

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V
PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika

Stochastické metody v
kvantitativní sociodynamice

Stochastic Methods in
Quantitative Sociodynamics

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Autor práce: **Josef Schmidt**

Vedoucí práce: **Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.**

Rok: **2011**

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze, dne 6.5.2011

Josef Schmidt

Název práce: **Stochastické metody v kvantitativní sociodynamice**

Autor: Josef Schmidt

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: Mgr. Milan Krbálek, PhD.

Katedra matematiky

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Abstrakt:

Byly formulovány definice základních charakteristik dopravního systému. Tyto definice byly aplikovány při zkoumání vybraných dopravních modelů (Nagel-Schreckenbergův model, model optimální rychlosti a tekutinový model) a reálných dat. Prozkoumali jsme modifikaci modelu optimální rychlosti. Jednotlivé výsledky byly vzájemně porovnány.

Klíčová slova: sociodynamika, dopravní modely, shluková analýza, dopravní data

Title: **Stochastic Methods in Quantitative Sociodynamics**

Author: Josef Schmidt

Specialization: Mathematical engineering

Type of thesis: Diploma thesis

Supervisor: Mgr. Milan Krbálek, PhD.

Department of Mathematics

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering

Abstract:

It was formulated definitions of basic characteristics of traffic system. These definitions were applied for investigation of particular traffic models (Nagel-Schreckenberg model, optimal velocity model and fluid model) and real data. We have investigated a modification of optimal velocity model. The findings have been compared to each other.

Keywords: sociodynamics, traffic models, spectral rigidity, traffic data

Obsah

1	Úvod	6
2	Teorie rozhodování	7
2.1	Master rovnice	8
2.2	Boltzmannova rovnice	9
2.3	Model sociálních sil	11
3	Modely dopravy	13
3.1	Celulární automaty	13
3.2	Modely à la Newton	14
3.3	Tekutínové modely	14
3.4	Základní charakteristiky dopravního systému	15
3.4.1	Fundamentální diagram	16
3.4.2	Histogramy	17
3.5	Okrajové podmínky	17
3.6	Shluková analýza	18
4	Nagel-Schreckenbergův model	24
4.1	Aktualizační schéma	24
4.2	Počáteční podmínky, parametry modelu	25
4.3	Fundamentální diagram	25
4.4	Jednotlivé dopravní režimy	26
4.4.1	Volný režim pro $N \ll L/v_{max}$	27
4.4.2	Volný režim pro $N < L/v_{max}$	28
4.4.3	Režim kongesce pro $N > L/v_{max}$	29
4.4.4	Režim kongesce pro $N \gg L/v_{max}$	30
4.4.5	Dopravní režimy pro malé délky silnice	31
4.5	Vliv jednotlivých parametrů na fundamentální diagram	32
4.5.1	Maximální rychlost v_{max}	32
4.5.2	Decelerační pravděpodobnost p_{dec}	33
4.5.3	Délka silnice L	34
5	Model optimální rychlosti	36
5.1	Počáteční podmínky, parametry modelu	38
5.2	Fundamentální diagram	38
5.3	Jednotlivé dopravní režimy	39
5.3.1	Volná doprava	39
5.3.2	Kongesce	40

5.3.3	Synchronizovaná doprava	42
5.4	Vliv jednotlivých parametrů na fundamentální diagram	43
5.4.1	Maximální rychlost v_{max}	43
5.4.2	Délka silnice L	44
5.4.3	Škálovací konstanta K_s	44
5.4.4	Translační konstanta K_t	44
5.4.5	Reakční doba τ	45
5.5	Problémy modelu	47
6	Modifikovaný model optimální rychlosti	49
6.1	Fundamentální diagram	50
6.2	Vliv vybraných parametrů na fundamentální diagram	52
6.2.1	Maximální rychlost v_{max}	52
6.2.2	Konstanty T_t a $K_t^{(0)}$	52
7	Tekutinový model	55
7.1	Počáteční podmínky, parametry modelu	56
7.2	Globální fundamentální diagram	57
7.3	Jednotlivé dopravní režimy	58
7.3.1	Volný režim	58
7.3.2	Kongesce	58
7.3.3	Synchronizovaný režim	61
8	Reálná data	62
8.1	Fundamentální diagram	65
8.2	Volný režim	66
8.3	Režim kongesce	67
9	Srovnání jednotlivých modelů	70
9.1	Výpočetní a implementační náročnost	70
9.2	Jednotlivé dopravní režimy a fundamentální diagramy	70
9.3	Shluková analýza	73
10	Závěr	75

1 Úvod

V současnosti je zkoumání dopravních systémů poměrně rozšířenou aktivitou. Motivace je jasná – vytvořit modely s jejichž pomocí bude možno modelovat a předpovídat chování dopravních systémů a na základě těchto modelů zefektivnit řízení dopravy nebo přímo výstavbu dopravní sítě.

Cílem této práce je seznámit se s modelováním dopravy prostřednictvím vybraných jednoduchých dopravních modelů. Dále zpracovat data nasbíraná z reálných dopravních situací a výsledky vzájemně porovnat.

2 Teorie rozhodování

V této kapitole uvedeme úvod do teorie rozhodování, tak jak je popsána v [1]. Postupně vyjdeme od nejjednoduššího případu, který budeme postupně zobecňovat. Studie potvrzují, že rozhodování je proces spíše pravděpodobnostní, než deterministický. Pravděpodobnost volby určité strategie je přímo úměrná počtu případů, kdy byla úspěšná. Označíme-li I množinu možných strategií, $i \in I$ konkrétní strategii a N_i počet případů, kdy strategie vedla k úspěchu, můžeme pravděpodobnost volby určité strategie p_i zapsat způsobem

$$p(i) = \frac{N_i + 1}{\sum_{j \in I} (N_j + 1)}.$$

Na počátku rozhodování, kdy $N_i = 0 \quad \forall i \in I$, jsou si všechny strategie rovny a my postupujeme metodou pokusu a omylu.

Pro podobu s přístupem známým ze statistické fyziky zavedeme tzv. **funkci užitku** ve tvaru

$$U(i) = T \ln(N_i + 1),$$

kde parametr T nazýváme **sociální teplota**. Tento vztah zároveň představuje tzv. Weber-Fechnerův zákon, který říká, že závislost velikosti vnímaného stimulu na fyzikální intenzitě stimulu je logaritmická. Tato funkce tedy reprezentuje užitek, který máme z volby konkrétní strategie. Po dosažení pravděpodobnost nabyde tvaru

$$p(i) = \frac{1}{Z} e^{U(i)/T}, \quad \text{kde} \quad Z = \sum_{j \in I} e^{U(j)/T}. \quad (1)$$

Tento model dále zobecníme přidáním časové závislosti k funkci užitku a sociální teplotě, znázorňující například proces učení anebo změnu vnějších podmínek. Dále zavedeme množinu A sociálních skupin, kde u jednotlivých skupin se může konkrétní rozhodování lišit. Buď tedy $a \in A$, pak

$$p_a(i, t) = \frac{1}{Z_a(t)} e^{U_a(i, t)/T_a(t)}, \quad \text{kde} \quad Z_a(t) = \sum_{j \in I} e^{U_a(j, t)/T_a(t)}. \quad (2)$$

Funkci užitku můžeme rozdělit na dvě části $U = S + R$. Část S reflektuje náš osobní užitek z volby konkrétní strategie, zatímco R vyjadřuje jakési posílení či oslabení užitku kvůli reakci okolí na volbu strategie.

Je také možné uvažovat, že pravděpodobnosti volby strategií závisí na aktuálně zvolené strategii – tedy případ, že změna strategie nás něco stojí anebo že přechod na vybranou strategii je z té aktuální snažší. Budeme tedy uvažovat, že pravděpodobnosti jsou podmíněné. Pro zjednodušení zápisu upustíme od vyznačování časové závislosti a příslušnosti k určité sociální skupině.

$$p(i|j) = \frac{1}{Z_j} e^{U(i|j)/T}, \quad \text{kde} \quad Z_j = \sum_{k \in I} e^{U(k|j)/T}.$$

Zavedli jsme **relativní funkci užitku** $U(i|j)$, přičemž v tom nejjednodušším případě, kdy $U(i|j) = U(i) - U(j)$, dostáváme zpět nezobecněný model (1), resp. (2). Rozdělme relativní funkci užitku na symetrickou a antisymetrickou část

$$S(i|j) = S(j|i) = \frac{U(i|j) + U(j|i)}{2},$$

$$A(i|j) = -A(j|i) = \frac{U(i|j) - U(j|i)}{2}.$$

V případě, že bychom položili $U(i|j) = U(i) - U(j) - D$, kde D je kladná konstanta kódující jakési fixní náklady na změnu strategie, pak dostaneme

$$S(i|j) = -D, \quad A(i|j) = U(i) - U(j).$$

Na symetrickou část se tedy můžeme dívat jako náklady spojené se změnou strategie, kdežto na antisymetrickou část jako na zisk způsobený změnou strategie. Zavedeme proto funkci

$$D(i|j) = D(j|i) = e^{-S(i|j)/T}$$

a nazveme ji **efektivní vzdáleností**. Pokud opravdu budeme uvažovat $A(i|j) = U(i) - U(j)$, dostaneme

$$p(i|j) = \frac{1}{D(i|j)} e^{U(i)/T} \frac{e^{-U(j)/T}}{\sum_{k \in I} \frac{1}{D(k,j)} e^{(U(k)-U(j))/T}}$$

Pokud definujeme funkci

$$U'(j) = -T \ln \frac{e^{-U(j)/T}}{\sum_{k \in I} \frac{1}{D(k,j)} e^{(U(k)-U(j))/T}} = U(j) + T \ln \sum_{k \in I} \frac{e^{(U(k)-U(j))/T}}{D(k,j)},$$

tak máme

$$p(i|j) = \frac{1}{D(i|j)} e^{U(i)/T} e^{-U'(j)/T}, \quad (3)$$

kde člen D nazýváme **vzdálenostním faktorem**, člen $e^{U'/T}$ **pull faktorem** a člen $e^{U/T}$ **push faktorem**.

2.1 Master rovnice

Vraťme se nyní zpět k popisu s množinou A sociálních skupin. Označme N_a počet jedinců ve skupině $a \in A$. Celkový počet jedinců nechť je N ($N = \sum_{a \in A} N_a$). Dále zavedeme tzv. **okupační čísla** $n_a(i, t)$ značící počet jedinců skupiny a pronásledujících v čase t strategii i (platí tedy $N_a = \sum_{i \in I} n_a(i, t)$) a související vektor **sociální konfigurace**

$$n(t) = (n_{a_1}(i_1, t), n_{a_1}(i_2, t), \dots, n_{a_2}(i_1, t), n_{a_2}(i_2, t), \dots).$$

Tento vektor zjevně zachycuje stav sociálního systému v daném čase. Prostor všech těchto stavů označíme C . Budeme chtít najít rovnici pro pravděpodobnost $p(n, t)$, že systém se nachází v konfiguraci n . Jaká je tedy změna pravděpodobnosti konfigurace n v čase $t + \Delta t$ oproti času t ? Zvyšuje se tím, že systém s konfigurací n' v čase t přejde v čase $t + \Delta t$ do stavu n , a naopak se snižuje opuštěním stavu n do stavu jiného n'' . Pokud zavedeme pravděpodobnosti přechodu systému ze stavu n v čase t do stavu n' v čase t' jako $p((n', t')|(n, t))$, pak rovnice určující změnu pravděpodobnosti $p(n, t)$ vypadá následovně

$$p(n, t + \Delta t) - p(n, t) = \sum_{n' \in C} p((n, t + \Delta t)|(n', t)) p(n', t) - \sum_{n' \in C} p((n', t + \Delta t)|(n, t)) p(n, t).$$

Ekvivalentní rovnicí je tato

$$p(n, t + \Delta t) = \sum_{n' \in C} p((n, t + \Delta t)|(n', t)) p(n', t),$$

neboť zřejmě platí

$$\sum_{n' \in C} p((n', t + \Delta t)|(n, t)) = 1,$$

což není nic jiného než vyjádření, že v čase $t + \Delta t$ se systém do *někakého* stavu určitě dostane.

