x))$. Zbývá pouze vhodně určit ξ. Poruchový rozvoj provedeme vzhledem ke ξ, proto budeme uvažovat taková ξ, jež jsou normálními souřadnicemi. Uvažujeme **geodetiku** $\phi^i(s)$ na G, kde $s \in (0,1)$ mezi $\bar{\phi}$ a $\bar{\phi} + \pi$, tj. nejkratší křivku určenou podmínkami:

$$\phi(0) = \bar{\phi}^i, \ \phi^i(1) = \bar{\phi}^i + \pi^i. \tag{3.14}$$

tečný vektor k této geodetice označíme $\xi(s)$. A definujeme, že v bodě $\bar{\phi}^i$ bude $\xi^i(0) = \xi^i$. Pro malé poruchy π bude geodetika určená jednoznačně.
Dále můžeme akci (1.4) rozvinout podle ξ, a dostaneme výraz

$$S[\bar{\phi} + \pi(\xi)] = \int \mathrm{d}^n x \sqrt{\gamma} L[\bar{\phi}, \xi], \quad L[\bar{\phi}, \xi] = L(\bar{\phi}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} L^{(n)}, \tag{3.15}$$

kde jsme označili

$$L^{(n)} = \frac{d^n}{ds^n} L[(\phi(\xi(s)))]\Big|_{s=0} = D^n L[(\phi(\xi(s)))]\Big|_{s=0}.$$

Derivace D je kovariantní derivace, s ohledem na Christofellovy symboly s torzí, viz 5.kapitola. Najít rozvoj Lagrangiánu může být velice obtížné, trochu podrobněji je postup popsán v [6]. Fridling a Van de Ven ve článku [8], nalezli explicitní výrazy pro 1PI graf ve 4. řádu, a též příslušné counter-členy, a tyto výrazy vyjádřili pomocí dimenzionální regularizace. Neboť jsou příslušné výpočty velice dlouhé, uvedu zde jen výsledky pro dimenzionální regularizaci, se kterými budeme dále pracovat. Konkrétně 1PI grafy, tj. příspěvek smyček

je tvaru

$$\Gamma^{(1)}_{\infty} = -\frac{1}{4\pi\epsilon}(\eta^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu})\mathrm{Ric}_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^b. \tag{3.16}$$

Abychom odstranili divergenci, musíme provést renormalizaci metriky

$$g \to g + \frac{1}{\epsilon}g^{(1)}, \quad h \to h + \frac{1}{\epsilon}h^{(1)}, \tag{3.17}$$

kde jsme označili

$$g^{(1)}_{ij} = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Ric}_{(ij)}, \; h^{(1)}_{ij} = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Ric}_{[ij]}, \tag{3.18}$$

kde hranaté, resp. kulaté závorky značí antisymetrizaci, resp. symetrizaci v příslušných indexech. Příspěvek daného 1PI grafu je konečný, pokud platí

$$\mathrm{Ric}_{(ij)} + \nabla_{(i}V_{j)} = 0, \quad \mathrm{Ric}_{[ij]} + T_{ij}{}^k V_k + \partial_{[i}\lambda_{j]} = 0. \tag{3.19}$$

Příslušný counter-člen je tvaru:

$$\delta G = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \mathrm{d}^2x \; \mathrm{Ric}_{ab}R^a_+R^b_-\mathrm{d}\xi^+\mathrm{d}\xi^-. \tag{3.20}$$

V případě našeho sigma modelu, jenž je tvaru $G = (M + \Pi(g))^{-1}$ je možné provést renormalizaci pokud lze UV divergence absorbovat do redefinice konstantní matice M. Z této podmínky dostáváme rovnice trochu odlišné od (3.19)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_{(\mu\nu)} &= \chi^{st}\frac{\partial}{\partial M^{st}}g_{\mu\nu} + \nabla_{(i}V_{j)}, \\ \mathrm{Ric}_{[\mu\nu]} &+ \chi^{st}\frac{\partial}{\partial M^{st}}h_{\mu\nu} + T_{ij}{}^k V_k + \partial_{[i}\lambda_{j]}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Kapitola 4

Poissonovská závorka, derivace Π

Definujeme akci $\tilde{\mathfrak{g}} \times G \to \tilde{\mathfrak{g}}$, resp. $\mathfrak{g} \times G \to \mathfrak{g}$:

$$Ad_g \tilde{T}^a = g^{-1} \tilde{T}^a g = B^{as}(g) T_s + A^a_s(g^{-1}) \tilde{T}^s, \tag{4.1}$$

$$Ad_g T_a = g^{-1} T_a \ g = A^s_a(g) T_s, \quad \forall g \in G, \tag{4.2}$$

kde T_a resp. $\tilde{T}^a$ jsou vektory báze Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, resp. $\tilde{\mathfrak{g}}$ (duální podalgebry algebry Drinfeldova doublu $\mathfrak{d}$) a G je Lieova podgrupa Drinfeldova doublu D.
Dokážeme nejprve jednoduchý vztah pro matici $B(g)$, využijeme Ad-invariantnosti formy.

$$\begin{aligned} B^{ab}(g) = \langle Ad_g \tilde{T}^a, \tilde{T}^b \rangle = \langle g^{-1} \tilde{T}^a g, \tilde{T}^b \rangle = \langle g(g^{-1} \tilde{T}^a g) g^{-1}, g \tilde{T}^b g^{-1} \rangle = \\ = \langle \tilde{T}^a, Ad_{g^{-1}} \tilde{T}^b \rangle = B^{ba}(g^{-1}). \end{aligned}$$

Pro matici A se dá analogicky dokázat následující vztah:

$$A(g^{-1}) = A^{-1}(g). \tag{4.3}$$

Dále ověříme Appendix 1 z článku [1]. Vyjdeme z identity:

$$g \tilde{T}^a g^{-1} = B^{sa}(g) T_s + A^a_s(g) \tilde{T}^s. \tag{4.4}$$

Vztah diferencujeme, a využijeme toho, že $\mathrm{d}(g^{-1}) = -g^{-1} dg g^{-1}$.

$$\mathrm{d}g \tilde{T}^a g^{-1} - g \tilde{T}^a g^{-1} \mathrm{d}g g^{-1} = \mathrm{d}B^{sa}(g) T_s + dA^a_s(g) \tilde{T}^s. \tag{4.5}$$

Upravíme levou stranu rovnice:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g \tilde{T}^a g^{-1} - g \tilde{T}^a g^{-1} \mathrm{d}g g^{-1} &= [\mathrm{d}g g^{-1}, g \tilde{T}^a g^{-1}] = \\ &= [R^t(g) T_t, B^{sa}(g) T_s + A^a_s(g) \tilde{T}^s] = \\ &= R^t(g) B^{sa}(g) [T_t, T_s] + R^t(g) A^a_s(g) [T_t, \tilde{T}^s]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Rovnici dále upravíme, využijeme vztahu pro komutátor vektorů v Drinfeldově doublu:

$$R^t(g) B^{sa}(g) [T_t, T_s] + A^a_s(g) R^t(g) [T_t, \tilde{T}^s] = \mathrm{d}B^{sa}(g) T_s + \mathrm{d}A^a_s(g) \tilde{T}^s.$$

$$R^t(g) B^{sa}(g) (f_{ts}{}^r T_r) + A^a_s(g) R^t(g) (f_{rt}{}^s \tilde{T}^r + \tilde{f}^{sr}{}_t T_r) = \mathrm{d}B^{sa}(g) T_s + \mathrm{d}A^a_s(g) \tilde{T}^s.$$

Nyní již stačí jen porovnat koeficienty u $\tilde{T}^s$ a T_b a dostaneme vztahy:

$$\mathrm{d}B^{ca}(g) = R^b(g) (B^{sa}(g) f_{bs}{}^c + A^a_s(g) \tilde{f}^{sc}{}_b), \tag{4.7}$$

$$\mathrm{d}A^a_c(g) = R^b(g) A^a_s f_{cb}{}^s. \tag{4.8}$$

To ukazuje vztahy (K.72) z článku [1], které mají tvar:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B^{ab}(g) &= R^s(g)(B^{tb}(g){f_{st}}^a - A^b_t(g)\tilde{f^{at}}_s), \\ \mathrm{d}A^a_b(g) &= -R^s(g)A^a_t {f_{sb}}^t. \end{aligned}$$

Pozn.: Pro vztahy z článku [1] budeme dávat před číslo vzorce písmeno K.
Dále využijeme označení $\partial_\mu = R^a_\mu \tilde{\partial}_a$. Nyní již snadno určíme směrové derivace A a B:

$$\tilde{\partial}_s B^{ab}(g) = B^{tb}(g){f_{st}}^a - A^b_t(g)\tilde{f^{at}}_s, \quad \tilde{\partial}_s A^a_b(g) = A^a_t {f_{sb}}^t. \tag{4.9}$$

Ze článku [1] víme, že $\Pi(g)^{ab} = -B^{as}(g)A^b_s(g^{-1})$ a užitím Leibnizova pravidla nalezneme výraz pro derivaci Π:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_s \Pi^{ab}(g) &= -(\tilde{\partial}_s B^{ar}(g))A^b_r(g^{-1}) + B^{ar}(g)\tilde{\partial}_s {A^b}_r(g^{-1}) = \qquad (4.10)\\ = -{f_{st}}^a B^{tr}(g)A^b_r(g^{-1}) &+ \tilde{f^{at}}_s A^r_t(g)A^b_r(g^{-1}) - {f_{st}}^a A^t_r(g^{-1})B^{ar} = \\ &= \tilde{f^{ab}}_s - {f_{st}}^a \Pi^{bt}(g) + {f_{st}}^b \Pi^{at}(g). \end{aligned}$$

Tím byl dokázán vztah (K.75). (Značení indexů se zde shoduje s článkem). V dalším ověříme vztahy (K.11) - (K.14). Zvolíme cestu opačnou než v článku, tj. nejprve dokážeme vztahy (K.13) a (K.14) a poté ty dva nad nimi. Důkaz bude algebraický, na základně postupu naznačeného v [9].
S ohledem na vzorec (4.3) budeme dále značit $A \equiv A(g)$.Využijeme následující identitu:

$$\langle gXg^{-1}|[Y, gZg^{-1}]\rangle = \langle Y|g[Z,X]g^{-1}\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{d} \tag{4.11}$$

Odvodí se následovně:

$$\langle Ad_g X|[Y, Ad_g Z]\rangle = -\langle [Ad_g X, Ad_g Z], Y\rangle = \langle Y, Ad_g[Z,X]\rangle. \tag{4.12}$$

Do předchozího vztahu dosadíme $X = T_b,\ Y = \tilde{T}^a,\ Z = T_c$:

$$\langle g^{-1}T_b g|[\tilde{T}^a, g^{-1}T_c g]\rangle = \langle \tilde{T}^a|g^{-1}[T_c, T_b]g\rangle\rangle. \tag{4.13}$$

Nejprve upravíme levou stranu vztahu (4.13):

$$\langle g^{-1}T_b g|[\tilde{T}^a, g^{-1}T_c g]\rangle = \langle A^e_b T_e, [\tilde{T}^a, A^d_c T_d]\rangle = A^c_b A^d_c \langle T_e, [\tilde{T}^a, T_d]\rangle = \tag{4.14}$$

$$= A^e_b A^d_c \langle T_e, {f_{ds}}^a \tilde{T}^s - \tilde{f^{at}}_d T_t\rangle = A^e_b A^d_c {f_{de}}^a. \tag{4.15}$$

Nyní upravíme pravou stranu:

$$\langle \tilde{T}^a|g^{-1}[T_c, T_b]g\rangle = {f_{cb}}^d \langle \tilde{T}^a|g^{-1}T_d g\rangle = {f_{cb}}^d A^a_d. \tag{4.16}$$

Celkově tedy máme identitu:

$$A^d_b A^e_c {f_{de}}^a = {f_{bc}}^d A^a_d. \tag{4.17}$$

Dále do identity (4.11) dosadíme $X = T_b, Y = \tilde{T}^a, Z = \tilde{T}^c$:

$$\langle gT_b g^{-1}|[\tilde{T}^a, g\tilde{T}^c g^{-1}]\rangle = \langle \tilde{T}^a|g[\tilde{T}^c, T_b]g^{-1}]\rangle. \tag{4.18}$$

