České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika

BCH formule a transformace grupových souřadnic pro šestirozměrné Drinfeldovy doubly

BCH formula and transformation of group coordinates for six-dimensional Drinfeld doubles

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Vypracoval: Bc. Filip Petrásek
Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Rok: 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svůj výzkumný úkol vypracoval samostatně a použil pouze literaturu uvedenou v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/200 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne ....

....

Bc. Filip Petrásek

Poděkování

Děkuji prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc. za vedení mého výzkumného úkolu a za podnětné návrhy, které jej obohatily.

Dále bych chtěl poděkovat své rodině a především své přítelkyni za bezmeznou podporu a trpělivost při psaní této práce.

Bc. Filip Petrásek

Název práce:
BCH formule a transformace grupových souřadnic pro šestirozměrné Drinfeldovy doubly

Autor: Bc. Filip Petrásek

Obor: Matematické inženýrství
Druh práce: Výzkumný úkol

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská,
České vysoké učení technické v Praze
Konzultant: —

Abstrakt: V této práci jsou popsány dvě matematické metody umožňující nalézt transformaci grupových souřadnic pro řešitelné Drinfeldovy doubly. První je metoda BCH formule. Drinfeldův double je souvislá Lieova grupa. Využitím věty o rozkladu řešitelné souvislé Lieovy grupy zavádíme grupové souřadnice na Drinfeldově doublu. Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) formule vyjadřuje řešení exponenciální rovnice spojující Lieovu grupu a přidruženou Lieovu algebru. Ze speciálních tvarů komutačních relací prvků Lieovy algebry jsou odvozeny komutační vztahy pro odpovídající prvky Lieovy grupy. Dále je popsána metoda využívající věrnou reprezentaci. Použitím obou metod je nalezena transformace grupových souřadnic Drinfeldova doublu pro konkrétní rozklady.

Klíčová slova: Drinfeldův double, BCH formule, věrná reprezentace, grupové souřadnice.

Title:
BCH formula and transformation of group coordinates for six-dimensional Drinfeld doubles

Author: Bc. Filip Petrásek

Abstract: In this work two mathematical methods that allow us to find the transformation of group coordinates for solvable Drinfeld doubles are presented. The first one is the BCH formula method. The Drinfeld double is a connected Lie group. Assuming the theorem on the decomposition of solvable connected Lie groups we introduce Drinfeld double group coordinates. Considering Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) formula as the solution of the exponential equation linking Lie groups and associated Lie algebras and supposing particular commutation relations for Lie algebra elements we derive commutation formulas for corresponding Lie group elements. Another method using the faithful representation is presented. Using both methods we find the transformation of Drinfeld double group coordinates for specific decompositions.

Key words: Drinfeld double, BCH formula, faithful representation, group coordinates.

Obsah

Úvod

Drinfeldův double hraje významnou úlohu při konstrukci tzv. Poisson-Lie T-duálních σ-modelů používaných v teorii strun. Řešení pohybových rovnic σ-modelu v zakřiveném pozadí lze nalézt pomocí Poisson-Lie T-duality, která v některých případech umožňuje tyto rovnice převést na pohybové rovnice v plochém pozadí. Při této duální transformaci se využívají transformace grupových souřadnic isomorfních Drinfeldových doublů.

V první kapitole jsou shrnuty důležité poznatky z teorie Drinfeldova doublu, zejména zde diskutujeme pojem grupových souřadnic na Drinfeldově doublu. Zabýváme se výhradně šestirozměrnými Drinfeldovými doubly, přičemž využíváme poznatky a klasifikaci reálných Drinfeldových doublů podle práce [1].

Ve druhé kapitole se seznamujeme s obecným tvarem BCH formule jako s řešením exponenciální rovnice spojující Lieovu grupu a přidruženou Lieovu algebru. Zkoumáme speciální tvary komutačních relací za účelem odvození kompaktních komutačních formulí pro odpovídající prvky Lieovy grupy.

Ve třetí kapitole popisujeme metodu využívající právě speciální tvary BCH formule k získání transformace grupových souřadnic isomorfních Drinfeldových doublů. Dále popisujeme jinou metodu, která pracuje na základě věrné reprezentace, která je jednou z definujících realizací Lieovy algebry, resp. Lieovy grupy. Aplikací metody BCH formule a především odvozených speciálních tvarů BCH formule následně nacházíme transformaci grupových souřadnic Drinfeldova doublu $(5|1) \mapsto (1|5)$, resp. $(7_0|1) \mapsto (1|7_0)$. Získané výsledky ověřujeme metodou věrné reprezentace.

Kapitola 1

Drinfeldův double

1.1 Definice Drinfeldova doublu

Definice 1.1.1 *Drinfeldův double je souvislá Lieova grupa D taková, že její Lieovu algebru $\mathcal{D}$, která je vybavená symetrickou, ad-invariantní, nedegenerovanou bilineární formou $\langle\, ,\, \rangle$, lze rozložit na dvě maximálně isotropní Lieovy podalgebry $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ a na úrovni vektorových prostorů je $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \tilde{\mathcal{G}}$. Uspořádanou trojici $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ nazýváme Maninova trojice.*

V této práci se budeme zabývat reálnými šestirozměrnými Drinfeldovými doubly.

Z definice 1.1.1 plyne, že dimenze Lieových algeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ jsou stejné a jejich báze $\{X_i\} \in \mathcal{G}$, $\{\tilde{X}^i\} \in \tilde{\mathcal{G}}$, $i = 1, 2, 3$, lze volit ve tvaru

$$\langle X_i, X_j \rangle = 0, \quad \langle X_i, \tilde{X}^j \rangle = \delta_i^j, \quad \langle \tilde{X}^i, \tilde{X}^j \rangle = 0.$$

Lieova závorka je definována strukturními koeficienty

$$[X_i, X_j] = {F_{ij}}^k X_k, \quad [\tilde{X}^i, \tilde{X}^j] = {\tilde{F}^{ij}}_k \tilde{X}^k.$$

Z ad-invariance bilineární formy plyne, že struktura Lieovy algebry $\mathcal{D}$ je určena jako

$$[X_i, \tilde{X}^j] = {F_{ki}}^j \tilde{X}^k + {\tilde{F}^{jk}}_i X_k. \tag{1.1}$$

1.2 Souřadnice na Drinfeldově doublu

Definice 1.2.1 *Lieova grupa je diferencovatelná varieta G vybavená binární operací $\cdot : G \times G \mapsto G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ takovou, že*

(i) $(G, \cdot)$ *je grupa,*

(ii) zobrazení $(x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ *je hladké.*

Poznámka 1.2.2 *Dále budeme používat zkrácené označení grupového násobení*

$$xy := x \cdot y.$$

Drinfeldův double je souvislá Lieova grupa a podle definice 1.2.1 tedy souvislá diferencovatelná varieta. Každý bod na této varietě odpovídá prvku Lieovy grupy. Lze tedy zavést grupové souřadnice na Drinfeldově doublu.

Drinfeld ukázal, že každý prvek l Drinfeldova doublu D lze lokálně zapsat jako

$$l = g\tilde{g}, \quad g \in G, \, \tilde{g} \in \tilde{G}.$$

V této práci se zabýváme řešitelnými Drinfeldovými doubly, z tohoto hlediska tedy s výhodou využijeme následující větu.

Věta 1.2.3 *Každou řešitelnou souvislou Lieovu grupu G lze zapsat ve tvaru součinu*

$$G = \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_m$$

jednoparametrických podgrup γ_i, kde

$$G_k = \gamma_{k+1}\gamma_{k+2} \cdots \gamma_m$$

pro každé k, $1 \leq k < m$ je normální podgrupa v G.

Poznámka 1.2.4 *Věta 1.2.3 nám pro řešitelné souvislé Lieovy grupy umožňuje každý prvek $g \in G$ nebo $\tilde{g} \in \tilde{G}$ zapsat pomocí různých parametrizací, např.*

$$g = g_1 g_2 g_3, \quad g = g_3 g_2 g_1.$$

Uvažujme exponenciální zobrazení Lieovy algebry $\mathcal{G}$ do Lieovy grupy G,

$$exp : \mathcal{G} \mapsto G.$$

Jednoparametrické podgrupy příslušející bazickým vektorům $\{X_i\}$ vyjádříme jako

$$\gamma_i(x_i) = g_i = exp(x_i X_i), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad X_i \in \mathcal{G}.$$

Podle věty 1.2.3 můžeme libovolný prvek l Drinfeldova doublu D vyjádřit jako

$$\begin{aligned} l &= g\tilde{g} = g_1 g_2 g_3 \tilde{g}^1 \tilde{g}^2 \tilde{g}^3 \\ &= exp(x_1 X_1) exp(x_2 X_2) exp(x_3 X_3) exp(\tilde{x}_1 \tilde{X}^1) exp(\tilde{x}_2 \tilde{X}^2) exp(\tilde{x}_3 \tilde{X}^3). \end{aligned}$$

Parametry $(x_1, x_2, x_3, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ plně určují l jako prvek Drinfeldova doublu, resp. jako bod na varietě. Tyto parametry tedy můžeme ztotožnit s grupovými souřadnicemi na Drinfeldově doublu.

Definice 1.2.5 *Nechť D je šestirozměrný Drinfeldův double s rozkladem $(\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ a nechť $\{X_i\} \in \mathcal{G}$, $\{\tilde{X}^i\} \in \tilde{\mathcal{G}}$ jsou příslušné báze. Pak uspořádanou 6-tici*

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$$

takovou, že libovolný prvek $l \in D$ lze zapsat jako

$$l = exp(x_1 X_1) exp(x_2 X_2) exp(x_3 X_3) exp(\tilde{x}_1 \tilde{X}^1) exp(\tilde{x}_2 \tilde{X}^2) exp(\tilde{x}_3 \tilde{X}^3),$$

nazveme grupovými souřadnicemi na Drinfeldově doublu D v rozkladu $(\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$.