Uvažujíc limitu $\Delta t \rightarrow 0$ dostáváme tzv. **master rovnici**

$$\frac{dp(n, t)}{dt} = \sum_{n' \neq n} w(n|n', t) p(n', t) - \sum_{n' \neq n} w(n'|n, t) p(n, t) \quad (4)$$

(členy s $n' = n$ se v obou sumách odečetly), kde jsme zavedli **přechodové míry**

$$w(n|n', t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p((n, t + \Delta t)|(n', t))}{\Delta t} \quad \text{pro } n' \in C, \quad n' \neq n.$$

Přechodová míra by pro $n' = n$ divergovala, neboť jistě platí

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p((n, t + \Delta t)|(n, t)) = 1.$$

2.2 Boltzmannova rovnice

Často je vhodné pracovat s rovnicí pro střední hodnoty okupačních čísel $\langle n_a(i) \rangle_t = \sum_{n \in C} n_a(i) p(n, t)$. Tu získáme z master rovnice (4) vynásobením příslušnými $n_a(i)$ a vysčítáním přes všechny sociální konfigurace

$$\frac{d\langle n_a(i) \rangle_t}{dt} = \sum_{n \in C} n_a(i) \frac{dp(n, t)}{dt}.$$

Po drobné úpravě dostaneme

$$\frac{d\langle n_a(i) \rangle_t}{dt} = \sum_{n \in C} \left(\sum_{n' \in C} (n'_a(i) - n_a(i)) w(n'|n, t) \right) p(n, t) = \langle m_a(i, n, t) \rangle, \quad (5)$$

kde jsme zavedli první přechodový moment

$$m_a(i, n, t) = \sum_{n' \in C} (n'_a(i) - n_a(i)) w(n'|n, t). \quad (6)$$

Omezíme se nyní pouze na konkrétní interakce mezi jedinci v následující podobě. Zaprvé samotní jedinci se mohou rozhodnout, že změni strategii (z i na i') – toto se bude dít s přechodovou mírou $w_a(i'|i, t)$; a za druhé interakce mezi dvěma jedinci v jejíž důsledku první jedinec, patřící do skupiny $a \in A$, změni strategii z i na i' a druhý (ve skupině $b \in A$) přejde od j k j' – tato je popsána pomocí $w_{ab}((i', j')|(i, j), t)$. Výsledné sociální konfigurace označíme

$$n_a^{ii'} = (\dots, n_a(1), \dots, n_a(i-1), n_a(i) - 1, n_a(i+1), \dots, n_a(i'-1), n_a(i') + 1, n_a(i'+1), \dots),$$

$$n_{ab}^{ii'jj'} = (\dots, n_a(i) - 1, \dots, n_a(i') + 1, \dots, n_b(j) - 1, \dots, n_b(j') + 1, \dots)$$

a přechodové míry v master rovnici budou tvaru

$$w(n'|n, t) = \begin{cases} w_a(i'|i, t) n_a(i) & \text{pro } n' = n_a^{ii'} \\ w_{ab}((i', j')|(i, j), t) n_a(i) (n_b(j) - \delta_{ij} \delta_{ab}) & \text{pro } n' = n_{ab}^{ii'jj'} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Onen δ -člen zabráňuje samointerakci, pokud uvažujeme párové interakce ve stejné sociální skupině se stejnou strategií. Přechodová míra škáluje s počtem interagujících jedinců. Po dosazení do (6) a zanedbání odebrání samointerakcí máme

$$m_a(i, n, t) = \sum_{i' \in I} \left(w_a(i|i', t) + \sum_{b \in A} \sum_{j, j' \in I} w_{ab}((i, j)|(i', j'), t) n_b(j') \right) n_a(i') -$$

$$\sum_{i' \in I} \left(w_a(i'|i, t) + \sum_{b \in A} \sum_{j, j' \in I} w_{ab}((i', j')|(i, j), t) n_b(j) \right) n_a(i).$$

Tzv. přístup středního pole předpokládá, že platí

$$\langle m_a(i, n, t) \rangle \approx m_a(i, \langle n \rangle, t),$$

tedy že celý vývoj sociálního systému je dán pouze střední hodnotou $\langle n \rangle$. Označíme-li

$$P_a(i, t) = \frac{\langle n_a(i) \rangle_t}{N_a}$$

a dosadíme do (5)

$$\frac{dP_a(i, t)}{dt} = \frac{1}{N_a} \frac{d\langle n_a(i, t) \rangle}{dt} = \frac{1}{N_a} \langle m_a(i, n, t) \rangle = \frac{1}{N_a} m_a(i, \langle n \rangle, t),$$

obdržíme zobecněnou **Boltzmannovu rovnici**

$$\begin{aligned} \frac{dP_a(i, t)}{dt} &= \sum_{i' \in I} \left(w_a(i|i', t) + \sum_{b \in A} \sum_{j, j' \in I} N_b w_{ab}((i, j)|(i', j'), t) P_b(j', t) \right) P_a(i', t) - \\ &\quad \sum_{i' \in I} \left(w_a(i'|i, t) + \sum_{b \in A} \sum_{j, j' \in I} N_b w_{ab}((i', j')|(i, j), t) P_b(j, t) \right) P_a(i, t). \end{aligned}$$

Zavedením tzv. efektivních přechodových měř

$$w_a^{eff}(i'|i, t) = w_a(i'|i, t) + \sum_{b \in A} \sum_{j, j' \in I} N_b w_{ab}((i', j')|(i, j), t) P_b(j, t)$$

se Boltzmannova rovnice zjednoduší na

$$\frac{dP_a(i, t)}{dt} = \sum_{i' \in I} w_a^{eff}(i|i', t) P_a(i', t) - \sum_{i' \in I} w_a^{eff}(i'|i, t) P_a(i, t).$$

Nyní je již jen na nás, jak definujeme jednotlivé přechodové míry $w_a^{eff}(i'|i, t)$, aby popisovaly námi zvolený sociální systém.

2.3 Model sociálních sil

Přestože v předchozím textu jsme sugestivně uvažovali diskrétní prostor strategií, není to samozřejmě podmínkou. Zde budeme uvažovat, že strategie je popsána m -ticí reálných čísel $i \in \mathbb{R}^m$, máme tedy m -dimenzionální prostor strategií $I = \mathbb{R}^m$. Dále předpokládáme, že změny strategií se dějí jen v malých krocích, tzn. $w_a^{eff}(x'|x, t) \approx 0$ pro $\|x' - x\| > K$ (K je vhodně zvolená konstanta). Aproximací Boltzmannovy rovnice dostaneme ([2])

$$\frac{dx_i^{(a)}}{dt} = f_a(x_i^{(a)}, t),$$

kde

$$f_a(x, t) = \int (x' - x) w_a^{eff}(x'|x, t) d^m x'$$

je tzv. **sociální síla** a $x_i^{(a)}(t)$ představuje strategii i -tého jedince náležícího sociální skupině $a \in A^1$.

Specifikujme nyní efektivní přechodovou míru definováním míry imitování $\mu_{ab}(t)$ a míry odpuzování $\nu_{ab}(t)$ tak, že efektivní míry budou tvaru

$$w_a^{eff}(i'|i, t) = w_a(i'|i, t) + p_a(i'|i, t) \sum_{b \in A} (\mu_{ab}(t) P_b(i', t) + \nu_{ab}(t) P_b(i, t)),$$

¹Stále platí značení, že máme N jedinců a z nich vždy N_a náleží skupině $a \in A$. Značením $i \in a \in A$ pak budeme myslet, že i -tý jedinec se strategií $x_i(t)$ náleží do sociální skupiny $a \in A$.

kde $p_a(i'|i, t)$ je pravděpodobnost dle definice (3). Míra imitování vyjadřuje tendenci ke sdružování, volby stejné strategie jako mají ostatní. Naopak míra odpuzování reprezentuje negativní postoje vůči určitým strategiím určitých skupin.

Zde pak tedy

$$f_a(x, t) = \int (x' - x)w_a(x'|x, t) + p_a(x'|x, t) \sum_{b \in A} (\mu_{ab}(t)P_b(x', t) + \nu_{ab}(t)P_b(x, t)) d^m x'.$$

Rozdělení jednotlivých strategií rozložíme pomocí multivariantních Gaussových rozdělení $\wp(x)$ ²

$$P_b(x, t) = \frac{1}{N_b} \sum_{j \in b} \wp(x - x_j(t)).$$

Sociální sílu pak můžeme rozložit na komponenty - spontánní sílu, sílu imitování a sílu odpuzování

$$f_a(x, t) = f_a^{sp}(x, t) + \sum_j (f_{ab}^{imit}(x, x_j, t) + f_{ab}^{rep}(x, x_j, t)),$$

kde

$$\begin{aligned} f_{ab}^{sp}(x, t) &= \int (x' - x)w_a(x'|x, t) d^m x', \\ f_{ab}^{imit}(x, x_j, t) &= \int (x' - x)p_a(x'|x, t) \frac{\mu_{ab}(t)}{N_b} \wp(x' - x_j) d^m x', \\ f_{ab}^{rep}(x, x_j, t) &= \int (x' - x)p_a(x'|x, t) \frac{\nu_{ab}(t)}{N_b} \wp(x - x_j) d^m x'. \end{aligned}$$

²Multivariantní Gaussovo rozdělení můžeme definovat jako rozdělení s hustotou pravděpodobnosti úměrnou $\exp(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T A^{-1}(x - \mu))$, kde μ je střední hodnota tohoto rozdělení a A je regulární matice.

3 Modely dopravy

V následujících třech kapitolách budou zevrubně prozkoumány tři vybrané dopravní modely. Dopravním modelem rozumíme matematický model snažící se reprodukovat podstatné rysy reálného dopravního systému. V našem případě se bude jednat o jednoproudovou jednosměrnou silnici bez předjíždění a bez nájezdových a výjezdových ramp.

Modely můžeme rozdělit podle mnoha kritérií, mezi ty nejzákladnější patří deterministický versus stochastický model anebo dělení podle toho, na jakých "časoprostorech" modely existují – tomuto dělení se nyní budeme věnovat blíže, neboť každá časoprostorová kategorie má v této práci svého zkoumaného zástupce.

3.1 Celulární automaty

Tyto modely jsou diskrétní jak v realizaci jednotlivých vozidel (tím myslíme, že je jich buď konečně nebo spočetně mnoho), tak v prostoru a čase – časový vývoj neprobíhá spojitě, nýbrž v jednotlivých diskrétních krocích a polohy vozidel také nabývají hodnot z dané diskrétní množiny.

Čistě matematicky můžeme celulární automaty definovat takto: mějme nějakou diskrétní množinu X , jejíž prvky budou představovat buňky celulárního modelu. Podmnožina potenční množiny $S \subset \mathcal{P}(X)$ bude množina přípustných stavů. Dále buď f zobrazení $f : S \mapsto S$ – toto zobrazení bude představovat pravidla celulárního modelu nebo tzv. **aktualizační schéma** (pro stochastický model můžeme uvažovat f_X – tedy třídu zobrazení parametrizovanou náhodnou veličinou X). Vezmeme-li $s \in S$, bude tento prvek reprezentovat stav modelu. Vývoj se pak odehrává jednoduše opakovanou aplikací pravidel celulárního modelu na zvolený počáteční stav, tedy

$$s_0 \in S \quad s_k := f^k(s_0).$$

Definici celulárního automatu lze samozřejmě pojmout ještě obecněji, ale pro naše účely to bude takto postačovat.

V našem případě bude $X = \hat{L} \times \hat{v}^3$, kde $L \in \mathbb{N}$ je počet buněk vozovky a $v \in \mathbb{N}$ maximální rychlost. \hat{L} představuje vozovku a \hat{v} rychlostní prostor (případně můžeme vzít $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ pro nekonečnou délku vozovky a neomezenou maximální rychlost). Máme-li $s \in \mathcal{P}(X)$, potom $s \in S$ (tzn. s je přípustný stav) právě tehdy, když

$$\forall p_1 = (l_1, v_1) \in s \quad \forall p_2 = (l_2, v_2) \in s \quad (l_1 = l_2 \Rightarrow v_1 = v_2).$$

Vozidlem je pak míněn prvek přípustného stavu $a \in s \in S$ (v němž je automaticky zakódována jeho rychlost) a podmínka přípustnosti znamená, že silnice může být libovolně

³Množinou \hat{n} , kde $n \in \mathbb{N}$, rozumíme množinu $\{1, 2, \dots, n\}$.

obsazená auty a každé má právě jednu rychlost. Konkrétní realizace zobrazení f pak představuje konkrétní model a předepisuje pohyb aut a změny jejich rychlostí. Pokud si vybereme konkrétní vozidlo, můžeme z této abstraktní definice samozřejmě vyextrahovat příjemnější popis pohybu pomocí funkcí polohy a rychlosti

$$x : \mathbb{N} \mapsto \hat{L} = \{1, 2, \dots, L\} \quad v : \mathbb{N} \mapsto \{0, 1, \dots, v_{max}\}.$$

V dalším textu bude o modelech spadajících do této kategorie hovořeno jako o **celulárních modelech**.

3.2 Modely à la Newton

Zde máme opět diskrétní vozidla (tentokrát se omezíme na konečný počet, označme ho N), ale časový vývoj je spojitý a polohy vozidel nabývají hodnot ze spojitě množiny. Tyto modely svým principem vycházejí z newtonovské mechaniky hmotných bodů v jednorozměrném prostoru. Vozidla jsou tedy popsána funkcemi

$$x_i(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad i \in \hat{N}$$

udávající polohu i -tého vozidla v čase t a tyto funkce splňují pohybové rovnice

$$\ddot{x}_i = f_i(x_k, \dot{x}_k) \quad \forall i \in \hat{N},$$

které můžeme interpretovat jako Newtonův druhý pohybový zákon. Případně můžeme uvažovat obecnější situaci

$$F_i(\ddot{x}_k, \dot{x}_k, x_k) = 0 \quad \forall i \in \hat{N}$$

Funkce f_i , resp. F_i , pak realizují konkrétní model.

Modely tohoto typu zřejmě představují nejpřirozenější reprezentaci reálného dopravního systému. Pro budoucí použití bude na modely tohoto typu odkazováno jako na **newtonovské modely**.

3.3 Tekutinové modely

Pokud bychom se dívali na dopravní systém z velké dálky, můžeme zanedbat onu diskrétnost, resp. částicovou strukturu dopravního systému, a považovat proud aut za jakýsi pohyb stlačitelné tekutiny (??). Tato představa je nosnou ideou tekutinových modelů. Opět máme spojitý čas i prostor a navíc zde neexistují jednotlivá vozidla.

