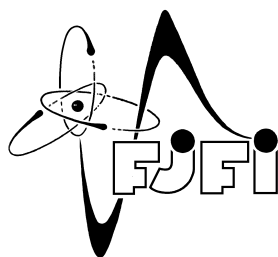


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ

KATEDRA FYZIKY



Topologie grafů a dynamika kvantových sítí

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Autor: Bc. Jiří Maryška
Školitel: prof. Ing. Igor Jex, DrSc.
Konzultant: Ing. Jaroslav Novotný, PhD
Akademický rok: 2011/2012

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím uvedené literatury.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

Jiří Maryška

.....

.....

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval svému školiteli, panu prof. Ing. Igoru Jexovi DrSc. a konzultantovi Ing. Jarslavu Novotnému PhD. za veškerou pomoc kterou mi při vzniku této práce poskytl, zvláště za podnětné konzultace a cenné připomínky.

Název práce: **Topologie grafů a dynamika kvantových sítí**

Autor: Jiří Maryška

Advisor: prof. Ing. Igor Jex, DrSc.

Abstrakt:

V této práci uvedeme analytickou formu asymptotického vývoje náhodných unitárních operací (NUO) pro kvantovou síť složenou z N qubitů, které spolu interagují jistými kontrolními unitárními tříqubitovými operacemi. Potom představíme způsob, jak reprezentovat danou NUO pomocí grafu a identifikujeme speciální třídu těchto grafů, tzv. minimální grafy.

Klíčová slova: Otevřené systémy, náhodné unitární operace, stochastické procesy,
kvantové sítě

Title: **Graph topology and quantum network dynamics**

Author: Jiří Maryška

Abstract:

In this thesis we present an analytical form of an asymptotic evolution of random unitary operation (RUO) for the quantum network consisting of N qubits, which are coupled by certain control unitary three-qubit interactions. Then we present a way how to visualize given RUO by a graph and we analyze the special class of these graphs, so called base graphs.

Keywords: Open systems, random unitary operations, stochastic processes,
quantum networks

Obsah

1	Úvod	7
2	Náhodné unitární operace	8
2.1	Definice náhodných unitárních operací	10
2.2	Základní vlastnosti náhodných unitárních operací	11
2.3	Atraktorový prostor	12
2.4	Asymptotický vývoj náhodných unitárních operací	13
3	Kontrolní unitární tříqubitové interakce	14
3.1	Definice kontrolních unitárních tříqubitových interakcí	15
3.2	Minimální atraktorový prostor	16
3.3	Reprezentace tříčásticových kontrolních unitárních transformací	17
3.4	Minimální grafy	21
4	Závěr	22
A	Minimální atraktorový prostor	24
B	Základní pojmy teorie grafů	30
C	Minimální grafy	32
	Literatura	37

Kapitola 1

Úvod

Řešení časového vývoje otevřených kvantových systémů lze psát v analytickém tvaru pouze ve výjimečných případech, například řídí-li se dynamika systému Lindbladovou rovnicí [1]. Otevřený kvantový systém lze popsat jako kvantový systém S s Hilbertovým prostorem \mathcal{H}_s , který je v kontaktu s jiným fyzikálním systémem O s Hilbertovým prostorem \mathcal{H}_o , který nazýváme okolí. Ve speciálních případech lze vliv tohoto okolí popsat náhodně aplikovanými unitárními transformacemi, což umožňuje použít model náhodných unitárních operací. Cílem této práce je určit asymptotickou dynamiku speciálně zvolených náhodných unitárních operací a nalézt vhodný způsob, jak dané náhodné operace reprezentovat pomocí grafů tak, aby topologie těchto grafů poskytovala informaci o této dynamice.

V druhé kapitole si představíme náhodné unitární operace na Hilbertově prostoru \mathcal{H} a shrneme jejich základní vlastnosti. Definujeme význačný podprostor prostoru omezených operátorů na \mathcal{H} (značeném $\mathcal{B}(\mathcal{H})$), tzv. atraktorový prostor a ukážeme, že hraje ústřední roli v asymptotickém vývoji systému.

Ve třetí kapitole definujeme kontrolní unitární tříqubitové interakce, které jsou speciálním případem náhodných unitárních operací. Pro tyto operace uvedeme tvar tzv. minimálního atraktorového prostoru, ukážeme způsob, jak reprezentovat tyto náhodné unitární operace pomocí grafů a identifikujeme grafy, kterým odpovídají kontrolní unitární tříqubitové interakce s minimálním atraktorovým prostorem.

Kapitola 2

Náhodné unitární operace

Dynamika uzavřeného systému S je plně určena jeho propagátorem \hat{U}_s , což je unitární operátor, jehož generátorem je Hamiltonián systému S \hat{H}_s . Důsledkem toho, čisté stavy se časem vyvíjejí v jiné čisté stavy. Chceme-li však popsat časový vývoj otevřených systémů, musíme se vzdát některých základních představ o časovém vývoji, například jeho unitarity. Je-li systém S v kontaktu s okolím O , Hilbertův prostor složeného systému SO má tvar $\mathcal{H}_{so} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_o$ a časový vývoj je popsán unitárním propagátorem \hat{U}_{so} , jehož generátorem je Hamiltonián $\hat{H}_{so} = \hat{H}_s + \hat{H}_o + \hat{V}_{so}$, kde $\hat{H}_{s(o)}$ jsou Hamiltoniány S , resp. O působící pouze na prostorech $\mathcal{H}_{s(o)}$ a \hat{V}_{so} je interakční člen popisující interakci systému S s okolím O . Časový vývoj systému S je pak dán vztahem $\hat{\rho}_s(t) = \text{Tr}_o[\hat{\rho}_{so}(t)]$. Chceme-li popsat časový vývoj stavu systému S jako působení nějakého operátoru \mathcal{E} na stav $\hat{\rho}_s$, musíme učinit dodatečné předpoklady, totiž že počáteční stav složeného systému lze psát ve faktorizovaném tvaru, $\hat{\rho}_{so}(0) = \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_o$. Dále je třeba, aby počátečním stavem okolí byl čistý stav $|\psi\rangle$. Potom lze psát časový vývoj stavu $\hat{\rho}_s$ jako

$$\mathcal{E}(\hat{\rho}_s) = \text{Tr}_o[\hat{U}_{so}(\hat{\rho}_s \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)\hat{U}_{so}^\dagger],$$

odkud je vidět, že narozdíl od uzavřených systémů, čisté stavy se mohou vyvíjet ve smíšené stavy.

Pro mnoho kvantových systému lze však použít jiný přístup k popsání časového vývoje, tzv. iterační přístup. Ten lze použít například v situaci, kdy jednotlivé interakční kroky lze dobře separovat v čase, tj. máme-li například krabici s plynem tak řídkým, že existuje časový interval τ , během něhož dochází k interakci pouze jednoho páru částic. V

takovýchto situacích lze použít model náhodných unitárních operací [2]. Jak v této kapitole uvidíme, pro náhodné unitární operace na Hilbertově prostoru \mathcal{H} existuje význačný podprostor prostoru $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, tzv. atraktorový prostor, který plně určuje asymptotickou dynamiku dané náhodné kvantové operace, kterou lze vždy psát v analytickém tvaru.

2.1 Definice náhodných unitárních operací

Náhodná unitární operace na Hilbertově prostoru \mathcal{H} je pozitivní zobrazení $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zachovávající stopu, kterou lze konvexně rozložit ve tvaru

$$\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^m p_i \hat{U}_i \rho \hat{U}_i^\dagger \quad (2.1)$$

Zde \hat{U}_i představují unitární operátory na \mathcal{H} , které jsou aplikovány s pravděpodobnostmi $p_i > 0$ na systém ve stavu popsaném maticí hustoty ρ , platí tedy $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. Tyto pravděpodobnosti do systému vnášejí klasickou neurčitost. Středem našeho zájmu v této práci je asymptotický vývoj NUO, tedy výsledek mnoha opakovaných aplikací NUO na počáteční stav $\rho(0)$. Máme-li na počátku systém ve stavu $\rho(0)$, pak n -tý krok iteračního procesu je dán vztahem $\rho(n) = \Phi(\rho(n-1))$.

2.2 Základní vlastnosti náhodných unitárních operací

Mějme NUO Φ tvaru (2.1) na Hilbertově prostoru \mathcal{H} . Prostor $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je Hilbertovým prostorem s Hilbert-Schmidtovým skalárním součinem $(A, B)_{HS} = \text{Tr}[A^\dagger B]$. Hermitovská konjugace této NUO vzhledem k skalárnímu součinu $(\cdot, \cdot)_{HS}$ má tvar

$$\Phi^\dagger(\rho) = \sum_{i=1}^m p_i \hat{U}_i^\dagger \rho \hat{U}_i.$$

Odtud je vidět, že NUO není obecně normální a tedy není diagonalizovatelná. Ukazuje se však, že pokud je NUO převedena do Jordanovy blokové formy [3], tak v asymptotické limitě má daná NUO diagonální tvar [2].