Upravíme levou stranu:

$$\begin{aligned} \langle gT_b g^{-1}|[\tilde{T}^a, g\tilde{T}^c g^{-1}]\rangle &= \langle (A^{-1})^g_b T_g|[\tilde{T}^a, B^{lc}T_l + A^c_d \tilde{T}^d]\rangle = \\ &= \langle (A^{-1})^g_b T_g|B^{lc}[\tilde{T}^a, T_l] + A^c_d[\tilde{T}^a, \tilde{T}^d]\rangle = \\ &= (A^{-1})^g_b \langle T_g|B^{lc}(\tilde{f^{sa}}_l T_s + {f_{lt}}^a \tilde{T}^t) + A^c_d \tilde{f^{ad}}_s \tilde{T}^s\rangle = \\ &= (A^{-1})^g_b B^{lc}{f_{lt}}^a \langle T_g, \tilde{T}^t\rangle + (A^{-1})^g_b A^c_d \tilde{f^{ad}}_s \langle T_g, \tilde{T}^s\rangle = \\ &= (A^{-1})^s_b B^{lc}{f_{ls}}^a + (A^{-1})^s_b A^c_d \tilde{f^{ad}}_s. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Upravíme pravou stranu:

$$
\begin{aligned}
\langle \tilde{T}^a | g[\tilde{T}^c, T_b] g^{-1} \rangle &= \langle \tilde{T}^a | g(\tilde{f^{tc}}_b T_t - f_{tb}{}^c \tilde{T}^t) g^{-1} \rangle = \\
&= \langle \tilde{T}^a | \tilde{f^{tc}}_b (A^{-1})^s_t T_s - f_{tb}{}^c (B^{ts}(g^{-1}) T_s + A^t_s \tilde{T}^s) \rangle = \\
&= \tilde{f^{tc}}_b (A^{-1})^a_t - f_{tb}{}^c B^{at}.
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Poslední identitou, ze které vyjdeme bude:

$$
\langle g^{-1} \tilde{T}^b g | [\tilde{T}^a, g^{-1} \tilde{T}^c g] \rangle = \langle \tilde{T}^a | g[\tilde{T}^c, T_b] g^{-1} \rangle, \tag{4.21}
$$

kde jsme dosadili do (4.11) $X = \tilde{T}^b,\ Y = \tilde{T}^a,\ Z = \tilde{T}^c$. Nyní upravíme levou stranu:

$$
\begin{aligned}
\langle g^{-1} \tilde{T}^b g | [\tilde{T}^a, g^{-1} \tilde{T}^c g] \rangle &= \langle B^{bs}(g) T_s + A^b_s(g^{-1}) \tilde{T}^s | [\tilde{T}^a, g^{-1} \tilde{T}^c g] \rangle = \\
&= \langle B^{bs}(g) T_s + (A^{-1})^b_s \tilde{T}^s | [\tilde{T}^a, B^{ct}(g) T_t + (A^{-1})^c_t \tilde{T}^t] \rangle = \\
&= \langle B^{bs}(g) T_s + (A^{-1})^b_s \tilde{T}^s | B^{ct}(g)([\tilde{T}^a, T_t]) + (A^{-1})^c_t [\tilde{T}^a, \tilde{T}^t] \rangle = \\
&= \langle B^{bs}(g) T_s + (A^{-1})^b_s \tilde{T}^s | B^{ct}(g) \\
&\qquad \times (\tilde{f^{ua}}_t T_u - f_{ut}{}^a \tilde{T}^u) + (A^{-1})^c_t \tilde{f^{at}}_u \tilde{T}^u \rangle = \\
&= -B^{bs}(g) B^{ct}(g) f_{st}{}^a - B^{bs}(g)(A^{-1})^c_t \tilde{f^{at}}_s + (A^{-1})^b_s B^{ct}(g) \tilde{f^{sa}}_t.
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

A pravou stranu:

$$
\langle \tilde{T}^a | g^{-1} [\tilde{T}^c, \tilde{T}^b] g \rangle = \langle \tilde{T}^a | g^{-1} \tilde{f^{cb}}_t \tilde{T}^t g \rangle = \langle \tilde{T}^a | \tilde{f^{cb}}_t B^{ts} T_s \rangle = \tilde{f^{cb}}_t B^{ta}. \tag{4.23}
$$

Z těchto identit odvodíme pomocné vzorce. Upravíme druhou identitu spočtenou ve vzorcích (4.19) a (4.20):

$$
(A^{-1})^t_b B^{lc} f_{lt}{}^a + (A^{-1})^s_b A^c_d \tilde{f^{ad}}_s = \tilde{f^{tc}}_b (A^{-1})^a_t - f_{tb}{}^c B^{at}(g).
$$

Nejprve násobíme členem A^d_a. Zbavíme se tím nepohodlného členu u $\tilde{f^{tc}}_b$:

$$
\begin{gathered}
A^d_a (A^t_b)^{-1} B^{lc} f_{lt}{}^a + A^d_a (A^{-1})^s_b A^c_d \tilde{f^{ad}}_s = \tilde{f^{tc}}_b (A^{-1})^a_t A^d_a - f_{tb}{}^c B^{at}(g) A^d_a, \\
A^d_a (A^{-1})^t_b B^{lc} f_{lt}{}^a + A^d_a (A^{-1})^s_b A^c_d \tilde{f^{ad}}_s = \tilde{f^{dc}}_b + f_{tb}{}^c \Pi^{td}(g^{-1}).
\end{gathered}
$$

Využijeme identitu (4.17) ve tvaru $f_{lt}{}^a A^d_a = A^s_l A^r_t f_{rs}{}^d$ a dostaneme výsledek:

$$
\Pi^{ct}(g^{-1}) f_{bt}{}^d + A^d_a (A^{-1})^s_b A^c_d \tilde{f^{ad}}_s = \tilde{f^{dc}}_b + f_{tb}{}^c \Pi^{td}(g^{-1}).
$$

Po přeznačení a formálním nahrazení $g^{-1} \to g$ získáme identitu:

$$
f_{cd}{}^{[a} \Pi^{b]d} + \tilde{f^{ab}}_c = \tilde{f^{de}}_f A^f_c (A^{-1})^a_d (A^{-1})^b_e. \tag{4.24}
$$

Dále využijeme poslední identitu spočtenou ve vzorcích (4.22), (4.23) která má tvar:

$$
-B^{bs}(g) B^{ct}(g) f_{st}{}^a - B^{bs}(g)(A^{-1})^c_t \tilde{f^{at}}_s + (A^{-1})^b_s B^{ct}(g) \tilde{f^{sa}}_t = \tilde{f^{cb}}_t B^{ta}.
$$

Tu násobíme výrazem $A^d_b A^e_c$:

$$
\begin{aligned}
-B^{bs}(g) B^{ct}(g) f_{st}{}^a A^d_b A^e_c - B^{bs}(g) A^c_t(g^{-1}) \tilde{f^{at}}_s A^d_b A^e_c + \\
+ (A^{-1})^b_s B^{ct}(g) \tilde{f^{sa}}_t A^d_b A^e_c = \tilde{f^{cb}}_t B^{ta} A^d_b A^e_c.
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

$$
\begin{aligned}
-\Pi(g^{-1})^{sd} \Pi(g^{-1})^{te} f_{st}{}^a + \Pi(g^{-1})^{sd} \tilde{f^{ae}}_s - \Pi(g^{-1})^{se} \tilde{f^{da}}_s = \\
= \tilde{f^{cb}}_t B^{ta} A^d_b A^e_c
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

Provedeme formální záměnu $g \to g^{-1}$ a použijeme zkrácený zápis pro antisymetrický člen:

$$f_{de}{}^{a}\Pi^{db}\Pi^{ec} - \tilde{f}^{a[b}{}_{d}\Pi^{c]d} = \tilde{f}^{de}{}_{f}B^{fa}(A^{-1})^{b}_{d}(A^{-1})^{c}_{e}. \tag{4.27}$$

Nakonec vyjdeme z identity (4.24) , kterou vynásobíme Π^{kc}:

$$f_{cd}{}^{a}\Pi^{bd}\Pi^{kc} - f_{cd}{}^{b}\Pi^{ad}\Pi^{kc} + \tilde{f}^{ab}{}_{c}\Pi^{kc} = \tilde{f}^{de}{}_{f}A^{f}_{c}(A^{-1})^{a}_{d}(A^{-1})^{b}_{e}\Pi^{kc}, \tag{4.28}$$

Následně jí antisymetrizujeme v b, k a vidíme že lze použít identitu spočtenou ve vzorcích (4.22), (4.23):

$$\begin{aligned} f_{cd}{}^{a}\Pi^{bd}\Pi^{kc} - f_{cd}{}^{b}\Pi^{ad}\Pi^{kc} + \tilde{f}^{ab}{}_{c}\Pi^{kc} &= \tilde{f}^{de}{}_{f}(A^{-1})^{a}_{d}(A^{-1})^{b}_{e}B^{kf} \qquad (4.29)\\ -f_{cd}{}^{a}\Pi^{d[b}\Pi^{k]c} - f_{cd}{}^{[b}\Pi^{k]c}\Pi^{ad} + \tilde{f}^{a[b}{}_{c}\Pi^{k]c} &= \tilde{f}^{de}{}_{f}(A^{-1})^{a}_{d}(A^{-1})^{[b}_{e}B^{k]f}\\ -f_{cd}{}^{a}\Pi^{d[b}\Pi^{k]c} - f_{cd}{}^{[b}\Pi^{k]c}\Pi^{ad} + \tilde{f}^{a[b}{}_{c}\Pi^{k]c} &=\\ = f_{de}{}^{k}\Pi^{da}\Pi^{eb} - \tilde{f}^{k[a}{}_{d}\Pi^{b]d} &- f_{de}{}^{b}\Pi^{da}\Pi^{ek} + \tilde{f}^{b[a}{}_{d}\Pi^{k]d} \end{aligned} \tag{4.30}$$

Výraz závisí pouze na $\Pi(g)$ a strukturních koeficientech a stačí už jen elementární úpravy abychom dostali hledaný výsledek. Nejprve upravíme výrazy obsahující pouze f:

$$\begin{aligned} -f_{ed}{}^{a}\Pi^{db}\Pi^{ke} + f_{ed}{}^{a}\Pi^{dk}\Pi^{be} - f_{ed}{}^{b}\Pi^{ke}\Pi^{ad} + f_{ed}{}^{k}\Pi^{be}\Pi^{ad} -\\ -f_{de}{}^{k}\Pi^{da}\Pi^{eb} + f_{de}{}^{b}\Pi^{da}\Pi^{ek} =\\ = -2f_{ed}{}^{a}\Pi^{db}\Pi^{ke} - 2f_{ed}{}^{k}\Pi^{da}\Pi^{be} - 2f_{ed}{}^{b}\Pi^{dk}\Pi^{ae} \end{aligned}$$

Dále upravíme členy s $\tilde{f}$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{a[b}{}_{c}\Pi^{k]c} + \tilde{f}^{k[a}{}_{d}\Pi^{b]d} - \tilde{f}^{b[a}{}_{d}\Pi^{k]d} &= \tilde{f}^{a[b}{}_{c}\Pi^{k]c} + \tilde{f}^{k[a}{}_{d}\Pi^{b]d} + \tilde{f}^{b[k}{}_{d}\Pi^{a]d} =\\ &= 2\tilde{f}^{ab}{}_{e}\Pi^{ke} + 2\tilde{f}^{ka}{}_{e}\Pi^{be} + 2\tilde{f}^{bk}{}_{e}\Pi^{ae} \end{aligned} \tag{4.31}$$

Pokud to shrneme, máme identitu:

$$f_{ed}{}^{a}\Pi^{bd}\Pi^{ke} + f_{ed}{}^{k}\Pi^{ad}\Pi^{be} + f_{ed}{}^{b}\Pi^{kd}\Pi^{ae} + \tilde{f}^{ab}{}_{e}\Pi^{ke} + \tilde{f}^{ka}{}_{e}\Pi^{be} + \tilde{f}^{bk}{}_{e}\Pi^{ae} = 0 \tag{4.32}$$

Což odpovídá vztahu (K.13). Snadným výpočtem a za užití již dříve ověřeného vztahu (4.9) se dá ověřit, že vztahy (K.11) a (K.13) jsou ekvivalentní, vztah (K.11) má tvar:

$$\begin{aligned} \Pi^{sa}(g)\nabla_{s}\Pi^{bc}(g) + f_{st}{}^{a}\Pi^{bs}(g)\Pi^{ct}(g) + \Pi^{sc}(g)\nabla_{s}\Pi^{ab}(g) +\\ f_{st}{}^{c}\Pi^{as}(g)\Pi^{bt}(g) + \Pi^{sb}(g)\nabla_{s}\Pi^{ca}(g) + f_{st}{}^{b}\Pi^{cs}(g)\Pi^{at}(g) = 0. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Mimochodem, pokud se podobný postup zopakuje pro duální algebru Drinfeldova doublu, zjistíme, že v identitách (K.10), (K.12), (K.14) jsou drobné překlepy v indexech, konkrétně v identitě (K.10) má být poslední člen $\tilde{f}^{cs}{}_{b}\tilde{\Pi}_{as}(\tilde{g})$, a v identitách (K.12), (K.14) mají být indexy u $\tilde{\Pi}$ dole.

Kapitola 5

Spinová konexe a její úprava

5.1 Spinová konexe

Dále ověříme vztahy pro koeficienty spinové konexe na Drinfeldově doublu. Nejprve spočítáme $D^{\pm}_{\mu} R^a_{\nu}$:

$$D^{\pm}_{\mu} R^a_{\nu} = \nabla_{\mu} R^a_{\nu} \pm \frac{1}{2}\mathcal{T}^{\sigma}_{\mu\nu} R^a_{\sigma} = \partial_{\mu} R^a_{\nu} - \gamma^{\sigma}_{\mu\nu} R^a_{\sigma} \pm \frac{1}{2}\mathcal{T}^{\sigma}_{\mu\nu} R^a_{\sigma}. \tag{5.1}$$

Nejprve si připomeneme Maurer-Cartanův vztah:

$$dR^a = \frac{1}{2} f_{bc}{}^{a} R^b \wedge R^c. \tag{5.2}$$

Označíme-li souřadnice na Lieově grupě ξ^{μ}, potom bazické pravoinvariantní formy můžeme zapsat ve tvaru:

$$R^a = R^a_{\mu} d\xi^{\mu},$$

a z Maurer-Cartanova vztahu (5.2) dostaneme, že platí:

$$\partial_{\mu} R^a_{\nu} - \partial_{\nu} R^a_{\mu} = R^b_{\mu} R^c_{\nu} f_{bc}{}^{a}. \tag{5.3}$$