1.3 Bianchiho algebry

Každou reálnou třírozměrnou Lieovu algebru lze změnou báze převést na jednu z 11 tvarů Bianchiho algeber, které reprezentují neisomorfní Lieovy algebry.

9 : $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2, \quad (\text{tj.}\ \mathfrak{so}(3)),$

8 : $[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2, \quad (\text{tj.}\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})),$

$\mathbf{7}_a$: $[X_1, X_2] = aX_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0,\ [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, \quad a > 0,$

$\mathbf{7}_0$: $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2,$

$\mathbf{6}_a$: $[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0,\ [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, \quad a > 0, \quad a \neq 0,$

$\mathbf{6}_0$: $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = -X_2,$

5 : $[X_1, X_2] = -X_2,\ [X_2, X_3] = 0,\ [X_3, X_1] = X_3,$

4 : $[X_1, X_2] = -X_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0,\ [X_3, X_1] = X_3,$

3 : $[X_1, X_2] = -X_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0,\ [X_3, X_1] = X_2 + X_3,$

2 : $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = 0,$

1 : $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = 0,\ [X_3, X_1] = 0.$

Klasifikace reálných šestirozměrných neisomorfních Drinfeldových doublů byla provedena v práci [1], na kterou se budeme dále odkazovat.

Bylo nalezeno 22 tříd reálných šestirozměrných Drinfeldových doublů $D_{(1)}, \ldots, D_{(22)}$ s povolenými rozklady do příslušných neisomorfních Maninových trojic. Přehledné seznamy jsou uvedeny v práci [1].

Dále budeme používat zápis Maninových trojic pomocí Bianchiho algeber, které udávají příslušné komutační relace.

Kapitola 2

Baker-Campbell-Hausdorff formule

2.1 Obecný tvar BCH formule

Uvažujme exponenciální zobrazení Lieovy algebry $\mathcal{G}$ do Lieovy grupy G,

$$exp : \mathcal{G} \mapsto G$$

a rovnici ve tvaru

$$exp(U) = exp(X)exp(Y), \quad X, Y \in \mathcal{G}, \tag{2.1}$$

kde $U \in \mathcal{G}$ je hledaná neznámá.

Řešení rovnice 2.1 pro obecně nekomutující $X, Y \in \mathcal{G}$ popisuje Baker-Campbell-Hausdorff formule.

Označme

$$X \star Y = U(X, Y) = ln(exp(X)exp(Y)).$$

Věta 2.1.1 *Nechť G je jednoduše souvislá Lieova grupa s Lieovou algebrou $\mathcal{G}$ a nechť $exp : \mathcal{G} \mapsto G$ je exponenciální zobrazení. Pak obecné řešení rovnice 2.1 je tvaru nekonečné sumy*

$$X \star Y = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i+s_i>0 \\ 1\leq i\leq n}} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(r_i+s_i)\right)^{-1}}{r_1!s_1!\cdots r_n!s_n!} [X^{r_1}Y^{s_1}X^{r_2}Y^{s_2}\dots X^{r_n}Y^{s_n}], \tag{2.2}$$

kde

$$[X^{r_1}Y^{s_1}\dots X^{r_n}Y^{s_n}] = \underbrace{[X,[X,\dots[X,}_{r_1}\underbrace{[Y,[Y,\dots[Y,}_{s_1}\dots\underbrace{[X,[X,\dots[X,}_{r_n}\underbrace{[Y,[Y,\dots Y}_{s_n}]]\dots]]. \tag{2.3}$$

Poznámka 2.1.2 *Výraz 2.3 je roven nule pokud $s_n > 1$ nebo pokud $s_n = 0$ a $r_n > 1$.*

Pro přehlednost uvedeme několik prvních členů nekonečné sumy 2.2.

$$
\begin{aligned}
X \star Y = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] - \frac{1}{24}[X,[Y,[X,Y]]] \\
-\frac{1}{720}([X,[X,[X,[X,Y]]]] + [Y,[Y,[Y,[Y,X]]]]) \\
+\frac{1}{360}([X,[Y,[Y,[Y,X]]]] + [Y,[X,[X,[X,Y]]]]) \\
+\frac{1}{120}([X,[Y,[X,[Y,X]]]] + [Y,[X,[Y,[X,Y]]]]) \\
+\dots
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Poznámka 2.1.3 *Pro obecné řešení 2.2 rovnice 2.1 platí*

$$U(Y,X) = -U(-X,-Y), \tag{2.5}$$

tj.

$$Y \star X = -((-X) \star (-Y)). \tag{2.6}$$

Důkaz. Označme

$$N := \sum_{i=1}^{n} r_i + s_i.$$

Sumu 2.2 lze zapsat alternativním způsobem jako

$$U(X,Y) = \sum_{N=1}^{\infty} U_N(X,Y),$$

kde $U_N(X,Y)$ obsahuje pouze výrazy typu 2.3 délky N s příslušnými koeficienty, tj.

$$U_N(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{\substack{r_i+s_i>0\\ \sum_{i=1}^{n} r_i+s_i=N}}\frac{1}{r_1!s_1!\cdots r_n!s_n!}[X^{r_1}Y^{s_1}X^{r_2}Y^{s_2}\dots X^{r_n}Y^{s_n}]. \tag{2.7}$$

Z tvaru nekonečné sumy 2.7 je zřejmé, že ve výrazu $U_N(X,Y)$ se vyskytují všechny permutace 2.3 s koeficienty danými patřičnými příspěvky, které odpovídají možným kombinacím sčítacích indexů r_i, s_i, resp. n.

Pro pevné N zkoumejme výrazy typu $[X^{r_1}Y^{s_1}\dots X^{r_n}Y^{s_n}]$ obsažené v $U_N(X,Y)$ takové, které na sebe vzájemně přecházejí při záměně $X \leftrightarrow Y$. Stačí ukázat, že se u těchto dvojic jejich číselné koeficienty shodují pro N liché, resp. shodují až na znaménko pro N sudé, tj. že pro každé $N \in \mathbb{N}$ platí

$$U_N(Y,X) = (-1)^{N+1}U_N(X,Y). \tag{2.8}$$

Podle výrazu 2.7 vypočteme

$$\begin{aligned}
U_1(X,Y) &= X+Y,\\
U_2(X,Y) &= \frac{1}{4}[XY]-\frac{1}{4}[YX],\\
U_3(X,Y) &= \frac{1}{36}[XXY]-\frac{1}{18}[XYX]-\frac{1}{18}[YXY]+\frac{1}{36}[YYX],\\
U_4(X,Y) &= -\frac{1}{48}[XYXY]+\frac{1}{48}[YXYX],\\
&\dots
\end{aligned}$$

Platnost vztahu 2.8 je zřejmá pro nízká N, důkaz pro obecné N vyžaduje manipulaci s nekonečnou sumou 2.7, která je značně nepřehledná.

K dokázání vztahu 2.5 však lze použít přímo rovnici 2.1.

Předpokládejme tedy, že $U(X,Y)$ řeší rovnici 2.1, tj. platí

$$exp(U(X,Y)) = exp(X)exp(Y). \tag{2.9}$$

Pro inverzní grupové prvky z rovnosti 2.9 plyne

$$\begin{aligned}
exp(-U(X,Y)) &= (exp(U(X,Y)))^{-1} = (exp(X)exp(Y))^{-1}\\
&= exp(Y)^{-1}exp(X)^{-1} = exp(-Y)exp(-X),
\end{aligned}$$

tj.

$$exp(-U(X,Y)) = exp(-Y)exp(-X).$$

Odtud po dosazení $X \leftrightarrow -X$ a $Y \leftrightarrow -Y$ dostáváme

$$exp(-U(-X,-Y)) = exp(Y)exp(X).$$

Zároveň platí

$$exp(U(Y,X)) = exp(Y)exp(X),$$

odkud dále získáme rovnost

$$exp(-U(-X,-Y)) = exp(U(Y,X)). \tag{2.10}$$

Zobrazení $exp : \mathcal{G} \mapsto G$ je lokální difeomorfismus okolí $\vec{0} \in \mathcal{G}$ a tedy z rovnosti 2.10 plyne lokální platnost vztahu

$$-U(-X,-Y) = U(Y,X).$$

$\square$

Poznámka 2.1.4 *BCH formuli lze vyjádřit v integrálním tvaru*

$$X \star Y = X + \left(\int_0^1 \psi(e^{adX} e^{t\,adY}) dt \right) Y, \tag{2.11}$$

kde

$$\psi(z) = \frac{z \ln z}{z - 1},$$

$ad : \mathcal{G} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathcal{G})$ *je adjungovaná akce Lieovy algebry* $\mathcal{G}$ *definována jako*

$$adX(Y) = [X, Y].$$

Důkaz. V literatuře se častěji objevuje jiný integrální tvar BCH formule

$$X \star Y = Y + \left(\int_0^1 \varphi(e^{t\,adX} e^{adY}) dt \right) X, \tag{2.12}$$

kde

$$\varphi(z) = \frac{\ln z}{z - 1}.$$

Důkaz vztahu 2.12 lze nalézt v práci [3].

Ukážeme, že integrální tvary BCH formule 2.11 a 2.12 jsou ekvivalentní.

Aplikací vztahu 2.6 na integrální tvar 2.12 s využitím $ad(-X) = -adX$ dostaneme

$$Y \star X = -((-X) \star (-Y)) = -(-Y + \left(\int_0^1 \varphi(e^{t\,ad(-X)} e^{ad(-Y)}) dt \right) (-X))$$

$$= Y + \left(\int_0^1 \varphi(e^{-t\,adX} e^{-adY}) dt \right) X = Y + \left(\int_0^1 \varphi((e^{adY} e^{t\,adX})^{-1}) dt \right) X.$$

Dále platí

$$\varphi(z^{-1}) = \frac{\ln(z^{-1})}{z^{-1} - 1} = \frac{-z \ln z}{1 - z} = \frac{z \ln z}{z - 1} = \psi(z),$$

odkud plyne

$$Y \star X = Y + \left(\int_0^1 \psi(e^{adY} e^{t\,adX}) dt \right) X.$$

Záměnou $X \leftrightarrow Y$ získáme vztah

$$X \star Y = X + \left(\int_0^1 \psi(e^{adX} e^{t\,adY}) dt \right) Y,$$

který se shoduje s výrazem 2.11.