Ukážeme, že pro NUO (2.1) platí $\|\Phi\| = 1$. V prvním kroku dokážeme, že Hilbert-Schmidtova norma je unitárně invariantní. Mějme $A, U, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a necht' U, V jsou unitární operátory, tj. $UU^\dagger = VV^\dagger = I$, kde I je jednotkový operátor. Z invariance stopy vůči cyklickým permutacím dostaneme

$$\|UAV\|_{HS}^2 = \text{Tr}[(UAV)^\dagger(UAV)] = \text{Tr}[V^\dagger A^\dagger U^\dagger UAV] = \text{Tr}[(VV^\dagger)A^\dagger(U^\dagger U)A] = \text{Tr}[A^\dagger A] = \|A\|_{HS}^2$$

Z unitární invariance a trojúhelníkové nerovnosti dostaneme následující:

$$\|\Phi(A)\|_{HS} = \left\| \sum_i p_i \hat{U}_i A \hat{U}_i^\dagger \right\|_{HS} \leq \sum_i p_i \|\hat{U}_i A \hat{U}_i^\dagger\|_{HS} = \|A\|_{HS}$$

Zároveň platí

$$\Phi(I) = \sum_{i=1}^m p_i \hat{U}_i \hat{U}_i^\dagger = I.$$

Odtud dostáváme $\|\Phi(I)\|_{HS} = \|I\|_{HS} = 1$ a tedy $\|\Phi\| = 1$.

Důsledkem toho, je-li λ vlastní hodnotou NUO (2.1), pak nutně platí $|\lambda| \leq 1$.

2.3 Atraktorový prostor

Zde definujeme význačný podprostor prostoru $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, který hraje významnou roli v asymptotickém vývoji NUO, ukážeme způsob jak jej nalézt a uvedeme jeho základní vlastnosti.

Atraktorový podprostor NUO (2.1) je definován jako

$$\text{Atr}(\Phi) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_{|1|}} \text{Ker}(\Phi - \lambda I).$$

Zde $\sigma_{|1|} = \{\lambda \in \sigma(\Phi), |\lambda| = 1\}$ a $\text{Ker}(\Phi - \lambda I) = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \Phi(X) = \lambda X\}$.

Podprostory $\text{Ker}(\Phi - \lambda I)$ jsou určeny strukturním teorémem pro atraktory [2]. Máme-li NUO (2.1), pak pro každé $\lambda \in \sigma_{|1|}$ platí

$$\text{Ker}(\Phi - \lambda I) = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \hat{U}_i X = \lambda X \hat{U}_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Ze strukturního teorému vyplývají některé zajímavé vlastnosti atraktorového prostoru, které ulehčují jeho nalezení.

Je-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_{|1|}$, $X_1 \in \text{Ker}(\Phi - \lambda_1 I)$ a $X_2 \in \text{Ker}(\Phi - \lambda_2 I)$, pak platí $X_1 X_2 \in \text{Ker}(\Phi - \lambda_1 \lambda_2 I)$. Může se ovšem stát $X_1 X_2 = 0$.

Dále je-li $\lambda \in \sigma_1$ a $X \in \text{Ker}(\Phi - \lambda I)$, pak platí $X^\dagger \in \text{Ker}(\Phi - \lambda^* I)$.

2.4 Asymptotický vývoj náhodných unitárních operací

Mějme NUO (2.1) s atraktorovým prostorem $\text{Atr}(\Phi) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_{|1|}} \text{Ker}(\Phi - \lambda I)$. Označme $d_\lambda = \dim(\text{Ker}(\Phi - \lambda I))$. Je-li počáteční stav systému popsán maticí hustoty $\rho(0)$, potom asymptotický vývoj systému je určen maticí hustoty $\rho_\infty(n)$ [2] definované jako

$$\rho_\infty(n) = \sum_{\lambda \in \sigma_{|1|}, i=1}^{d_\lambda} \lambda^n \text{Tr}[\rho(0) X_{\lambda,i}^\dagger] X_{\lambda,i}$$

ve smyslu normy, tj. platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho(n) - \rho_\infty(n)\| = 0,$$

kde $\rho(n) = \Phi^n(\rho(0))$.

Jeden krok asymptotické dynamiky je tedy možné popsat superoperátorem Φ_{ass} definovaném

$$\Phi_{ass}(\cdot) = \sum_{\lambda \in \sigma_{|1|}, i=1}^{d_\lambda} \lambda \text{Tr}[X_{\lambda,i}^\dagger(\cdot)] X_{\lambda,i},$$

který splňuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi^n - \Phi_{ass}^n\| = 0.$$

Asymptotický vývoj NUO (2.1) je tedy nezávislý na nenulových pravděpodobnostech p_i .

Kapitola 3

Kontrolní unitární tříqubitové interakce

V této kapitole se zaměříme na popis kvantové sítě N qubitů, tj. systému N qubitů, které spolu interagují opakovanými aplikacemi unitárních operátorů. Zde zvolené operátory mají charakter kontrolních unitárních operací. Pro kontrolní operace lze vždy nalézt tzv. výpočetní bázi [4] Hilbertova prostoru $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2^N}$ ve tvaru $\{|\mathbf{i}\rangle\}$, kde $\mathbf{i} \in I_N = \{0, 1\}^N$ tak, že stav tzv. kontrolního qubitů není ovlivněn danou operací a $\langle \mathbf{i} | \mathbf{j} \rangle = 0$ pro $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$.

V [5] byla popsána asymptotická dynamika NUO zvané kontrolní unitární dvouqubitová interakce. Objevila se otázka, jestli by se tato dynamika změnila, kdybychom navíc povolili tříqubitové interakce a pokud ano, jakým způsobem. V této kapitole uvedeme asymptotickou dynamiku kontrolních unitárních tříčásticových interakcí, přičemž dané operátory volíme tak, že kontrolní qubit nahradíme párem kontrolních qubitů. Jak uvidíme, v asymptotické dynamice těchto dvou NUO existují podstatné rozdíly, které však mizí, pokud uvažujeme NUO, která je složena jak z kontrolních dvouqubitových, tak kontrolních tříqubitových interakcí.

V následujících částech práce definujeme kontrolní unitární tříqubitové interakce, nalezneme jejich tzv. minimální atraktorový prostor, ukážeme jak je lze reprezentovat pomocí grafů a provedeme základní klasifikaci těchto grafů podle atraktorového prostoru příslušné interakce.

3.1 Definice kontrolních unitárních tříqubitových interakcí

Uvažujme systém N qubitů s Hilbertovým prostorem $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2^N}$. Kontrolní unitární tříqubitová interakce na tomto Hilbertově prostoru je NUO tvaru

$$\Phi(\rho) = \sum_{(j,k,l) \in E} p_{j,k,l} \hat{U}_{j,k,l}(\phi) \rho \hat{U}_{j,k,l}^\dagger(\phi), \quad \phi \in (0, \pi), \quad (3.1)$$

kde operátory $\hat{U}_{j,k,l}$ mají ve výpočetní bázi tvar

$$\begin{aligned} \hat{U}_{j,k,l}(\phi) = & \left(\hat{1}_{jk} - |1\rangle \langle 1|_j \otimes |1\rangle \langle 1|_k \right) \otimes |1\rangle \langle 1|_l + |1\rangle \langle 1|_j \otimes |1\rangle \langle 1|_k \otimes \\ & \otimes [\cos \phi (|0\rangle \langle 0|_l - |1\rangle \langle 1|_l) + \sin \phi (|0\rangle \langle 1|_l + |1\rangle \langle 0|_l)]. \end{aligned}$$

Množina E je nějakou podmnožinou množiny částečně uspořádaných trojic (j, k, l) , kde $j \neq k \neq l \in \{1, \dots, N\}$ a $(j, k, l) = (k, j, l)$.

Operátory $\hat{U}_{j,k,l}(\phi)$ jsou voleny tak, že pro $\phi = \frac{\pi}{2}$ jedná o Toffoliho hradlo [4], kde qubity j a k hrají roli kontrolních qubitů a qubit l je target qubit. Vlastní čísla operátorů $\hat{U}_{j,k,l}(\phi)$ jsou pro libovolné $\phi \in (0, \pi)$ rovny $\lambda = \pm 1$. Odtud vyplývá $\sigma(\Phi) \subset \{-1, +1\}$.

3.2 Minimální atraktorový prostor

V této části uvedeme tvar minimálního atraktorového prostoru, který je obsažen v libovolném atraktorovém prostoru NUO (3.1). Tento minimální atraktorový prostor je atraktorovým prostorem těchto operací, pokud množina E obsahuje všechny přípustné indexy (jk, l) . V dalších částech práce však ukážeme, že minimální atraktorový prostor je atraktorovým prostorem těchto NUO pro daleko širší třídu množin E . Minimální atraktorový prostor je odvozen v příloze A.