Dopravní proud je pak popsán dvojicí funkcí – hustotou dopravy $\rho(x, t)$ a dopravním tokem $J(x, t)$. Můžeme také definovat rychlost dopravy $v(x, t)$ vztahem

$$J(x, t) = \rho(x, t)v(x, t).$$

Blíže o těchto veličinách bude uvedeno v následující podkapitole o charakteristikách dopravního systému. Tyto funkce splňují základní rovnici hydrodynamiky – **rovnici kontinuity**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0.$$

To je ovšem pouze jedna rovnice pro dvě neznámé funkce. Další vztah, který nám umožní simulovat konkrétní model, pak uvažujeme ve tvaru⁴

$$F(\rho, J, \partial_{xt}^\alpha \rho, \partial_{xt}^\alpha J) = 0.$$

3.4 Základní charakteristiky dopravního systému

Nejprve zavedme několik označení. Jak už bylo zmíněno, $N \in \mathbb{N}$ představuje **počet aut** v systému. Dále $L \in \mathbb{R}^+$ bude představovat **délku silnice** - omezíme se tedy na konečné délky. Pro celulární modely musí zjevně být $L \in \mathbb{N}$ a množina $\hat{L} = \{1, \dots, L\}$ bude tvořit prostorovou část množiny stavů, u newtonovských modelů dostáváme omezení na obor hodnot

$$x_i(t) : \mathbb{R} \mapsto \langle 0, L \rangle$$

a pro tekutinové modely restrikcí definičního oboru

$$c(x, t), J(x, t), v(x, t) : \langle 0, L \rangle \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}.$$

Nyní u celulárních a newtonovských modelů přirozeně definujeme (globální) **hustotu dopravy** jako $\rho = N/L$; zde nemá žádný smysl lokální hustota, která je u tekutinových modelů reprezentována funkcí $\rho(x, t)$, naopak u tekutinových modelu je možné definovat globální (průměrnou) hustotu vztahem

$$\rho_{glob}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L \rho(x, t) dx.$$

Další veličinou, která u tekutinových modelů vystupuje zcela přirozeně a již v definici, je **dopravní tok**. U ostatních typů ovšem opět nemá smysl lokální tok, zavedeme proto časy t_s a t_e ($t_s, t_e \in \mathbb{R}$, $t_s < t_e$) a definujeme průměrný tok v časovém intervalu $\langle t_s, t_e \rangle$. Definici však lze provést několika způsoby. Způsob první vychází z metody používané při měření reálných dat – zvolíme na silnici konkrétní polohu $x \in \langle 0, L \rangle$ a počítáme, kolik projede aut během času $\langle t_s, t_e \rangle$, tento počet označíme $N_{\langle t_s, t_e \rangle}(x)$. Pak tokem rozumíme počet vozidel projetých daným místem za jednotku času

$$J_{\langle t_s, t_e \rangle}(x) = \frac{N_{\langle t_s, t_e \rangle}(x)}{t_e - t_s}.$$

⁴Symbolem ∂_{xt}^α je myšlena závislost na libovolných derivacích podle proměnných x a t .

Druhou možností je vybrat si i -té vozidlo a spočítat tok na základě jeho pohybu

$$J_{\langle t_s, t_e \rangle}^{(i)} = \frac{N}{L} \frac{x_i(t_e) - x_i(t_s)}{t_e - t_s}.$$

A poslední verze toku je jednoduše průměr toků $J_{\langle t_s, t_e \rangle}^{(i)}$, tj.

$$J_{\langle t_s, t_e \rangle} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_{\langle t_s, t_e \rangle}^{(i)}.$$

O vzájemném vztahu mezi těmito definicemi a případných obtížích technického rázu při jejich používání bude hovořeno v kapitole 3.5. U tekutinových modelů můžeme zavést obdobu toku $J_{\langle t_s, t_e \rangle}(x)$ takto

$$J_{\langle t_s, t_e \rangle}(x) = \frac{1}{t_e - t_s} \int_{t_s}^{t_e} J(x, t) dt,$$

tedy jako časový průměr toku v daném místě. O vztahu mezi průměrnými toky v různých bodech u tekutinových modelů bude také hovořeno v 3.5.

3.4.1 Fundamentální diagram

Fundamentální diagram je základní charakteristikou ať už reálného dopravního systému anebo dopravního matematického modelu. Udává **závislost dopravního toku na hustotě**. Umožní rozeznat oblasti hustot, kde se nacházejí jednotlivé dopravní režimy, a tedy naznačuje, kudy se při podrobnějším zkoumání ubírat.

V celulárních a newtonovských modelech tedy jednoduše zjišťujeme pro jednotlivé globální hustoty hodnoty toku v dlouhém časovém intervalu (podle vybrané definice). U tekutinových modelů vyvstává více možností co považovat za fundamentální diagram. Máme totiž k dispozici veličinu lokálního toku $J(x, t) = \rho(x, t)v(x, t)$. Můžeme tedy vytvořit jakési lokální fundamentální diagramy, ať už prostorového charakteru

$$\Gamma_{space}^{(t_0)} = \left\{ (\rho(x, t_0), J(x, t_0)) \mid x \in \langle 0, L \rangle \right\}$$

anebo charakteru časového

$$\Gamma_{time}^{(x_0)} = \left\{ (\rho(x_0, t), J(x_0, t)) \mid t \in \langle t_s, t_e \rangle \right\}.$$

Tyto diagramy zobrazují prostorový, resp. časový vývoj systému, pro konkrétní počáteční podmínky. Naproti tomu můžeme uvažovat i fundamentální diagramy obdobného charakteru jako u celulárních a newtonovských modelů. Pokud volíme počáteční podmínku pro funkci hustoty jako

$$\rho(x, 0) \equiv \rho_0, \quad \text{resp. obecněji} \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad \text{při platnosti} \quad \frac{1}{L} \int_0^L \rho_0(x) dx = \rho_0,$$

tak můžeme uvažovat diagram závislosti průměrného toku $J_{\langle t_s, t_e \rangle}(x_0)$ (pro zvolený bod x_0) na hustotě ρ_0 .

3.4.2 Histogramy

Pro lepší nahlédnutí do mikrostruktury modelu při dané hustotě nám poskytnou službu **histogramy rychlostí** a **histogramy vzdáleností mezi po sobě jedoucími auty**. Pomocí nich zjišťujeme povahu jednotlivých dopravních režimů. Tato charakteristika je ovšem k dispozici pouze pro modely s mikrostrukturou, tedy pro celulární a newtonovské modely.

3.5 Okrajové podmínky

V zásadě můžeme uvažovat dvojce relevantní okrajové podmínky. Jde o **kruhovou silnici** a **silnici s přítokem a odtokem**.

Silnice s přítokem/odtokem znamená, že z jedné strany se budou definovaným způsobem vozidla objevovat a z druhé strany mizet. To samozřejmě vede k tomu, že počet vozidel v systému N se může měnit. Pro tekutinové modely prostě klademe podmínky na funkce $c(x, t)$ a $J(x, t)$ v krajních bodech $x = 0$ a $x = L$. Zde také vyvstávají problémy technického rázu při práci s toky $J_{\langle t_s, t_e \rangle}^{(i)}$ a $J_{\langle t_s, t_e \rangle}$. Snadno se totiž může stát, že vozidlo opustí systém a nebude mít smysl ptát se na jeho polohu v čase t_e .

Při našem zkoumání se ovšem omezíme na okrajovou podmínku typu kruhové silnice. Pro celulární modely se tedy vozidla opustějící silnici znovuobjeví na druhé straně, u newtonovských modelů taktéž. Pro praktickou implementaci je vhodné zavést dodatečné vozidlo, které se bude řídit rovnicí $x_{N+1} = x_1 + L$, a uvažovat silnici nekonečně délky. Polohu vozidel na kruhové silnici pak získáme jako $x'_i = (x_i \bmod L)$. Pro tekutinové modely nabývá okrajová podmínka tvaru

$$c(0, t) = c(L, t), \quad J(0, t) = J(L, t).$$

Podívejme se nyní na problematiku různých definic toků u celulárních a newtonovských modelů. Snadno nahlédneme, že pokud platí

$$\exists i \in \hat{N} \quad \lim_{t_e \rightarrow \infty} x_i(t_e) = \infty$$

(kde máme na mysli onu reprezentaci pro nekonečně dlouhou vozovku – tedy vlastně vzdálenost uraženou daným vozidlem), pak z toho vyplývá

$$\forall i \in \hat{N} \quad \lim_{t_e \rightarrow \infty} x_i(t_e) = \infty,$$

neboť vozidla se nemohou předjíždět. Požadujeme tedy, aby vozidla v průměru stále jela dál. Jednotlivé toky podle různých definic se navzájem liší maximálně o hodnotu $\frac{N}{t_e - t_s}$, a tedy platí

$$\lim_{t_e \rightarrow \infty} J_{\langle t_s, t_e \rangle}(x) = \lim_{t_e \rightarrow \infty} J_{\langle t_s, t_e \rangle}^{(i)} = \lim_{t_e \rightarrow \infty} J_{\langle t_s, t_e \rangle} \quad \forall x \in \langle 0, L \rangle \quad \forall i \in \hat{N}.$$

Podobnou diskuzi chceme nyní udělat i pro tekutinové modely a průměrný tok $J_{\langle t_s, t_e \rangle}(x)$. Nejprve musíme nalézt trajektorie vozidel. Mějme vozidlo (v tomto případě nekonečně malou částici tekutiny) v čase t na pozici $x(t)$. Poloha vozidla v čase $t + dt$ je dána vztahem

$$x(t + dt) = x(t) + v(x(t), t)dt, \quad \text{přičemž} \quad x(t + dt) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}dt.$$

Trajektorii vozidla tedy získáme řešením diferenciální rovnice⁵

$$\dot{x}(t) = v(x(t), t) \quad \text{s počáteční podmínkou} \quad x(t_s) = x_0. \quad (7)$$

Pak za předpokladu jedinečnosti řešení rovnice pro trajektorie (7) (což vlastně znamená vzájemné nepředjíždění vozidel) a předpokladu

$$\exists x_0 \in \langle 0, L \rangle \quad \text{takové, že příslušná trajektorie splňuje} \quad \lim_{t_e \rightarrow \infty} x(t_e) = \infty$$

(opět ve smyslu celkové uražené vzdálenosti) platí

$$\lim_{t_e \rightarrow \infty} J_{\langle t_s, t_e \rangle}(x) = \lim_{t_e \rightarrow \infty} J_{\langle t_s, t_e \rangle}(y) \quad \forall x, y \in \langle 0, L \rangle$$

3.6 Shluková analýza

Další metodou, jak analyzovat mikrostrukturu dopravních modelů, je tzv. shluková analýza ([4],[5]). Rozdělme nějakou oblast silnice o délce L na $k \in \mathbb{N}$ úseků stejné délky $\ell = L/k$. Dále označme $n_i^{(k)}$ počet vozidel v i -tém úseku při rozdělení na k úseků (pro případy, kdy je vozidlo přesně na hranici dvou úseků uvažujeme tvar úseků např. $\langle (i-1)\ell, i\ell \rangle$). Poté veličina

$$\Delta(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(n_i^{(k)} - \bar{n} \right)^2 \quad \text{kde} \quad \bar{n} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n_i^{(k)}$$

představuje výběrový rozptyl počtu aut v jednotlivých úsecích. Je-li na silnici N vozidel, pak jejich průměrný počet v jednotlivých úsecích je samozřejmě $\bar{n} = N/k$. Poté **grafem shlukové analýzy** rozumíme množinu

$$\Gamma_{\Delta} = \left\{ \left(\frac{L}{k}, \Delta(k) \right) \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

znázorňující závislost rozptylu počtu vozidel v jednotlivých úsecích na délce těchto úseků. Jedná se vlastně o fluktuace hustoty na jednotlivých úsecích. Pro lepší porovnatelnost výsledků pro různé hodnoty hustot dopravy přeškálujeme délku silnice na hodnotu počtu

⁵Jedná se vlastně o hledání integrálních křivek vektorového pole $X(x, t) = v(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$.

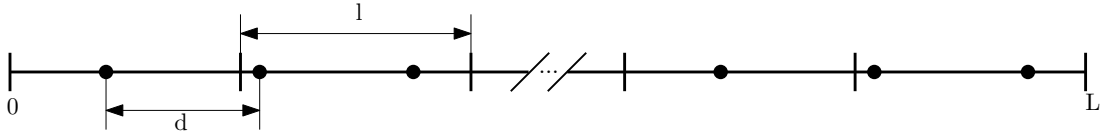
aut, tedy $L = N$. To efektivně znamená, že střední hodnota vzdálenosti vozidel je rovna jedné $\bar{s} = 1$. Normalizovaný graf shlukové analýzy pak má tvar (po dosazení tvaru $\Delta(k)$)

$$\Gamma_{\Delta} = \left\{ \left(\frac{N}{k}, \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(n_i^{(k)} - \frac{N}{k} \right)^2 \right) \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Odvoďme nyní tvar grafů shlukové analýzy pro některá velmi jednoduchá rozložení vozidel. Uvažujme $N_s \in \mathbb{N}$ rovnoměrně rozložených pozic na vozovce a na každé pozici mějme s automobilů (tedy jakýsi dokonalý shluk s vozidel). Platí

$$N = N_s s \quad d = \frac{L}{N_s},$$

kde d je vzdálenost jednotlivých shluků.