□

Poznámka 2.1.5 *BCH formuli lze také zapsat ve tvaru*

$$X \star Y = X + \frac{adXe^{adX}}{e^{adX}-1}Y + O(Y^2). \tag{2.13}$$

Důkaz. Vztah 2.13 snadno odvodíme z integrálního tvaru BCH formule 2.11.

Operátorovou funkci

$$\psi(e^{adX}e^{t\,adY}) = \frac{e^{adX}e^{t\,adY}\ln(e^{adX}e^{t\,adY})}{e^{adX}e^{t\,adY}-1} \tag{2.14}$$

vystupující v integrandu výrazu 2.11 nahradíme Taylorovým rozvojem řádu $O(Y)$, tj. budeme uvažovat pouze členy nezávislé na Y, resp. adY.

Platí

$$e^{adX}e^{t\,adY} = e^{adX}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n(adY)^n}{n!}\right) = e^{adX}(1+O(Y)) = e^{adX} + O(Y),$$

$$\ln(e^{adX}e^{t\,adY}) = \ln(e^{adX}+O(Y)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(e^{adX}-1+O(Y))^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(e^{adX}-1)^n}{n} + O(Y) = \ln(e^{adX}) + O(Y) = adX + O(Y),$$

$$(e^{adX}e^{t\,adY}-1)^{-1} = (e^{adX}+O(Y)-1)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(e^{adX}+O(Y))^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(e^{adX})^n + O(Y) = (e^{adX}-1)^{-1} + O(Y).$$

Po dosazení odvozených vztahů do 2.14 dostaneme

$$\psi(e^{adX}e^{t\,adY}) = (e^{adX}+O(Y))(adX+O(Y))(\frac{1}{e^{adX}-1}+O(Y)).$$

Z vlastnosti, že operátorové funkce stejného operátoru vzájemně komutují, plyne

$$\psi(e^{adX}e^{t\,adY}) = \frac{adXe^{adX}}{e^{adX}-1} + O(Y). \tag{2.15}$$

Pak po dosazení 2.15 do integrálního tvaru BCH formule 2.11 a následné integraci přes proměnnou t v prvním členu dostaneme

$$X \star Y = X + \left(\int_0^1\left(\frac{adXe^{adX}}{e^{adX}-1}+O(Y)\right)dt\right)Y = X + \frac{adXe^{adX}}{e^{adX}-1}Y + O(Y^2).$$

$\square$

2.2 Speciální tvary BCH formule

Obecný tvar BCH formule 2.2 je pro praktické výpočty nevhodný. Budeme tedy dále zkoumat speciální tvary BCH formule v závislosti na pevně zvolených komutačních relacích.

Při odvozování budeme využívat následující vlastnosti:

$$exp(X)exp(Y) = exp(X \star Y), \tag{2.16}$$

$$exp(Y)exp(X) = exp(-((-X) \star (-Y))). \tag{2.17}$$

2.2.1 Komutační relace $[X, Y] = 0$

Nejdříve uvažujme vzájemně komutující prvky X a Y. Z obecného tvaru BCH formule 2.2, resp. 2.4 pak plyne

$$X \star Y = X + Y, \tag{2.18}$$

s využitím 2.16 dostáváme

$$exp(X)exp(Y) = exp(X + Y) = exp(Y + X) = exp(Y)exp(X).$$

V případě komutujících prvků Lieovy algebry tedy platí

$$exp(X)exp(Y) = exp(Y)exp(X), \tag{2.19}$$

tj. komutují i příslušné prvky Lieovy grupy.

2.2.2 Komutační relace $[X, [X, Y]] = [Y, [X, Y]] = 0$

Uvažujme komutační relace ve tvaru

$$[X, [X, Y]] = [Y, [X, Y]] = 0. \tag{2.20}$$

Z obecného tvaru BCH formule 2.2, resp. 2.4 pak plyne

$$X \star Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]. \tag{2.21}$$

Podle 2.16 a 2.17 platí

$$exp(X)exp(Y) = exp(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]),$$

$$exp(Y)exp(X) = exp(X + Y - \frac{1}{2}[X, Y]).$$

Pak dostáváme

$$exp(X)exp(Y) = exp(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]) = exp(X + Y - \frac{1}{2}[X, Y] + [X, Y])$$

$$= exp(X + Y - \frac{1}{2}[X, Y])exp([X, Y]) = exp(Y)exp(X)exp([X, Y]).$$

Pro komutační relace 2.20 tedy platí

$$exp(X)exp(Y) = exp(Y)exp(X)exp([X, Y]). \tag{2.22}$$

2.2.3 Komutační relace $[X, Y] = sY$, $s \in \mathbb{R}$

Uvažujme komutační relace ve tvaru

$$[X, Y] = sY, \quad s \in \mathbb{R}, \quad s \neq 0. \tag{2.23}$$

Z obecného tvaru BCH formule 2.2 plyne, že nelineární členy v Y jsou rovny nule. Tato skutečnost nám umožňuje použít alternativní tvar BCH formule 2.13, kde

$$O(Y^2) = 0.$$

Adjungovanou akci lze v tomto případě vyjádřit jako

$$adX(Y) = [X, Y] = sY.$$

Poznámka 2.2.1 *Operátorové funkce lze definovat pomocí Taylorova rozvoje, tj.*

$$e^{adX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(adX)^k}{k!},$$

pak

$$e^{adX}Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(adX)^k}{k!}Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}Y = e^sY.$$

Analogicky

$$(e^{adX} - 1)^{-1}Y = (e^s - 1)^{-1}Y.$$

Poznamenejme, že operátorové funkce stejného operátoru navzájem komutují.

Použitím 2.13 a poznámky 2.2.1 tedy dostáváme

$$X \star Y = X + \frac{adXe^{adX}}{e^{adX} - 1}Y = X + \frac{s \cdot e^s}{e^s - 1}Y. \tag{2.24}$$

Podle 2.16 a 2.17 platí

$$exp(X)exp(Y) = exp(X + \frac{s \cdot e^s}{e^s - 1}Y),$$

$$exp(Y)exp(X) = exp(X - \frac{s \cdot e^{-s}}{e^{-s} - 1}Y).$$

Pak dostáváme

$$exp(X)exp(Y) = exp(X + \frac{s \cdot e^s}{e^s - 1}Y) = exp(X - \frac{s \cdot e^{-s}}{e^{-s} - 1}e^sY) = exp(e^sY)exp(X).$$

Pro komutační relace 2.23 tedy platí

$$exp(X)exp(Y) = exp(e^sY)exp(X). \tag{2.25}$$

Dále označme

$$\lambda(x) = \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1}.$$

Poznámka 2.2.2 *V bodě $x = 0$ lze funkci $\lambda(x)$ spojitě dodefinovat*

$$\lambda(0) := \lim_{x \to 0} \lambda(x) = 1. \tag{2.26}$$

Můžeme tedy uvažovat $s \in \mathbb{R}$, kde pro $s = 0$ odpovídá tvar BCH formule výrazu 2.18.

Pak lze analogicky ukázat, že pro komutační relace

$$[X, Y] = rX, \quad r \in \mathbb{R}$$

platí

$$X \star Y = \lambda(r)X + Y, \tag{2.27}$$

$$exp(X)exp(Y) = exp(Y)exp(e^r X). \tag{2.28}$$

2.2.4 Komutační relace $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = 0$, $[Y, Z] = aX$, $a \in \mathbb{R}$

Uvažujme komutační relace ve tvaru

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = 0, \quad [Y, Z] = aX, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{2.29}$$

Z obecného tvaru BCH formule 2.2 plyne

$$X \star Y = Y + f(a)X + g(a)Z. \tag{2.30}$$

Pokud nyní položíme $Z = rX$, abychom mohli využít výsledky předchozího případu, dostaneme

$$[X, Y] = rX, \quad [X, rX] = 0, \quad [Y, rX] = -r^2 X = aX.$$

tj.

$$a = -r^2$$

Odtud pak porovnáním 2.27 a 2.30 pro $a = -r^2$ dostaneme

$$\lambda(r)X + Y = Y + f(-r^2)X + r \cdot g(-r^2)X = Y + (f(-r^2) + r \cdot g(-r^2))X,$$

tj. máme podmínku pro funkce f a g ve tvaru

$$\lambda(r) = f(-r^2) + r \cdot g(-r^2). \tag{2.31}$$

Podmínka 2.31 vyjadřuje jednoznačný rozklad funkce $\lambda(r)$ na sudou a lichou funkci proměnné r. Můžeme tedy vyjádřit neznámé funkce jako

$$f(-r^2) = \frac{1}{2}(\lambda(r) + \lambda(-r)) = \frac{1}{2}\left(\frac{r \cdot e^r}{e^r - 1} - \frac{r \cdot e^{-r}}{e^{-r} - 1}\right) = \frac{r}{2}\frac{\frac{e^{-r} - e^r}{2}}{1 - \frac{e^{-r} + e^r}{2}}, \tag{2.32}$$

$$g(-r^2) = \frac{1}{2r}(\lambda(r) - \lambda(-r)) = \frac{1}{2r}\left(\frac{r \cdot e^r}{e^r - 1} + \frac{r \cdot e^{-r}}{e^{-r} - 1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Funkce g je tedy konstantní funkce. Do výrazu 2.32 musíme dále dosadit $a = -r^2$, kde $r \in \mathbb{C}$, a vyjádřit funkci f jako proměnnou od $a \in \mathbb{R}$, tj. je třeba uvažovat signaturu a.