Ortonormální báze atraktorového prostoru operace (3.1) s množinou E obsahující všechny přípustné trojice indexů (jk, l) je tedy tvořena následujícími $(N + 2)^2 + 1$ operátory příslušnými vlastní hodnotě $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= |0_N\rangle \langle 0_N|, \\ \hat{X}_{i+1} &= |\mathbf{i}\rangle \langle 0_N|, \mathbf{i} = (0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0), i \in \hat{N}, \\ \hat{X}_{N+1+i} &= |0_N\rangle \langle \mathbf{i}|, i \in \hat{N}, \\ \hat{X}_{(i+1)N+j+1} &= |\mathbf{i}\rangle \langle \mathbf{j}|, i, j \in \hat{N}, \\ \hat{X}_{(N+1)^2+1} &= |\psi_N\rangle \langle 0_N|, \\ \hat{X}_{(N+1)^2+1+i} &= |\psi_N\rangle \langle \mathbf{i}|, i \in \hat{N}, \\ \hat{X}_{(N+1)^2+N+2} &= |0_N\rangle \langle \psi_N|, \\ \hat{X}_{(N+1)^2+N+2+i} &= |\mathbf{i}\rangle \langle \psi_N|, i \in \hat{N}, \\ \hat{X}_{(N+1)^2+2(N+1)+1} &= \frac{1}{\sqrt{2^N - N - 2}} \left(\hat{1}_N - |0_N\rangle \langle 0_N| - \sum_{\tau(z)=1} |z\rangle \langle z| - |\psi_N\rangle \langle \psi_N| \right), \\ \hat{X}_{(N+2)^2+1} &= |\psi_N\rangle \langle \psi_N|, \\ |0_N\rangle &= |0\rangle_1 \otimes \dots \otimes |0\rangle_N, \\ |\psi_N\rangle &= \frac{1}{\langle \theta_N | \theta_N \rangle} |\theta_N\rangle, \\ |\theta_N\rangle &= \sum_{\tau(z)>1} \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right)^{N-\tau(z)} \left(\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right)^{\tau(z)} |z\rangle. \end{aligned}$$

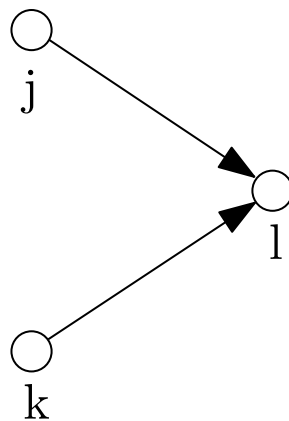
Na rozdíl od kontrolních unitárních dvouqubitových interakcí, asymptotická dynamika NUO (3.1) se zmíněnou množinou E je stacionární pro všechny $N \in \mathbb{N}$.

3.3 Reprezentace tříčásticových kontrolních unitárních transformací

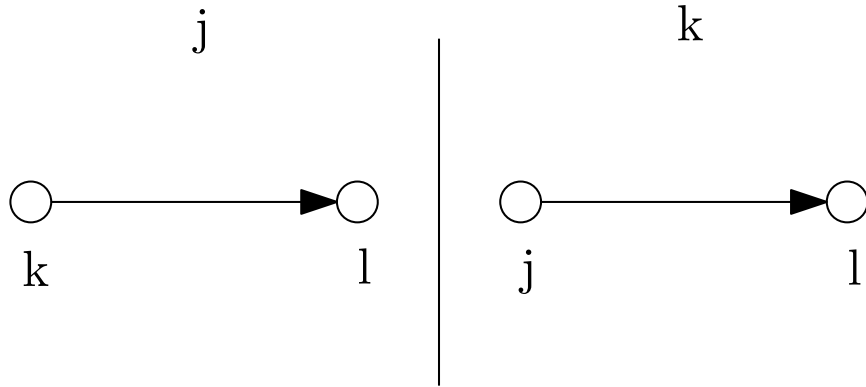
Zde uvedeme dva možné způsoby, jak reprezentovat NUO (3.1) pomocí grafů. Jak uvidíme v dalším textu, reprezentace NUO (3.1) pomocí grafu nám umožňuje provést klasifikaci dané NUO podle velikosti atraktorového prostoru. Umožňuje nám také nalézt symetrie mezi působením operátorů $\hat{U}_{j,k,l}$. Základní pojmy z teorie grafů, které zde budeme používat jsou shrnuty v Příloze B.

Pokusíme se o zavedení přímého zobecnění interakčního grafu používaného v [5]. NUO (3.1) pro N qubitů reprezentujeme orientovaným grafem $G = (U, F)$, kde $U = \{1, \dots, N\}$. Operátor $U_{j,k,l}$ reprezentujeme dvěma hranami: $\{j, l\}$ a $\{k, l\}$. Takto zavedená reprezentace však není grafem, protože tyto dvě hrany tvoří nedělitelný objekt, jedna hrana sama o sobě nemá v kontextu s danou NUO význam, o daném operátoru nám dává pouze částečnou informaci.

Systém N qubitů můžeme reprezentovat tzv. grafem symetrií. Jedná se o množinu N grafů $(GS_j = (V_j, E_j))_{j=1}^N$, přičemž $V_j = \{1, \dots, N\} \setminus \{j\}$. Jednotlivé vrcholy každého grafu reprezentují příslušný qubit. Operátor $\hat{U}_{j,k,l}$ poté reprezentujeme dvěma orientovanými hranami $\{k, l\} \in E_j$ a $\{j, l\} \in E_k$. Narozdíl od pokusu zobecnit interakční graf interakce z [2], zde se skutečně jedná o reprezentaci pomocí grafů, protože k určení



Obrázek 3.1: Pokus o přímé zobecnění reprezentace interakčního grafu kontrolních unitárních dvouqubitových interakcí [2]. Reprezentace operátoru $\hat{U}_{j,k,l}$ pomocí dvou orientovaných hran $\{j, l\}$ a $\{k, l\}$.

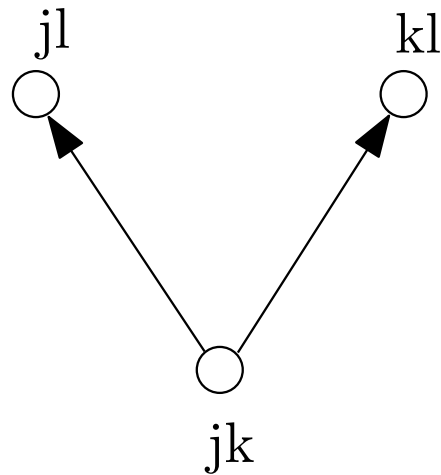


Obrázek 3.2: Reprezentace operátoru $\hat{U}_{j,k,l}$ v grafu symetrií

daného operátoru stačí pouze jedna z těchto dvou hran. Jak uvidíme dále, tento způsob reprezentace nám umožňuje hledat symetrie v působení jednotlivých operátorů.

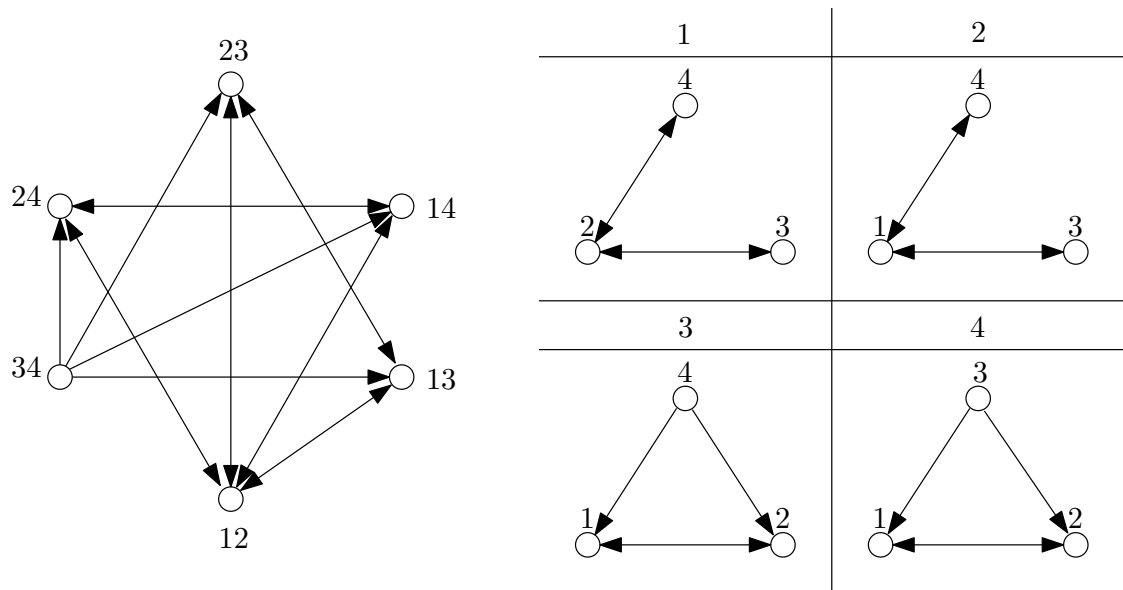
Jiný způsob jak reprezentovat interakci (3.1) pomocí grafu, je reprezentace pomocí grafu, který budeme nazývat interakčním grafem NUO (3.1). Interakční graf $IG = (V, E)$ je orientovaný graf, kde $V = \{jk | k \in \mathbb{N}, j < k\}$. Tento graf má tedy $\binom{N}{2}$ vrcholů. Indexy vrcholů zde odpovídají příslušnému páru kontrolních qubitů, například vrchol jk odpovídá páru qubitů j a k . Operátor $\hat{U}_{j,k,l}$ je zde reprezentován opět dvěma orientovanými hranami $\{jk, jl\}$ a $\{jk, kl\}$. Opět se snadno přesvědčíme, že k určení daného operátoru nám stačí pouze jedna z těchto dvou hran. Tento způsob reprezentace se ukazuje jako nejvhodnější ke klasifikaci NUO (3.1) podle jejich atraktorového prostoru, proto jej nazveme interakčním grafem NUO (3.1).