Dále upravíme člen s Christoffelovými symboly, a vidíme, že většinu členů lze uzávorkovat tak, že je možné užít vztahu (5.3):

$$\begin{aligned}
\gamma^{\sigma}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) = \\
&= \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_\mu(R^b_\nu R^c_\alpha g_{bc}) + \partial_\nu(R^b_\mu R^c_\alpha g_{bc}) - \partial_\alpha(R^b_\mu R^c_\nu g_{bc}) = \\
&= \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_\mu(R^b_\nu)R^c_\alpha g_{bc} + R^b_\nu \partial_\mu(R^c_\alpha)g_{bc} + R^b_\nu R^c_\alpha \partial_\mu(g_{bc}) + \\
&\qquad + \partial_\nu(R^b_\mu)R^c_\alpha g_{bc} + R^b_\mu \partial_\nu(R^c_\alpha)g_{bc} + R^b_\mu R^c_\alpha \partial_\nu(g_{bc}) - \\
&\qquad - \partial_\alpha(R^b_\mu)R^c_\nu g_{bc} - R^b_\mu \partial_\alpha(R^c_\nu)g_{bc} - R^b_\mu R^c_\nu \partial_\alpha(g_{bc}) = \\
&= \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_\mu(R^b_\nu)R^c_\alpha g_{bc} + \partial_\nu(R^b_\mu)R^c_\alpha g_{bc} + R^b_\nu R^c_\alpha R^d_\mu \tilde{\partial}_d(g_{bc}) + \\
&\qquad + R^b_\nu \partial_\mu(R^c_\alpha)g_{bc} - \partial_\alpha(R^b_\mu)R^c_\nu g_{bc} + R^b_\mu R^c_\alpha R^d_\nu \tilde{\partial}_d(g_{bc}) + \\
&\qquad + R^b_\mu \partial_\nu(R^c_\alpha)g_{bc} - R^b_\mu \partial_\alpha(R^c_\nu)g_{bc} - R^b_\mu R^c_\nu R^d_\alpha \tilde{\partial}_d(g_{bc})) = \\
&= \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_\mu(R^b_\nu)R^c_\alpha g_{bc} + \partial_\nu(R^b_\mu)R^c_\alpha g_{bc} + R^b_\nu R^c_\alpha R^d_\mu \tilde{\partial}_d(g_{bc}) + \\
&\qquad + R^b_\nu R^d_\alpha R^e_\mu f_{ed}{}^c g_{bc} + R^b_\mu R^c_\alpha R^d_\nu \tilde{\partial}_d(g_{bc}) + \\
&\qquad + R^b_\mu R^d_\alpha R^e_\nu f_{ed}{}^c g_{bc} - R^b_\mu R^c_\nu R^d_\alpha \tilde{\partial}_d(g_{bc})),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

kde jsme využili souřadnicového zápisu metriky: $g_{\mu\nu} = g_{ab}R^a_\mu R^b_\nu$.
Výraz obsahující Christoffelovy symboly již upravovat nebudeme, využijeme vztah (5.1) a ověříme, že se členy s parciální derivací sečtou a výsledkem bude vztah se strukturními konstantami. Nejprve upravíme člen s parciální derivací v (5.1), vložíme Kroneckerovo delta:

$$\partial_\mu R^a_\nu = \delta^a_b \partial_\mu R^b_\nu = g^{ac}g_{cb}\partial_\mu R^b_\nu = R^a_\sigma R^c_\alpha g^{\alpha\sigma}\partial_\mu R^b_\nu g_{bc}. \tag{5.5}$$

Pokud výraz (5.4) vynásobíme R^a_σ a odečteme od (5.5), dostaneme výsledek:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu R^a_\nu - \gamma^\sigma_{\mu\nu}R^a_\sigma &= -\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(R^d_\mu R^e_\nu f_{ed}{}^b R^c_\alpha g_{bc} + R^b_\nu R^c_\alpha R^d_\mu \tilde{\partial}_d(g_{bc}) + \\
&\qquad + R^b_\nu R^d_\alpha R^e_\mu f_{ed}{}^c g_{bc} + R^b_\mu R^c_\alpha R^d_\nu \tilde{\partial}_d(g_{bc}) + \\
&\qquad + R^b_\mu R^d_\alpha R^e_\nu f_{ed}{}^c g_{bc} - R^b_\mu R^c_\nu R^d_\alpha \tilde{\partial}_d(g_{bc})) = \\
= -\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}R^d_\mu R^c_\nu R^e_\alpha (f_{cd}{}^b g_{be} &+ \tilde{\partial}_d g_{ce} + f_{de}{}^b g_{cb} + \tilde{\partial}_c g_{de} + f^b_{ce} g_{db} - \tilde{\partial}_e g_{dc})
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Připomeneme, že:

$$H = \frac{1}{2}h_{ab}R^a \wedge R^b.$$

Dále upravíme vztah pro torzi.Torzní 3-formu získáme jako vnější derivaci torzního potenciálu H:

$$\mathcal{T} = dH = \frac{1}{3!}\mathcal{T}_{abc}R^a \wedge R^b \wedge R^c. \tag{5.7}$$

Nebo též v souřadnicích ξ^μ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} = dH &= \frac{1}{2}(dh_{\mu\nu}) \wedge d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu = \frac{1}{2}h_{\mu\nu,\rho}\, d\xi^\rho \wedge d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu = \\
&= \frac{1}{3!}\,\frac{1}{2}h_{[\mu\nu,\rho]}\, d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu \wedge d\xi^\rho = \frac{1}{3!}\mathcal{T}_{\rho\mu\nu}\, d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu \wedge d\xi^\rho.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Nyní se vyjádříme $\mathcal{T}_{\rho\mu\nu}$ jako funkci R^λ_γ a $\tilde{\partial}_c h_{ab}$. (Toto označení zavedeno před vztahem (4.10)).

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(h_{[\mu\nu,\alpha]}) &= \frac{1}{2}(h_{\mu\nu,\alpha} + h_{\alpha\mu,\nu} + h_{\nu\alpha,\mu} - h_{\nu\mu,\alpha} - h_{\alpha\nu,\mu} - h_{\mu\alpha,\nu}) = \\
&= (h_{\mu\nu,\alpha} + h_{\alpha\mu,\nu} + h_{\nu\alpha,\mu}) = \\
&= (\partial_\alpha(R^d_\mu R^c_\nu h_{dc}) + \partial_\nu(R^e_\alpha R^d_\mu h_{ed}) + \partial_\mu(R^c_\nu R^e_\alpha h_{ce})) = \\
&= ((\partial_\alpha R^d_\mu)R^c_\nu h_{dc} + R^d_\mu(\partial_\alpha R^c_\nu)h_{dc} + R^d_\mu R^c_\nu \partial_\alpha h_{dc} + \\
&\quad +(\partial_\nu R^e_\alpha)R^d_\mu h_{ed} + R^e_\alpha(\partial_\nu R^d_\mu)h_{ed} + R^e_\alpha R^d_\mu \partial_\nu h_{ed} + \\
&\quad +(\partial_\mu R^c_\nu)R^e_\alpha h_{ce} + R^c_\nu(\partial_\mu R^e_\alpha)h_{ce} + R^c_\nu R^e_\alpha \partial_\mu h_{ce}) = \\
&= R^c_\nu(\partial_\alpha R^d_\mu - \partial_\mu R^d_\alpha)h_{dc} + R^d_\mu(\partial_\alpha R^c_\nu - \partial_\nu R^c_\alpha)h_{dc} + \\
&+R^e_\alpha(\partial_\nu R^d_\mu - \partial_\mu R^d_\nu)h_{ed} + R^d_\mu R^c_\nu R^e_\alpha(\tilde{\partial}_e h_{dc} + \tilde{\partial}_c h_{ed} + \tilde{\partial}_d h_{ce}) = \\
&= R^d_\mu R^e_\alpha R^c_\nu(f_{de}{}^s h_{sc} + f_{ce}{}^s h_{ds} + f_{dc}{}^s h_{es} + \tilde{\partial}_e h_{dc} + \tilde{\partial}_c h_{ed} + \tilde{\partial}_d h_{ce}).
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Zbývá vše sečíst a poté můžeme výsledek porovnat s druhou stranou definiční rovnice spinové konexe.

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu R^a_\nu - \gamma^\sigma_{\mu\nu} R^a_\sigma - g^{\alpha\sigma}\frac{1}{2}\mathcal{T}_{\alpha\mu\nu}R^a_\sigma = \\
&= -\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(f_{cd}{}^s g_{se} + \tilde{\partial}_d g_{ce} + f_{de}{}^s g_{cs} + \tilde{\partial}_c g_{de} + f_{ce}{}^s g_{ds} - \tilde{\partial}_e g_{dc} + \\
&\quad +f_{de}{}^s h_{sc} + f_{ce}{}^s h_{ds} + f_{dc}{}^s h_{es} + \tilde{\partial}_e h_{cd} + \tilde{\partial}_c h_{de} + \tilde{\partial}_d h_{ec})R^c_\nu R^d_\mu R^e_\alpha R^a_\sigma = \\
&= -\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(f_{cd}{}^s G_{es} + \tilde{\partial}_d G_{ec} + f_{de}{}^s G_{cs} + \tilde{\partial}_c G_{ed} + f_{ec}{}^s G_{sd} - \tilde{\partial}_e G_{cd})R^c_\nu R^d_\mu R^e_\alpha R^a_\sigma).
\end{aligned}
$$

Levá strana vypadá následovně:

$$
L := -\Omega^{-a}{}_{c,d} R^c_\nu R^d_\mu = -g^{ae}\Omega^-_{ec,d} R^c_\nu R^d_\mu = -g^{\alpha\sigma} R^a_\sigma R^e_\alpha R^c_\nu R^d_\mu \Omega^-_{ec,d}, \tag{5.10}
$$

kde jsme označili $\Omega^{-a}_{b,\nu} = R^c_\nu \Omega^{-a}_{b,c}$. Porovnáním koeficientů dostáváme vztah:

$$
\Omega^-{}_{ec,d} = \frac{1}{2}(f_{cd}{}^s G_{es} + \tilde{\partial}_d G_{ce} + f_{de}{}^s G_{cs} + \tilde{\partial}_c G_{ed} + f_{ce}{}^s G_{sd} - \tilde{\partial}_e G_{cd}). \tag{5.11}
$$

Vidíme, že výsledek souhlasí se vztahem (K.24), který má tvar:

$$
\Omega^-_{ab,c} = \frac{1}{2}(\tilde{\partial}_b G_{ac} + \tilde{\partial}_c G_{ba} - \tilde{\partial}_a G_{bc}) + \frac{1}{2}(-f^s_{ab} G_{sc} + f^s_{ca} G_{bs} - f^s_{cb} G_{as}). \tag{5.12}
$$

Dále ověříme vztahy (K.25):

$$
\begin{aligned}
&(\Omega^{+a}{}_{b,c} R^c_\lambda R^b_\nu - R^c_\lambda R^b_\nu \Omega^{-a}{}_{c,b}) = \Omega^{+a}{}_{b,\lambda} R^b_\nu - R^c_\lambda \Omega^{-a}{}_{c,\nu} = D^+_\lambda R^a_\nu - D^-_\nu R^a_\lambda = \\
&= \partial_\lambda R^a_\nu - \gamma^\sigma_{\lambda\nu} R^a_\sigma + \frac{1}{2}\mathcal{T}^\sigma_{\lambda\nu} R^a_\sigma - \partial_\nu R^a_\lambda + \gamma^\sigma_{\nu\lambda} R^a_\sigma + \frac{1}{2}\mathcal{T}^\sigma_{\nu\lambda} R^a_\sigma = \partial_\lambda R^a_\nu - \partial_\nu R^a_\lambda = \\
&= R^b_\nu R^c_\lambda f^a_{bc} \qquad .
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

Uvažujme tenzor křivosti:

$$
R^a{}_b = d\Omega^{-a}{}_b + \Omega^{-a}{}_c \wedge \Omega^{-c}{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{b,cd} R^c \wedge R^d, \tag{5.14}
$$

kde $R^a{}_{b,cd}$ jsou jednotlivé složky Riemannova tenzoru. Rozepsáním ve složkách máme:

$$
\begin{aligned}
&d(\Omega^a{}_{b,c} R^c) = d(\Omega^{-a}{}_{b,c}) R^c + (\Omega^{-a}{}_{b,c}) dR^c = \\
&\quad = \frac{1}{2}(\tilde{\partial}_c \Omega^{-a}{}_{b,d} R^c \wedge R^d - \tilde{\partial}_d \Omega^{-a}{}_{b,c} R^c \wedge R^d) + (\Omega^{-a}{}_{b,t})(f_{cd}{}^t R^c \wedge R^d).
\end{aligned}
$$

Z toho již snadno vidíme výsledný vztah pro tenzor křivosti:

$$R^a{}_{b,cd} = \tilde{\partial}_c \Omega^{-a}{}_{b,d} - \tilde{\partial}_d \Omega^{-a}{}_{b,c} + \Omega^{-a}{}_{b,t} f_{cd}{}^t + \Omega^{-a}{}_{s,c} \Omega^{-s}{}_{b,d} - \Omega^{-a}{}_{s,d} \Omega^{-s}{}_{b,c}.$$

To je přímo vztah (K.27) z článku. Ricciho tenzor křivosti získáme vysčítáním přes indexy a,c; skalární křivost vysčítáním přes zbylé volné indexy.

$$Ric_{ab} = R^s_{a,sb}, R = g^{ab} Ric_{ab}. \tag{5.15}$$

Konkrétně máme:

$$R^s{}_{a,sb} = \tilde{\partial}_s \Omega^{-s}{}_{a,b} - \tilde{\partial}_b \Omega^{-s}{}_{a,s} + \Omega^{-s}{}_{a,t} f^t_{sb} + \Omega^{-s}{}_{t,s} \Omega^{-t}{}_{a,b} - \Omega^{-s}{}_{t,b} \Omega^{-t}{}_{a,s}. \tag{5.16}$$

Tím je ukázáno, že vzorce v části 3.1 článku [1] jsou v pořádku.