Odtud dostáváme následující výsledky

$$g(a) = \frac{1}{2}, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$f^+(a) = \frac{\sqrt{a}}{2}\frac{\sin\sqrt{a}}{1-\cos\sqrt{a}}, \quad a > 0, \tag{2.33}$$

$$f^-(a) = \frac{\sqrt{-a}}{2}\frac{\sinh\sqrt{-a}}{\cosh\sqrt{-a}-1}, \quad a < 0. \tag{2.34}$$

Poznámka 2.2.3 *V bodě $a = 0$ lze funkci $f(a)$ spojitě dodefinovat*

$$f(0) := \lim_{a\to 0_+} f^+(a) = \lim_{a\to 0_-} f^-(a) = 1.$$

Pro $a = 0$ odpovídá tvar BCH formule výrazu 2.21.

BCH formule má tedy pro komutační relace 2.29 tvar

$$X \star Y = Y + f(a)X + \frac{1}{2}Z, \tag{2.35}$$

$$Y \star X = Y + f(a)X - \frac{1}{2}Z, \tag{2.36}$$

kde $f(a)$ je explicitně určená funkce dle 2.33, resp. 2.34.

Podle 2.16 a 2.17 dále platí

$$exp(X)exp(Y) = exp(Y + f(a)X + \frac{1}{2}Z),$$

$$exp(Y)exp(X) = exp(Y + f(a)X - \frac{1}{2}Z). \tag{2.37}$$

Chceme odvodit vztah pro záměnu pořadí prvků Lieovy grupy příslušejícím X a Y.

Za tímto účelem předpokládejme hledaný vztah ve tvaru

$$exp(X)exp(Y) = exp(\tilde{Y})exp(\tilde{X}), \tag{2.38}$$

tj.

$$X \star Y = \tilde{Y} \star \tilde{X}, \tag{2.39}$$

kde

$$\tilde{Y} = p(a)Y, \quad \tilde{X} = q(a)X + r(a)Z \tag{2.40}$$

a $p(a)$, $q(a)$, $r(a)$ jsou zatím neznámé funkce.

Pak podle 2.40 a komutačních relací 2.29 zřejmě platí

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = q(a)p(a)Z - a \cdot r(a)p(a)X =: \tilde{Z},$$
$$[\tilde{X}, \tilde{Z}] = 0, \quad [\tilde{Y}, \tilde{Z}] = a \cdot p(a)^2 \tilde{X} =: \tilde{a}\tilde{X}. \tag{2.41}$$

Pro pravou stranu výrazu 2.38, resp. 2.39 lze tedy dle komutačních relací 2.41 využít analogicky výraz 2.36, resp. 2.37 ve tvaru

$$\tilde{Y} \star \tilde{X} = \tilde{Y} + f(\tilde{a})\tilde{X} - \frac{1}{2}\tilde{Z}, \tag{2.42}$$
$$exp(\tilde{Y})exp(\tilde{X}) = exp(\tilde{Y} + f(\tilde{a})\tilde{X} - \frac{1}{2}\tilde{Z}).$$

Po dosazení výrazů 2.35 a 2.42 do 2.39 dostaneme

$$Y + f(a)X + \frac{1}{2}Z = \tilde{Y} + f(\tilde{a})\tilde{X} - \frac{1}{2}\tilde{Z}.$$

Pak z 2.40 a 2.41 plyne

$$Y+f(a)X+\frac{1}{2}Z = p(a)Y+f(a\cdot p(a)^2)(q(a)X+r(a)Z)-\frac{1}{2}(q(a)p(a)Z-a\cdot r(a)p(a)X). \tag{2.43}$$

Porovnáním koeficientů u Y zjistíme, že musí platit

$$p(a) = 1. \tag{2.44}$$

Pak podle 2.44 přejde 2.43 na tvar

$$Y + f(a)X + \frac{1}{2}Z = Y + f(a)(q(a)X + r(a)Z) - \frac{1}{2}(q(a)Z - a \cdot r(a)X). \tag{2.45}$$

Porovnáním koeficientů u X, resp. Z ve 2.45 získáme definující podmínky pro neznámé funkcí $q(a)$ a $r(a)$

$$f(a) = f(a)q(a) + \frac{1}{2}a \cdot r(a), \quad 1 = 2f(a)r(a) - q(a).$$

Odtud po úpravě získáme vyjádření neznámých funkcí jako

$$p(a) = 1, \quad q(a) = \frac{4f(a)^2 - a}{4f(a)^2 + a}, \quad r(a) = \frac{4f(a)}{4f(a)^2 + a}.$$

Pokud uvážíme explicitní tvar funkce f podle 2.33, resp. 2.34 dostaneme

$$q^+(a) = \cos\sqrt{a}, \quad r^+(a) = \frac{\sin\sqrt{a}}{\sqrt{a}}, \quad a > 0,$$

$$q^-(a) = \cosh\sqrt{-a}, \quad r^-(a) = \frac{\sinh\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}}, \quad a < 0.$$

Výsledný vztah pro záměnu prvků Lieovy grupy pro komutační relace 2.29 má tvar

$$exp(X)exp(Y) = exp(Y)exp(\cos\sqrt{a}X)exp(\frac{\sin\sqrt{a}}{\sqrt{a}}[X,Y]), \quad a > 0, \tag{2.46}$$

$$exp(X)exp(Y) = exp(Y)exp(X)exp([X,Y]), \quad a = 0,$$

$$exp(X)exp(Y) = exp(Y)exp(\cosh\sqrt{-a}X)exp(\frac{\sinh\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}}[X,Y]), \quad a < 0.$$

Kapitola 3

Transformace grupových souřadnic Drinfeldova doublu

3.1 Metoda BCH formule

V této části popisujeme metodu využívající BCH formule k nalezení transformace grupových souřadnic pro šestirozměrné isomorfní Drinfeldovy doubly.

Uvažujme Drinfeldův double D a jeho dva různé rozklady, resp. Maninovy trojice, a jim odpovídající báze

$$(\mathcal{G}|\tilde{\mathcal{G}}), \quad \{X_i\} \in \mathcal{G}, \quad \{\tilde{X}^i\} \in \tilde{\mathcal{G}},$$

$$(\mathcal{H}|\tilde{\mathcal{H}}), \quad \{T_i\} \in \mathcal{H}, \quad \{\tilde{T}^i\} \in \tilde{\mathcal{H}}.$$

Tyto neisomorfní Maninovy trojice odpovídají isomorfním Drinfeldovým doublům s transformační maticí $C \in \mathbb{R}^{6,6}$ takovou, že

$$\mathbf{T} = C\,\mathbf{X}, \tag{3.1}$$

kde $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, \tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \tilde{X}^3)^T$ a $\mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3, \tilde{T}^1, \tilde{T}^2, \tilde{T}^3)^T$.

Konkrétní transformační matice C k daným rozkladům lze nalézt v práci [1].

Uvažujme libovolný prvek $l \in D$, pak podle definice 1.2.5 máme na Drinfeldově doublu D dva systémy grupových souřadnic

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \text{ v rozkladu } (\mathcal{G}|\tilde{\mathcal{G}}),$$

$$l = exp(x_1 X_1) exp(x_2 X_2) exp(x_3 X_3) exp(\tilde{x}_1 \tilde{X}^1) exp(\tilde{x}_2 \tilde{X}^2) exp(\tilde{x}_3 \tilde{X}^3), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3) \text{ v rozkladu } (\mathcal{H}|\tilde{\mathcal{H}}),$$

$$l = exp(y_1 T_1) exp(y_2 T_2) exp(y_3 T_3) exp(\tilde{y}_1 \tilde{T}^1) exp(\tilde{y}_2 \tilde{T}^2) exp(\tilde{y}_3 \tilde{T}^3). \tag{3.3}$$

Aplikací 3.1 a speciálních tvarů BCH formulí lze v určitých případech, které závisejí na komutačních relací bazických vektorů rozkladu $(\mathcal{G}|\tilde{\mathcal{G}})$, převést výraz 3.3 do tvaru, který bude dle pořadí bazických vektorů odpovídat výrazu 3.2, tj.

$$\begin{aligned} &exp(x_1X_1)exp(x_2X_2)exp(x_3X_3)exp(\tilde{x}_1\tilde{X}^1)exp(\tilde{x}_2\tilde{X}^2)exp(\tilde{x}_3\tilde{X}^3) \\ &= exp(f_1(\mathbf{y})X_1)exp(f_2(\mathbf{y})X_2)exp(f_3(\mathbf{y})X_3)exp(\tilde{f}_1(\mathbf{y})\tilde{X}^1)exp(\tilde{f}_2(\mathbf{y})\tilde{X}^2)exp(\tilde{f}_3(\mathbf{y})\tilde{X}^3) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Porovnáním levé a pravé strany lze z výrazu 3.4 určit transformaci grupových souřadnic isomorfních Drinfeldových doublů $(\mathcal{G}|\tilde{\mathcal{G}}) \to (\mathcal{H}|\tilde{\mathcal{H}})$ jako

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{y}) = (f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}), f_3(\mathbf{y}), \tilde{f}_1(\mathbf{y}), \tilde{f}_2(\mathbf{y}), \tilde{f}_3(\mathbf{y})). \tag{3.5}$$

Každý Drinfeldův double D s rozkladem $(\mathcal{G}|\tilde{\mathcal{G}})$ je vždy isomorfní tzv. duálnímu rozkladu $(\tilde{\mathcal{G}}|\mathcal{G})$, který odpovídá transformační matici zapsané v blokovém tvaru

$$C_D = \begin{pmatrix} O & I_3 \\ I_3 & O \end{pmatrix}.$$

Pro duální transformaci $(\mathcal{G}|\tilde{\mathcal{G}}) \to (\tilde{\mathcal{G}}|\mathcal{G})$ tedy platí

$$T_i = \tilde{X}^i, \quad \tilde{T}^i = X_i, \quad i = 1, 2, 3$$

a libovolný prvek $l \in D$ lze v duálním rozkladu vyjádřit podle 3.3 jako

$$l = exp(y_1\tilde{X}^1)exp(y_2\tilde{X}^2)exp(y_3\tilde{X}^3)exp(\tilde{y}_1X_1)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(\tilde{y}_3X_3). \tag{3.6}$$

Výraz 3.6 je třeba aplikací speciálních tvarů BCH formulí převést na tvar

$$exp(f_1(\mathbf{y})X_1)exp(f_2(\mathbf{y})X_2)exp(f_3(\mathbf{y})X_3)exp(\tilde{f}_1(\mathbf{y})\tilde{X}^1)exp(\tilde{f}_2(\mathbf{y})\tilde{X}^2)exp(\tilde{f}_3(\mathbf{y})\tilde{X}^3) \tag{3.7}$$

a výsledné transformace grupových souřadnic jsou pak dány vztahem 3.5.