Důvod, proč v obou uvedených reprezentacích je každý operátor reprezentován dvěma orientovanými hranami je, že operátory $\hat{U}_{j,k,l}$ vystupující v NUO (3.1) jsou symetrické v indexech jk , a tedy $\hat{U}_{j,k,l} = \hat{U}_{k,j,l}$. Existují samozřejmě další způsoby, jak NUO (3.1) reprezentovat, díky uvedené symetrii v indexech však každá z těchto reprezentací bude mít tuto vlastnost. Výjimku tvoří reprezentace pomocí bipartitního grafu, (U, V, E) , jehož část U odpovídá kontrolním párům qubitů a část V odpovídá target qubitům. Nicméně jediná informace, kterou nám tento graf poskytne, je přehled o operátorech $\hat{U}_{j,k,l}$, které se v NUO (3.1) objevují.

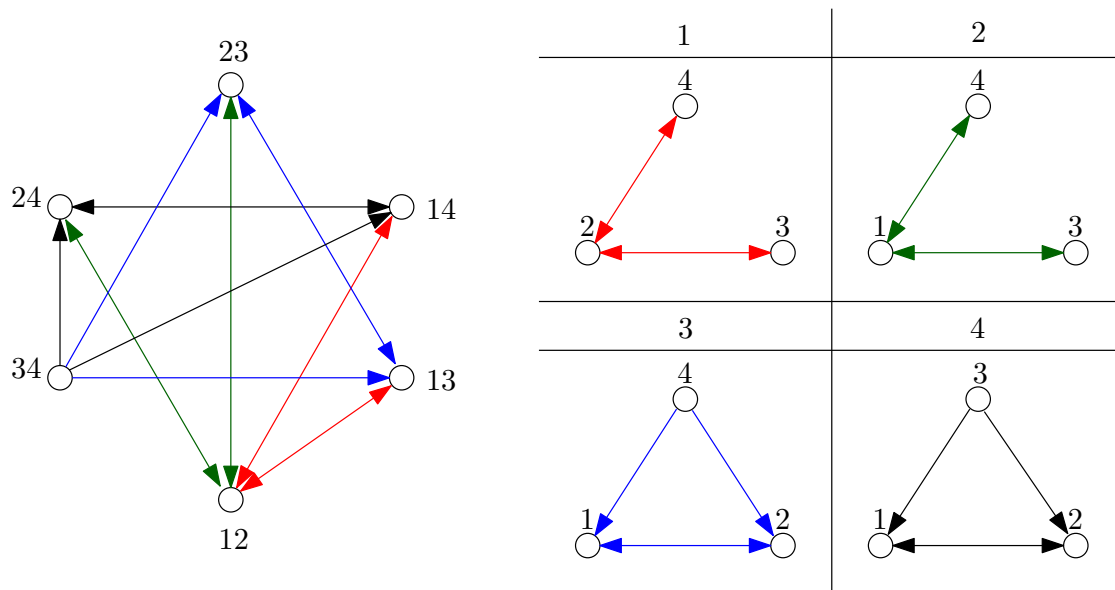


Obrázek 3.3: Reprezentace operátoru $\hat{U}_{jk,l}$ v interakčním grafu

Porovnejme nyní reprezentaci pomocí grafu symetrií a interakčního grafu. Na obrázku 3.4 je uveden příklad interakčního grafu NUO (3.1) pro 4 qubity a příslušného grafu symetrií. Z grafu symetrií je zřejmé, že mezi působením jednotlivých operátorů je jistá symetrie, graf je například invariantní vůči záměně qubitů 1 a 2 v dané NUO. Jak je z obrázku 3.4 vidět, interakční graf však žádnou takovou symetrii nenaznačuje. Dále si můžeme všimnout, že podgraf interakčního grafu $IG_j = (U_j, F_j)$, kde $U_j = \{jk | k \in \mathbb{N}, j \neq k\}$ a kde $F_j = \{\{jk, jl\} \in E | k, l \in \mathbb{N}, k, l \neq j\}$ je izomorfní grafu SG_j . Od-



Obrázek 3.4: Příklad interakčního grafu a příslušného grafu symetrií



Obrázek 3.5: Příklad interakčního grafu a příslušného grafu symetrií s barevně vyznačenými izomorfními částmi

tud je vidět, že mezi interakčními grafy a grafy symetrií existuje jednoznačné přiřazení, můžeme proto mluvit o interakčním grafu příslušného ke grafu symetrií a naopak.

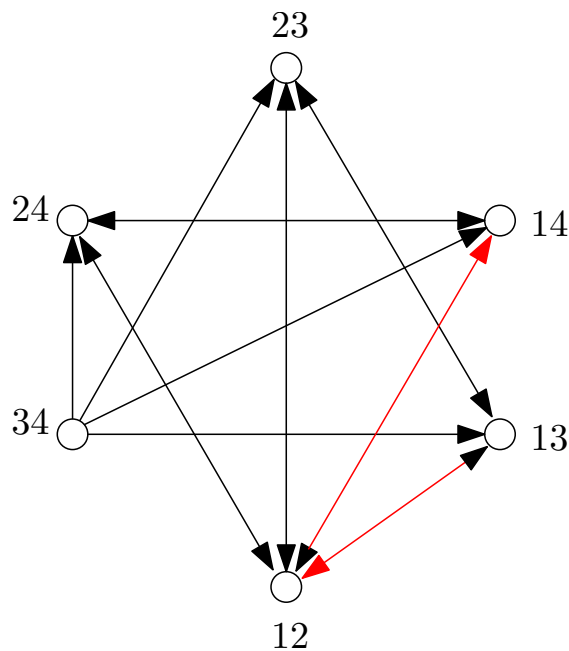
3.4 Minimální grafy

V kapitole 3.2 jsme uvedli tvar minimálního atraktorového prostoru NUO (3.1), který je atraktorovým prostorem pro tuto NUO s množinou E obsahující všechny přípustné trojice (jk, l) , tj. NUO s úplně souvislým interakčním grafem. V této části uvidíme, že i daleko obecnější interakční grafy přísluší NUO (3.1) s minimálním atraktorovým prostorem. Interakční grafy, jimž přísluší NUO s minimálním atraktorovým prostorem se nazývají minimální grafy.

Jak je ukázáno v příloze C, interakční graf je minimálním grafem právě když splňuje následující podmínku:

Každý vrchol interakčního grafu jk je spojen cestou s vrcholem $m_l l$ pro každé $l \neq j, k$ a nějaké $m_l \in \{1, \dots, N\}$.

Jak se snadno přesvědčíme, tato podmínka je různá od podmínky silné souvislosti. Interakční graf na obr. 3.4. je minimálním grafem, ale není silně souvislý, protože žádný z vrcholů $jk \neq 34$ není spojen cestou s vrcholem 34.



Obrázek 3.6: Příklad cesty v minimálním grafu. Posloupnost vrcholů je (13,12,14).

Kapitola 4

Závěr

Hlavním cílem této práce bylo nalezení minimálního atraktorového prostoru NUO (3.1), nalezení reprezentace těchto NUO pomocí grafů a určení podmínky, za které daný graf přísluší NUO s minimálním atraktorovým prostorem.

Ukázali jsme, že minimální atraktorový prostor je $(N + 2)^2 + 1$ rozměrný podprostor $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda = 1$ NUO (3.1). Asymptotická dynamika NUO (3.1) je tedy stacionární pro libovolně velkou kvantovou síť. Z působení operátorů $\hat{U}_{j,k,l}$ na atraktory X_i je zřejmé, že existuje $(N + 1)^2$ rozměrný podprostor atraktorového prostoru, v němž je každý jednorozměrný podprostor invariantní vůči působení operátorů $\hat{U}_{j,k,l}$. Zajímavá, netriviální dynamika tedy probíhá v $2N + 3$ rozměrném podprostoru atraktorového prostoru, jehož ortonormální báze je dána operátory X_i , $i \in \{(N + 1)^2 + 1, \dots, (N + 2)^2 + 1\}$.

Nalezli jsme dva užitečné způsoby, jak NUO (3.1) reprezentovat pomocí grafů, graf symetrií a interakční graf. Graf symetrií je užitečný při hledání symetrií mezi interakcí jednotlivých qubitů. Pomocí interakčního grafu jsme schopni klasifikovat operace (3.1) podle velikosti jejich atraktorového prostoru. Z důkazu v příloze A je navíc zřejmé, že asymptotická dynamika NUO (3.1) bude stacionární, pokud každý pár qubitů bude tvořit kontrolní pár nějakého z operátorů $\hat{U}_{j,k,l}$, tedy pokud z každého vrcholu interakčního grafu vede hrana, nebo ekvivalentně, pokud žádný z grafů SG_j grafu symetrií nemá více než jednu komponentu souvislosti. Pokud tato podmínka není splněna, daná NUO může

mít i netriviální vlastní podprostor příslušný vlastní hodnotě $\lambda = -1$.

Je zřejmé, že minimální atraktorový prostor kontrolních unitárních dvoučásticových interakcí tvoří pro libovolné $N > 2$ podprostor minimálního atraktorového prostoru kontrolních unitárních tříqubitových interakcí. Povolíme-li tedy vedle dvouqubitových interakcí také tříqubitové interakce, minimální atraktorový prostor vzniklé NUO bude roven minimálnímu atraktorovému prostoru dvouqubitových interakcí.