5.2 Úpravy spinové konexe

Upravíme vzorec pro spinovou konexi:

$$2\Omega^-{}_{ab,c} = (\tilde{\partial}_b G_{ac} + f_{bc}{}^s G_{as}) + (\tilde{\partial}_c G_{ba} + f_{ca}{}^s G_{bs}) - (\tilde{\partial}_a G_{bc} + f_{ab}{}^t G_{tc}). \tag{5.17}$$

Využijeme vztahů $G_{ab} = (M + \Pi(g))^{-1}_{ab}$, $G_{ab}\Gamma^{bc} = \delta^c_a$:

$$0 = \tilde{\partial}_s(G_{ab}\Gamma^{bc}) = \tilde{\partial}_s(G_{ab})\Gamma^{bc} + G_{ab}\tilde{\partial}_s(\Gamma^{bc}) = \tilde{\partial}_s(G_{ab})\Gamma^{bc} + G_{ab}\tilde{\partial}_s(\Pi(g)^{bc}), \tag{5.18}$$

neboť $\Gamma^{ab} = \Pi^{ab}(g) + M^{ab}$, a M je matice, jejíž prvky jsou konstanty. Celkově tedy máme:

$$\tilde{\partial}_s(G_{ab})\Gamma^{bc} = -G_{ab}\tilde{\partial}_s(\Pi^{bc}(g)) \;\Leftrightarrow\; \tilde{\partial}_s(G_{ab}) = -G_{ab}\tilde{\partial}_s(\Pi^{bc}(g))G_{cd} \tag{5.19}$$

Užitím již odvozeného vzorce (4.10) dostaneme následující vztah:

$$\tilde{\partial}_s(G_{ab}) = -G_{ad}(\tilde{f^{dc}}_s - f_{st}{}^d\Pi^{ct}(g) + f_{st}{}^c\Pi^{dt}(g))G_{cb} \tag{5.20}$$

$$\tilde{\partial}_s(G_{ab}) + G_{ad}f_{st}{}^d = -G_{ad}(\tilde{f^{dc}}_s - f_{st}{}^d M^{ct} + f_{st}{}^c\Pi^{dt}(g))G_{cb} \tag{5.21}$$

To už je vzorec, který je v [1], vzorec (K.36). Vztah (K.39) se odvodí podobně. Po označení

$$X^{dc}_s = \tilde{F}^{dc}_s + f_{st}{}^c\Pi^{dt}(g), \quad \tilde{F}^{dc}_s = \tilde{f^{dc}}_s - f_{st}{}^d M^{tc} \tag{5.22}$$

$$Y^{dc}_s = (\hat{F}^{dc}_s + f_{st}{}^c\Pi^{td}(g), \quad \hat{F}^{dc}_s = \tilde{f^{dc}}_s + f_{ts}{}^d M^{ct} \tag{5.23}$$

tedy dostáváme, že

$$2\Omega^-{}_{ab,c} = -G_{as}X^{st}_b G_{tc} - G_{bs}X^{st}_c G_{ta} + G_{bs}Y^{st}_a G_{tc}. \tag{5.24}$$

Dále ukážeme, že platí identity

$$g^{ak}G_{ks} = 2\delta^a_s - (\Gamma M_S^{-1})^a{}_s, \quad G_{tk}g^{ka} = (\Gamma M_S^{-1})^a{}_t. \tag{5.25}$$

Celkem snadno vidíme, že

$$g = \frac{1}{2}(G + G^t) = \frac{1}{2}G^t(G^{-t} + G^{-1})G = \frac{1}{2}G^t(M + M^t)G. \tag{5.26}$$

Tento vztah invertujeme, a výsledkem je rovnost:

$$g^{-1} = \Gamma M_S^{-1}\Gamma^t, \qquad M_S = \frac{1}{2}(M + M^t). \tag{5.27}$$

Nyní již máme vše připravené:

$$\begin{aligned} g^{ak}G_{ks} &= g^{ak}g_{ks} + g^{ak}h_{ks} = \delta^a_s + \frac{1}{2}g^{ak}G_{ks} - \frac{1}{2}(\Gamma M_S^{-1}\Gamma^t)^{ak}(G^t)_{ks} = \\ &= \delta^a_s + \frac{1}{2}g^{ak}G_{ks} - \frac{1}{2}(\Gamma M_S^{-1})^a{}_s \Leftrightarrow g^{ak}G_{ks} = 2\delta^a_s - (\Gamma M_S^{-1})^a{}_s. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Druhá identita v (5.25) se dokáže snadno:

$$G_{tk}g^{ka} = (\Gamma M_S^{-1}\Gamma^t)^{ak}(G^t)_{kt} = (\Gamma M_S^{-1})^a{}_t. \tag{5.29}$$

Vztah (5.24) vynásobíme inverzí metriky g^{ak}:

$$2\Omega^{-a}{}_{b,c} = -g^{ak}G_{ks}X^{st}_b G_{tc} - g^{ak}G_{bs}X^{st}_c G_{tk} + g^{ak}G_{bs}Y^{st}_k G_{tc}, \tag{5.30}$$

a využijeme odvozených vztahů (5.25), abychom výsledek zapsali ve tvaru:

$$\begin{aligned}
2\Omega^{-a}{}_{b,c} = & -g^{ak}G_{ks}X_b^{st}G_{tc} - g^{ak}G_{bs}X_c^{st}G_{tk} + g^{ak}G_{bs}Y_k^{st}G_{tc} = \\
& = -2X_b^{as}G_{sc} + (\Gamma M_S^{-1})^a{}_s X_b^{st}G_{tc} - \\
& \quad -G_{bs}X_c^{st}(\Gamma M_S^{-1})^a{}_t + (\Gamma M_S^{-1}\Gamma^t)^{ak}G_{bs}Y_k^{st}G_{tc} = \\
& = -2X_b^{as}G_{sc} + (\Gamma M_S^{-1})^a{}_v(X_r^{vt}G_{bs}\Gamma^{sr}G_{tc} - \\
& \quad -G_{bs}X_r^{sv}\Gamma^{rt}G_{tc} + (\Gamma^t)^{vr}G_{bs}Y_r^{st}G_{tc}) = \\
& = -2X_b^{as}G_{sc} + (\Gamma M_S^{-1})^a{}_v\left(X_r^{vt}\Gamma^{sr} - X_r^{sv}\Gamma^{rt} + Y_r^{st}\Gamma^{rv}\right)G_{bs}G_{tc}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Tím je ověřen vztah (K.42). Dále výraz rozepíšeme užitím vztahů (5.22) a (5.23):

$$\begin{aligned}
X_r^{vt} &= \tilde{f^{vt}}_r - f_{ru}{}^v M^{uv} - \Pi^{vu}f_{ur}{}^t \\
X_r^{sv} &= \tilde{f^{sv}}_r - f_{ru}{}^s M^{uv} - \Pi^{su}f_{ur}{}^v \\
Y_r^{st} &= \tilde{f^{st}}_r + f_{ur}{}^t M^{su} + \Pi^{ut}f_{ru}{}^s
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Po dosazení dostáváme:

$$\begin{aligned}
2\Omega^{-a}{}_{b,c} = -2X_b^{as}G_{sc} + (\Gamma M_S^{-1})^a{}_v(\tilde{f}_r^{vt}\Gamma^{sr} - f_{ru}{}^v M^{ut}\Gamma^{sr} - f_{ur}{}^t\Pi^{vu}\Gamma^{su} - \\
-\tilde{f}_r^{sv}\Gamma^{rt} + f_{ru}{}^s M^{uv}\Gamma^{rt} + f_{ur}{}^v\Pi^{su}\Gamma^{rt} + \qquad (5.33) \\
+\tilde{f}_r^{st}\Gamma^{rv} + f_{ur}{}^t M^{su}\Gamma^{rv} + f_{ru}^s\Pi^{ut}\Gamma^{rv}).G_{bs}G_{tc}. \qquad (5.34)
\end{aligned}$$

Za Γ dosadíme $M+\Pi$:

$$\begin{aligned}
& 2\Omega^{-a}{}_{b,c} = -2X_b^{as}G_{sc} + G_{bs}G_{tc}(\Gamma M_S^{-1})^a{}_v. \\
& .(\tilde{f}_r^{vt}M^{sr} + \tilde{f}_r^{vt}\Pi^{sr} - f_{ru}{}^v M^{ut}M^{sr} - f_{ru}{}^v M^{ut}\Pi^{sr} - f_{ur}{}^t\Pi^{vu}M^{su} - f_{ur}{}^t\Pi^{vu}\Pi^{sr} - \\
& -\tilde{f}_r^{sv}M^{rt} - \tilde{f}_r^{sv}\Pi^{rt} + f_{ru}{}^s M^{uv}M^{rt} + f_{ru}{}^s M^{uv}\Pi^{rt} + f_{ur}{}^v\Pi^{su}M^{rt} + f_{ur}{}^v\Pi^{su}\Pi^{rt} + \\
& +\tilde{f}_r^{st}M^{rv} + \tilde{f}_r^{st}\Pi^{rv} + f_{ur}{}^t M^{su}M^{rv} + f_{ur}{}^t M^{su}\Pi^{rv} + f_{ru}^s\Pi^{ut}M^{rv} + f_{ru}^s\Pi^{ut}\Pi^{rv}).
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Vidíme, že výrazy úměrné $\tilde{f}\Pi$ a Π^2 po drobné úpravě indexů do výsledku nepřispějí, neboť z identity (4.32) je vidět, že po sečtení dají nulu. Výrazy úměrné $f\Pi$ se odečtou, takže nakonec přispějí jen výrazy závisející lineárně a kvadraticky na M:

$$\begin{aligned}
\Omega^{-a}{}_{b,c} &= -X_b^{as}G_{sc} + \frac{1}{2}(\Gamma M_S^{-1})^a{}_v(\tilde{f}_r^{vt}M^{sr} - f_{ru}{}^v M^{ut}M^{sr} - \tilde{f}_r^{sv}M^{rt} + \\
&\quad + f_{ru}{}^s M^{uv}M^{rt} + \tilde{f}_r^{st}M^{rv} + f_{ur}{}^t M^{su}M^{rv})G_{bs}G_{tc} = \\
&= -X_b^{as}G_{sc} + \frac{1}{2}(\Gamma M_S^{-1})^a{}_v(\tilde{F}_r^{vt}M^{sr} - \tilde{F}_r^{sv}M^{rt} + \hat{F}_r^{st}M^{rv}) \quad .
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Pokud použijeme označení z článku:

$$\hat{\mathcal{F}}_u^{st} = \frac{1}{2}(M_S^{-1})_{uv}(\tilde{F}_r^{vt}M^{sr} - \tilde{F}_r^{sv}M^{rt} + \hat{F}_r^{st}M^{rv}), \tag{5.37}$$

tak můžeme tento výsledek zapsat v kompaktní formě:

$$\Omega^{-a}{}_{b,c} = -X_b^{as}G_{sc} + \hat{\mathcal{F}}_u^{st}\Gamma^{au}G_{bs}G_{tc}. \tag{5.38}$$

To odpovídá vztahu (K.43). Předchozí tvar je důležitý, neboť výraz $\hat{\mathcal{F}}$ závisí pouze na M a struktuře algebry. Zjistíme, čemu je roven výraz:

$$
\begin{aligned}
&\hat{F}^{ab}_c + \tilde{F}^{ab}_c - \hat{\mathcal{F}}^{ab}_c - \tilde{f^{ab}}_c = \\
&= f_{sc}{}^b M^{as} + \tilde{f}^{ab}_c - f_{cs}{}^a M^{sb} - \frac{1}{2}(M_S^{-1})_{cv}(\hat{F}^{ab}_t M^{tv} + \tilde{F}^{vb}_t M^{at} - \tilde{F}^{av}_t M^{tb}) = \\
&= \tilde{f}^{ab}_t (M_S^{-1})_{cv}(M_S)^{vt} + f_{st}{}^b M^{as}(M_S^{-1})_{cv}(M_S)^{vt} - f_{ts}{}^a M^{sb}(M_S^{-1})_{cv}(M_S)^{vt} - \\
&\qquad - \frac{1}{2}(M_S^{-1})_{cv}(\hat{F}^{ab}_t M^{tv} + \tilde{F}^{vb}_t M^{at} - \tilde{F}^{av}_t M^{tb}) = \\
&= \frac{1}{2}(M_S^{-1})_{cv}(\tilde{f^{ab}}_t M^{vt} + \tilde{f^{ab}}_t M^{tv} + f_{st}{}^b M^{as} M^{vt} + f_{st}{}^b M^{as} M^{tv} - \\
&\qquad - f_{ts}{}^a M^{sb} M^{vt} - f_{ts}{}^a M^{sb} M^{tv} - \tilde{f^{ab}}_t M^{tv} - f_{st}{}^b M^{as} M^{tv} - \tilde{f^{vb}}_t M^{at} + \\
&\qquad + f_{ts}{}^v M^{sb} M^{at} + \tilde{f^{av}}_t M^{tb} - f_{ts}{}^a M^{sv} M^{tb}) = \\
&= \frac{1}{2}(M_S^{-1})_{cv}((\tilde{f^{ab}}_t - f_{ts}{}^a M^{sb}) M^{vt} + \\
&\qquad - (\tilde{f^{vb}}_t + f_{st}{}^b M^{vs}) M^{at} + (\tilde{f^{av}}_t + f_{st}{}^v M^{as}) M^{tb}) = \tilde{\mathcal{F}}^{ab}_c .
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

V dalším výpočtu tedy použijeme identitu:

$$
\hat{F}^{ab}_c + \tilde{F}^{ab}_c - \hat{\mathcal{F}}^{st}_u - \tilde{\mathcal{F}}^{ab}_c = \tilde{f}^{ab}_c . \tag{5.40}
$$

Abychom mohli podle vzorce (5.16) spočítat Riemannův tenzor, budeme ještě potřebovat výraz pro $\Omega^{+a}{}_{bc}$. Nejprve odvodíme pomocnou identitu:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\partial}_s \Pi^{ab} &= \tilde{f}^{ab}_s - f_{st}{}^a \Pi^{bt} + f_{st}{}^b \Pi^{at} = X^{ab}_s + f_{st}{}^a M^{tb} - f_{st}{}^a \Pi^{bt} = \\
&= X^{ab}_s + f_{ts}{}^a \Gamma^{tb} = Y^{ab}_s - f_{ts}{}^b M^{at} - f_{ts}{}^b \Pi^{at} = Y^{ab}_s - f_{ts}{}^b \Gamma^{at} .
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

Nyní již dosadíme do vzorce (5.13):

$$
\begin{aligned}
\Omega^{+a}{}_{b,c} &= \Omega^{-a}{}_{c,b} + f_{bc}{}^a = -X^{as}_c G_{sb} + \hat{\mathcal{F}}^{st}_u \Gamma^{au} G_{cs} G_{tb} + f_{uc}{}^a \Gamma^{us} G_{sb} = \\
&= (-X^{as}_c + f_{uc}{}^a \Gamma^{us}) G_{sb} + \hat{\mathcal{F}}^{st}_u \Gamma^{au} G_{cs} G_{tb} = -\tilde{\partial}_c \Pi^{as} G_{sb} + \hat{\mathcal{F}}^{st}_u \Gamma^{au} G_{cs} G_{tb}
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