3.1.1 Transformace Drinfeldova doublu $(5|1) \mapsto (1|5)$

Nalezneme transformaci grupových souřadnic Drinfeldova doublu $D_{(11)}$ mezi rozkladem $(5|1)$ a jeho duálním rozkladem $(1|5)$.

Uvažujme $l \in D$, báze rozkladu $(5|1)$, resp. $(1|5)$ a příslušné grupové souřadnice

$$(5|1) : \{X_i, \tilde{X}^i\}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3),$$
$$l = exp(x_1X_1)exp(x_2X_2)exp(x_3X_3)exp(\tilde{x}_1\tilde{X}^1)exp(\tilde{x}_2\tilde{X}^2)exp(\tilde{x}_3\tilde{X}^3),$$

$$(1|5) : \{\tilde{X}^i, X_i\}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3),$$
$$l = exp(y_1\tilde{X}^1)exp(y_2\tilde{X}^2)exp(y_3\tilde{X}^3)exp(\tilde{y}_1X_1)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(\tilde{y}_3X_3). \tag{3.8}$$

Nyní je naším úkolem převést výraz 3.8 na tvar 3.7, tj. prokomutovat generátory $\tilde{X}^j$ přes generátory X_i do požadovaného pořadí. K tomuto účelu budeme používat odvozené speciální tvary BCH formule.

Komutační relace bazických vektorů $\{X_i, \tilde{X}^i\}$ jsou podle 1.1 určeny Bianchiho podalgebrami **5** a **1** jako

$$\mathbf{5}: [X_1, X_2] = -X_2,\ [X_2, X_3] = 0,\ [X_3, X_1] = X_3, \quad \mathbf{1}: [\tilde{X}^i, \tilde{X}^j] = 0$$

$$[X_i, \tilde{X}^1] = 0,$$
$$[X_1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^2,\ [X_2, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^1,\ [X_3, \tilde{X}^2] = 0,$$
$$[X_1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3,\ [X_2, \tilde{X}^3] = 0,\ [X_3, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^1.$$

Poznámka 3.1.1 *Generátor $\tilde{X}^1$ komutuje se všemi ostatními generátory a podle 2.19 tedy $exp(\alpha\tilde{X}^1)$ komutuje se všemi jednoparametrickými podgrupami.*

Podle poznámky 3.1.1 platí

$$l = exp(y_2\tilde{X}^2)exp(y_3\tilde{X}^3)exp(\tilde{y}_1X_1)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(\tilde{y}_3X_3)exp(y_1\tilde{X}^1).$$

Dále

$$[y_3\tilde{X}^3, \tilde{y}_1X_1] = \underbrace{-\tilde{y}_1}_{r} y_3\tilde{X}^3$$

a podle 2.28 pro $r = -\tilde{y}_1$

$$exp(y_3\tilde{X}^3)exp(\tilde{y}_1X_1) = exp(\tilde{y}_1X_1)exp(y_3e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^3).$$

Odtud dostaneme

$$l = exp(y_2\tilde{X}^2)exp(\tilde{y}_1X_1)exp(y_3e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^3)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(\tilde{y}_3X_3)exp(y_1\tilde{X}^1).$$

Dále

$$[y_2\tilde{X}^2, \tilde{y}_1X_1] = \underbrace{-\tilde{y}_1}_{r} y_2\tilde{X}^2$$

a podle 2.28 pro $r = -\tilde{y}_1$

$$exp(y_2\tilde{X}^2)exp(\tilde{y}_1X_1) = exp(\tilde{y}_1X_1)exp(y_2e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^2).$$

Odtud dostaneme

$$l = exp(\tilde{y}_1X_1)exp(y_2e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^2)exp(y_3e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^3)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(\tilde{y}_3X_3)exp(y_1\tilde{X}^1).$$

$[X_2, \tilde{X}^3] = 0$ a podle 2.19

$$l = exp(\tilde{y}_1X_1)exp(y_2e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^2)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(y_3e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^3)exp(\tilde{y}_3X_3)exp(y_1\tilde{X}^1).$$

$[\tilde{X}^2, X_2] = \tilde{X}^1$, resp. $[\tilde{X}^3, X_3] = \tilde{X}^1$ a podle 2.22

$$exp(y_2 e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^2)exp(\tilde{y}_2 X_2) = exp(\tilde{y}_2 X_2)exp(y_2 e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^2)exp(y_2\tilde{y}_2 e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^1),$$

resp.

$$exp(y_3 e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^3)exp(\tilde{y}_3 X_3) = exp(\tilde{y}_3 X_3)exp(y_3 e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^3)exp(y_3\tilde{y}_3 e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^1),$$

odtud, podle poznámky 3.1.1 a vztahu 2.18

$$l = exp(\tilde{y}_1 X_1)exp(\tilde{y}_2 X_2)exp(y_2 e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^2)exp(\tilde{y}_3 X_3)exp(y_3 e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^3)$$
$$\cdot exp((y_1 + (y_2\tilde{y}_2 + y_3\tilde{y}_3)e^{-\tilde{y}_1})\tilde{X}^1).$$

Podle 2.19 pro $[X_3, \tilde{X}^2] = 0$ a poznámky 3.1.1 dostaneme

$$l = exp(\tilde{y}_1 X_1)exp(\tilde{y}_2 X_2)exp(\tilde{y}_3 X_3)$$
$$\cdot exp((y_1 + (y_2\tilde{y}_2 + y_3\tilde{y}_3)e^{-\tilde{y}_1})\tilde{X}^1)exp(y_2 e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^2)exp(y_3 e^{-\tilde{y}_1}\tilde{X}^3).$$

Tímto jsme převedli výraz 3.8 na tvar 3.7 a podle 3.5 jsme tedy nalezli transformaci grupových souřadnic Drinfeldova doublu $(5|1) \mapsto (1|5)$

$$x_1 = \tilde{y}_1, \quad x_2 = \tilde{y}_2, \quad x_3 = \tilde{y}_3,$$
$$\tilde{x}_1 = y_1 + (y_2\tilde{y}_2 + y_3\tilde{y}_3)e^{-\tilde{y}_1}, \quad \tilde{x}_2 = y_2 e^{-\tilde{y}_1}, \quad \tilde{x}_3 = y_3 e^{-\tilde{y}_1}. \tag{3.9}$$

3.1.2 Transformace Drinfeldova doublu $(7_0|1) \mapsto (1|7_0)$

Nalezneme transformaci grupových souřadnic Drinfeldova doublu $D_{(15)}$ mezi rozkladem $(7_0|1)$ a jeho duálním rozkladem $(1|7_0)$.

Uvažujme $l \in D$, báze rozkladu $(7_0|1)$, resp. $(1|7_0)$ a příslušné grupové souřadnice

$$(7_0|1) : \{X_i, \tilde{X}^i\}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3),$$
$$l = exp(x_1 X_1)exp(x_2 X_2)exp(x_3 X_3)exp(\tilde{x}_1\tilde{X}^1)exp(\tilde{x}_2\tilde{X}^2)exp(\tilde{x}_3\tilde{X}^3),$$

$$(1|7_0) : \{\tilde{X}^i, X_i\}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3),$$
$$l = exp(y_1\tilde{X}^1)exp(y_2\tilde{X}^2)exp(y_3\tilde{X}^3)exp(\tilde{y}_1 X_1)exp(\tilde{y}_2 X_2)exp(\tilde{y}_3 X_3). \tag{3.10}$$

Nyní je naším úkolem převést výraz 3.10 na tvar 3.7, tj. prokomutovat generátory $\tilde{X}^j$ přes generátory X_i do požadovaného pořadí. K tomuto účelu budeme používat odvozené speciální tvary BCH formule.