Příloha A

Minimální atraktorový prostor

V této části odvodíme minimální atraktorový prostor uvedený v kapitole 3.2. Nejdříve se podíváme blíže na případ $\phi = \frac{\pi}{2}$. Rovnice pro atraktory lze přepsat do tvaru

$$\hat{U}_{kl,m} \hat{X} \hat{U}_{kl,m}^\dagger = \lambda \hat{X}, \quad \lambda = \pm 1$$

Zapíšeme-li

$$\hat{X} = \sum_{i,j \in I^N} X_j^i |i\rangle \langle j|,$$

kde $I = \{0, 1\}$, dostáváme po dosazení do příslušné rovnice a využití vlastnosti $\hat{U}_{kl,m}^2 = \hat{1}$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{kl,m} \hat{X} \hat{U}_{kl,m}^\dagger &= \sum_{i,j \in I^N} X_j^i \hat{U}_{kl,m} |i\rangle \langle j| \hat{U}_{kl,m}^\dagger = \sum_{i,j \in I^N} X_j^i |i'\rangle \langle j'| = \\ &= \sum_{i,j \in I^N} X_{j'}^{i'} |i\rangle \langle j| = \lambda \hat{X} = \sum_{i,j \in I^N} \lambda X_j^i |i\rangle \langle j|. \end{aligned}$$

Maticové elementy daného operátoru tedy musí vyhovovat soustavě rovnic

$$\lambda X_j^i = X_{j'}^{i'},$$

Je-li $i = (i_1, \dots, i_N)$, pak $i' = (i_1, \dots, i_m \oplus i_k i_l, \dots, i_N)$ a podobně pro j' .

Mějme kvantovou síť složenou z N qubitů a uvažujme NUO (3.1), kde $E = \{(jk, l) | j, k, l \in \{1, \dots, N\}, j \neq k \neq l\}$. Množina E tedy obsahuje všechny přípustné indexy jk, l . Maticové elementy X_j^i lze rozdělit do několika podskupin, které jsou invariantní vůči působení operátorů $\hat{U}_{kl,m}$.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{(0, 0)\}, \\
 A_{1+i} &= \{(\mathbf{i}, 0)\}, \mathbf{i} = (0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0), i \in \hat{N} \\
 A_{N+1+i} &= \{(0, \mathbf{i})\}, i \in \hat{N} \\
 A_{(i+1)N+j+1} &= \{(\mathbf{i}, \mathbf{j})\}, i, j \in \hat{N} \\
 A_{(N+1)^2+1} &= \{(\mathbf{i}, 0) | \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N), \sum_{k=1}^N i_k > 1\}, \\
 A_{(N+1)^2+j+1} &= \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) | \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N), \mathbf{j} = (0, \dots, 1, \dots, 0), \sum_{k=1}^N i_k > 1\}, j \in \hat{N}, \\
 A_{(N+1)^2+N+2} &= \{(0, \mathbf{i}) | \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) | \sum_{k=1}^N i_k > 1\}, \\
 A_{(N+1)^2+N+2+i} &= \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) | \mathbf{i} = (0, \dots, 1, \dots, 0), \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_N), \sum_{k=1}^N j_k > 1\}, i \in \hat{N}, \\
 A_{(N+2)^2} &= \{(\mathbf{i}, \mathbf{i}) | \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N), \sum_{k=1}^N i_k > 1\} \\
 A_{(N+2)^2+1} &= \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) | \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N), \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_N), \sum_{k=1}^N i_k > 1, \sum_{k=1}^N j_k > 1, \mathbf{i} \neq \mathbf{j}\},
 \end{aligned}$$

Pro obecné $\phi \in (0, \pi)$ můžeme provést podobné rozdělení do množin maticových elementů. Jediný rozdíl je, že pro $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ jsou maticové elementy příslušné množině $A_{(N+2)^2}$ spojeny operátory $\hat{U}_{jk,l}$ s maticovými elementy příslušnými množině $A_{(N+2)^2+1}$. Vybereme podsystém tvořený qubity j, k a l . Tyto qubity jsou spolu svázány operátory $\hat{U}_{jk,l}, \hat{U}_{kl,j}$ a $\hat{U}_{l,j,k}$. Pro jednoduchost budeme ignorovat indexy dalších qubitů, protože ty nejsou působením těmito operátory ovlivněny. Pro tuto chvíli budeme ignorovat fakt, že qubity j, k a l jsou svázány s ostatními qubity dalšími operátory. Ty by mohly výsledný atraktorový prostor zmenšit, že se tak nestane se ověří prostým dosazením výsledných operátorů do rovnic pro atraktory.

Příslušné rovnice pro maticové elementy mají následující tvar

$$\begin{aligned}
 \lambda X_{0ij}^{111} &= -\cos \phi X_{0ij}^{111} + \sin \phi X_{0ij}^{110}, & \lambda X_{0ij}^{110} &= \cos \phi X_{0ij}^{110} + \sin \phi X_{0ij}^{111}, \\
 \lambda X_{i0j}^{111} &= -\cos \phi X_{i0j}^{111} + \sin \phi X_{i0j}^{110}, & \lambda X_{i0j}^{110} &= \cos \phi X_{i0j}^{110} + \sin \phi X_{i0j}^{111}, \\
 \lambda X_{111}^{0ij} &= -\cos \phi X_{111}^{0ij} + \sin \phi X_{111}^{0ij}, & \lambda X_{110}^{0ij} &= \cos \phi X_{110}^{0ij} + \sin \phi X_{111}^{0ij}, \\
 \lambda X_{111}^{i0j} &= -\cos \phi X_{111}^{i0j} + \sin \phi X_{110}^{i0j}, & \lambda X_{110}^{i0j} &= \cos \phi X_{110}^{i0j} + \sin \phi X_{111}^{i0j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda X_{110}^{110} &= \cos^2 \phi X_{110}^{110} + \sin^2 \phi X_{111}^{111} + \sin \phi \cos \phi (X_{111}^{110} + X_{110}^{111}), \\
 \lambda X_{111}^{111} &= \cos^2 \phi X_{111}^{111} + \sin^2 \phi X_{110}^{110} - \sin \phi \cos \phi (X_{111}^{110} + X_{110}^{111}), \\
 \lambda X_{111}^{110} &= -\cos^2 \phi X_{111}^{110} + \sin^2 \phi X_{110}^{110} + \sin \phi \cos \phi (X_{110}^{110} + X_{111}^{111}), \\
 \lambda X_{110}^{111} &= -\cos^2 \phi X_{110}^{111} + \sin^2 \phi X_{111}^{111} + \sin \phi \cos \phi (X_{110}^{110} + X_{111}^{111}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda X_{ij0}^{111} &= -\cos \phi X_{ij0}^{111} + \sin \phi X_{ij0}^{011}, & \lambda X_{ij0}^{011} &= \cos \phi X_{ij0}^{011} + \sin \phi X_{ij0}^{111}, \\
 \lambda X_{i0j}^{111} &= -\cos \phi X_{i0j}^{111} + \sin \phi X_{i0j}^{011}, & \lambda X_{i0j}^{011} &= \cos \phi X_{i0j}^{011} + \sin \phi X_{i0j}^{111}, \\
 \lambda X_{111}^{ij0} &= -\cos \phi X_{111}^{ij0} + \sin \phi X_{011}^{ij0}, & \lambda X_{011}^{ij0} &= \cos \phi X_{011}^{ij0} + \sin \phi X_{111}^{ij0}, \\
 \lambda X_{111}^{i0j} &= -\cos \phi X_{111}^{i0j} + \sin \phi X_{011}^{i0j}, & \lambda X_{011}^{i0j} &= \cos \phi X_{011}^{i0j} + \sin \phi X_{111}^{i0j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda X_{011}^{011} &= \cos^2 \phi X_{011}^{011} + \sin^2 \phi X_{111}^{111} + \sin \phi \cos \phi (X_{111}^{011} + X_{011}^{111}), \\
 \lambda X_{111}^{111} &= \cos^2 \phi X_{111}^{111} + \sin^2 \phi X_{011}^{011} - \sin \phi \cos \phi (X_{111}^{011} + X_{011}^{111}), \\
 \lambda X_{111}^{011} &= -\cos^2 \phi X_{111}^{011} + \sin^2 \phi X_{011}^{011} + \sin \phi \cos \phi (X_{011}^{011} + X_{111}^{111}), \\
 \lambda X_{011}^{111} &= -\cos^2 \phi X_{011}^{111} + \sin^2 \phi X_{111}^{111} + \sin \phi \cos \phi (X_{011}^{011} + X_{111}^{111}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda X_{0ij}^{111} &= -\cos \phi X_{0ij}^{111} + \sin \phi X_{0ij}^{101}, & \lambda X_{0ij}^{101} &= \cos \phi X_{0ij}^{101} + \sin \phi X_{0ij}^{111}, \\
 \lambda X_{ij0}^{111} &= -\cos \phi X_{ij0}^{111} + \sin \phi X_{ij0}^{101}, & \lambda X_{ij0}^{101} &= \cos \phi X_{ij0}^{101} + \sin \phi X_{ij0}^{111}, \\
 \lambda X_{111}^{0ij} &= -\cos \phi X_{111}^{0ij} + \sin \phi X_{101}^{0ij}, & \lambda X_{101}^{0ij} &= \cos \phi X_{101}^{0ij} + \sin \phi X_{111}^{0ij}, \\
 \lambda X_{111}^{ij0} &= -\cos \phi X_{111}^{ij0} + \sin \phi X_{101}^{ij0}, & \lambda X_{101}^{ij0} &= \cos \phi X_{101}^{ij0} + \sin \phi X_{111}^{ij0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda X_{101}^{101} &= \cos^2 \phi X_{101}^{101} + \sin^2 \phi X_{111}^{111} + \sin \phi \cos \phi (X_{111}^{101} + X_{101}^{111}), \\
 \lambda X_{111}^{111} &= \cos^2 \phi X_{111}^{111} + \sin^2 \phi X_{101}^{101} - \sin \phi \cos \phi (X_{111}^{101} + X_{101}^{111}), \\
 \lambda X_{111}^{101} &= -\cos^2 \phi X_{111}^{101} + \sin^2 \phi X_{111}^{101} + \sin \phi \cos \phi (X_{101}^{101} + X_{111}^{111}), \\
 \lambda X_{101}^{111} &= -\cos^2 \phi X_{101}^{111} + \sin^2 \phi X_{101}^{111} + \sin \phi \cos \phi (X_{101}^{101} + X_{111}^{111})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda X_{0ij}^{0kl} &= X_{0ij}^{0kl}, & \lambda X_{i0j}^{k0l} &= X_{i0j}^{k0l}, & \lambda X_{ij0}^{kl0} &= X_{ij0}^{kl0}, \\
 \lambda X_{0ij}^{k0l} &= X_{0ij}^{k0l}, & \lambda X_{i0j}^{kl0} &= X_{i0j}^{kl0}, & \lambda X_{0ij}^{kl0} &= X_{0ij}^{kl0}, \\
 \lambda X_{i0j}^{0kl} &= X_{i0j}^{0kl}, & \lambda X_{ij0}^{k0l} &= X_{ij0}^{k0l}, & \lambda X_{ij0}^{0kl} &= X_{ij0}^{0kl}.
 \end{aligned}$$