Tím jsme ověřili vzorec (K.47). Pro úpravy Riemannova tenzoru nalezneme alternativní vyjádření Ω^-, a sice zopakujeme postup od vztahu (5.30) s tím rozdílem, že využijeme vztahy ekvivalentní (5.25):

$$
g^{ab} G_{bs} = (\Gamma^t M_S^{-1})^a{}_s , \quad G_{tk} g^{ka} = 2\delta^a_t - (\Gamma^t M_S^{-1})^a{}_t . \tag{5.43}
$$

$$
\begin{aligned}
2\Omega^{-a}{}_{b,c} &= -g^{ka} G_{ks} X^{st}_b G_{tc} - G_{bs} X^{st}_c G_{tk} g^{ka} + g^{ka} Y^{st}_k G_{bs} G_{tc} = \\
&= -(\Gamma^t M_S^{-1})^a{}_v X^{vt}_r G_{tc} \Gamma^{sr} G_{bs} + G_{bs} \Gamma^{rt} G_{tc} X^{sv}_r (\Gamma^t M_S^{-1})^a{}_v - \\
&\quad - 2 G_{bs} X^{sa}_c + (\Gamma^t M_S^{-1})^a{}_v Y^{st}_r \Gamma^{vr} G_{bs} G_{tc} = \\
&= -2 G_{bs} X^{st}_c + (\Gamma^t M_S^{-1})^a{}_v (-X^{vt}_r \Gamma^{sr} + X^{sv}_r \Gamma^{rt} + Y^{st}_r \Gamma^{vr}) G_{bs} G_{tc} .
\end{aligned}
\tag{5.44}
$$

Nyní výsledek upravíme, abychom mohli použít identitu (4.32), a najdeme závislost na $\hat{\mathcal{F}}$:

$$
\begin{aligned}
&-X_r^{vt}\Gamma^{sr} + X_r^{sv}\Gamma^{rt} + Y_r^{st}\Gamma^{vr} = \\
&= -\tilde{F}_r^{vt}\Gamma^{sr} + \Pi^{vu} f_{ur}^{t}\Gamma^{sr} + \tilde{F}_r^{sv}\Gamma^{rt} - \Pi^{su} f_{ur}^{v}\Gamma^{rt} + \hat{F}_r^{st}\Gamma^{vr} + f_{ru}{}^{s}\Pi^{ut}\Gamma^{vr} = \\
&= -\tilde{F}_r^{vt}M^{sr} - \tilde{f}_r^{vt}\Pi^{sr} + f_{ru}{}^{v}M^{ut}\Pi^{sr} + f_{ur}{}^{t}\Pi^{vu}M^{sr} + f_{ur}{}^{t}\Pi^{vu}\Pi^{sr} + \\
&+\tilde{F}_r^{sv}M^{rt} + \tilde{f}_r^{sv}\Pi^{rt} - f_{ru}{}^{s}M^{uv}\Pi^{rt} - f_{ur}{}^{v}\Pi^{su}M^{rt} - f_{ur}{}^{v}\Pi^{su}\Pi^{rt} + \\
&+\hat{F}_r^{st}M^{vr} + \tilde{f}_r^{st}\Pi^{vr} + f_{ur}{}^{t}M^{su}\Pi^{vr} + \\
&+f_{ru}{}^{s}\Pi^{ut}M^{vr} + f_{ru}{}^{s}\Pi^{ut}M^{vr} + f_{ru}{}^{s}\Pi^{ut}\Pi^{vr} = \\
&= -\tilde{F}_r^{vt}M^{sr} + f_{ru}{}^{v}M^{ut}\Pi^{sr} + f_{ur}{}^{t}\Pi^{vu}M^{sr} + \tilde{F}_r^{sv}M^{rt} - f_{ru}{}^{s}M^{uv}\Pi^{rt} - \\
&-f_{ur}{}^{v}\Pi^{su}M^{rt} + \hat{F}_r^{st}M^{vr} + f_{ur}{}^{t}M^{su}\Pi^{vr} + f_{ru}{}^{s}\Pi^{ut}M^{vr} = \\
&-\tilde{F}_r^{vt}M^{sr} + \tilde{F}_r^{sv}M^{rt} + \hat{F}_r^{st}M^{vr} + f_{ru}{}^{s}\Pi^{ut}(M_S)^{vr}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(M_S^{-1})_{uv}(-\tilde{F}_r^{vt}M^{sr} + \tilde{F}_r^{sv}M^{rt} + \hat{F}_r^{st}M^{vr} - \hat{F}_r^{st}M^{rv} + \hat{F}_r^{st}M^{rv} + \\
&+f_{re}{}^{s}\Pi^{et}(M_S)^{vr}) = \\
&= (M_S^{-1})_{uv}(-\tilde{F}_r^{vt}M^{sr} + \tilde{F}_r^{sv}M^{rt} - \hat{F}_r^{st}M^{rv}) + \hat{F}_u^{st} + f_{ur}{}^{s}\Pi^{rt} = \\
&= -\tilde{\mathcal{F}}_u^{st} + Y_u^{st}
\end{aligned}
$$

Po dosazení do předpisu pro koeficienty spinové konexe dostáváme vztah:

$$
\Omega^{-a}{}_{b,c} = -G_{bs}X_c^{sa} + (\Gamma^t)^{au}(Y_u^{st} - \tilde{\mathcal{F}}_u^{st})G_{bs}G_{tc} \tag{5.45}
$$

Tím je ověřen vztah (K.50).

Kapitola 6

Úprava Riemannova tenzoru

Nyní upravíme vhodně Riemannův tenzor, nejprve si připravíme pár pomocných vzorců:

$$
\begin{aligned}
\Omega^{-s}{}_{a,t}\Omega^{+t}{}_{b,s} &= (-X_t^{\alpha s}G_{a\alpha} + G_{a\alpha}(\Gamma^t)^{su}(Y_u^{\alpha\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda})G_{\lambda t}).\\
&\quad .(-\tilde{\partial}_s\Pi^{t\beta}G_{\beta b} + G_{sv}\Gamma^{tu}\hat{\mathcal{F}}_u^{v\beta}G_{\beta b}) =\\
&= (X_t^{\alpha s}G_{a\alpha}\tilde{\partial}_s\Pi^{t\beta}G_{\beta b} - X_t^{\alpha s}G_{a\alpha}G_{sv}\Gamma^{tu}\hat{\mathcal{F}}_u^{v\beta}G_{\beta b} -\\
&\quad -G_{a\alpha}(\Gamma^t)^{su}(Y_u^{\alpha\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda})G_{\lambda t}\tilde{\partial}_s\Pi^{t\beta}G_{\beta b} +\\
&\quad +G_{a\alpha}(\Gamma^t)^{su}(Y_u^{\alpha\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda})G_{\lambda t}G_{sv}\Gamma^{tr}\hat{\mathcal{F}}_r^{v\beta}G_{\beta b} =\\
&= G_{a\alpha}G_{\beta b}(X_t^{\alpha s}\tilde{\partial}_s\Pi^{t\beta}) + G_{\alpha a}G_{\beta b}G_{\lambda\mu}(-X_t^{\alpha\lambda}\Gamma^{tu}\hat{\mathcal{F}}_u^{\mu\beta} -\\
&\quad -\Gamma^{us}(Y_u^{\alpha\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda})\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta} + (Y_u^{\alpha\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda})\Gamma^{\mu r}\hat{\mathcal{F}}_r^{u\beta}) =\\
&= G_{a\alpha}G_{\beta b}(X_t^{\alpha s}\tilde{\partial}_s\Pi^{t\beta} + (Y_u^{\alpha\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda})\hat{\mathcal{F}}_\lambda^{u\beta})) +\\
&\quad +G_{\alpha a}G_{\beta b}G_{\lambda\mu}(-X_t^{\alpha\lambda}\Gamma^{tu}\hat{\mathcal{F}}_u^{\mu\beta} - \Gamma^{us}(Y_u^{\alpha\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda})\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta}).
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Dále upravíme člen s parciální derivací:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\partial}_s\Omega^{-s}{}_{a,b} &= \tilde{\partial}_s(-X_a^{s\beta}G_{\beta b} + G_{a\alpha}\Gamma^{su}\hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\beta}G_{\beta b}) =\\
&= f_{ta}{}^{\beta}\tilde{\partial}_s\Pi^{st}G_{\beta b} + X_a^{s\lambda}G_{\lambda\mu}(\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta})G_{\beta b} - G_{a\alpha}(\tilde{\partial}_s\Pi^{\alpha\lambda})G_{\lambda\mu}\Gamma^{su}\hat{\mathcal{F}}_u^{\mu\beta}G_{\beta b} +\\
&\quad +G_{a\alpha}(\tilde{\partial}_s\Pi^{su})\hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\beta}G_{\beta b} - G_{a\alpha}\Gamma^{su}\hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda}G_{\lambda\mu}(\partial_s\Pi^{\mu\beta})G_{\beta b}.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Výraz (6.2) odečteme od (6.1), výraz označíme $\tilde{Ric}_{ab}$ (Ricciho tenzor od kterého jsme odečetli jeden člen).

$$
\begin{aligned}
\tilde{Ric}_{ab} &= f_{ta}{}^{\beta}\tilde{\partial}_s\Pi^{st}G_{\beta b} + X_t^{s\lambda}\Gamma^{\alpha t}G_{\alpha a}G_{\lambda\mu}(\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta})G_{\beta b} -\\
&\quad -G_{a\alpha}(\tilde{\partial}_s\Pi^{\alpha\lambda})G_{\lambda\mu}\Gamma^{su}\hat{\mathcal{F}}_u^{\mu\beta}G_{\beta b} + G_{a\alpha}(\tilde{\partial}_s\Pi^{su})\hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\beta}G_{\beta b} -\\
&\quad -G_{a\alpha}\Gamma^{su}\hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda}G_{\lambda\mu}(\partial_s\Pi^{\mu\beta})G_{\beta b} - G_{a\alpha}G_{\beta b}(X_t^{\alpha s}\tilde{\partial}_s\Pi^{t\beta} + (Y_u^{\alpha\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda})\hat{\mathcal{F}}_\lambda^{u\beta}) -\\
&\quad -G_{\alpha a}G_{\beta b}G_{\lambda\mu}(-X_t^{\alpha\lambda}\Gamma^{tu}\hat{\mathcal{F}}_u^{\mu\beta} - \Gamma^{us}(Y_u^{\alpha\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda})\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta}).
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Výsledný výraz lze zapsat ve tvaru

$$
\tilde{Ric}_{ab} = G_{a\alpha}\mathcal{L}^{\alpha\beta}G_{\beta b} + G_{a\alpha}\mathcal{M}^{\lambda\mu\beta\alpha}G_{\beta b}G_{\lambda\mu}
$$

Nejprve upravíme členy úměrné G^3, a členy, jež se po úpravách stanou závislými pouze kvadraticky na G budeme vynechávat:

$$\begin{aligned} M^{\lambda\mu\beta\alpha} &= X_t^{s\lambda}\Gamma^{\alpha t}\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta} - (\tilde{\partial}_s\Pi^{\alpha\lambda})\Gamma^{su}\hat{\mathcal{F}}_u^{\mu\beta} - \Gamma^{su}\hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda}(\partial_s\Pi^{\mu\beta}) + \\ &\quad + X_t^{\alpha\lambda}\Gamma^{tu}\hat{\mathcal{F}}_u^{\mu\beta} + \Gamma^{us}(Y_u^{\alpha\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda})(\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta}) = \\ &= X_t^{s\lambda}\Gamma^{\alpha t}\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta} - \Gamma^{su}\hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda}(\partial_s\Pi^{\mu\beta}) + \Gamma^{us}(Y_u^{\alpha\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda})(\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta}) = \\ &= X_t^{s\lambda}\Gamma^{\alpha t}\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta} - 2M_S^{su}\hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda}(\partial_s\Pi^{\mu\beta}) + \Gamma^{us}Y_u^{\alpha\lambda}\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta} \end{aligned} \tag{6.4}$$

Upravíme členy s X, Y a užijeme identitu (4.32):

$$\begin{aligned} & X_t^{s\lambda}\Gamma^{\alpha t} + \Gamma^{us}Y_u^{\alpha\lambda} = \\ &= X_t^{s\lambda}M^{\alpha t} + \tilde{F}_t^{s\lambda}\Pi^{\alpha t} - f_{vt}^{\lambda}\Pi^{\alpha t}\Pi^{sv} + Y_u^{\alpha\lambda}M^{us} + \hat{F}_u^{\alpha\lambda}\Pi^{us} + f_{uv}^{\alpha}\Pi^{v\lambda}\Pi^{us} = \\ &= X_t^{s\lambda}M^{\alpha t} + Y_u^{\alpha\lambda}M^{us} + \tilde{f^{s\lambda}}_t\Pi^{\alpha t} - f_{tv}{}^{s}M^{v\lambda}\Pi^{\alpha t} + \tilde{f^{\alpha\lambda}}_u\Pi^{us} + \\ &\quad + f_{vu}{}^{\lambda}M^{\alpha v}\Pi^{us} - f_{vt}^{\lambda}\Pi^{\alpha t}\Pi^{sv} + f_{uv}^{\alpha}\Pi^{v\lambda}\Pi^{us} = \\ &= X_t^{s\lambda}M^{\alpha t} + Y_u^{\alpha\lambda}M^{us} - f_{tv}{}^{s}M^{v\lambda}\Pi^{\alpha t} + f_{vu}{}^{\lambda}M^{\alpha v}\Pi^{us} + \tilde{f_u^{s\alpha}}\Pi^{\lambda u} + \\ &\quad + f_{uv}{}^{s}\Pi^{\alpha u}\Pi^{\lambda v} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Zbývá jeden člen kvadratický v Π, ten upravíme pomocí vztahu $\Pi = \Gamma - M$, člen s Γ vynecháme, neboť je kvadratický v G a zároveň rozepíšeme X, Y.