Komutační relace bazických vektorů $\{X_i, \tilde{X}^j\}$ jsou podle 1.1 určeny Bianchiho podalgebrami $\mathbf{7}_0$ a $\mathbf{1}$ jako

$$\mathbf{7}_0 : [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2, \quad \mathbf{1} : [\tilde{X}^i, \tilde{X}^j] = 0$$
$$[X_1, \tilde{X}^1] = 0, [X_2, \tilde{X}^1] = -\tilde{X}^3, [X_3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^2,$$
$$[X_1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^3, [X_2, \tilde{X}^2] = 0, [X_3, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^1,$$
$$[X_i, \tilde{X}^3] = 0.$$

Poznámka 3.1.2 *Generátor $\tilde{X}^3$ komutuje se všemi ostatními generátory a podle 2.19 tedy $exp(\alpha\tilde{X}^3)$ komutuje se všemi jednoparametrickými podgrupami.*

Podle poznámky 3.1.2 platí

$$l = exp(y_1\tilde{X}^1)exp(y_2\tilde{X}^2)exp(\tilde{y}_1X_1)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(\tilde{y}_3X_3)exp(y_3\tilde{X}^3).$$

$[\tilde{X}^2, X_1] = -\tilde{X}^3$ a podle 2.22

$$exp(y_2\tilde{X}^2)exp(\tilde{y}_1X_1) = exp(\tilde{y}_1X_1)exp(y_2\tilde{X}^2)exp(-y_2\tilde{y}_1\tilde{X}^3),$$

odtud, podle poznámky 3.1.2 a vztahu 2.18

$$l = exp(y_1\tilde{X}^1)exp(\tilde{y}_1X_1)exp(y_2\tilde{X}^2)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(\tilde{y}_3X_3)exp((y_3 - y_2\tilde{y}_1)\tilde{X}^3).$$

$[X_1, \tilde{X}^1] = 0$, resp. $[X_2, \tilde{X}^2] = 0$ a podle 2.19

$$l = exp(\tilde{y}_1X_1)exp(y_1\tilde{X}^1)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(y_2\tilde{X}^2)exp(\tilde{y}_3X_3)exp((y_3 - y_2\tilde{y}_1)\tilde{X}^3).$$

$[\tilde{X}^1, X_2] = \tilde{X}^3$ a podle 2.22

$$exp(y_1\tilde{X}^1)exp(\tilde{y}_2X_2) = exp(\tilde{y}_2X_2)exp(y_1\tilde{X}^1)exp(y_1\tilde{y}_2\tilde{X}^3),$$

odtud a podle poznámky 3.1.2

$$l = exp(\tilde{y}_1X_1)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(y_1\tilde{X}^1)exp(y_2\tilde{X}^2)exp(\tilde{y}_3X_3)exp((y_3 + y_1\tilde{y}_2 - y_2\tilde{y}_1)\tilde{X}^3).$$

Dále

$$[y_2\tilde{X}^2, \tilde{y}_3X_3] = y_2\tilde{y}_3\tilde{X}^1, \quad [y_2\tilde{X}^2, y_2\tilde{y}_3\tilde{X}^1] = 0, \quad [\tilde{y}_3X_3, y_2\tilde{y}_3\tilde{X}^1] = \underbrace{(\tilde{y}_3)^2}_{a} y_2\tilde{X}^2$$

a podle 2.46 pro $a = (\tilde{y}_3)^2 \geq 0$

$$exp(y_2\tilde{X}^2)exp(\tilde{y}_3X_3) = exp(\tilde{y}_3X_3)exp(y_2\cos\tilde{y}_3\tilde{X}^2)exp(\frac{\sin\tilde{y}_3}{\tilde{y}_3}y_2\tilde{y}_3\tilde{X}^1)$$

$$= exp(\tilde{y}_3X_3)exp(y_2\cos\tilde{y}_3\tilde{X}^2)exp(y_2\sin\tilde{y}_3\tilde{X}^1).$$

Odtud dostaneme

$$l = exp(\tilde{y}_1X_1)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(y_1\tilde{X}^1)exp(\tilde{y}_3X_3)exp(y_2\cos\tilde{y}_3\tilde{X}^2)$$

$$\cdot exp(y_2\sin\tilde{y}_3\tilde{X}^1)exp((y_3 + y_1\tilde{y}_2 - y_2\tilde{y}_1)\tilde{X}^3).$$

Dále

$$[y_1\tilde{X}^1, \tilde{y}_3X_3] = -y_1\tilde{y}_3\tilde{X}^2, \quad [y_1\tilde{X}^1, -y_1\tilde{y}_3\tilde{X}^2] = 0, \quad [\tilde{y}_3X_3, -y_1\tilde{y}_3\tilde{X}^2] = \underbrace{(\tilde{y}_3)^2}_{a} y_1\tilde{X}^1$$

a podle 2.46 pro $a = (\tilde{y}_3)^2 \geq 0$

$$exp(y_1\tilde{X}^1)exp(\tilde{y}_3X_3) = exp(\tilde{y}_3X_3)exp(y_1\cos\tilde{y}_3\tilde{X}^1)exp(-\frac{\sin\tilde{y}_3}{\tilde{y}_3}y_1\tilde{y}_3\tilde{X}^2)$$

$$= exp(\tilde{y}_3X_3)exp(y_1\cos\tilde{y}_3\tilde{X}^1)exp(-y_1\sin\tilde{y}_3\tilde{X}^2).$$

Odtud dostaneme

$$l = exp(\tilde{y}_1X_1)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(\tilde{y}_3X_3)exp(y_1\cos\tilde{y}_3\tilde{X}^1)exp(-y_1\sin\tilde{y}_3\tilde{X}^2)exp(y_2\cos\tilde{y}_3\tilde{X}^2)$$

$$\cdot exp(y_2\sin\tilde{y}_3\tilde{X}^1)exp((y_3 + y_1\tilde{y}_2 - y_2\tilde{y}_1)\tilde{X}^3).$$

Pak podle vztahu 2.18 a 2.19 pro $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0$ dostaneme

$$l = exp(\tilde{y}_1X_1)exp(\tilde{y}_2X_2)exp(\tilde{y}_3X_3)$$

$$\cdot exp((y_1\cos\tilde{y}_3 + y_2\sin\tilde{y}_3)\tilde{X}^1)exp((y_2\cos\tilde{y}_3 - y_1\sin\tilde{y}_3)\tilde{X}^2)exp((y_3 + y_1\tilde{y}_2 - y_2\tilde{y}_1)\tilde{X}^3).$$

Tímto jsme převedli výraz 3.10 na tvar 3.7 a podle 3.5 jsme tedy nalezli transformaci grupových souřadnic Drinfeldova doublu $(7_0|1) \mapsto (1|7_0)$

$$x_1 = \tilde{y}_1, \quad x_2 = \tilde{y}_2, \quad x_3 = \tilde{y}_3,$$

$$\tilde{x}_1 = y_1\cos\tilde{y}_3 + y_2\sin\tilde{y}_3, \quad \tilde{x}_2 = y_2\cos\tilde{y}_3 - y_1\sin\tilde{y}_3, \quad \tilde{x}_3 = y_3 + y_1\tilde{y}_2 - y_2\tilde{y}_1. \quad (3.11)$$

3.2 Metoda věrné reprezentace

V této části popisujeme odlišnou metodu nalezení transformace grupových souřadnic, která využívá vlastnosti věrné reprezentace.

Definice 3.2.1 *Reprezentace Lieovy grupy G na vektorovém prostoru V je homomorfismus $\phi : G \mapsto GL(V)$. Reprezentace Lieovy algebry $\mathcal{G}$ na vektorovém prostoru V je homomorfismus $\rho : \mathcal{G} \mapsto \mathfrak{gl}(V)$.*

Definice 3.2.2 *Reprezentace Lieovy grupy $\phi : G \mapsto GL(V)$, resp. Lieovy algebry $\rho : \mathcal{G} \mapsto \mathfrak{gl}(V)$ je věrná právě tehdy, když ϕ, resp. ρ je prostý homomorfismus.*

Podle 3.2.2 lze tedy ze znalosti věrné reprezentace určit strukturu Lieovy grupy, resp. Lieovy algebry. Věrná reprezentace je jednou z jejich definujících realizací.

Poznámka 3.2.3 *Reprezentace $\rho : \mathcal{G} \mapsto \mathfrak{gl}(V)$ Lieovy algebry $\mathcal{G}$ je věrná, pokud soubor vektorů $\{\rho(X_i)\} \in \mathfrak{gl}(V)$ je lineárně nezávislý.*

Důkaz. Uvažujme Lieovu algebru $\mathcal{G}$ konečné dimenze.

Homomorfismus $\rho : \mathcal{G} \mapsto \mathfrak{gl}(V)$ je prostý, pokud pro libovolné $X, Y \in \mathcal{G}$ platí, že rovnost obrazů $\rho(X) = \rho(Y)$ implikuje rovnost vzorů $X = Y$.

Uvažujme bázi $\{X_i\} \in \mathcal{G}$, pak $X = \alpha^i X_i$ a $Y = \beta^i X_i$.

Z rovnosti $\rho(X) = \rho(Y)$ dostaneme

$$(\alpha^i - \beta^i)\rho(X_i) = 0,$$

tj. nutně $\alpha^i = \beta^i$, resp. $X = Y$, pokud soubor $\{\rho(X_i)\}$ je lineárně nezávislý.

□

Věta 3.2.4 *Každá Lieova algebra $\mathcal{G}$ konečné dimenze je isomorfní nějaké maticové Lieově algebře v $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}/\mathbb{C})$, $m < \infty$.*

Podle věty 3.2.4 budeme dále vždy uvažovat maticovou reprezentaci, neboť pracujeme výhradně s Lieovými algebrami konečné dimenze.

Věta 3.2.5 *Ke každé Lieově algebře $\mathcal{G}$ konečné dimenze existuje právě jedna souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa G taková, že $\mathcal{G}$ je její Lieova algebra. Libovolná souvislá Lieova grupa $\tilde{G}$ s Lieovou algebrou $\mathcal{G}$ je isomorfní G/D, kde D je normální diskrétní podgrupa G.*

Pro teorii reprezentací z věty 3.2.5 plyne významný důsledek.

Věta 3.2.6 *Nechť $\varphi : \mathcal{G} \mapsto \mathfrak{gl}(V)$ je reprezentace Lieovy algebry $\mathcal{G}$, pak existuje reprezentace $\phi : G \mapsto GL(V)$ jednoduše souvislé a souvislé Lieovy grupy G pomocí exponenciálního zobrazení $exp : \mathcal{G} \mapsto G$ tak, že pro $X \in \mathcal{G}$ platí*

$$\phi(exp(X)) = exp(\varphi(X)).$$

Definice 3.2.7 *Adjungovaná reprezentace Lieovy algebry $\mathcal{G}$ je definována jako*

$$ad : \mathcal{G} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathcal{G}), \quad adX(Y) = [X, Y].$$

Obecně lze z komutačních relací Bianchiho algeber ukázat, že adjungované reprezentace Bianchiho algeber $\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}_0, \mathbf{6}_a, \mathbf{7}_0, \mathbf{7}_a, \mathbf{8}$ a $\mathbf{9}$ jsou jejich věrné reprezentace.