Prozkoumáme nejdříve případ $\lambda = 1$. Příslušné rovnice jdou přepsat následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\phi}{2} X_{0ij}^{111} &= \sin \frac{\phi}{2} X_{0ij}^{110}, & \cos \frac{\phi}{2} X_{ij0}^{111} &= \sin \frac{\phi}{2} X_{ij0}^{011}, & \cos \frac{\phi}{2} X_{0ij}^{111} &= \sin \frac{\phi}{2} X_{0ij}^{101}, \\
 \cos \frac{\phi}{2} X_{111}^{0ij} &= \sin \frac{\phi}{2} X_{110}^{0ij}, & \cos \frac{\phi}{2} X_{111}^{ij0} &= \sin \frac{\phi}{2} X_{011}^{ij0}, & \cos \frac{\phi}{2} X_{111}^{0ij} &= \sin \frac{\phi}{2} X_{101}^{0ij}, \\
 \cos \frac{\phi}{2} X_{i0j}^{111} &= \sin \frac{\phi}{2} X_{i0j}^{110}, & \cos \frac{\phi}{2} X_{i0j}^{111} &= \sin \frac{\phi}{2} X_{i0j}^{011}, & \cos \frac{\phi}{2} X_{ij0}^{111} &= \sin \frac{\phi}{2} X_{ij0}^{101}, \\
 \cos \frac{\phi}{2} X_{111}^{i0j} &= \sin \frac{\phi}{2} X_{110}^{i0j}, & \cos \frac{\phi}{2} X_{111}^{i0j} &= \sin \frac{\phi}{2} X_{011}^{i0j}, & \cos \frac{\phi}{2} X_{111}^{ij0} &= \sin \frac{\phi}{2} X_{101}^{ij0}, \\
 X_{111}^{110} &= X_{110}^{111} & X_{111}^{011} &= X_{011}^{111} & X_{111}^{101} &= X_{101}^{111}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cos \phi X_{111}^{110} &= \sin \phi (X_{110}^{110} - X_{111}^{111}), \\
 2 \cos \phi X_{111}^{011} &= \sin \phi (X_{011}^{011} - X_{111}^{111}), \\
 2 \cos \phi X_{111}^{101} &= \sin \phi (X_{101}^{101} - X_{111}^{111}).
 \end{aligned}$$

Protože množiny A_j jsou invariantní vůči působení operátorů $\hat{U}_{j,k,l}$, budeme hledat matice \hat{X} následujícím způsobem. Všechny maticové elementy příslušné množinám A_j položíme rovny nule, až na maticové elementy jedné z množin, například množiny A_k . Tím se nám redukuje soustava příslušných rovnic, což nám umožní najít všechna lineárně nezávislá řešení pro danou množinu A_k .

Snadno určíme operátory příslušné množinám $A_1, \dots, A_{(N+1)^2}$. Každá z těchto množin je příslušná jednomu maticovému elementu, který výše uvedenými rovnicemi není svázán s žádnými jinými elementy. Získáváme tedy následující operátory

$$\begin{aligned}\hat{X}_1 &= |0_N\rangle \langle 0_N|, \quad |0_N\rangle = |0\rangle_1 \otimes \dots \otimes |0\rangle_N \\ \hat{X}_{i+1} &= |\mathbf{i}\rangle \langle 0_N|, \quad \mathbf{i} = (0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0), \quad i \in \hat{N}, \\ \hat{X}_{N+1+i} &= |0_N\rangle \langle \mathbf{i}|, \quad i \in \hat{N}, \\ \hat{X}_{(i+1)N+j+1} &= |\mathbf{i}\rangle \langle \mathbf{j}|, \quad i, j \in \hat{N}.\end{aligned}$$

Označíme $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{k} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Zvolíme $(\hat{X}_{(N+1)^2+k})_{\mathbf{k}}^{\mathbf{1}} = \left(\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^{N-2}$. Z výše uvedených rovnic potom vyplývá

$$(\hat{X}_{(N+1)^2+k})_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}} = \left(\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^{\tau(\mathbf{i})-2} \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^{N-\tau(\mathbf{i})}, \quad \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N), \quad \tau(\mathbf{i}) = \sum_{l=1}^N i_l, \quad \tau(\mathbf{i}) > 1,$$

kde $\tau(\mathbf{i}) = \sum_{l=1}^N i_l$. Operátory příslušné množinám $A_{(N+1)^2+1}$, respektive $A_{(N+1)^2+1+i}$, $i \in \hat{N}$ lze tedy volit následovně

$$\begin{aligned}\hat{X}_{(N+1)^2+1} &= |\psi_N\rangle \langle 0_N|, \\ \hat{X}_{(N+1)^2+1+i} &= |\psi_N\rangle \langle \mathbf{i}|, \quad \mathbf{i} = (0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0), \quad i \in \hat{N}, \\ |\psi_N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\langle \theta_N | \theta_N \rangle}} |\theta_N\rangle, \\ |\theta_N\rangle &= \sum_{z \in \{0,1\}^N, \tau(z) > 1} \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^{N-\tau(z)} \left(\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^{\tau(z)} |z\rangle.\end{aligned}$$

Podobným způsobem lze určit operátory příslušné množinám $A_{(N+1)^2+N+2}$, respektive $A_{(N+1)^2+N+2+k}$, $k \in \hat{N}$. Výsledné operátory jsou

$$\begin{aligned}\hat{X}_{(N+1)^2+N+2} &= |0_N\rangle \langle \psi_N|, \\ \hat{X}_{(N+1)^2+N+2+i} &= |\mathbf{i}\rangle \langle \psi_N|, \mathbf{i} = (0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0), i \in \hat{N}.\end{aligned}$$

Stejný postup lze uplatnit i pro množinu $A_{(N+2)^2+1}$. Jí příslušný operátor má tvar

$$\hat{X}_{(N+2)^2+1} = |\psi_N\rangle \langle \psi_N|.$$

Zbývá určit operátor příslušný množině $A_{(N+2)^2}$. Jak už bylo řečeno, maticové elementy obsažené v této množině jsou v obecném případě svázány s maticovými elementy z množiny $A_{(N+2)^2+1}$. Položíme tedy všechny elementy příslušející množině $A_{(N+2)^2+1}$ nule. Odtud už plyne možná volba příslušného operátoru jako

$$\hat{X}_{(N+2)^2} = \sum_{z \in \{0,1\}^N, \tau(z) > 1} |z\rangle \langle z|.$$

Jeho ortonormalizací vzhledem k ostatním získaným operátorům dostaneme operátor

$$\hat{X}_{(N+2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2^N - N - 2}} \left(\sum_{z \in \{0,1\}^N, \tau(z) > 1} |z\rangle \langle z| - |\psi_N\rangle \langle \psi_N| \right).$$

Probereme nyní případ $\lambda = -1$. Protože v našem případě množina E obsahuje všechny přípustné trojice indexů (jk, l) , pro libovolný maticový element $X_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}}$, kde $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \neq (1, \dots, 1)$, $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_N) \neq (1, \dots, 1)$ najdeme operátor $\hat{U}_{jk,l}$ takový, že příslušná rovnice má tvar $X_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}} = -X_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}}$ a tedy $X_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}} = 0$. Je-li dále například $\mathbf{i} = (1, \dots, 1) = \mathbf{1}$ a $\mathbf{j} \neq \mathbf{1}$, pak najdeme operátor $\hat{U}_{jk,l}$ tak, že příslušná rovnice má tvar $-X_{\mathbf{j}}^{\mathbf{1}} = \pm \cos \frac{\phi}{2} X_{\mathbf{j}}^{\mathbf{1}} + \sin \frac{\phi}{2} X_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}}$, kde $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N) \neq \mathbf{1}$ a tedy $X_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}} = 0$. Odtud dostáváme pro libovolné $\mathbf{j} \neq \mathbf{1}$ výsledek $X_{\mathbf{j}}^{\mathbf{1}} = 0$. Stejnou úvahu lze provést i pro maticové elementy $X_{\mathbf{1}}^{\mathbf{i}}$. Nakonec pro maticový element $X_{\mathbf{1}}^{\mathbf{1}}$ dostaneme po aplikaci libovolného operátoru $\hat{U}_{jk,l}$ rovnici $X_{\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} = \cos^2 \phi X_{\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} + \sin^2 \phi X_{\mathbf{1}}^{\mathbf{i}} - \sin \phi \cos \phi (X_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}} - X_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}})$, kde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \neq \mathbf{1}$, a tedy platí $X_{\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} = 0$. Celkem dostáváme výsledek, že pro $\lambda = -1$ neexistuje žádný netriviální atraktor.