$$\begin{aligned} & \tilde{F}_t^{s\lambda}M^{\alpha t} + \hat{F}_u^{\alpha\lambda}M^{us} - \Pi^{sv}f_{vt}{}^{\lambda}M^{\alpha t} + \Pi^{v\lambda}f_{uv}{}^{\alpha}M^{us} - f_{tv}{}^{s}M^{v\lambda}\Pi^{\alpha t} + \\ &\quad + f_{vu}{}^{\lambda}M^{\alpha v}\Pi^{us} + \tilde{f^{s\alpha}}_u\Pi^{\lambda u} + f_{uv}{}^{s}\Pi^{\alpha u}M^{v\lambda} = \\ &= \tilde{F}_t^{s\lambda}M^{\alpha t} + \hat{F}_u^{\alpha\lambda}M^{us} + \tilde{F}_u^{\alpha s}\Pi^{u\lambda} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Výraz jenž obsahuje Π rozepíšeme opět pomocí $\Gamma - M$:

$$\tilde{F}_t^{s\lambda}M^{\alpha t} + \hat{F}_u^{\alpha\lambda}M^{us} + \tilde{F}_u^{\alpha s}\Pi^{u\lambda} = \tilde{F}_t^{s\lambda}M^{\alpha t} + \hat{F}_u^{\alpha\lambda}M^{us} - \tilde{F}_u^{\alpha s}M^{u\lambda} + O(\Gamma) \tag{6.7}$$

Jak vidíme, dostali jsme výraz $\tilde{\mathcal{F}}M$. Celkem snadno už zjistíme, že člen kubický v G vymizí.
Nyní dopočítáme členy kvadratické v G. Nejprve upraníme členy, které jsme vynechali při výpočtu členů kubických v G:

$$\begin{aligned} & f_{su}{}^{\alpha}\Gamma^{u\lambda}G_{\lambda\mu}\hat{\mathcal{F}}_t^{\mu\beta}\Gamma^{st} + f_{uv}{}^{s}\Pi^{\alpha u}\Gamma^{\lambda v}G_{\lambda\mu}\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta} + \tilde{F}_u^{\alpha s}\Gamma^{u\lambda}G_{\lambda\mu}\tilde{\partial}_s\Pi^{\mu\beta} = \\ &= f_{su}{}^{\alpha}\hat{\mathcal{F}}_t^{u\beta}\Gamma^{st} + X_t^{\alpha s}\tilde{\partial}_s\Pi^{t\beta}. \end{aligned}$$

Část Ricciho tenzoru úměrná druhé mocnině G je následující:

$$\begin{aligned} & f_{ta}{}^{\beta}\tilde{\partial}_s\Pi^{st}G_{\beta b} + G_{a\alpha}((\tilde{\partial}_s\Pi^{su})\hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\beta} + f_{su}{}^{\alpha}\hat{\mathcal{F}}_t^{u\beta}\Gamma^{st} + X_t^{\alpha s}\tilde{\partial}_s\Pi^{t\beta})G_{\beta b} - \\ &\quad - G_{a\alpha}G_{\beta b}(X_t^{\alpha s}\tilde{\partial}_s\Pi^{t\beta} + (Y_u^{\alpha\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha\lambda})\hat{\mathcal{F}}_\lambda^{u\beta}) = \\ &= G_{a\alpha}((f_{tu}{}^{\beta}\Gamma^{\alpha u} + \hat{\mathcal{F}}_t^{\alpha\beta})\tilde{\partial}_s\Pi^{st} + (Y_u^{\alpha t} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha t} + f_{su}{}^{\alpha}\Gamma^{st})\hat{\mathcal{F}}_t^{u\beta})G_{\beta b}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Vidíme, že vzorec se trochu liší od vzorce (K.55) v článku, který má tvar:

$$G_{a\alpha}((f_{tu}{}^{\beta}\Gamma^{\alpha u} + \hat{\mathcal{F}}_t^{\alpha\beta})\tilde{\partial}_s\Pi^{st} + (Y_u^{\alpha t} - \hat{\mathcal{F}}_t^{u\beta} + f_{su}{}^{\alpha}\Gamma^{st})\hat{\mathcal{F}}_t^{u\beta})G_{\beta b}.$$

Pravděpodobně zde došlo k drobné chybě v indexech, ve vzorci (K.56) již tato chyba není.
Výsledek dále upravíme pomocí vztahu (5.39):

$$\begin{aligned} & Y_u^{\alpha t} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha t} + f_{su}{}^{\alpha}\Gamma^{st} = \\ &= \hat{F}_u^{\alpha s} + f_{us}{}^{\alpha}\Pi^{st} + \tilde{f}_u^{\alpha s} - \tilde{f}_u^{\alpha s} - \hat{\mathcal{F}}_u^{\alpha t} + f_{su}{}^{\alpha}\Pi^{st} + f_{su}{}^{\alpha}M^{st} = \tilde{\mathcal{F}}_u^{\alpha s} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Výsledkem je tedy výraz:

$$\tilde{R}ic_{ab} = G_{a\alpha}((f_{tu}{}^{\beta}\Gamma^{\alpha u} + \hat{\mathcal{F}}_t^{\alpha\beta})\tilde{\partial}_s\Pi^{st} + \tilde{\mathcal{F}}_u^{\alpha s}\hat{\mathcal{F}}_t^{u\beta})G_{\beta b} \tag{6.10}$$

V předchozím vztahu zůstává stále člen úměrný $\tilde{\partial}\Pi$. Ten se upraví následovně. Uvažujeme vektorové pole $w_a = G_{as}\tilde{\partial}_t\Pi^{ts}$, vypočítáme $\mathcal{D}_b w_a$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_b w_a &= \tilde{\partial}_b(G_{as}\tilde{\partial}_t\Pi^{ts}) - \Omega^{-s}{}_{a,b}(G_{st}\tilde{\partial}_v\Pi^{vt}) = \\
&= G_{a\alpha}(-\tilde{\partial}_b\Pi^{\alpha v}G_{vs}\tilde{\partial}_t\Pi^{ts} + \tilde{\partial}^2_{bt}\Pi^{t\alpha}) - \\
&\quad -G_{a\alpha}(-X_b^{\alpha s} + \Gamma^{vs}G_{sr}(Y_v^{\alpha\beta} - \hat{\mathcal{F}}_v^{\alpha\beta}))\tilde{\partial}_v\Pi^{vr}G_{\beta b} = \\
&= G_{a\alpha}(-\Gamma^{r\beta}\tilde{\partial}_r\Pi^{\alpha s}G_{st}\tilde{\partial}_v\Pi^{vt} + \tilde{\partial}^2_{rt}\Pi^{t\alpha}\Gamma^{r\beta})G_{\beta b} - \\
&\quad -G_{a\alpha}(-X_r^{\alpha s}\Gamma^{r\beta} + \Gamma^{vs}G_{sr}(Y_v^{\alpha\beta} - \hat{\mathcal{F}}_v^{\alpha\beta}))G_{\beta b}\tilde{\partial}_v\Pi^{vr} = \\
&= G_{a\alpha}((\tilde{\partial}^2_{rt}\Pi^{t\alpha} - f_{rt}{}^{\alpha}\tilde{\partial}_v\Pi^{vt})\Gamma^{r\beta}) - (Y_r^{\alpha\beta} - \hat{\mathcal{F}}_r^{\alpha\beta})\tilde{\partial}_v\Pi^{vr})G_{\beta b}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Tím jsme ověřili vztah (K.57). Výraz u koeficientu $\Gamma^{r\beta}$ je roven nule, berme to zatím jako fakt. Můžeme tedy předchozí vztah upravit do tvaru:

$$\mathcal{D}_b w_a + G_{a\alpha}Y_r^{\alpha\beta}\tilde{\partial}_v\Pi^{vr}G_{\beta b} = G_{a\alpha}\hat{\mathcal{F}}_r^{\alpha\beta}\tilde{\partial}_v\Pi^{vr}G_{\beta b} \tag{6.12}$$

Po dosazení do $\tilde{R}ic_{ab}$ dostáváme následující vztah:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}ic_{ab} &= G_{a\alpha}((f_{tu}{}^{\beta}\Gamma^{\alpha u} + Y_t^{\alpha\beta})\tilde{\partial}_s\Pi^{st} + \tilde{\mathcal{F}}_u^{\alpha s}\hat{\mathcal{F}}_t^{u\beta})G_{\beta b} = \\
&= G_{a\alpha}(\tilde{\partial}_t\Pi^{\alpha\beta}\tilde{\partial}_s\Pi^{st} + \tilde{\mathcal{F}}_u^{\alpha s}\hat{\mathcal{F}}_t^{u\beta})G_{\beta b}.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Člen úměrný kvadrátu derivace Π je roven nule, takže Ricciho tenzor získá následující tvar:

$$Ric_{ab} = G_{a\alpha}\tilde{\mathcal{F}}_u^{\alpha s}\hat{\mathcal{F}}_t^{u\beta}G_{\beta b} + \mathcal{D}_b(w_a - v_a). \tag{6.14}$$

Tím je ověřen vztah (K.60). Zbývá dokázat, že výraz ve vzorci (6.11) je roven nule. Nejprve ukážeme, že $\tilde{\partial}_s\Pi^{ab}$ lze zapsat také ve tvaru:

$$\tilde{\partial}_c\Pi^{ab} = \tilde{f}_c^{ab}(g) = A_s^a(g^{-1})A_t^b(g^{-1})\tilde{f}_u^{st}A_c^u(g). \tag{6.15}$$

Vyjdeme ze vzorce:

$$\tilde{f}_u^{st} = \langle[\tilde{T}^s, \tilde{T}^t], T_u\rangle \Rightarrow \tilde{f}_c^{ab}(g) = \langle[A_s^a(g^{-1})\tilde{T}^s, A_t^b(g^{-1})\tilde{T}^t], A_c^u(g)T_u\rangle \tag{6.16}$$

Jednotlivé prvky algebry vyjádříme pomocí akce (4.1).

$$A_s^a(g^{-1})\tilde{T}^s = g^{-1}\tilde{T}^a g - B^{av}(g)T_v, \quad A_c^u(g)T_u = g\tilde{T}_c g^{-1}. \tag{6.17}$$

Celkem máme výraz:

$$\begin{aligned}
\tilde{f^{ab}}_c(g) &= \langle[g^{-1}\tilde{T}^a g - B^{av}(g)T_v, g^{-1}\tilde{T}^b g - B^{bs}(g)T_s], g^{-1}T_c g\rangle. \\
\langle[g^{-1}\tilde{T}^a g, g^{-1}\tilde{T}^b g], g^{-1}T_c g\rangle &= \langle g^{-1}[\tilde{T}^a, \tilde{T}^b]g, g^{-1}T_c g\rangle = \tilde{f^{ab}}_c. \\
\langle[-B^{av}(g)T_v, g^{-1}\tilde{T}^b g], g^{-1}T_c g\rangle &= -B^{av}(g)\langle[gT_v g^{-1}, \tilde{T}^b], T_c\rangle = \\
= -B^{av}(g)A^t{}_v(g^{-1})\langle[T_t, \tilde{T}^b], T_c\rangle &= -B^{av}(g)A^t{}_v(g^{-1})f_{ct}^b = \Pi^{at}f_{ct}^b.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Zbývá dopočítat jeden jediný nenulový člen, ten dostaneme záměnou indexů $(a, b, c) \rightarrow (b, a, c)$ a změnou znaménka, za změnu pořadí vektorů v komutátoru. V článku [1] jsou ve vztazích drobné chyby v indexech, ale výsledek je už napsaný správně.
Uvažujme Jacobiho identitu pro strukturní koeficienty Lieovy algebry:

$$\tilde{f^{st}}_c\tilde{f^{ab}}_t + \tilde{f^{at}}_c\tilde{f^{bs}}_t + \tilde{f^{bt}}_c\tilde{f^{sa}}_t = 0.$$

Tu kontrahujeme v indexech c, s a dostáváme:

$$\tilde{f^{st}}_s \tilde{f^{ab}}_t = 0.$$

Ověříme, zda je výraz kvadratický v derivacích $\Pi(g)$ v (6.13) opravdu roven nule.