Nechť $\mathcal{G} \in \{\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}_0, \mathbf{6}_a, \mathbf{7}_0, \mathbf{7}_a, \mathbf{8}, \mathbf{9}\}$. Uvažujme Lieovu algebru $(\mathcal{G}|\mathbf{1})$ a označme $\{X_i\} \in \mathcal{G}$, $\{\tilde{X}^j\} \in \mathbf{1}$ příslušné báze. Pak ad je věrná reprezentace Lieovy algebry $\mathcal{G}$. Poznamenejme, že Bianchiho algebra $\mathbf{1}$ je abelovská.

Definujme zobrazení $\varphi : (\mathcal{G}|\mathbf{1}) \mapsto \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^4)$ tak, že

$$\varphi(X_i) = \begin{pmatrix} adX_i & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\tilde{X}^j) = \begin{pmatrix} O_3 & \vec{0} \\ \vec{\delta}^{jT} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

kde

$$adX_i, O_3 \in \mathbb{R}^{3,3}, \quad (adX_i)_{kj} = F_{ij}{}^k, \quad (O_3)_{kj} = 0, \quad \vec{\delta}^j \in \mathbb{R}^3, \quad (\vec{\delta}^j)_i = \delta_i^j.$$

Pro Lieovu algebru $(\mathcal{G}|\mathbf{1})$ máme podle 1.1

$$[X_i, X_j] = F_{ij}{}^k X_k, \quad [\tilde{X}^i, \tilde{X}^j] = 0, \quad [X_i, \tilde{X}^j] = F_{ki}{}^j \tilde{X}^k.$$

Poznámka 3.2.8 *Zobrazení $\varphi : (\mathcal{G}|\mathit{1}) \mapsto \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^4)$, kde $\mathcal{G} \in \{\mathit{4}, \mathit{5}, \mathit{6}_0, \mathit{6}_a, \mathit{7}_0, \mathit{7}_a, \mathit{8}, \mathit{9}\}$, definované pro bazické vektory $\{X_i\} \in \mathcal{G}$, $\{\tilde{X}^j\} \in \mathit{1}$ podle 3.12 je věrná reprezentace Lieovy algebry $(\mathcal{G}|\mathit{1})$ na $\mathbb{R}^4$.*

Důkaz. Nejprve ověříme, že φ je homomorfismus, tj. že platí

$$\varphi([X_i, X_j]) = [\varphi(X_i), \varphi(X_j)] \tag{3.13}$$

$$\varphi([\tilde{X}^i, \tilde{X}^j]) = [\varphi(\tilde{X}^i), \varphi(\tilde{X}^j)] \tag{3.14}$$

$$\varphi([X_i, \tilde{X}^j]) = [\varphi(X_i), \varphi(\tilde{X}^j)] \tag{3.15}$$

Platnost 3.13 plyne přímo z adjungované reprezentace $\mathcal{G}$ a 3.14 je triviálně splněna, neboť obě strany jsou rovny nulové matici $O_4 \in \mathbb{R}^{4,4}$.

Zbývá ověřit platnost 3.15. Platí

$$\varphi([X_i, \tilde{X}^j]) = F_{ki}{}^j \varphi(\tilde{X}^k) = F_{ki}{}^j \begin{pmatrix} O_3 & \vec{0} \\ \vec{\delta}^{kT} & 0 \end{pmatrix}$$

a podle 3.12

$$[\varphi(X_i), \varphi(\tilde{X}^j)] = \underbrace{\varphi(X_i)\varphi(\tilde{X}^j)}_{O_4} - \varphi(\tilde{X}^j)\varphi(X_i) =$$

$$= -\begin{pmatrix} O_3 & \vec{0} \\ \vec{\delta}^{jT} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} adX_i & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_3 & \vec{0} \\ -\vec{\delta}^{jT} adX_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále platí

$$-(\vec{\delta}^{jT} adX_i)_l = -\delta_k^j F_{il}{}^k = -F_{il}{}^j = F_{li}{}^j = F_{ki}{}^j \delta_l^k = F_{ki}{}^j (\vec{\delta}^{kT})_l,$$

tj.

$$-\vec{\delta}^{jT} adX_i = F_{ki}{}^j \vec{\delta}^{kT}$$

a odtud

$$[\varphi(X_i), \varphi(\tilde{X}^j)] = F_{ki}{}^j \begin{pmatrix} O_3 & \vec{0} \\ \vec{\delta}^{kT} & 0 \end{pmatrix}.$$

Zobrazení φ je tedy homomorfismus, tj. reprezentace Lieovy algebry $(\mathcal{G}|\mathbf{1})$. Soubor $\{adX_i\}$ je lineárně nezávislý a tedy podle 3.12 je zřejmě i soubor $\{\varphi(X_i), \varphi(\tilde{X}^j)\}$ lineárně nezávislý a φ je pak věrná reprezentace.

□

Pří výpočtu transformace grupových souřadnic Drinfeldova doublu $(\mathcal{G}|\tilde{\mathcal{G}}) \mapsto (\tilde{\mathcal{G}}|\mathcal{G})$, speciálně $(\mathcal{G}|1) \mapsto (1|\mathcal{G})$ vycházíme ze vztahu

$$l_1 := exp(x_1 X_1) exp(x_2 X_2) exp(x_3 X_3) exp(\tilde{x}_1 \tilde{X}^1) exp(\tilde{x}_2 \tilde{X}^2) exp(\tilde{x}_3 \tilde{X}^3)$$

$$= exp(y_1 \tilde{X}^1) exp(y_2 \tilde{X}^2) exp(y_3 \tilde{X}^3) exp(\tilde{y}_1 X_1) exp(\tilde{y}_2 X_2) exp(\tilde{y}_3 X_3) =: l_2.$$

Podle věty 3.2.6 definuje věrná reprezentace $\varphi : (\mathcal{G}|\mathbf{1}) \mapsto \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^4)$ věrnou reprezentaci Drinfeldova doublu $\phi : D \mapsto GL(\mathbb{R}^4)$ jako

$$\phi(exp(X_i)) = exp(\varphi(X_i)), \quad \phi(exp(\tilde{X}^j)) = exp(\varphi(\tilde{X}^j)).$$

Dále zřejmě platí

$$\phi(exp(x_i X_i)) = exp(x_i \varphi(X_i)), \quad \phi(exp(\tilde{x}_j \tilde{X}^j)) = exp(\tilde{x}_j \varphi(\tilde{X}^j)).$$

Pak

$$\phi(l_1) = \phi(exp(x_1 X_1) exp(x_2 X_2) exp(x_3 X_3) exp(\tilde{x}_1 \tilde{X}^1) exp(\tilde{x}_2 \tilde{X}^2) exp(\tilde{x}_3 \tilde{X}^3))$$

$$= \phi(exp(x_1 X_1)) \phi(exp(x_2 X_2)) \phi(exp(x_3 X_3)) \phi(exp(\tilde{x}_1 \tilde{X}^1)) \phi(exp(\tilde{x}_2 \tilde{X}^2)) \phi(exp(\tilde{x}_3 \tilde{X}^3))$$

$$= exp(x_1 \varphi(X_1)) exp(x_2 \varphi(X_2)) exp(x_3 \varphi(X_3)) exp(\tilde{x}_1 \varphi(\tilde{X}^1)) exp(\tilde{x}_2 \varphi(\tilde{X}^2)) exp(\tilde{x}_3 \varphi(\tilde{X}^3)).$$

Analogicky získáme $\phi(l_2)$, tj. platí

$$\phi(l_1) = \prod_{i=1}^{3} exp(x_i \varphi(X_i)) \prod_{j=1}^{3} exp(\tilde{x}_j \varphi(\tilde{X}^j)) = M(x_1, x_2, x_3) \tilde{M}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = L_1(\mathbf{x}), \tag{3.16}$$

$$\phi(l_2) = \prod_{j=1}^{3} exp(y_j \varphi(\tilde{X}^j)) \prod_{i=1}^{3} exp(\tilde{y}_i \varphi(X_i)) = \tilde{M}(y_1, y_2, y_3) M(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3) = L_2(\mathbf{y}), \tag{3.17}$$

kde $M, \tilde{M}, L_\iota \in \mathbb{R}^{4,4}$. Zde a podobně nepoužíváme Einsteinovo sumační pravidlo.

Z rovnosti $l_1 = l_2$ pak dostaneme

$$L_1(\mathbf{x}) = L_2(\mathbf{y}), \tag{3.18}$$

odkud následně získáme hledané transformace grupových souřadnic $\mathbf{x} = f(\mathbf{y})$.

Poznámka 3.2.9 *Ve výrazech 3.16 a 3.17 už vystupují maticové exponenciály, které lze pro matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $t \in \mathbb{R}$ explicitně určit jako*

$$exp(tA) = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}. \tag{3.19}$$

Tvar matice M závisí explicitně na uvažované Lieově algebře $\mathcal{G}$, resp. její adjungované reprezentaci. Tvar matice $\tilde{M}$ lze v případě Lieovy algebry **1** snadno určit podle 3.19.

Podle 3.12 platí, že $\varphi(\tilde{X}^i)\varphi(\tilde{X}^j) = O_4$, tj. podle 3.19 máme

$$exp(t_j\varphi(\tilde{X}^j)) = I_4 + t_j\varphi(\tilde{X}^j),$$

odkud dostaneme

$$\tilde{M}(t_1,t_2,t_3) = \prod_{j=1}^{3} exp(t_j\varphi(\tilde{X}^j)) = I_4 + \sum_{j=1}^{3} t_j\varphi(\tilde{X}^j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

3.2.1 Transformace Drinfeldova doublu $(5|1) \mapsto (1|5)$

Transformace grupových souřadnic 3.9 nalezené metodou BCH formule nyní ověříme metodou věrné reprezentace, která bude v tomto případě poněkud přímější.