Příloha B

Základní pojmy teorie grafů

V této příloze uvedeme základní pojmy teorie grafů [6] používané v práci a definujeme hvězdový graf symetrického grafu.

Graf G je uspořádaná dvojice množin (V, E) , kde V je konečná množina a $E \subset \binom{V}{2}$, kde $\binom{V}{r}$ označuje množinu všech r prvkových podmnožin množiny V . Prvky množiny V se nazývají vrcholy, prvky množiny E se nazývají hrany a značí se $e = \{i, j\}$, kde $i, j \in V$. Graf se nazývá orientovaný, pokud $\{i, j\} \neq \{j, i\}, i, j \in V$, jinak nazýváme graf neorientovaný. Graf $H = (U, F)$ nazveme podgrafem grafu $G = (V, E)$, pokud platí $U \subset V \wedge F \subset E$.

Posloupnost vrcholů $(i_1, \dots, i_n), i_j \neq i_k$, přičemž platí $\{i_j, i_{j+1}\} \in E, j \in \{1, \dots, n - 1\}$, nazýváme cestou spojující vrcholy i_1 a i_n . Orientovaný graf $G = (V, E)$ nazveme silně souvislý, pokud libovolné dva vrcholy $i, j \in V$ lze spojit cestou. ”Být spojen cestou” je relace ekvivalence na množině V . Třídy této ekvivalence nazýváme komponentami souvislosti grafu G . Prvkami těchto tříd jsou silně souvislé podgrafy grafu G , přičemž přidáním libovolného dalšího vrcholu do daného podgrafu je narušena vlastnost silné souvislosti.

Hvězdový graf symetrií je graf symetrií (viz. kapitola 3.3), jejichž vrcholy jsou spojeny hranami následujícím způsobem. Dva z daných grafů jsou klasickými hvězdovými grafy, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že se jedná o graf 1 a graf 2.

Pro $j \in \{3, \dots, N\}$ obsahuje j -tý graf následující hrany: $\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{k, 1\}, \{k, 2\}$,
 $k \in \{3, \dots, N\} \setminus \{j\}$.

Příloha C

Minimální grafy

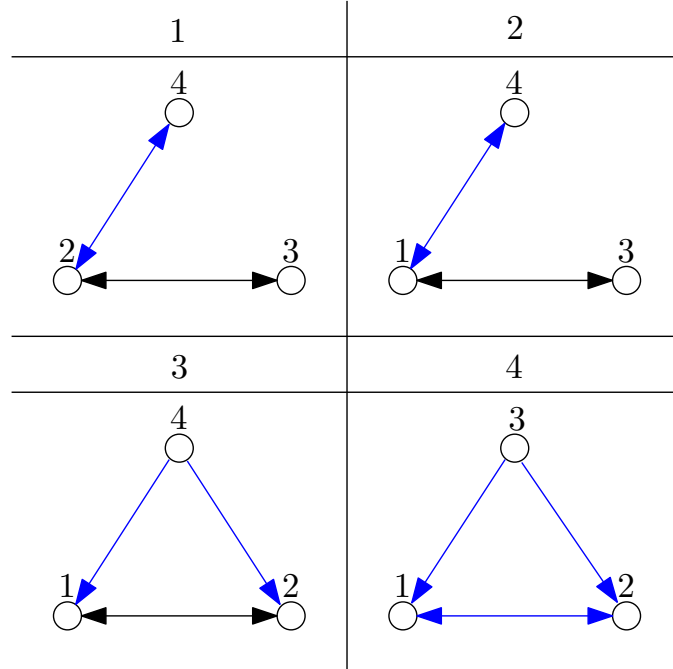
Zde odvodíme podmínku pro minimální grafy uvedenou v kapitole 3.4. Na začátku přílohy A jsme provedli rozdělení maticových elementů atraktorů do $(N+2)^2 + 1$ množin A_l , které jsou invariantní vůči působení operátorů $\hat{U}_{jk,l}$, tzn. operátory $\hat{U}_{jk,l}$ svazují rovnicemi pouze maticové elementy které přísluší vždy pouze jedné z množin A_l . Výjimku tvoří množiny $A_{(N+2)^2}$ a $A_{(N+2)^2+1}$, jejichž maticové elementy jsou svázány příslušnými rovnicemi pro $\phi \neq \frac{\pi}{2}$. Toto rozdělení maticových elementů do invariantních množin A_l je možné provést pro operaci (3.1) s libovolnou množinou indexů E . Je zřejmé, že atraktorový prostor bude minimální, právě když počet těchto množin A_l pro danou operaci (3.1) zůstane minimální, tj. $(N+2)^2 + 1$. Z výše uvedeného plyne, že potom budou v každé množině A_l všechny maticové elementy svázány příslušnými rovnicemi. Kdyby tomu tak nebylo, maticový element který s ostatními není svázán by šlo z dané množiny přesunout do nové, která by obsahovala pouze tento element a počet invariantních množin A_l by byl větší.

Nejdříve se budeme zabývat případem $\phi = \frac{\pi}{2}$. Provázání maticových elementů lze graficky zobrazit pomocí tzv. indexového grafu příslušného dané operaci. Indexový graf operací (3.1) je neorientovaný barevný graf tvořený $2^N - N - 1$ vrcholy, jejichž indexy jsou všechny možné stavy výpočetní báze $|\mathbf{i}\rangle$, $\mathbf{i} \in \{0, 1\}^N$, které splňují $\tau(\mathbf{i}) > 1$. Vrcholy indexového grafu \mathbf{i} a \mathbf{j} jsou spojeny hranou, právě když operace (3.1) obsahuje operátor $\hat{U}_{kl,m}$, který splňuje $|\mathbf{i}\rangle = \hat{U}_{kl,m} |\mathbf{j}\rangle$. Indexový graf není orientovaný, protože aplikací operátoru $\hat{U}_{kl,m}$ na tuto rovnici získáme rovnici $\hat{U}_{kl,m} |\mathbf{i}\rangle = |\mathbf{j}\rangle$. Hrana, která spojuje vr-

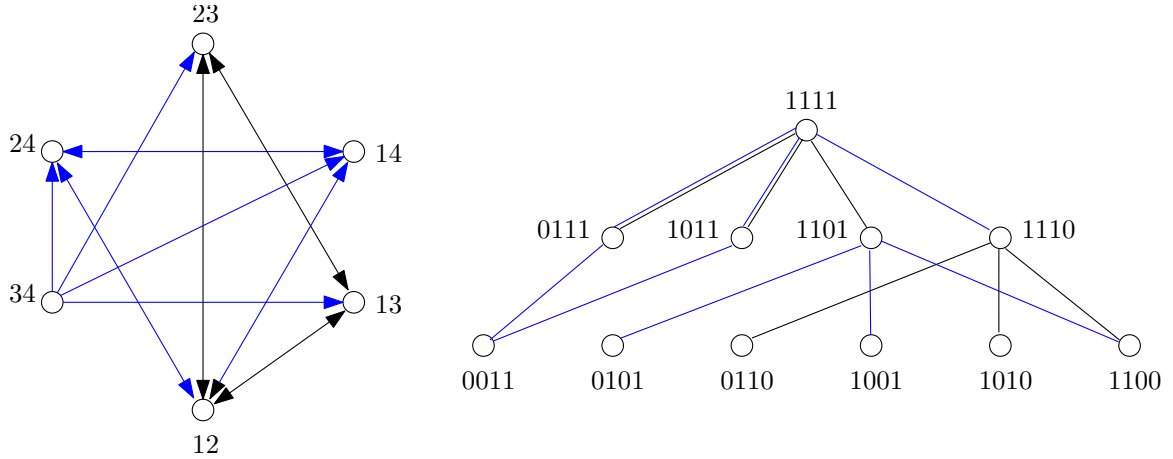
choly \mathbf{i} a \mathbf{j} má barvu určenou trojicí indexů (kl, m) . V indexovém grafu uvažujeme pouze případy $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$, indexový graf tedy neobsahuje žádné smyčky.