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_s \Pi^{st} \tilde{\partial}_t \Pi^{ab} &= (A^s_v)^{-1}(A^t_r)^{-1} \tilde{f^{vr}}_u A^u_s (A^a_k)^{-1}(A^b_k)^{-1} \tilde{f^{kl}}_m A^m_t = \\ &= \tilde{f^{um}}_u \tilde{f^{kl}}_m (A^a_k)^{-1}(A^b_l)^{-1} = 0.\end{aligned}$$

Dále vyjdeme ze vztahu:

$$\tilde{\partial}_s \Pi^{sa} = (A^s_t)^{-1}(A^a_v)^{-1} \tilde{f^{tv}}_u A^u_s = (A^a_v)^{-1} \tilde{f^{sv}}_s.$$

Tento vztah diferencujeme, a užijeme identitu (4.8):

$$\tilde{\partial}_t \tilde{\partial}_s \Pi^{sv} = \tilde{f^{st}}_s f_{tu}{}^a (A^u_t)^{-1} = f_{tu}{}^a \tilde{\partial}_s \Pi^{su}(g). \tag{6.19}$$

Vidíme, že výraz ve vzorci (6.13) je roven nule.
Zároveň jsme dokončili ověření obou dvou dodatků článku.
Dále je třeba ještě ověřit nejednoznačnost tohoto vyjádření Ricciho tenzoru. Zavedeme vektorové pole:

$$W_a = G_{a\alpha} \xi^\alpha \tag{6.20}$$

Potom jeho kovariantní derivace má tvar:

$$\begin{aligned}D_b W_a &= (\tilde{\partial}_b G_{a\alpha}) + \xi^\alpha G_{a\alpha}(\tilde{\partial}_b \xi^\alpha + X^{\alpha s}_b - \Gamma^{us}(Y^{\alpha\beta}_u - \hat{\mathcal{F}}^{\alpha\beta}_u) G_{\beta b}) = \\ &= (\tilde{\partial}_b \xi^\alpha + \xi^s(-(X^{\alpha s}_b + f^\alpha_{bu}\Gamma^{ut}) + X^{\alpha s}_b - \Gamma^{us}(Y^{\alpha\beta}_u - \hat{\mathcal{F}}^{\alpha\beta}_u) G_{\beta b}) G_{a\alpha} = \\ &= (\tilde{\partial}_s \xi^\alpha \Gamma^{s\beta} - f^\alpha_{bu}\Gamma^{ut}) - \Gamma^{us}(Y^{\alpha\beta}_u - \hat{\mathcal{F}}^{\alpha\beta}_u)) G_{\beta b} G_{a\alpha}.\end{aligned} \tag{6.21}$$

(ještě upravit). Pokud uvažujeme pouze ξ^a jenž nezávisí na volbě souřadnic, dostaneme jednodušší výraz:

$$\mathcal{D}_b W_a = -\xi^s (f^\alpha_{us}\Gamma^{u\beta} + Y^{\alpha\beta}_s - \mathcal{F}^{\alpha\beta}_s) G_{a\alpha} G_\beta. \tag{6.22}$$

S využitím vzorců (5.39) a (5.23) vidíme, že lze výsledek napsat v následujícím tvaru:

$$\mathcal{D}_b W_a = -\xi^s \tilde{\mathcal{F}}^{\alpha\beta}_s G_{a\alpha} G_{\beta b}. \tag{6.23}$$

Po přičtení výrazu dostáváme Ricciho tenzor v následujícím tvaru:

$$Ric_{ab} = G_{a\alpha} r^{\alpha\beta} G_{\beta b} + \mathcal{D}_b(w_a + W_a - v_a), \tag{6.24}$$

kde jsme označili

$$r^{\alpha\beta} = \tilde{\mathcal{F}}^{\alpha s}_u \hat{\mathcal{F}}^{u\beta}_t + \xi^s \tilde{\mathcal{F}}^{\alpha\beta}_s.$$

Celý proces lze zopakovat a vyjádřit Ricciho tenzor pro duální model s tím, že dojde k záměně $M \to\ M^{-1}$ a zbylé veličiny se nahradí duálními. Nyní již lze vidět, že lze splnit rovnice (3.21), podrobněji se na to podíváme v další kapitole.

Kapitola 7

Renormalizace Poisson-Lie sigma modelů s jednou smyčkou

Nakonec zbývá ověřit renormalizovatelnost sigma modelů. Musíme zjistit, zda Riemannův tenzor splňuje rovnice (3.21). Jako nezávislé proměnné vezmeme všechny prvky matice M. Musíme tedy ověřit vztahy:

$$\mathrm{Ric}_{(\mu\nu)} = \chi^{st}\frac{\partial}{\partial M^{st}} g_{\mu\nu} + \nabla_{(\mu}u_{\nu)}.$$

$$\mathrm{Ric}_{(\mu\nu)} = \chi^{st}\frac{\partial}{\partial M^{st}} h_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}U_{\nu]} + T^{\sigma}_{\mu\nu}u_{\sigma}. \tag{7.1}$$

Nejprve tyto relace sečteme:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_{\mu\nu} &= \chi^{st}\frac{\partial}{\partial M^{st}} G_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}u_{\nu} + \nabla_{\nu}u_{\mu} - T^{\sigma}_{\nu\mu}u_{\sigma} + \nabla_{[\mu}U_{\nu]} = \\ &= \chi^{st}\frac{\partial}{\partial M^{st}} G_{\mu\nu} + 2\partial_{[\mu}u_{\nu]} + 2\nabla_{\nu}u_{\mu} - T^{\sigma}_{\nu\mu}u_{\sigma} + \nabla_{[\mu}U_{\nu]} = \\ &= \chi^{st}\frac{\partial}{\partial M^{st}} G_{\mu\nu} + 2D^{-}_{\nu}u_{\mu} + \nabla_{[\mu}(U+2u)_{\nu]}.\end{aligned} \tag{7.2}$$

Vidíme, že ve vzorci (K.67) je určitá nepřesnost, neboť vektor u ve vztahu (K.66) je dvojnásobkem vektoru u ve vztahu (K.67). My v dalším textu použijeme pro vektor ze vztahu (K.67) značení $u = z$. A nakonec použijeme zápis v pravoinvariantním poli:

$$\begin{aligned}R^{a}_{\mu}R^{b}_{\nu}\mathrm{Ric}_{ab} &= \chi^{st}\frac{\partial}{\partial M^{st}} R^{a}_{\mu}R^{b}_{\nu}G_{ab} + R^{a}_{\mu}R^{b}_{\nu}\mathcal{D}_{b}z_{a} + \\ &\quad + R^{a}_{\mu}R^{b}_{\nu}\tilde{\partial}_{[a}(z+U)_{b]} + (\partial_{\mu}R^{s}_{\nu} - \partial_{\nu}R^{s}_{\mu})(U+z)_{s} = \\ &= R^{a}_{\mu}R^{b}_{\nu}(\chi^{st}\frac{\partial}{\partial M^{st}} G_{ab} + \mathcal{D}_{b}z_{a} + \tilde{\partial}_{[a}(z+U)_{b]} + f^{s}_{ab}(U+z)_{b}).\end{aligned} \tag{7.3}$$

To odpovídá vztahu (K.68). Pokud porovnáme výsledek se vztahem (6.24) jenž má tvar:

$$Ric_{ab} = G_{a\alpha}r^{\alpha\beta}G_{\beta b} + \mathcal{D}_{b}(w_a + W_a - v_a), \tag{7.4}$$

tak vidíme, že stačí dosadit:

$$\chi^{st} = -r^{st}, \quad U_s = -u_s, u_s = w_s + W_s - w_s. \tag{7.5}$$

Obdobně bychom dostali výsledek pro duální model, oba dva modely jsou renormalizovatelné.

Na tento článek navázali K. Sfetsos a K. Siampos článkem [2], kde ukázali ekvivalenci duálních sigma modelů s jednou smyčkou. Použili trochu jiné značení než článek [1], ale my se zde budeme držet současného.
K současnému značení musíme zavést ještě značení pro některé duální výrazy. Označíme

$$\tilde{E}^c_{ab} = f_{ab}{}^c - \tilde{f}^{cd}_a (M^{-1})_{db}, \quad \hat{E}^c_{ab} = f_{ab}{}^c - \tilde{f}^{cd}_a (M^{-1})_{db}, \tag{7.6}$$

což jsou výrazy duální k $\tilde{F}$, $\hat{F}$. Dále označíme

$$\tilde{\mathcal{E}}^{ab}_c = \frac{1}{2}(\tilde{M}_S^{-1})(\hat{E}^e_{ab}(M^{-1})_{ed} + \tilde{E}^e_{db}(M^{-1})_{ae} - \tilde{E}^e_{ad}(M^{-1})_{eb}), \tag{7.7}$$

$$\hat{\mathcal{E}}^{ab}_c = \frac{1}{2}(\tilde{M}_S^{-1})(\tilde{E}^e_{ab}(M^{-1})_{de} + \hat{E}^e_{ad}(M^{-1})_{eb} - \hat{E}^e_{db}(M^{-1})_{ae}), \tag{7.8}$$

které jsou duální k $\tilde{\mathcal{F}}$, $\hat{\mathcal{F}}$. Označili jsme

$$\tilde{M}_S = \frac{1}{2}[(M^{-1}) + (M^{-1})^T].$$

Counter-členy sigma modelů jsou určeny tzv. rovnicemi pro tok renormalizační grupy, pokud dokážeme jejich ekvivalenci, tak bude dokázána i ekvivalence counter-členů. Tyto rovnice mají tvar (viz [2]):

$$\frac{dM^{ab}}{dt} = \frac{\lambda}{2\pi}\tilde{\mathcal{F}}^{ac}_d \hat{\mathcal{F}}^{db}_c. \tag{7.9}$$

$$\frac{d(M^{-1})_{ab}}{dt} = \frac{\lambda}{2\pi}\hat{\mathcal{E}}^d_{ac}\tilde{\mathcal{E}}^c_{db}. \tag{7.10}$$

Pro důkaz ekvivalence ověříme následující užitečné vztahy:

$$-M^{db}\tilde{E_{cd}}^{a} = -M^{db}(f_{cd}{}^a - \tilde{f^{ae}}_c (M^{-1})_{cd}) = -f_{cd}{}^a M^{db} + \tilde{f^{ab}}_c = \tilde{F^{ab}}_c. \tag{7.11}$$

$$M^{ad}\hat{E_{dc}}^{b} = M^{ad}(f_{dc}{}^b + (M^{-1})_{de}\tilde{f^{eb}}_c) = f_{dc}{}^b M^{ad} + \tilde{f^{ab}}_c = \hat{F^{ab}}_c. \tag{7.12}$$

Celkem snadno též vidíme, že

$$M_S = M(M^{-1} + (M^{-1})^T)M^T = M\tilde{M}_S M^T = M^T \tilde{M}_S M. \tag{7.13}$$

Nakonec ověříme důležité identity (3.16) z článku [2]:

$$\begin{aligned} M^{ad}M^{eb}(M^{-1})_{fc}\tilde{\mathcal{E}}^f_{de} = \frac{1}{2}M^{ad}M^{eb}(M^{-1})_{fc} \\ (\tilde{M}_S^{-1})^{fg}(\tilde{E_{de}}^h (M^{-1})_{gh} + \hat{E_{dg}}^h (M^{-1})_{he} - \hat{E_{ge}}^h (M^{-1})_{dh}). \end{aligned} \tag{7.14}$$

Nyní se podíváme podrobně na jednotlivé sčítance:

$$\begin{aligned} M^{ad}M^{eb}(M^{-1})_{fc}(\tilde{M}_S^{-1})^{fg}\tilde{E_{de}}^h (M^{-1})_{gh} &= \\ = M^{ad}M^{eb}(M_S^{-1})_{ch}\tilde{E_{de}}^h &= \\ &= -M^{ad}(M_S^{-1})_{ch}\tilde{F^{hb}}_d. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Dále upravíme druhý sčítanec:

$$\begin{aligned} M^{ad}M^{eb}(M^{-1})_{fc}(M_S^{-1})^{fg}\hat{E_{dg}}^h (M^{-1})_{he} &= \\ = M^{ad}(M^{-1})_{fc}(\tilde{M}_S^{-1})^{fg}\hat{E_{dg}}^b &= \\ = M^{ad}(M^{-1})_{fc}(\tilde{M}_S^{-1})^{fg}\hat{E_{dh}}^b (M^{-1})_{ge}M^{eh} &= \\ = M^{ad}(M_S^{-1})_{ce}\hat{E_{dh}}^b M^{eh} &= (M_S^{-1})_{ce}\hat{F^{ab}}_h M^{eh}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Upravíme ještě poslední sčítanec:

$$
\begin{aligned}
&M^{ad}M^{eb}(M^{-1})_{fc}(\tilde{M}_S^{-1})^{fg}\hat{E_{ge}}^{h}(M^{-1})_{dh} = \\
&= M^{eb}(M^{-1})_{fc}(\tilde{M}_S^{-1})^{fg}\hat{E_{he}}^{a}(M^{-1})_{gd}M^{dh} = \\
&\qquad = M^{eb}(M_S^{-1})_{cd}\hat{E_{he}}^{a}M^{dh} = M^{eb}(M_S^{-1})_{cd}\hat{F^{da}}_{e}.
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

Nakonec vhodně přeznačíme, sečteme a dosaneme výraz:

$$
\frac{1}{2}(M_S^{-1})_{cd}(-M^{ae}\tilde{F^{db}}_e + \hat{F^{ab}}_e M^{de} - M^{eb}\hat{F^{da}}_e).
\tag{7.18}
$$

Nyní ještě použijeme vztahy mezi $\tilde{F}$, $\hat{F}$ získáme je přičtením a odečtením vhodného členu úměrného fM:

$$
\begin{aligned}
\tilde{F^{db}}_e &= \hat{F^{db}}_e - M^{df}f_{fe}{}^{b} - M^{fb}f_{ef}{}^{d}, \\
\hat{F^{ab}}_e &= \tilde{F^{ab}}_e + M^{af}f_{fe}{}^{b} + M^{fb}f_{ef}{}^{a}, \\
\hat{F^{da}}_e &= -\hat{F^{ad}}_e + M^{af}f_{fe}{}^{b} + M^{df}f_{fe}{}^{a}.
\end{aligned}
$$

Dosadíme do výrazu (7.18):

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(M_S^{-1})_{cd}(-M^{ae}(\hat{F^{db}}_e - M^{df}f_{fe}{}^{b} - M^{fb}f_{ef}{}^{d}) + \\
&\qquad +(\tilde{F^{ab}}_e + M^{af}f_{fe}{}^{b} + M^{fb}f_{ef}{}^{a})M^{de} - \\
&\qquad -M^{eb}(-\hat{F^{ad}}_e - M^{af}f_{fe}{}^{b} - M^{df}f_{fe}{}^{a})) = \\
&= \frac{1}{2}(M_S^{-1})_{cd}(-M^{ae}(\hat{F^{db}}_e + \tilde{F^{ab}}_e M^{de} + \hat{F^{ad}}_e M^{eb}) + \\
&\qquad +\frac{1}{2}(M_S^{-1})_{cd}(M^{ae}(M^{df}f_{fe}{}^{b} + M^{fb}f_{ef}{}^{d}) + \\
&+(M^{af}f_{fe}{}^{b} + M^{fb}f_{ef}{}^{a})M^{de} - M^{eb}(M^{af}f_{fe}{}^{b} + M^{df}f_{fe}{}^{a})).
\end{aligned}
\tag{7.19}
$$

Členy jež neobsahují $\tilde{F}$, $\hat{F}$ se odečtou, a zůstane jen výraz, jenž je roven $\hat{\mathcal{F}}_c^{ab}$.
Zcela analogicky lze ověřit vztah:

$$
-M^{ad}M^{eb}(M^{-1})_{cf}\tilde{\mathcal{E}}_{de}^{f} = \tilde{\mathcal{F}}_c^{ab}
\tag{7.20}
$$

Pokud dosadíme za $\hat{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{F}}$, z odvozených výrazů, tak dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{F}}_d^{ac}\hat{\mathcal{F}}_c^{db} &= -M^{aj}M^{kc}(M^{-1})_{ld}\hat{\mathcal{E}}_{jk}^{l}M^{dh}M^{eb}(M^{-1})_{cf}\hat{\mathcal{E}}_{hl}^{f} = \\
&= -M^{aj}M^{eb}\tilde{\mathcal{E}}_{jf}^{h}\hat{\mathcal{E}}_{hl}^{f}.
\end{aligned}
\tag{7.21}
$$

Vrátíme se k rovnicím pro tok renormalizační grupy.
Upravíme derivaci M^{-1} podle parametru t.