Vezměmež $m \in \mathbb{N}$ a délku úseků ℓ taková, že splňují

$$m d > \ell > (m - 1)d \quad (8)$$

To znamená, že ať už je pozice úseku jakákoliv, tak se v něm nachází buďto $m - 1$ nebo m shluků (tedy $(m - 1)s$ nebo ms aut). Označme $n^{(m-1)}$ resp. $n^{(m)}$ počet úseků obsahující $m - 1$ resp. m shluků. Tyto čísla pak musí splňovat následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} n^{(m-1)} + n^{(m)} &= k \\ s(m - 1)n^{(m-1)} + smn^{(m)} &= N, \end{aligned}$$

jejímž řešením je

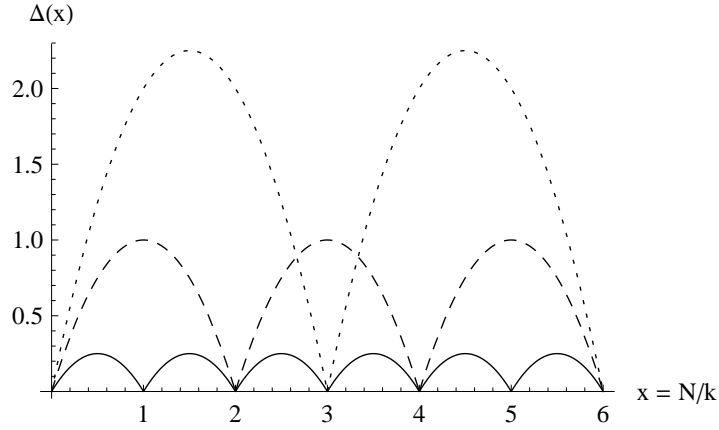
$$n^{(m-1)} = mk - \frac{N}{s}, \quad n^{(m)} = \frac{N}{s} - (m - 1)k.$$

Teď můžeme snadno vypočítat rozptyl $\Delta(k)$ (samozřejmě uvažujeme jen taková k , aby platila podmínka (8)). Tedy

$$\Delta(k) = \frac{1}{k} \left[\left(mk - \frac{N}{s} \right) \left((m - 1)s - \frac{N}{k} \right)^2 + \left(\frac{N}{s} - (m - 1)k \right) \left(ms - \frac{N}{k} \right)^2 \right].$$

Po jednoduchých algebraických úpravách dostaneme výraz

$$\Delta(k) = \left(\frac{N}{k} - s(m - 1) \right) \left(sm - \frac{N}{k} \right). \quad (9)$$



Obrázek 1: Průběh $\Delta(x)$ pro rovnoměrné rozložení ideálních shluků pro hodnoty $s \in \{1, 2, 3\}$ (plně, čárkovaně, tečkovaně).

Zavedeme ještě proměnnou $x = N/k$ (což je vlastně nezávislá proměnná v přeškálovaném grafu shlukové analýzy) a upravujeme podmínku (8)

$$m \frac{L}{N_s} > \frac{L}{k} > (m-1) \frac{L}{N_s}$$

$$m \frac{s}{N} > \frac{1}{k} > (m-1) \frac{s}{N},$$

a tedy

$$m s > x > (m-1) s.$$

Tato podmínka pro dané m slouží k vymezení rozsahu proměnné x , na které platí formule (9). Můžeme se na ní ovšem podívat také tak, že určuje m v závislosti na x . Pak zjevně platí

$$m = \left\lfloor \frac{x}{s} \right\rfloor + 1$$

($\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část). Po dosazení do (9) dostáváme finální formuli pro rozptyl

$$\Delta(x) = \left(x - s \left\lfloor \frac{x}{s} \right\rfloor \right) \left(s \left\lfloor \frac{x}{s} \right\rfloor + s - x \right),$$

která se pro $s = 1$ (tedy pro rovnoměrně rozprostřená vozidla) redukuje na tvar

$$\Delta(x) = (x - \lfloor x \rfloor) (\lfloor x \rfloor + 1 - x).$$

Snadno spočteme i dosahovaná maxima kvadratických odchylek

$$\Delta_{max} = \frac{s^2}{4}.$$

Opačným pólem jsou naopak vozidla náhodně rozprostřená na vozovce bez jakékoliv korelace. Tedy hustota pravděpodobnosti, že určité vozidlo bude mít polohu $x \in \langle 0, L \rangle$ je

$w(x) = 1/L$. Poloha všech N vozidel je určena vektorem $X = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \langle 0, L \rangle^N \equiv P$. Hustota pravděpodobnosti výskytu tohoto vektoru je pak

$$W(X) = w(x_1)w(x_2) \cdot \dots \cdot w(x_N) = \frac{1}{L^N}.$$

Graf shlukové analýzy vypočítáme jako průměr rozptylu přes všechny možné polohy vozidel, tedy

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= \int_P \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \left(n_l^{(k)}(X) - \frac{N}{k} \right)^2 \frac{1}{L^N} d^N X \\ &= \frac{1}{kL^N} \sum_{l=1}^k \int_P \left(n_l^{(k)}(X) - \frac{N}{k} \right)^2 d^N X. \end{aligned}$$

Nyní je důležité si uvědomit, že všechny úseky vozovky jsou zcela rovnocenné a tedy integrál nemůže být závislý na sumačním indexu l , díky tomu máme

$$\Delta(k) = \frac{1}{L^N} \int_P \left(n_1^{(k)}(X) - \frac{N}{k} \right)^2 d^N X.$$

Počet vozidel v prvním úseku lze vyjádřit v následujícím tvaru

$$n_1^{(k)}(X) = \sum_{r=1}^N \chi_{\langle 0, L/k \rangle}(x_r),$$

kde $\chi_I(x)$ je charakteristická funkce intervalu I . Rozdělme nyní integrál na množiny, na kterých je $n_1^{(k)}(X) \in \{0, 1, \dots, N\}$ konstantní, tyto množiny označíme M_0, M_1, \dots, M_N . Míra těchto množin je dána vztahem

$$\mu(M_m) = \binom{N}{m} \left(\frac{L}{k} \right)^m \left(L - \frac{L}{k} \right)^{N-m}.$$

Ten získáme následující jednoduchou úvahou. Je-li $n_1^{(k)}(X) = m$, pak se musí právě m vozidel nacházet na vozovce v intervalu $\langle 0, L/k \rangle$ a zbylých $N - m$ vozidel v intervalu $\langle L/k, L \rangle$. Počet způsobů, jakými mohu vybrat oněch m vozidel, je dán kombinačním číslem a míra množiny pro tuto jednu konkrétní volbu je

$$\left(\frac{L}{k} - 0 \right)^m \left(L - \frac{L}{k} \right)^{N-m}.$$

Rozptyl pak nabude tvaru

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= \frac{1}{L^N} \sum_{m=0}^N \mu(M_m) \left(m - \frac{N}{k} \right)^2 \\ &= \frac{1}{L^N} \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \left(\frac{L}{k} \right)^m \left(L - \frac{L}{k} \right)^{N-m} \left(m - \frac{N}{k} \right)^2 \\ &= \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \left(\frac{1}{k} \right)^k \left(1 - \frac{1}{k} \right)^{N-m} \left(m^2 - \frac{2N}{k}m + \frac{N^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

Stojíme tedy před úkolem sečíst řadu tvaru

$$S^{(r)} = \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} m^r y^m (1-y)^{N-m},$$

která se pro $r = 0$ redukuje na pouhý binomický rozvoj a platí tedy $S^{(0)} = 1$. Vypomůžeme si derivačním trikem

$$\begin{aligned} \frac{dS^{(r)}}{dy} &= \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} m^r (my^{m-1}(1-y)^{N-m} + m^r(m-N)y^m(1-y)^{N-m-1}) \\ &= \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \left(\frac{1}{y} m^{r+1} + \frac{1}{1-y} m^{r+1} - \frac{N}{1-y} m^r \right) y^m (1-y)^{N-m} \\ &= \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} m^{r+1} y^m (1-y)^{N-m} - \\ &\quad - \frac{N}{1-y} \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} m^r y^m (1-y)^{N-m} \\ &= \frac{1}{y(1-y)} S^{(r+1)} - \frac{N}{1-y} S^{(r)}. \end{aligned}$$

Platí tedy rekurentní formule

$$S^{(r+1)} = NyS^{(r)} + y(1-y) \frac{dS^{(r)}}{dy},$$

s jejíž pomocí snadno napočteme potřebné řady

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= 1 \\ S^{(1)} &= Ny = \frac{N}{k} \\ S^{(2)} &= y(1-y)N + (Ny)^2 = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k} \right) N + \left(\frac{N}{k} \right)^2. \end{aligned}$$

Dosadíme-li zpátky do výpočtu rozptylu, máme

$$\Delta(k) = S^{(2)} - \frac{2N}{k} S^{(1)} + \frac{N^2}{k^2} S^{(0)} = \frac{N}{k} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = x \left(1 - \frac{x}{N} \right),$$

kde jsme opět použili proměnnou $x = N/k$ v přeškálovaném grafu shlukové analýzy. V limitě $N \rightarrow \infty$ dostaneme

$$\Delta(x) = x.$$

Pokud tento případ ještě zobecníme, že budeme uvažovat N_s shluků o s vozidlech (tzn. $N = N_s s$), pak se výpočet jen drobně pozmění. Počet vozidel v prvním úseku bude vyjádřen jako

$$n_1^{(k)}(X) = s \sum_{r=1}^{N_s} \chi_{(0, L/k)}(x_r),$$

míra množin M_m takových, že v prvním úseku je právě m shluků, dostane vyjádření

$$\mu(M_m) = \binom{N_s}{m} \left(\frac{L}{k}\right)^m \left(L - \frac{L}{k}\right)^{N_s-m}.$$

Rozptyl počtu vozidel nabyde tvaru

$$\Delta(k) = \frac{1}{L^{N_s}} \sum_{m=0}^{N_s} \mu(M_m) \left(ms - \frac{N}{k}\right)^2$$

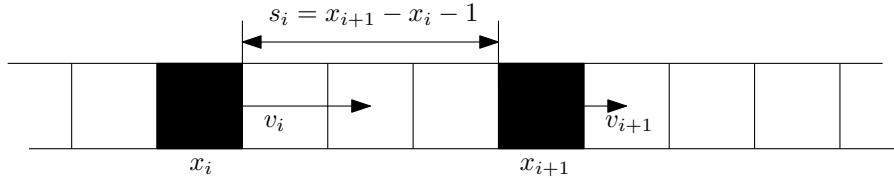
a po úpravách a využití rekurentních formulí pro řady $S^{(r)}$, kde jsme zaměnili N za N_s , dostaneme finální vztah

$$\Delta(k) = sx \left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

a v limitě velkého počtu vozidel máme $\Delta(k) = sx$.

4 Nagel-Schreckenbergův model

Nagel-Schreckenbergův ([7],[6]) model je dopravní model celulárního typu. Vozidlům přiřadíme polohy $x_i \in \hat{L} = \{1, 2, \dots, L\}$ a rychlosti $v_i \in \mathbb{N}_0$; $i \in \hat{N}$. Indexování budiž pojato tak, že platí $x_i < x_{i+1}$. Parametry tohoto modelu jsou dva – **maximální rychlost** $v_{max} \in \mathbb{N}$ a tzv. **decelerační pravděpodobnost** p_{dec} . Zavedeme dále vzdálenost po sobě jedoucích vozidel jako $s_i = x_{i+1} - x_i - 1$.



4.1 Aktualizační schéma

Nyní v několika krocích popíšeme aktualizací schéma tohoto modelu. Bude to právě ona obecnější stochastická verze. Aktualizace se skládá ze čtyř kroků.

1. **Akcelerace.** Rychlost všech vozidel je zvýšena o 1 se stropem v maximální rychlosti v_{max} ; tzn.

$$v_i \rightarrow \min\{v_i + 1, v_{max}\}.$$

2. **Kolize.** Pokud není před vozidlem dostatek prostoru, je jeho rychlost snížena, aby se zabránilo kolizi; neboli

$$v_i \rightarrow \min\{v_i, s_i\}.$$

3. **Decelerace.** S pravděpodobností p_{dec} je rychlost vozidla snížena o 1 s minimem v nulové rychlosti.

4. **Pohyb.** Poloha všech vozidel je zvětšena o hodnotu aktuální rychlosti,

$$x_i \rightarrow x_i + v_i.$$

Drobná poznámka na závěr – čtyřmi výše uvedenými kroky jsme definovali aktualizací zobrazení f_X . Jak v tomto konkrétním případě vypadá ono X ? Jedná se o N -tici čísel (ξ_1, \dots, ξ_N) , kde $\xi_i \in \langle 0, 1 \rangle \forall i \in \hat{N}$ s uniformním pravděpodobnostním rozdělením, $w_{\xi_i}(x) = 1$. Třetí krok by pak nabyl podoby

$$v_i \rightarrow \begin{cases} v_i - 1 & \text{pro } \xi_i \leq p_{dec} \\ v_i & \text{pro } \xi_i > p_{dec}. \end{cases}$$

4.2 Počáteční podmínky, parametry modelu

Počáteční podmínky rozdělíme na počáteční polohy a počáteční rychlosti. Pro polohy připadají v úvahu v podstatě následující tři možnosti:

- náhodné polohy
- vozidla rovnoměrně rozprostřená na vozovce
- vozidla nahromaděná na jednom místě, tzn. zaujímající polohy $x_0, x_0 + 1, \dots, x_0 + N - 1$ ($x_0 \in \hat{L} = \{1, 2, \dots, L\}$).

A pro rychlosti máme také alespoň tři různorodé volby:

- náhodné rychlosti (v celočíselném intervalu 0 až v_{max})
- nulové rychlosti, tzn. vozidla rozjíždějící se z klidu
- maximální rychlosti (které případně budou v druhém kroku aktualizací schématu přizpůsobeny vzdálenostem mezi vozidly)

Pro následující výsledky byly použity parametry $L = 10000$, $v_{max} = 50$ a $p_{dec} = 0,2$ s počátečními podmínkami rovnoměrně rozprostřených vozidel s maximálními rychlostmi.

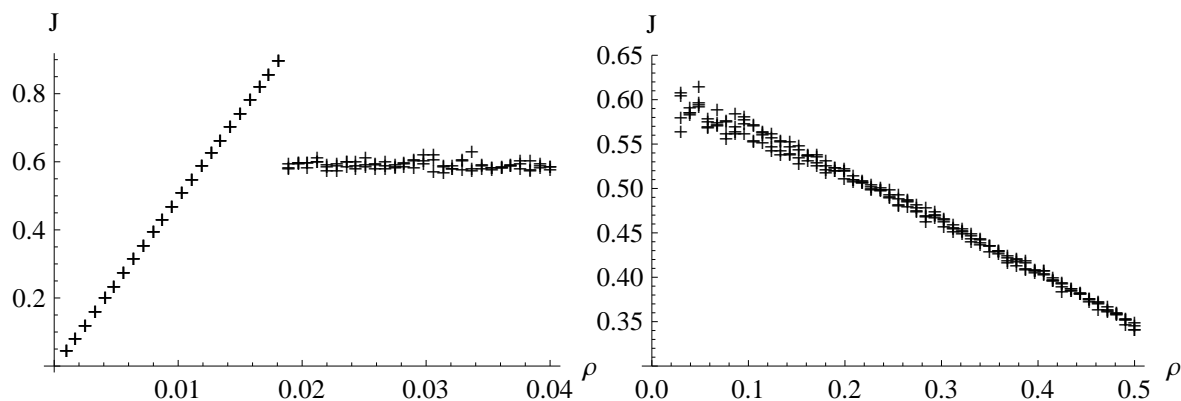
4.3 Fundamentální diagram

Pro námi dané parametry existují v Nagel-Schreckenbergově modelu v zásadě dva dopravní režimy: režim volné dopravy a doprava s kongescí (se zácpou).