Nyní se přesuneme ke zkoumání množin A_l . Množiny A_l pro $l \in \{1, \dots, (N+1)^2\}$ jsou jednoprvkové a požadavek propojenosti všech elementů příslušnými rovnicemi je pro ně tedy triviální splněn. Snadno si rozmyslíme, že pro $l \in \{(N+1)^2+1, \dots, (N+2)^2\}$ je daný požadavek splněn, pokud je příslušný indexový graf souvislý. Pro množinu $A_{(N+2)^2+1}$ musí platit, že příslušný indexový graf je dvojsouvislý, tj že každý pár vrcholů indexového grafu $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ je spojen s libovolným párem $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$ posloupností barevných hran, přičemž tyto posloupnosti jsou stejné pro obě složky daného páru. Protože dvojsouvislost implikuje souvislost, nutná a postačující podmínka, aby operace (3.1) pro $\phi = \frac{\pi}{2}$ měla minimální atraktorový prostor je dvojsouvislost příslušného indexového grafu.

Nejdříve ukážeme, že úplně souvislý interakční graf má skutečně dvojsouvislý indexový graf. Toto tvrzení dokážeme ve dvou krocích. Nejdříve ukážeme dvojsouvislost in-



Obrázek C.1: Graf symetrií pro 4 qubity obsahující podgraf symetrií, který má topologii hvězdového grafu pro 3 qubity (černé hrany). Přidáním modrých hran k tomuto podgrafu vznikne hvězdový graf symetrií pro 4 qubity.



Obrázek C.2: Interakční graf hvězdového grafu symetrií a příslušný indexový graf bez vyznačení barev

terakčního grafu hvězdového grafu symetrií. Tento graf symetrií je zobecněním hvězdového grafu dvouqubitových interakcí [5], pro $N = 4$ je zobrazen spolu s příslušným interakčním grafem na obr. 3.4. Příslušný indexový graf je zobrazen na obr. B.2. Dvojsouvislost interakčního grafu hvězdového grafu symetrií dokážeme indukcí. Pro $N = 3$ je zřejmě indexový graf příslušný hvězdovému grafu symetrií dvojsouvislý. Buď nyní $N > 3$ a necht' indexový graf příslušný hvězdovému grafu symetrií pro N qubitů je dvojsouvislý. Uvažujme nyní graf symetrií pro $N+1$ qubitů, který obsahuje podgraf, který má topologii hvězdového grafu symetrií pro N qubitů (příklad viz. obr. B.1). Hvězdový graf symetrií pro $N+1$ qubitů vznikne přidáním následujících hran: V grafu 1 přidáme hrany $2(N+1)$ a $(N+1)2$. V grafu 2 přidáme hrany $1(N+1)$ a $(N+1)1$. V grafech $3, \dots, N$ přidáme hrany $(N+1)1$ a $(N+1)2$. V grafu $N+1$, přidáme hrany $j1$ a $k2$ pro $j \in \{2, \dots, N\}$ a $k \in \{1, 3, 4, \dots, N\}$. Tímto nám vznikl hvězdový graf symetrií pro $N+1$ qubitů.

Uvažujme indexový graf grafu symetrií pro $N+1$ qubitů, který obsahuje podgraf s topologií hvězdového grafu symetrií pro N qubitů. Příklad takového indexového grafu je pro 4 qubity zobrazen černými hranami na obr. B.2. Tento indexový graf má zřejmě $N+1$ komponent souvislosti. První komponenta souvislosti je izomorfní indexovému grafu hvězdového grafu symetrií pro N qubitů, přičemž vrcholy této komponenty mají poslední index roven 1. Stejně tak druhá komponenta je izomorfní indexovému grafu hvězdového grafu symetrií pro N qubitů, přičemž vrcholy této komponenty mají po-

slední index roven 0. Tyto dvě komponenty jsou navíc barevně izomorfní. O těchto dvou komponentách předpokládáme, že jsou dvojsouvislé. Zbýlých $N - 1$ komponent souvislosti je tvořeno jednotlivými vrcholy $(i_1, \dots, i_N, 1)$, přičemž $\sum_{k=1}^N i_k = 1$. Tyto komponenty souvislosti jsou triviálně dvojsouvislé. Přidáme-li nyní do příslušného grafu symetrií hrany podle návodu v předchozím odstavci, získáme následující. Přidání hran $2(N + 1)$ v grafu 1 a $1(N + 1)$ v grafu 2 indukují barevné hrany v indexovém grafu, které spojují první a druhou komponentu souvislosti. Přidáním ostatních uvedených hran indukujeme barevné hrany v indexovém grafu, které spojují druhou komponentu souvislosti s komponentami souvislosti $3, \dots, N + 1$, nebo spojují vrcholy uvnitř druhé komponenty souvislosti. Dvojsouvislost výsledného indexového grafu je zřejmá, až na případ kdy vrcholy $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ jsou zvoleny tak, že jeden leží v první komponentě souvislosti a druhý leží v druhé komponentě souvislosti. Tuto dvojici lze spojit s libovolnou dvojicí $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$ díky dvojsouvislosti první a druhé komponenty s tím, že v druhé komponentě souvislosti máme navíc k dispozici barevné hrany, které se v první komponentě souvislosti nevyskytují. Výsledný indexový graf je tedy dvojsouvislý. Interakční graf příslušný hvězdomu grafu symetrií je tedy minimálním grafem.

Protože indexový graf příslušný hvězdomu grafu symetrií je podgrafem indexového grafu příslušného úplně souvislému interakčnímu grafu, je i indexový graf příslušný úplně souvislému interakčnímu grafu dvojsouvislý, protože dvojsouvislost není narušena přidáním dalších hran.

Nyní musíme ukázat, že odebráním hran z interakčního grafu nenarušíme dvojsouvislost indexového grafu, pokud je stále splněna podmínka uvedená v kapitole 3.4. Toto tvrzení dokážeme ve dvou krocích. Nejdříve ukážeme, že dvojsouvislost grafu není narušena odebráním hrany $\{jk, jl\}$, pokud v grafu stále existuje cesta $(j_i k_i)_{i=1}^n$, $j_1 k_1 = jk$, $j_n k_n = jl$. Toto tvrzení dokážeme analogicky [5] indukcí podle délky příslušné cesty. Máme-li hrany $g = \{jk, jl\}$, $e = \{jk, j_2 k_2\}$ a $f = \{j_2 k_2, jl\}$ délky 1. Snadno se přesvědčíme, že v příslušném indexovém grafu má hrana barvy g stejnou akci, jako aplikace hran $fefe$ a teď hranu g můžeme (společně s příslušnou hranou $\{jk, kl\}$) z interakčního grafu odstranit beze ztráty dvojsouvislosti příslušného indexového grafu. Uvažujme nyní cestu $(j_i k_i)_{i=1}^{n+1}$, $j_1 k_1 = jk$, $j_{n+1} k_{n+1} = jl$ tvořenou hranami $\{j_i k_i, j_{i+1} k_{i+1}\} = e_i$. Podle in-

dukčního předpokladu může být cesta délky $d < n$ substituována příslušnou hranou beze ztráty dvojsouvislosti příslušného indexového grafu. Vložením hrany $f = \{j_{n-1}k_{n-1}, jl\}$ nenarušíme dvojsouvislost indexového grafu a spojíme vrcholy jk a jl cestou délky $d = n - 1$, tedy hrana $\{jk, jl\}$ může být vynechána bez ztráty dvojsouvislosti příslušného indexového grafu.

Nyní ukážeme, že cesta $(jk, j_2k_2, \dots, j_{n-1}k_{n-1}, j_nk_n, j_nl)$ má v příslušném indexovém grafu stejnou akci jako aplikace hrany $\{jk, jl\}$, resp. $\{jk, kl\}$. Důkaz tohoto tvrzení je analogický předchozímu s tím rozdílem, že hrany $\{mn, op\}$, $m, n \neq o \wedge m, n \neq p$ nemají smysl, poněvadž nevíme, zdali mají reprezentovat operátor $\hat{U}_{mn,o}$, nebo $\hat{U}_{mn,p}$. Aby získaly smysl, musíme znát v nahrazované cestě předchozí vrchol, kterým je daný operátor určen jednoznačně.

Celkem dostáváme, že dvojsouvislost indexového grafu není narušena, dokud existuje cesta spojující vrchol jk s vrcholem j_nl pro nějaké j_n . Tato podmínka je zároveň nutnou podmínkou, protože pokud by existoval vrchol mn interakčního grafu, z něhož by neexistovala cesta do žádného z vrcholů op pro pevné p a libovolné o , pak by v příslušném indexovém grafu existovaly dvě komponenty souvislosti a tím pádem by nebyl dvojsouvislý.

Literatura

- [1] M. Westmoreland B. Schumacher. *Quantum Processes Systems & Inf.* Cambridge University Press, 2010.
- [2] Jex I. Novotny J., Alber G. Asymptotic evolution of random unitary operations. *Central European Journal of Physics*, 2010.
- [3] Finkleiner D. *Introduction to Matrices and Linear Transformations.* Freeman, 1978.
- [4] Chuang Nielsen. *Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge University Press, 2000.
- [5] Jex I. Novotny J, Alber G. Asymptotic dynamics of qubit networks under randomly applied controlled unitary transformations. *New Journal of Physics*, 2011.
- [6] Diestel R. *Graph Theory.* Springer, 2000.