Nejprve nalezneme adjungovanou reprezentaci Bianchiho algebry **5**

$$[X_1, X_2] = -X_2,\ [X_2, X_3] = 0,\ [X_3, X_1] = X_3,$$

tj.

$$adX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad adX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad adX_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podle poznámky 3.2.8 budeme uvažovat věrnou reprezentaci φ Lieovy algebry $(\mathbf{5}|\mathbf{1})$.

Z výrazu 3.12 zřejmě platí

$$\varphi(X_i)^k = \begin{pmatrix} (adX_i)^k & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále platí

$$(adX_1)^k = (-1)^{k+1}adX_1, \quad (adX_2)^2 = O_3, \quad (adX_3)^2 = O_3.$$

Podle 3.19 máme

$$exp(t_1\varphi(X_1)) = I_4 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_1^k(-1)^{k+1}}{k!} \begin{pmatrix} adX_1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} = I_4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t_1)^k}{k!} \begin{pmatrix} adX_1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$= I_4 + (1-e^{-t_1}) \begin{pmatrix} adX_1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$exp(t_2\varphi(X_2)) = I_4 + t_2 \begin{pmatrix} adX_2 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$exp(t_3\varphi(X_3)) = I_4 + t_3 \begin{pmatrix} adX_3 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak dostaneme

$$M(t_1, t_2, t_3) = \prod_{i=1}^{3} exp(t_i\varphi(X_i)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_2e^{-t_1} & e^{-t_1} & 0 & 0 \\ t_3e^{-t_1} & 0 & e^{-t_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Dále podle 3.16, resp. 3.17 a výrazů 3.20 a 3.21

$$L_1(\mathbf{x}) = M(x_1, x_2, x_3)\tilde{M}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2e^{-x_1} & e^{-x_1} & 0 & 0 \\ x_3e^{-x_1} & 0 & e^{-x_1} & 0 \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_2(\mathbf{y}) = \tilde{M}(y_1, y_2, y_3)M(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{y}_2e^{-\tilde{y}_1} & e^{-\tilde{y}_1} & 0 & 0 \\ \tilde{y}_3e^{-\tilde{y}_1} & 0 & e^{-\tilde{y}_1} & 0 \\ y_1 + (y_2\tilde{y}_2 + y_3\tilde{y}_3)e^{-\tilde{y}_1} & y_2e^{-\tilde{y}_1} & y_3e^{-\tilde{y}_1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud z rovnosti $L_1(\mathbf{x}) = L_2(\mathbf{y})$ získáme výslednou transformaci grupových souřadnic Drinfeldova doublu $(5|1) \mapsto (1|5)$, která se shoduje s výrazy 3.9, tj.

$$x_1 = \tilde{y}_1, \quad x_2 = \tilde{y}_2, \quad x_3 = \tilde{y}_3,$$

$$\tilde{x}_1 = y_1 + (y_2\tilde{y}_2 + y_3\tilde{y}_3)e^{-\tilde{y}_1}, \quad \tilde{x}_2 = y_2e^{-\tilde{y}_1}, \quad \tilde{x}_3 = y_3e^{-\tilde{y}_1}.$$

3.2.2 Transformace Drinfeldova doublu $(7_0|1) \mapsto (1|7_0)$

Transformace grupových souřadnic 3.11 nalezené metodou BCH formule nyní ověříme metodou věrné reprezentace, která bude v tomto případě poněkud přímější.

Nejprve nalezneme adjungovanou reprezentaci Bianchiho algebry $\mathbf{7}_0$

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2,$$

tj.

$$adX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad adX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad adX_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podle poznámky 3.2.8 budeme uvažovat věrnou reprezentaci φ Lieovy algebry $(\mathbf{7}_0|\mathbf{1})$. Z výrazu 3.12 zřejmě platí

$$\varphi(X_i)^k = \begin{pmatrix} (adX_i)^k & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále platí

$$(adX_1)^2 = O_3, \quad (adX_2)^2 = O_3, \quad (adX_3)^{2l} = (-1)^l J, \quad (adX_3)^{2l+1} = (-1)^l adX_3,$$

kde

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podle 3.19 máme

$$exp(t_1\varphi(X_1)) = I_4 + t_1 \begin{pmatrix} adX_1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$exp(t_2\varphi(X_2)) = I_4 + t_2 \begin{pmatrix} adX_2 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$exp(t_3\varphi(X_3)) = I_4 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t_3^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} J & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t_3^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} adX_3 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$= I_4 + (\cos t_3 - 1) \begin{pmatrix} J & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} + \sin t_3 \begin{pmatrix} adX_3 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t_3 & -\sin t_3 & 0 & 0 \\ \sin t_3 & \cos t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak dostaneme

$$M(t_1, t_2, t_3) = \prod_{i=1}^{3} exp(t_i\varphi(X_i)) = \begin{pmatrix} \cos t_3 & -\sin t_3 & t_2 & 0 \\ \sin t_3 & \cos t_3 & -t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Dále podle 3.16, resp. 3.17 a výrazů 3.20 a 3.22

$$L_1(\mathbf{x}) = M(x_1, x_2, x_3)\tilde{M}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \begin{pmatrix} \cos x_3 & -\sin x_3 & x_2 & 0 \\ \sin x_3 & \cos x_3 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_2(\mathbf{y}) = \tilde{M}(y_1, y_2, y_3) M(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\tilde{y}_3 & -\sin\tilde{y}_3 & \tilde{y}_2 & 0 \\ \sin\tilde{y}_3 & \cos\tilde{y}_3 & -\tilde{y}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ y_1\cos\tilde{y}_3 + y_2\sin\tilde{y}_3 & y_2\cos\tilde{y}_3 - y_1\sin\tilde{y}_3 & y_3 + y_1\tilde{y}_2 - y_2\tilde{y}_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud z rovnosti $L_1(\mathbf{x}) = L_2(\mathbf{y})$ získáme výslednou transformaci grupových souřadnic Drinfeldova doublu $(7_0|1) \mapsto (1|7_0)$, která se shoduje s výrazy 3.11, tj.

$$x_1 = \tilde{y}_1, \quad x_2 = \tilde{y}_2, \quad x_3 = \tilde{y}_3,$$

$$\tilde{x}_1 = y_1\cos\tilde{y}_3 + y_2\sin\tilde{y}_3, \quad \tilde{x}_2 = y_2\cos\tilde{y}_3 - y_1\sin\tilde{y}_3, \quad \tilde{x}_3 = y_3 + y_1\tilde{y}_2 - y_2\tilde{y}_1.$$

Závěr

V první kapitole jsme se úspěšně seznámili s pojmy Drinfeldův double a grupové souřadnice na Drinfeldově doublu, přičemž jsme hlavně využívali práci [1], resp. [5].

V druhé kapitole jsme diskutovali obecný tvar BCH formule pro speciálně zvolené komutační relace prvků Lieovy algebry. Odtud se nám podařilo odvodit užitečné formule pro komutování odpovídajících prvků Lieovy grupy, jedná se především o vztahy 2.27 a 2.28, resp. 2.35 a 2.46.

Ve třetí kapitole jsme obecně popsali metodu BCH formule a metodu věrné reprezentace, které nám umožňují nalézt transformace grupových souřadnic isomorfních Drinfeldových doublů. Dále jsme použili klasifikaci reálných šestirozměrných neisomorfních Drinfeldových doublů podle [1] a spočetli tyto transformace pro duální rozklady Drinfeldových doublů $(5|1)$, resp. $(7_0|1)$. Nalezené transformace odpovídají výrazům 3.9, resp. 3.11. Stejné výrazy jsme pak získali i metodou věrné reprezentace. Tímto jsme tedy naše výsledky ověřili.

Metoda věrné reprezentace, jak je vidět z provedených výpočtů v kapitole 3, je v porovnání s metodou BCH formule výrazně přímější. Použitelnost této metody však zcela závisí na faktu, zda se nám podaří nalézt věrnou reprezentaci daného rozkladu Drinfeldova doublu. Věrnou reprezentaci jsme nalezli v případě, kdy jedna z Lieových algeber byla Bianchiho algebra **1**, tj. abelovská, a za předpokladu, že adjungovaná reprezentace druhé Lieovy algebry byla věrná reprezentace, tj. z množiny $\{\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}_0, \mathbf{6}_a, \mathbf{7}_0, \mathbf{7}_a, \mathbf{8}, \mathbf{9}\}$. Otázkou tedy je, zda nalezneme věrnou reprezentaci i v případě, kdy upustíme od požadavku Bianchiho algebry **1**.

Použitelnost metody BCH formule je podmíněna znalostí speciálních tvarů BCH formule pro odpovídající komutační relace.

Seznam použitých zdrojů

[1] L. Hlavatý and L. Šnobl. *Clasification of 6-dimensional Drinfeld doubles*. Int. J. Mod. Physic A17, 4043-4067, 2002.

[2] A. O. Barut and R. Raczka. *Theory of group representation and applications*. PWN Warszawa, 1980.

[3] D. H. Sattinger and O. L. Weaver. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*. ISBN 0-387-96240-9 Springer-Verlag New York, 1986.

[4] K. Erdmann and M. J. Wildon. *Introduction to Lie Algebras*. Springer Undergraduate Mathematics Series, ISSN 1615-2085, 2000.

[5] J. Hýbl. *Použití Baker-Hausdorf-Campbell formulí pro výpočet transformací souřadnic v Drinfeldových doublech: výzkumný úkol*. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2009. 30 s., 0 s. příloh. Vedoucí výzkumného úkolu prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

[6] L. Hlavatý. *Classical solution of a sigma model in curved background*. Physics Letters B625, 285-290, 2005.

[7] L. Hlavatý, J. Hýbl and M. Turek. *Classical Solutions of Sigma Models in Curved Backgrounds by the Poisson-Lie T-Plurality*. Int. J. Mod. Physic A22, 1039-1052, 2007.