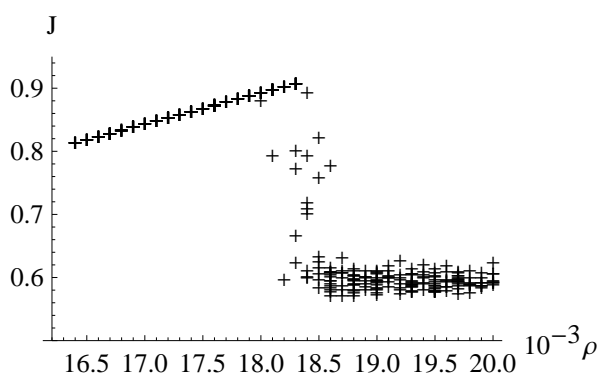
Následující fundamentální diagramy byly získány při simulaci o délce 4000 iterací, s první tisícovkou iterací vynechanou. Počítaný tok je typu $J_{(t_s, t_e)}^{(i)}$, počet iterací je zvolen tak, aby se hodnoty jednotlivých toků od sebe lišily jen minimálně.

Pro přehlednost jsou na obrázku 2 zobrazeny dva fundamentální diagramy – jeden pro nízké hustoty a druhý pro vysoké hustoty. V oblasti volného režimu je tedy lineární nárůst toku – udán vztahem $N \cdot v_{max}$ – až do bodu, kdy dojde k přechodu do režimu s kongescí. Velikost toku v hustotách těsně po oné kritické hodnotě by měl být stejný jako výtok z "ideální kongescí" (tzn. nekonečná silnice, od jistého bodu doleva je silnice zcela zaplněná auty, které se postupně rozjíždějí směrem doprava). Klesající tok v oblasti vysokých hustot je dán stále zmenšujícím se prostorem pro pohyb vozidel.

Ještě se na obrázku 3 v detailu podíváme na situaci okolo tzv. **kritické hustoty**, tedy bodu přechodu mezi volnou dopravou a režimem kongescí, který označíme ρ_{crit} . Existuje tedy úzké rozmezí hustot, kdy se systém může vyskytovat jak v režimu volné dopravy, tak v režimu s kongescí.



Obrázek 2: Fundamentální diagramy pro nízké a vysoké hustoty.



Obrázek 3: Fundamentální diagram v okolí kritické hustoty.

4.4 Jednotlivé dopravní režimy

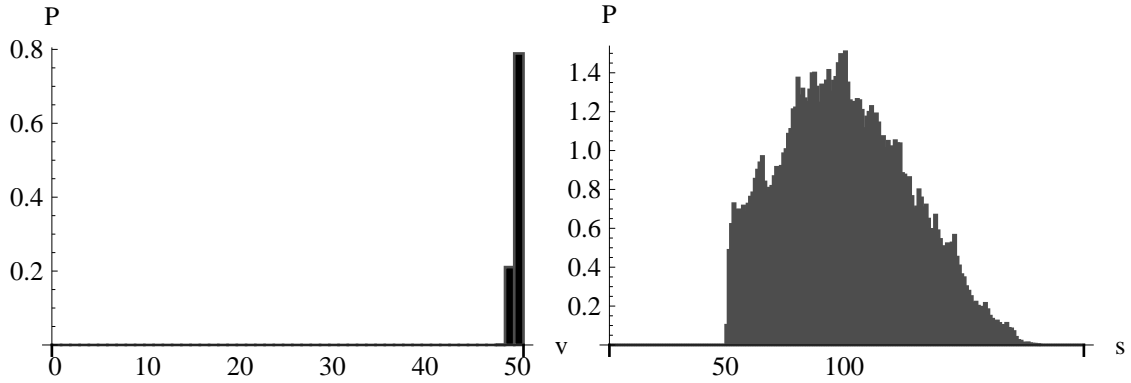
Veškeré histogramy byly získány během simulace o délce 4000 iterací, přičemž prvních tisíc iterací nebylo započítáno (z důvodu ustálení stavu systému). Výsledné histogramy vznikly jako součet histogramů v každé iteraci - jedná se tedy o jakýsi histogramový průměr. Hodnoty se berou vždy na konci (tzn. po čtvrtém kroku) aktualizacího schématu.

Histogram rozdělení rychlostí má vždy $v_{max} + 1$ košů pro rychlosti od 0 do v_{max} . Naproti tomu histogram vzdáleností mezi sousedními vozidly má počet košů dynamicky upravován podle počtu vozidel – maximální vzdálenost zachycená v histogramu je dvojnásobek střední vzdálenosti mezi vozidly $2L/N$).

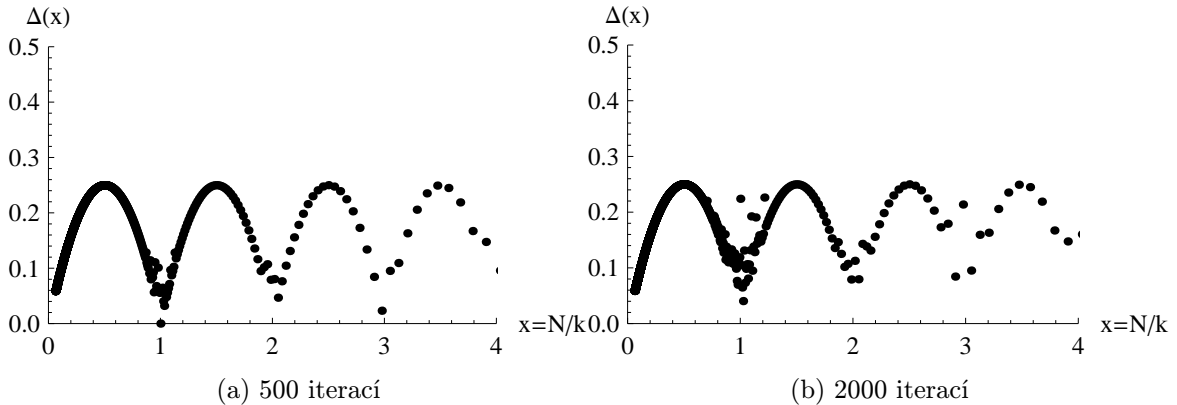
Pro shlukovou analýzu byla vzata délka vozovky $L = 25000$ kvůli dostatečně velkému množství vozidel v systému. Pokud nebude uvedeno jinak, byly polohy vozidel brány po dvou tisících iterací systému.

4.4.1 Volný režim pro $N \ll L/v_{max}$

Tento stav je charakterizován velkými vzdálenostmi mezi vozidly, tzn. vozidla mezi sebou prakticky neinteragují, pouze mezi sebou udržují vzdálenosti větší než v_{max} , aby se mohla pohybovat maximální rychlostí.



Obrázek 4: Histogramy rozdělení rychlostí a vzdáleností ve volném režimu pro hustotu $\rho = 0,01$, tj. $N = 100$.



Obrázek 5: Průběhy $\Delta(x)$ ve volném režimu pro $\rho = 0,005$, tj. $N = 125$ pro $L = 25000$.

Na obrázku 4 vidíme, že 80% vozidel se pohybuje maximální rychlostí, 20% rychlostí o jedna menší. To je ve shodě s tím, že se vozidla navzájem neovlivňují a pohybují se maximální rychlostí (s ohledem na decelerační pravděpodobnost $p_{dec} = 0,2$; tvar histogramu je de facto způsoben naší volbou, v kterém místě aktualizací schématu jsou brány hodnoty rychlostí).

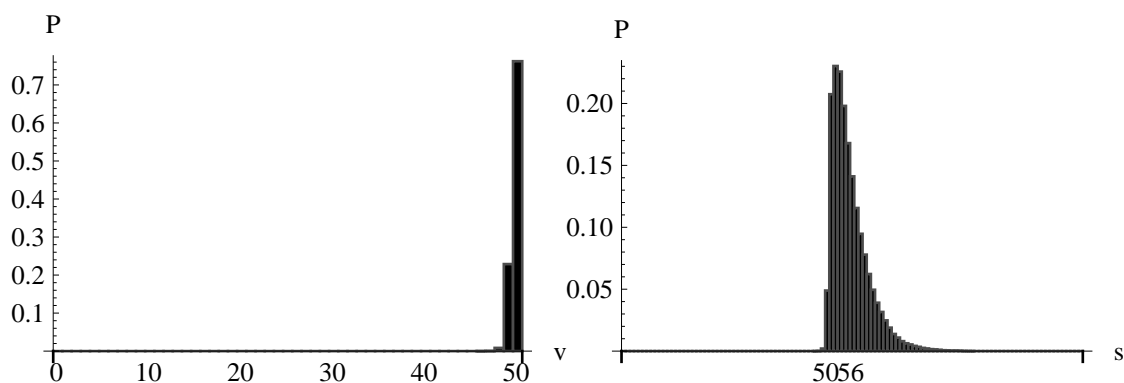
O něco zajímavější je histogram vzdáleností. Na ose x jsou vyneseny dvě důležité vzdálenosti – hodnota maximální rychlosti (v celulárních modelech bereme všechny veličiny bezrozměrné) a střední vzdálenost mezi vozidly. Vozidla by byla symetricky rozmístěna

kolem střední vzdálenosti mezi vozidly (tzn. kolem své počáteční vzdálenosti), nebýt onoho odpuzování, které je nutí být od sebe dál než hodnota maximální rychlosti. Jak je tohoto odpuzování dosaženo? V případě, že se dvě vybraná po sobě jedoucí vozidla po druhém kroku aktualizací schématu (kolize) pohybují maximální rychlostí, tak jejich vzájemná vzdálenost se po čtvrtém kroku aktualizace může změnit takto: s pravděpodobností $p_{dec}(1 - p_{dec})$ se zmenší o jedna, se stejnou pravděpodobností se zvětší o jedna a s pravděpodobností $p_{dec}^2 + (1 - p_{dec})^2$ se nezmění. Pokud se někde v systému díky těmto náhodným procházkám stane, že vzájemná vzdálenost se dostane na hodnotu $v_{max} - 1$, tak v dalším kroku se jejich vzdálenost již nemůže dále zmenšit. Proč? Rychlost prvního vozidla ve dvojici může být buďto v_{max} nebo $v_{max} - 1$, zatímco toho druhého $v_{max} - 1$ (kvůli zabránění kolizi) nebo $v_{max} - 2$ (díky zpomalení v deceleračním kroku). Snadno nahlédneme, že vzdálenost zůstává stejná s pravděpodobností $(1 - p_{dec})p_{dec}$, zvětší se o jedna s pravděpodobností $(1 - p_{dec})^2 + p_{dec}^2$ a o dva s pravděpodobností $p_{dec}(1 - p_{dec})$. Po zvětšení vzdálenosti alespoň o jedna má již druhé vozidlo prostor pro opětovné zrychlení na maximální rychlost. Díky nízké hustotě vozidel a počátečnímu rovnoměrnému rozložení vozidel se téměř vždy uplatní výše popsany scénář. Jiné scénáře by byly komplikovanější, ale v zásadě by sledovaly stejnou myšlenku.

Shluková analýza, viz obrázek 5, potvrzuje rovnoměrné rozložení vozidel přesně podle analytické předpovědi. Se zvětšujícím se počtem iterací dochází k narušování rovnoměrného rozložení a ke zvětšování poruch ve shlukovém diagramu.

4.4.2 Volný režim pro $N < L/v_{max}$

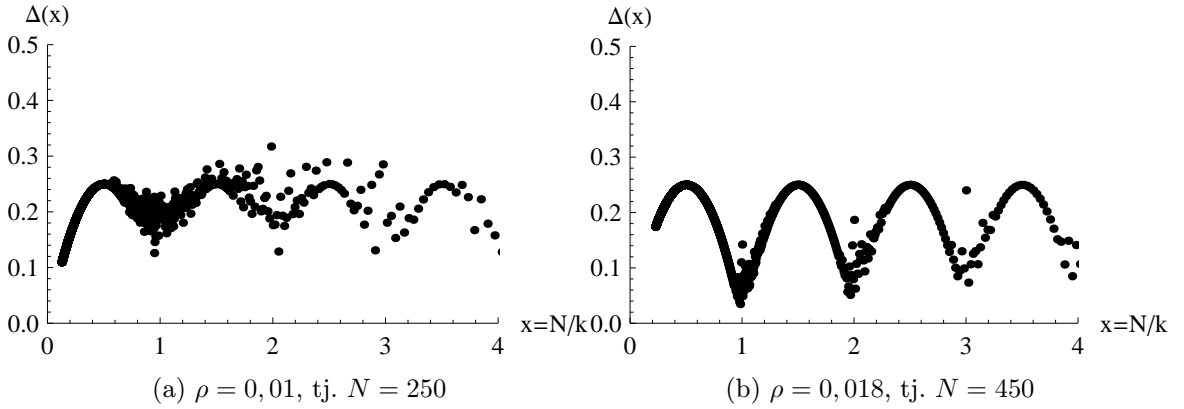
Pokud zvyšujeme hustotu dopravy, dochází zároveň k zesilování vzájemné interakce mezi vozidly. Stále se pohybujeme (pro $N = 180$) v oblasti volné dopravy - tedy vozidla se pohybují maximální rychlostí, avšak rozdělení vzdáleností na obrázku 6 ukazuje, že vozidlům již dochází prostor.