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d(M^{-1}M)_a^c}{dt} = \frac{d(M_{ae}^{-1}M^{ec})}{dt} = \\
&= \frac{d(M^{-1})_{ae}}{dt}M^{ec} + (M^{-1})_{ae}\frac{M^{ec}}{dt} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{(dM^{-1})_{ab}}{dt} = -(M^{-1})_{ae}\frac{dM^{ec}}{dt}(M^{-1})_{cb}.
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

S využitím předchozího dostáváme:

$$
\begin{aligned}
\frac{d(M^{-1})_{ab}}{dt} &= -(M^{-1})_{ar}\frac{dM^{rs}}{dt}(M^{-1})_{sb} = \\
&= (M^{-1})_{ar}M^{rj}(M^{-1})_{sb}M^{es}\hat{\mathcal{E}}_{jf}^{h}\tilde{\mathcal{E}}_{he}^{f} = \hat{\mathcal{E}}_{af}^{h}\tilde{\mathcal{E}}_{hb}^{f}.
\end{aligned}
\tag{7.23}
$$

Tím jsme ověřili ekvivalenci sigma modelů při renormalizaci.
Pozn.: Renormalizaci konstanty λ lze zahrnout do renormalizace matice M.

Kapitola 8

Výzkum zobecnění na pluralitu

V této kapitole naznačíme směr, kterým se bude ubírat náš výzkum. Rozklad Drinfeldova doublu na dvě podgrupy není jednoznačný, a tak můžeme transformaci Poisson-Lie T-duálního sigma modelu můžeme provést mezi různými duálními grupami. Rikard von Unge pro tento případ zavedl ve své práci [10] název Poisson-Lie T-pluralita.
Postup trochu nastíníme v následující části. Nechť $\mathcal{D}$ je Drinfeldův double, a $(\mathfrak{d}, \mathfrak{g},\ \tilde{\mathfrak{g}})$ je Maninův triple. Rozklad algebry $\mathfrak{d}$ není jednoznačný, lze najít i jiné dvě algebry $\mathfrak{h}, \tilde{\mathfrak{h}}$ jejichž bázové vektory splňují komutační relace (1.1). Mezi bázemi $T,\ \tilde{T},\ U,\ \tilde{U}$ algeber $\mathfrak{g},\ \tilde{\mathfrak{g}}$ a $\mathfrak{h},\ \tilde{\mathfrak{h}}$ je následující vztah:

$$\begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{\tilde{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{\tilde{U}} \end{pmatrix}, \tag{8.1}$$

kde matice K,Q,R,S jsou určeny tak, aby pro vektory $V_a = (T_1, ..., T_n, \tilde{T}_1, ..., \tilde{T}_n)$, $W_a = (U_1, ..., U_n, \tilde{U}_1, ..., \tilde{U}_n)$ platilo $V_a = C_a{}^b W_b$, kde matice C je právě ona matice tvořená submaticemi $K,\ Q,\ R,\ S$. Protože dimenze algeber $\mathfrak{g},\ \tilde{\mathfrak{g}}$ a $\mathfrak{h},\ \tilde{\mathfrak{h}}$ jsou stejné, matice $K,\ Q,\ R,\ S$ jsou čtvercové. Matice C má ještě následující důležitou vlastnost, kterávyplývá duality bazí $W,\ V$:

$$\begin{pmatrix} K & Q \\ R & S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} S^T & Q^T \\ R^T & K^T \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Můžeme zkonstruovat sigma modely jak na dvojici grup $G,\ \tilde{G}$, tak na $H,\ \tilde{H}$. Tenzor G_{ab} má pak následující tvar (viz [10]):

$$\hat{G}_{ab}(h) = E(F + \hat{\Pi}(h)E)^{-1} = (\hat{M}^{-1} + \hat{\Pi}(h))^{-1}, \quad \hat{\Pi}(h) = B(h)A(h)^{-1}, \tag{8.3}$$

kde matice $B(h),\ A(h)$ jsou určeny přidruženou reprezentací grupy H a pro matice $E,\ F$ a $\hat{M}$ platí následující vztahy:

$$E = S^T M - Q^T, \quad F = K^T - R^T M, \quad \hat{M} = EF^{-1}. \tag{8.4}$$

Tento výraz je obecnější než (1.4), pokud zvolíme $K,\ S = \mathbf{1}$ dostáváme výraz $(M + \Pi(g))^{-1}$.
V dalším výzkumu bychom rádi zjistili, zda při transformaci Poisson-Lie T-plurality zůstávají toky renormalizační grupy obou dvou modelů ekvivalentní, tj. budeme chtít dokázat ekvivalenci rovnic:

$$\frac{dM^{ab}}{dt} = \frac{\lambda}{2\pi} \tilde{\mathcal{F}}_d^{ac} \hat{\mathcal{F}}_c^{db}. \tag{8.5}$$

$$\frac{d\hat{M}^{ab}}{dt} = \frac{\lambda}{2\pi} \tilde{\mathcal{C}}_d^{ac} \hat{\mathcal{C}}_c^{db}, \tag{8.6}$$

kde jsme zavedli označení:

$$\tilde{C}^{ab}_{c} = \frac{1}{2}(\hat{M}_S^{-1})(\hat{C}^{e}_{ab}(\hat{M})_{ed} + \tilde{C}^{e}_{db}(\hat{M})_{ae} - \tilde{C}^{e}_{ad}(\hat{M})_{eb}),$$
$$\hat{C}^{ab}_{c} = \frac{1}{2}(\tilde{M}_S^{-1})(\tilde{C}^{e}_{ab}(\hat{M})_{de} + \hat{C}^{e}_{ad}(\hat{M})_{eb} - \hat{C}^{e}_{db}(\hat{M})_{ae}). \tag{8.7}$$
$$\tilde{C}^{c}_{ab} = \bar{f}^{c}_{ab} - \hat{f}^{cd}_{a}(\hat{M})_{db}, \quad \hat{C}^{c}_{ab} = \bar{f}^{c}_{ab} - \hat{f}^{cd}_{a}(\hat{M})_{db}, \hat{M}_S = (\hat{M} + \hat{M}^T).$$

kde $\bar{f}$ resp. $\hat{f}$ jsou strukturní konstanty algebry $\mathfrak{h}$ resp. $\tilde{\mathfrak{h}}$. Pomocí vztahu (8.1) nalezneme vyjádření strukturních konstant $\bar{f}$, $\hat{f}$ pomocí strukturních konstant f, $\tilde{f}$ a matic K, Q, R, S. Nejprve připomeneme některé důležité vzorce:

$$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^{c} T_c, \quad [\tilde{T}^a, \tilde{T}^b] = \tilde{f^{ab}}_{c} \tilde{T}^c.$$
$$[T_a, \tilde{T}^b] = \tilde{f^{bc}}_{a} T_c - f_{ac}{}^{b} T_b$$

Rozepíšeme vztah (8.1) ve složkách, nejprve pro naše potřeby trochu změníme značení:

$$\begin{pmatrix} K & Q \\ R & S \end{pmatrix}^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}.$$

A nyní rozepíšeme do složek:

$$\left[\begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{\tilde{U}} \end{pmatrix}\right]_{a1} = \left[\begin{pmatrix} K & Q \\ R & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{\tilde{T}} \end{pmatrix}\right]_{a1} = \left[\begin{pmatrix} P\vec{T} + Q\vec{\tilde{T}} \\ R\vec{T} + S\vec{\tilde{T}} \end{pmatrix}\right]_{a1} \tag{8.8}$$

Bázový vektor se poté transformuje pomocí vzorce:

$$U_a = (PT)_a + (Q\tilde{T})_a = P_a{}^{b} T_b + Q_{ab} \tilde{T}^b. \tag{8.9}$$

Pro komutační relace dostáváme:

$$\begin{aligned}
[U_a, U_b] &= \bar{f_{ab}}^{c} U_c = \bar{f_{ab}}^{c}(P_c{}^{g} T_g + Q_{cg}\tilde{T}^g) = \\
&= [P_a{}^{d} T_d + Q_{ad}\tilde{T}^d, P_b{}^{e} T_e + Q_{be}\tilde{T}^e] = \\
&= P_a{}^{d} P_b{}^{e} [T_d, T_e] + P_a{}^{d} Q_{be} [T_d, \tilde{T}^e] + Q_{ad} P_b{}^{e} [\tilde{T}^d, T_e] + Q_{ad} Q_{be} [\tilde{T}^d, \tilde{T}^e] = \\
&= P_a{}^{d} P_b{}^{e} f_{de}{}^{g} T_g + P_a{}^{d} Q_{be}(\tilde{f^{eg}}_{d} T_g - f_{dg}{}^{e}\tilde{T}^g) + \\
&\quad + Q_{ad} P_b{}^{e}(\tilde{f^{dg}}_{e} T_g - f_{eg}{}^{d}\tilde{T}^g) + Q_{ad} Q_{be}\tilde{f^{de}}_{g}\tilde{T}^g = \\
&= (P_a{}^{d} Q_{be} f_{gd}{}^{e} + Q_{ad} P_b{}^{e} f_{ge}{}^{d} + Q_{ad} Q_{be}\tilde{f^{de}}_{g})\tilde{T}^g + \\
&\quad + (P_a{}^{d} P_b{}^{e} f_{de}{}^{g} + P_a{}^{d} Q_{be}\tilde{f^{eg}}_{b} + Q_{ad} P_b{}^{e}\tilde{f^{dg}}_{e}) T_g.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Porovnáním koeficientů u $\tilde{T}^g$ a T_g dostaneme následující vztahy:

$$\bar{f_{ab}}^{c} P^{c}_{g} = P_a{}^{d} P_b{}^{e} f_{de}{}^{g} + P_a{}^{d} Q_{be}\tilde{f^{eg}}_{b} + Q_{ad} P_b{}^{e}\tilde{f^{dg}}_{e}, \tag{8.11}$$

$$\bar{f_{ab}}^{c} Q_{cg} = P_a{}^{d} Q_{be} f_{gd}{}^{e} + Q_{ad} P_b{}^{e} f_{ge}{}^{d} + Q_{ad} Q_{be}\tilde{f^{de}}_{g}. \tag{8.12}$$

Vynásobením inverzní maticí dostaneme dvě možnosti vyjádření strukturních koeficientů:

$$\bar{f_{ab}}^{c} = (P^{-1})_g{}^{c}(P_a{}^{d} P_b{}^{e} f_{de}{}^{g} + P_a{}^{d} Q_{be}\tilde{f^{eg}}_{b} + Q_{ad} P_b{}^{e}\tilde{f^{dg}}_{e}), \tag{8.13}$$

$$\bar{f_{ab}}^{c} = (Q^{-1})^{gc}(P_a{}^{d} Q_{be} f_{gd}{}^{e} + Q_{ad} P_b{}^{e} f_{ge}{}^{d} + Q_{ad} Q_{be}\tilde{f^{de}}_{g}. \tag{8.14}$$

Dosud jsem nepřišel na způsob, jak přímo dokázat ekvivalenci těchto dvou vyjádření. V diplomové práci se pokusíme upravit rovnici (8.6) tak, abychom dostali rovnici (8.5), a tím dokázat ekvivalenci sigma modelů při Poisson-Lie T-pluralitě. Pokud se ukáže, že to není možné, pokusíme se zjistit proč tomu tak je, a případně nalézt případy kdy to lze provést.

Závěr

V úvodu práce jsme zavedli některé důležité definice z diferenciální geometrie, dále jsme krátce ukázali vybrané definice z kvantové teorie pole a renormalizace, nejprve z QED a poté i z teorie sigma modelů. Následně jsme podrobně přepočítali a ověřili výsledky z článků [1] a [2]. Ukázalo se, že závěry obou článků jsou správné, i když se v nich objevilo několik chyb, většinou šlo o překlepy a drobné nesrovnalosti. V poslední kapitole jsme naznačili směr dalšího výzkumu, a sice zobecnění našich výsledků na případ tzv. Poisson-Lie T-plurality.

Seznam použitých zdrojů

[1] G. Valent, C. Klimčík, R. Squellari One loop renormalizability of the Poisson-Lie sigma models, Phys. Lett. B 678, 2009, s. 143-148

[2] K. Sfetsos, K. Siampos, Quantum equivalence in Poisson-Lie T-duality, JHEP 082, 2009

[3] Josef Navrátil, Poisson-Lie T-duality as a duality of classical bosonic strings, bakalářská práce, 2010, FJFI ČVUT

[4] M. Fecko, Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, IRIS Bratislava, ISBN 80-89018-10-6, 2004

[5] C. Klimčík,Poisson-Lie T-duality, 1995, hep-th/9509095

[6] C.M. Hull, Lectures on non-linear σ-models and strings, 1988, Cambridge university

[7] M. Peskin, D. Schröder, Introduction to quantum field theory, Addison-Wesley Pub. Co., ISBN 978-0201503975, 1995

[8] B. Fridling, A. Van de Ven, Renormalization of generalized two-demnsional nonlinear σ-models, Nucl. Phys. B 268, 2010, 1986, s. 719-737

[9] K. Sfetsos, Canonical equivalence of non-isometric σ-models and Poisson-Lie T-duality, Nucl. Phys. B 517, 1995, s. 549-566

[10] R. von Unge, Poisson-Lie T-plurality, 2002, hep-th/0205245