Obrázek 6: Histogramy rozdělení rychlostí a vzdáleností ve volném režimu pro hustotu $\rho = 0,018$, tj. $N = 180$.

K odklonu od režimu volné dopravy však nedochází přesně při hodnotě $N = L/v_{max}$ (což je takový počet aut, při nichž je hodnota střední vzdálenosti rovna hodnotě maximální rychlosti), ale již při hodnotách nižších. V našem případě je $L/v_{max} = 200$, ovšem již při hodnotách $N = 182$ s nenulovou pravděpodobností dojde k přechodu do jiného dopravního režimu, pro $N = 186$ systém v režimu volné dopravy již nezůstane nikdy.

Pro středně velké hustoty v oblasti volné dopravy dochází u grafu shlukové analýzy k ještě většímu odchýlení od ideálního průběhu rovnoměrného rozložení, viz obrázek 7. To je způsobeno nesymetrií rozložení vzdáleností mezi auty. Naopak pro hustoty těsně před přechodem do režimu zácpy se shlukový graf vrací do téměř ideální podoby. Je to dáno tím, že rozestupy mezi vozidly jsou kvůli nedostatku volného místa stlačeny do malého intervalu $\langle v_{max}, L/N \rangle$.

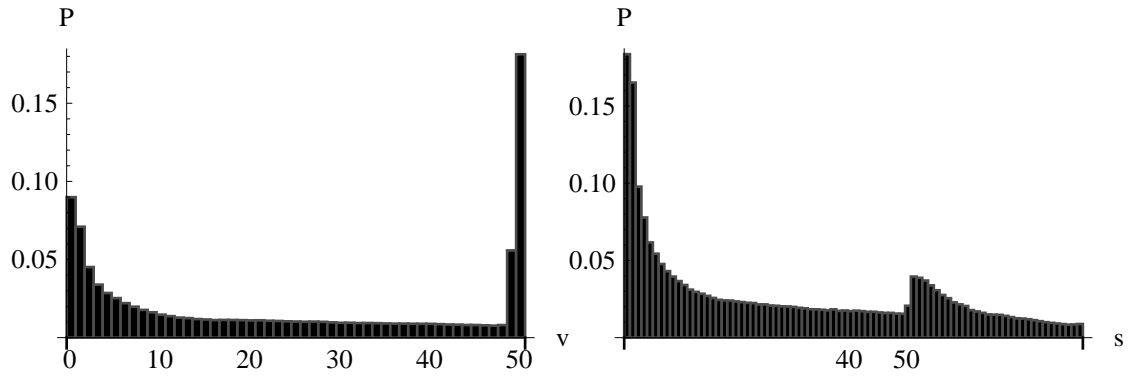


Obrázek 7: Průběhy $\Delta(x)$ ve volném režimu.

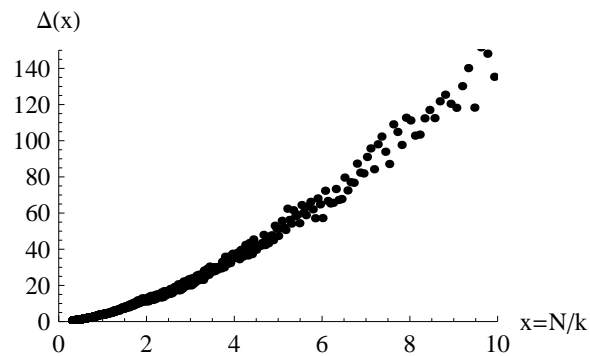
4.4.3 Režim kongesce pro $N > L/v_{max}$

V této oblasti již nevyhnutelně dochází ke vzniku zácpy (kongesce) – ta je charakterizována nízkými až nulovými rychlostmi a vzdálenostmi mezi vozidly. Pokud hustota dopravy není příliš vysoká, dochází k zajímavému jevu, kdy kongesce v jednom místě způsobí snížení hustoty v jiném místě, kde může nastat režim volné dopravy (myšleno tak, že v jednom okamžiku se v systému vyskytuje jak kongesce, tak i volná doprava; nedochází k přechodům, kdy je v systému pouze volná doprava a kdy i kongesce).

Tato tvrzení lze vyčíst z rozdělení rychlostí a vzdáleností na obrázku 8. Drobný komentář si zaslouží snad jen histogram vzdáleností, kde vidíme, že střední vzdálenost mezi vozidly již nemá žádný signifikantní význam, naopak u hodnoty maximální rychlosti vidíme typický peak známý z režimu volné dopravy. Graf shlukové analýzy viz obrázek 9, tvar je zcela odlišný od teoreticky předpovězených pro ideální shluky. Uvidíme, že tento tvar je typický pro dopravu s kongescí.



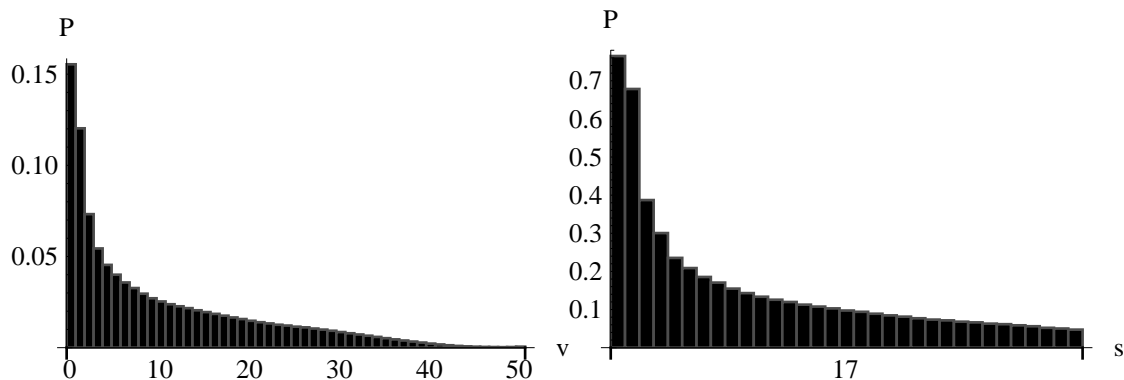
Obrázek 8: Histogramy rozdělení rychlostí a vzdáleností v režimu kongesce pro hustotu $\rho = 0,025$, tj. $N = 250$.



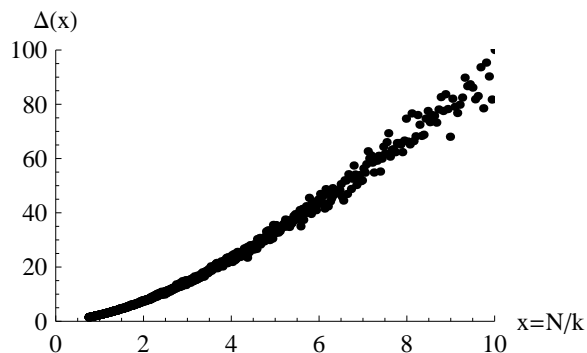
Obrázek 9: Průběh $\Delta(x)$ v režimu kongesce pro $\rho = 0,025$, tj. $N = 625$ pro $L = 25000$.

4.4.4 Režim kongesce pro $N \gg L/v_{max}$

V tomto případě je hustota již tak velká, že dochází ke vzniku mnoha kongescí v celém systému, které neumožňují vzniku volného režimu dopravy, ať už z důvodu malého snížení hustoty anebo malé vzdálenosti mezi jednotlivými kongescemi, kde pomalá akcelerace (v každém kroku zvýšení rychlosti pouze o jedna a ještě jen s pravděpodobností $1 - p_{dec}$) neumožňují dosáhnout maximální rychlosti, viz obrázek 10. Graf shlukové analýzy na obrázku 11 má podobný tvar jako v předchozí kapitole s nižšími hustotami, jediný rozdíl je v nižších dosahovaných hodnotách rozptylu.



Obrázek 10: Histogramy rozdělení rychlostí a vzdáleností v režimu kongesce pro hustotu $\rho = 0,06$, tj. $N = 600$.



Obrázek 11: Průběh $\Delta(x)$ v režimu kongesce pro $\rho = 0,06$, tj. $N = 1500$ pro $L = 25000$.

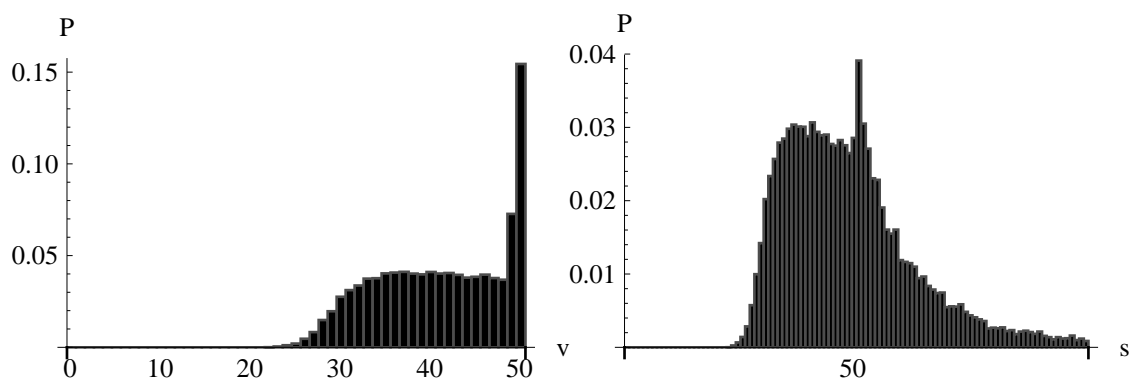
4.4.5 Dopravní režimy pro malé délky silnice

Ukazuje se, že pro malé délky silnice (přibližně $L < 3000$; viz 4.5.3) vykazuje model poněkud odlišné chování. Samozřejmě zůstává režim volné dopravy pro nízké hustoty a režim s kongescí pro vysoké hustoty. Ovšem nenastává ostrý přechod od volného režimu k režimu s kongescí při zvyšování počtu aut v blízkosti kritické hustoty. Místo toho se objevují dva nové "přechodové" režimy a režim s kongescí se objevuje až při vyšších hustotách. Histogramy nových režimů jsou k vidění na obrázcích 12 a 13 (tyto konkrétně pro $L = 1250$):

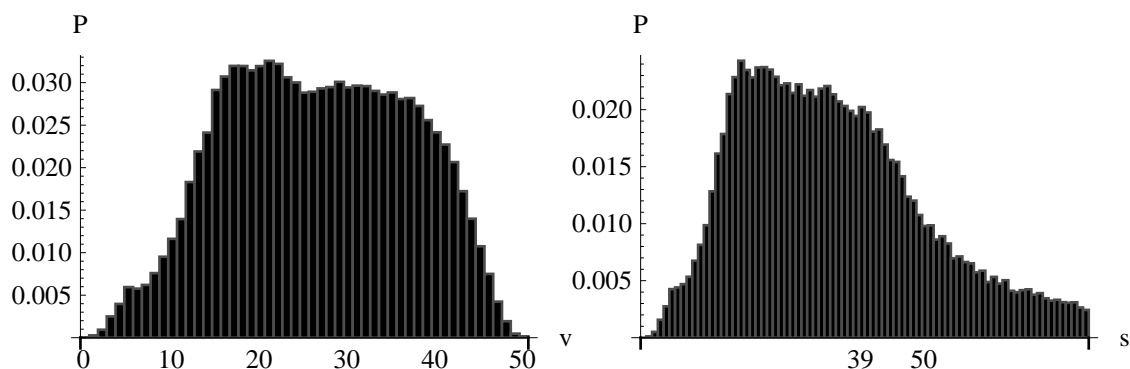
První bychom mohli nazvat kvazivolný režim – je charakterizován přítomností volné dopravy s příměsí pomaleji se pohybujících vozidel. Na histogramu vzdálenosti je přítomen charakteristický vrchol způsobený režimem volné dopravy.

Druhý nový režim představuje jakýsi synchronizovaný režim, kdy hustota dopravy již neumožňuje nikde v systému volnou dopravu, ale ještě nedochází ke vzniku kongesce.

Důvodem pro existenci těchto režimů pouze při nízkých délkách silnice je pravděpodobně existence jakési globální interakce vozidel - kdy změna hustoty/rychlosti v jednom



Obrázek 12: Histogramy rozdělení rychlostí a vzdáleností kvazivolného režimu pro hustotu $\rho = 0,02$, tj. $N = 25$ pro $L = 1250$ m.



Obrázek 13: Histogramy rozdělení rychlostí a vzdáleností synchronizovaného režimu pro hustotu $\rho = 0,026$, tj. $N = 32$ pro $L = 1250$ m.

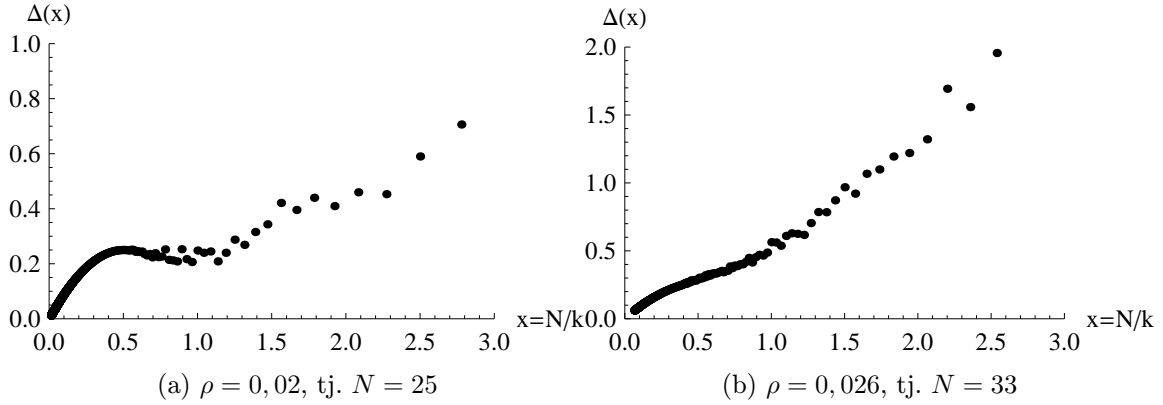
místě má během několika iterací dopad na všechna vozidla, což je při velkých délkách znemožněno.

Pro získání grafů shlukové analýzy pro malé délky silnice na obrázku 14 byla taktéž zvolena délka vozovky $L = 1250$. Pro nedostatek údajů z důvodu malého počtu vozidel byla simulace spuštěna celkem desetkrát a výsledná hodnota kvadratické odchylky byla vzata jako průměr dílčích, což odpovídá situaci, jako by vozovka byla desetkrát delší a bylo na ní vozidel desetkrát více.

4.5 Vliv jednotlivých parametrů na fundamentální diagram

4.5.1 Maximální rychlost v_{max}

Na obrázku 15 můžete vidět fundamentální diagramy zakreslené do jednoho grafu pro různé hodnoty maximální rychlosti. Přestože maxima toku se zlehka zvětšují pro zvětšující se maximální rychlost, tak mnohem zajímavějším efektem je posouvání kritické hustoty



Obrázek 14: Průběhy $\Delta(x)$ pro režimy specifické malým délkám silnice $L = 1250$.

do oblasti vyšších hustot pro snižující se maximální rychlost.

Takže pro každou hodnotu hustoty lze nalézt optimální maximální rychlost, při níž bude systém těsně před opuštěním režimu volné dopravy a tedy dosáhneme maximálního možného toku. Což je jistě zajímavé z globálního hlediska, ale pokud se na tuto skutečnost podíváme z pohledu jednotlivého řidiče, který se v režimu volné dopravy pohybuje maximální rychlostí, tak pro něj zvyšování hustoty provozu stále znamená snižování jeho rychlosti.

Další věcí, kterou můžeme pozorovat, je nezávislost toku v režimu zácpy na maximální rychlosti. Je to tím, že tok z kongesce je závislý pouze na schopnosti vozidel rozjíždět se a to závisí pouze na hodnotě p_{dec} , jak uvidíme v následující kapitole.

4.5.2 Decelerační pravděpodobnost p_{dec}

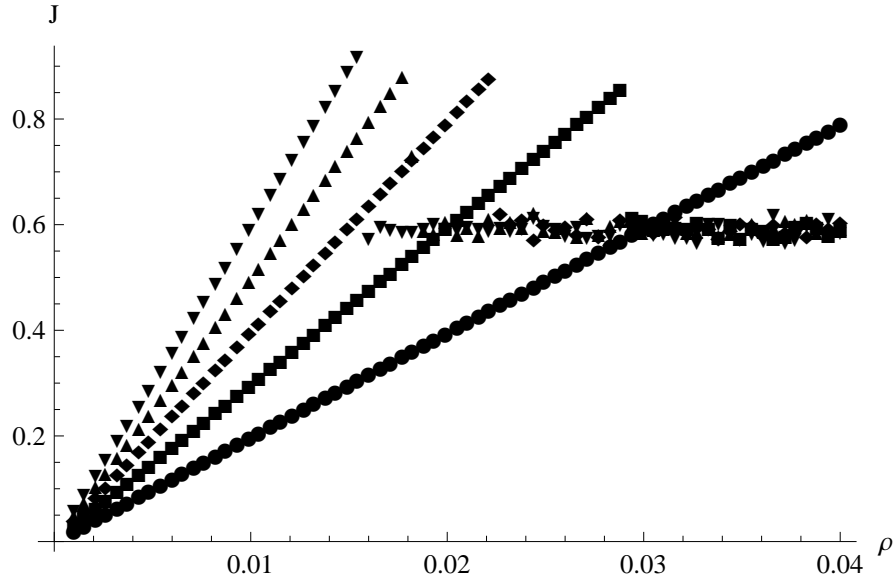
Série fundamentálních diagramů na obrázku 16 vrhne světlo na vliv decelerační pravděpodobnosti na chování modelu. Na první pohled je vidět, že nenulová decelerační pravděpodobnost je esenciální pro vznik fenoménu zácpy; se zvětšující se decelerační pravděpodobností dochází ke stále většímu propadu dopravního toku při přechodu z režimu volné dopravy do režimu s kongescí.

Pro nulovou pravděpodobnost režim volné dopravy ze zvyšující se hustotou přejde v jakýsi synchronizovaný režim, kdy se auta pohybují takovou rychlostí, jakou jim umožňují rozestupy mezi nimi. Teoretická předpověď velikosti toku pro nulovou decelerační pravděpodobnost vypadá takto

$$\rho = \frac{N}{L}, \quad v = \frac{L - N}{N}, \quad J = \rho \cdot v = \frac{L - N}{L} = 1 - \rho,$$

kde rychlost v je určena průměrným volným místem před jednotlivými vozidly $(L - N)/N$.

Dále není patrný vliv různých hodnot decelerační pravděpodobnosti v režimu volné dopravy. Teoretický výpočet prozradí více. Víme, že Np aut se pohybuje rychlostí $v_{max} - 1$



Obrázek 15: Fundamentální diagramy pro různé maximální rychlosti $v_{max} \in \{60, 50, 40, 30, 20\}$ (shora dolů).

a $N(p - 1)$ rychlostí v_{max} a tyto auta spolu téměř neinteragují. Předpověď toku je tedy následující (místo p_{dec} píšeme pouze p)

$$J = \rho_p v_p + \rho_{1-p} v_{1-p} = \rho p (v_{max} - 1) + \rho (1 - p) v_{max} = \rho (v_{max} - p).$$

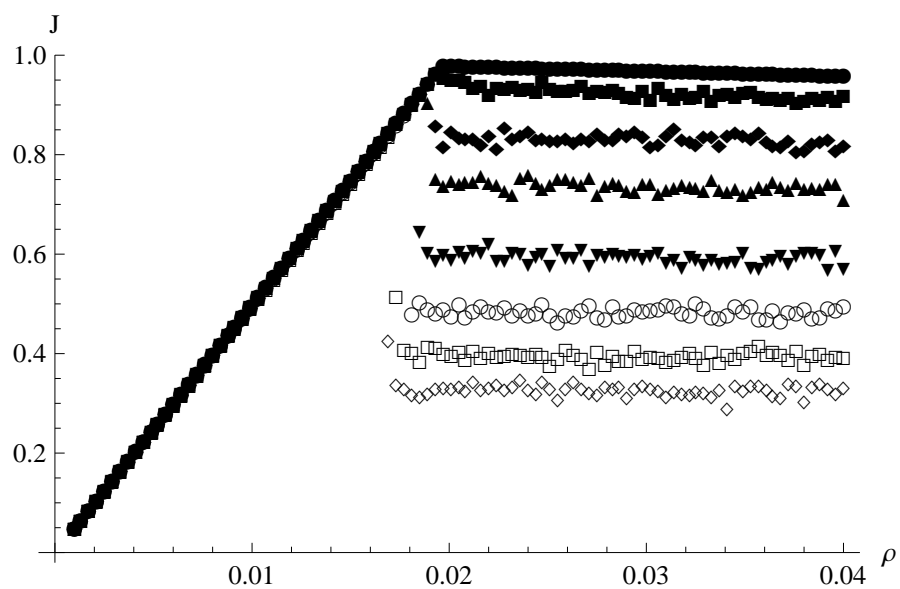
Tedy tento efekt by byl pozorovatelný pro maximální rychlosti v řádu jednotek.

Zároveň je možno pozorovat se zvětšující se p_{dec} opuštění režimu volné dopravy pro zmenšující se hustoty. Pro $p_{dec} \rightarrow 0$ zjevně $\rho_{crit} \rightarrow 1/v_{max}$.

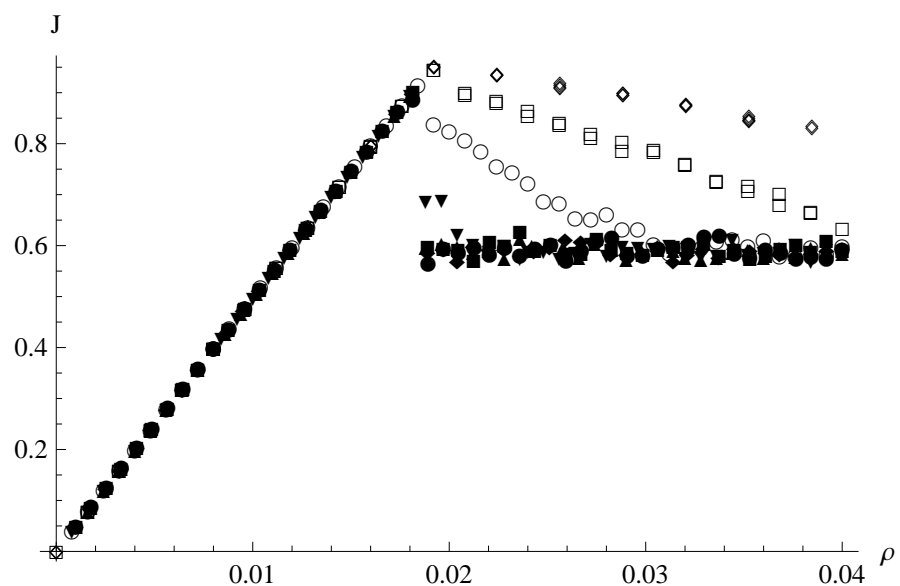
Decelerační pravděpodobnost je tedy klíčem ke vzniku kongesce. Můžeme ji interpretovat jako občasnou přehnanou reakci řidiče při brždění kvůli nedostatku místa před vozidlem. Zároveň její velká hodnota zpomaluje rozjezd vozidel – s pravděpodobností $1 - p_{dec}$ se rychlost zvýší o jedna, s pravděpodobností p_{dec} zůstane stejná – to způsobuje odlišné toky v režimu s kongescí – dá se snadno nahlédnout, že velikost toku z ideální kongesce je $1 - p_{dec}$.

4.5.3 Délka silnice L

Ukazuje se, že i délka silnice má vliv na fundamentální diagram. Při nízkých délkách silnice se objevují dva nové režimy dopravy (viz kapitola 4.4.5). Tyto dva nové režimy jsou pak rozpoznatelné na fundamentálním diagramu, viz obrázek 17.



Obrázek 16: Fundamentální diagramy pro různé decelerační pravděpodobnosti $p_{dec} \in \{0; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}$ (shora dolů).



Obrázek 17: Fundamentální diagramy pro délky silnice. Shora dolů toky pro $L_1 = 312$, $L_2 = 625$, $L_3 = 1250$, další diagramy jsou již téměř nerozlišitelné s $L \in \{2500, 5000, 10000, 20000, 40000\}$.

5 Model optimální rychlosti

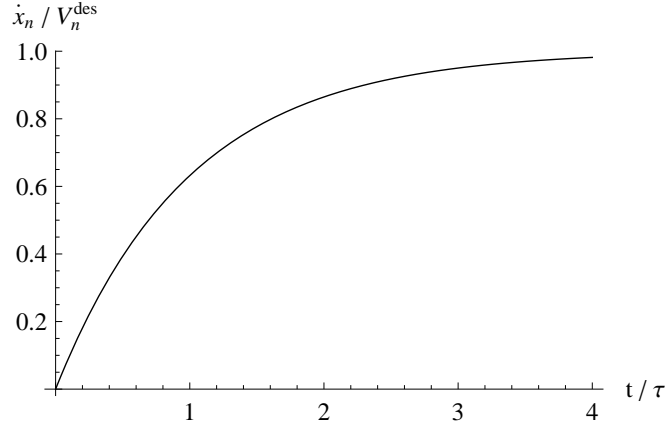
Model optimální rychlosti [7] je zástupcem newtonovských modelů. V modelu optimální rychlosti nabývají pohybové rovnice tohoto konkrétního tvaru

$$\ddot{x}_n = \frac{V_n^{des}(x_k, \dot{x}_k) - \dot{x}_n}{\tau},$$

kde τ je konstanta a V_n^{des} je opět funkce proměnných x_n, \dot{x}_n – tuto funkci budeme nazývat **funkce optimální (bezpečné) rychlosti** představující v daném okamžiku rychlost, které chce řidič daného vozidla dosáhnout (se střední reakční dobou τ).

V případě, že by V_n^{des} byla konstanta, je řešením pro rychlosti (s počáteční podmínkou $\dot{x}_n(0) = V_n^{(0)}$)

$$\dot{x}_n(t) = V_n^{(0)} e^{-t/\tau} + V_n^{des}(1 - e^{-t/\tau}) = V_n^{des} - (V_n^{des} - V_n^{(0)})e^{-t/\tau}.$$



Obrázek 18: Rychlost vozidla pro konstantní V_n^{des} s počáteční podmínkou $\dot{x}_n(0) = 0$.

Parametr τ určuje, jak rychle řidič vyrovnává změny způsobené změnami V_n^{des} . Zjevně platí

$$\dot{x}_n(\tau \ln 2) = \frac{V_n^{des} + V_n^{(0)}}{2}, \quad \ddot{x}_n(0) = \frac{V_n^{des} - V_n^{(0)}}{\tau}.$$

Zde budeme uvažovat model, kdy V_n^{des} je funkcí pouze od vzdálenosti k následujícímu vozidlu ([8], [9]), tzn. $V_n^{des}(s_n)$, kde $s_n = x_{n+1} - x_n$. V tomto modelu tedy uvažujeme vozidla s nulovou délkou⁶. Použijeme následující konkrétní volbu funkce optimální rychlosti ([7],[8])

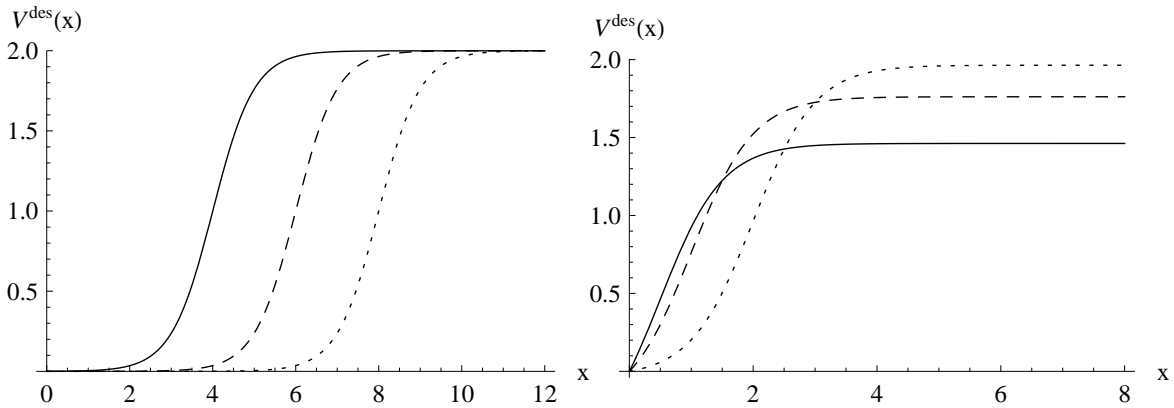
$$V_n^{des}(s) = V_n^{des}(s) = C \left(\tanh \left(\frac{s - K_t}{K_s} \right) + \tanh \left(\frac{K_t}{K_s} \right) \right),$$

⁶Pokud by vozidla měla nenulové délky d_n , pak je možné jednoduše zavést vzdálenost mezi vozidly jako $s_n = x_{n+1} - x_n - d_n$, případně vhodně přizpůsobit tvar funkce optimální rychlosti.

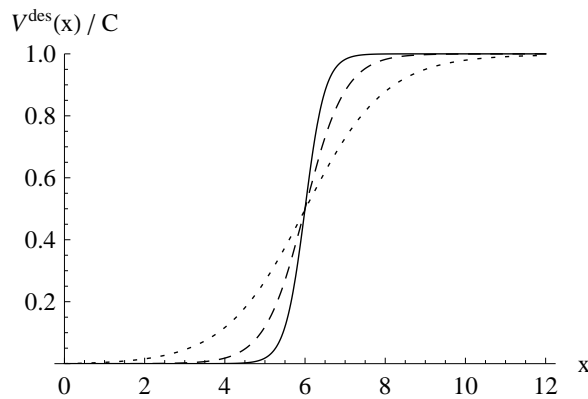
kde C , K_t a K_s jsou konstanty. Normalizační konstantu C je možno volit například jako $C = v_{max}/(1 + \tanh(K_t/K_s))$, která zajišťuje vlastnost

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} V^{des}(s) = v_{max},$$

tedy vozidlo, které má před sebou dostatečný prostor, má za svoji optimální rychlost rychlost maximální; danou konstantou v_{max} .



Obrázek 19: Průběhy funkce $V^{des}(x)$ s $C = 1$ a $K_s = 1$. Na levém obrázku křivky s hodnotami $K_t \in \{4, 6, 8\}$; na pravém $K_t \in \{1/2, 1, 2\}$ – tyto neuvažujeme.



Obrázek 20: Křivky $V^{des}(x)$ pro $K_t = 6$ a $K_s \in \{1/2, 1, 2\}$.

Oblast, pro kterou platí $V^{des} \not\approx 0$ nebo $V^{des} \not\approx v_{max}$ ⁷ budeme nazývat **přechodovou oblastí** funkce V^{des} . Parametr K_t pak udává umístění této přechodové oblasti a nastavuje tak jakousi minimální bezpečnou vzdálenost od následujícího vozidla, pod jejíž hranicí se řidičovi začne snižovat optimální rychlost. Hodnoty K_t , pro které neplatí $\tanh\left(\frac{K_t}{K_c}\right) \approx 1$, neodpovídají požadovanému průběhu optimální rychlosti a nebudeme je uvažovat.

⁷Pod zápisem $V^{des} \not\approx 0 \wedge V^{des} \not\approx v_{max}$ rozumíme takový rozestup mezi vozidly s , že platí $f v_{max} < V_{des}(s) < (1 - f)v_{max}$ s $f = 0,01$.

Poslední parametr K_s funkce V^{des} jednoduše kontroluje strmost přechodu mezi maximální a nulovou optimální rychlostí a řídí tedy šířku přechodové oblasti. Vliv těchto parametrů na tvar funkce optimální rychlosti viz obrázky 19 a 20.

5.1 Počáteční podmínky, parametry modelu

Volné parametry modelu naleznete v tabulce.

Označení	Parametr
N	počet vozidel
L	délka silnice
v_{max}	maximální rychlost
τ	”reakční” doba řidiče
K_s	škálovací konstanta V_{des}
K_t	translační konstanta V_{des}

Zvolíme konstanty tak, aby odpovídali nějaké konkrétně zvolené situaci. Maximální rychlost položíme $v_{max} = 25m.s^{-1} = 90km/h$. Délku silnice $L = 2500m$. Translační konstantu volíme podle tzv. pravidla dvou sekund – tedy, že bezpečná vzdálenost od následujícího vozidla by měla být vzdálenost, kterou při dané rychlosti urazíme za dvě sekundy. Uvažujeme-li maximální rychlost, bude $K_t = 50m$. A poslední dva parametry: reakční doba řidiče $\tau = 2s$ a škálovací konstanta $K_s = 8m$ – o významu těchto parametrů více v kapitolách o vlivu jednotlivých parametrů na fundamentální diagram.

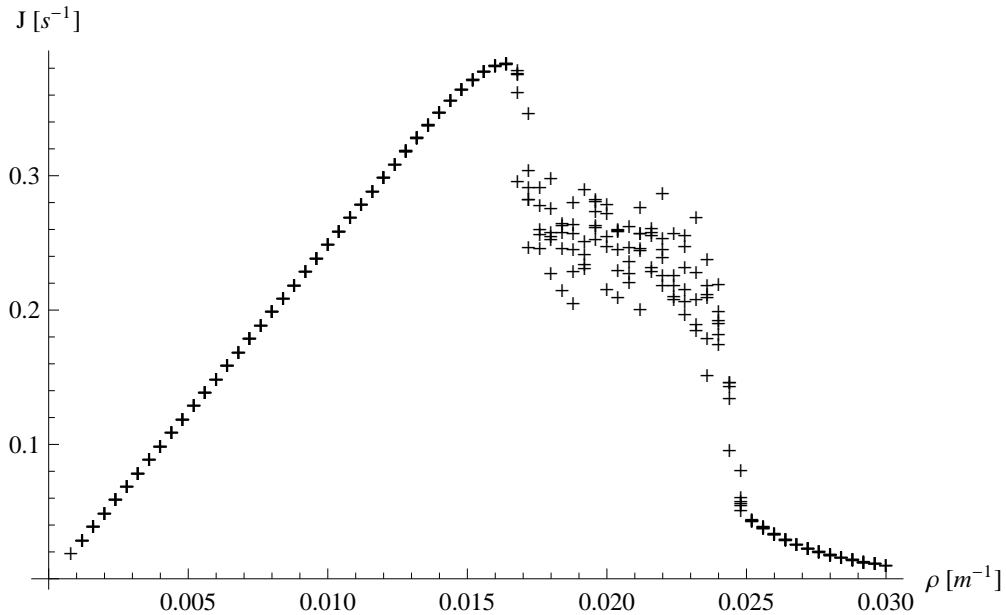
Počáteční podmínky jsou nulové počáteční rychlosti $v_i(0) = v_{max}$ a ekvidistatně rozdělené počáteční polohy s nepatrným šumem tvaru $x_i(0) = i\frac{L}{N} + \xi$, kde ξ je náhodná veličina s uniformním rozdělením $\xi \in \langle 0, \frac{1}{D}\frac{L}{N} \rangle$, $D = 20$.

5.2 Fundamentální diagram

Na fundamentálním diagramu znázorněném na obrázku 21 jasně rozeznáváme tři dopravní režimy - volnou dopravu, kongesci a zvláštní synchronizovaný režim, který je způsoben tvarem funkce V^{des} .

Fundamentální diagram byl získán během simulace trvající $T = 100s$ s tím, že prvních $T_i = 50s$ nebylo započítáno (z důvodu ustálení stavu systému). Výpočet byl proveden v programu Mathematica 8.0 metodou NDSolve. Ostatní fundamentální diagramy uvedené v této kapitole byly získány stejným způsobem.

Při pozorném pohledu odhalíme nezcela ostré přechody mezi jednotlivými režimy. V obou případech se jedná o instabilitu režimu, který se v systému nachází na začátku simulace. Pro oblast hustot ve fundamentálním diagramu, kde pozorujeme přechod volná



Obrázek 21: Fundamentální diagram modelu optimální rychlosti.

doprava \leftrightarrow kongesce, se na počátku systém nachází ve stavu volné dopravy, který se do stavu kongesce dostane až po relativně dlouhém čase. Pro přechod kongesce \leftrightarrow synchronizovaná doprava na počátku existuje režim synchronizované dopravy, který po relativně dlouhém čase přejde do stavu kongesce. Neostrosti jsou pak konkrétně způsobeny tím, že po část doby se tok počítá v jednom dopravním režimu a po zbylou část v druhém (a tyto toky jsou diametrálně odlišné). Tento "nedostatek" lze odstranit zvětšením T a T_i tak, aby měl systém dostatek času překloupat se do konečného stavu. Na druhou stranu se na to nemusíme dívat jako na nedostatek – v diagramu je pak vidět vlastnost, které bychom si při dlouhých simulačních časech nemuseli vůbec všimnout.

Dále vidíme značný rozptyl hodnot toku v oblasti kongesce. Ten je způsoben rozdílným počtem jednotlivých kongescí, které v systému po ustálení vzniknou. Každá zácpa způsobí zdržení daného vozidla a v závislosti na počtu těchto zdržení se příslušně zmenšuje tok.

5.3 Jednotlivé dopravní režimy

V této kapitole prozkoumáme jednotlivé režimy dopravy, kterým dává vzniknout model optimální rychlosti. Prezentované histogramy byly vytvořeny na základě 200 simulací délky 100 s s hodnotami v koncovém čase simulace.

5.3.1 Volná doprava

Na histogramu na obrázku 22 je patrné, že všechny automobily se pohybují maximální rychlostí a díky nulové interakci mezi vozidly je rozdělení vzdáleností mezi sousedními

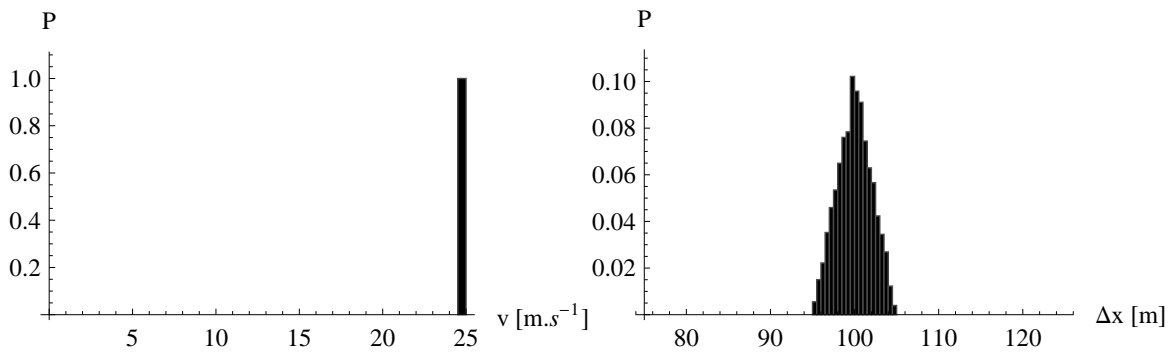
vozidly dáno počátečními podmínkami

$$s_i = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{\rho} + (\xi_1 - \xi_2),$$

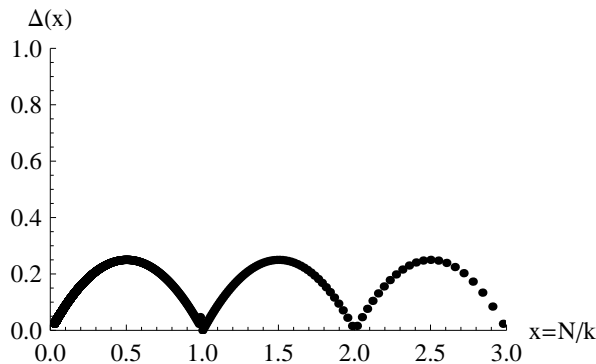
kde náhodné veličiny ξ mají uniformní rozdělení s hodnotami $\langle 0, \frac{1}{D\rho} \rangle$, a tedy hustota pravděpodobnosti $\xi_1 - \xi_2$ je pak

$$w_{\xi_1 - \xi_2}(x) = D\rho(1 - D\rho|x|) \quad \text{pro } x \in \left(-\frac{1}{D\rho}, \frac{1}{D\rho}\right), \quad \text{jinak } 0$$

Shluková analýza na obrázku 23 potvrzuje rovnoměrné rozložení vozidel, nepatrný šum v rovnoměrném rozložení daný počátečními podmínkami není téměř vůbec patrný.



Obrázek 22: Histogram rozdělení rychlostí a vzdáleností ve volném režimu pro hustotu $\rho = 0,01$, tj. $N = 25$.

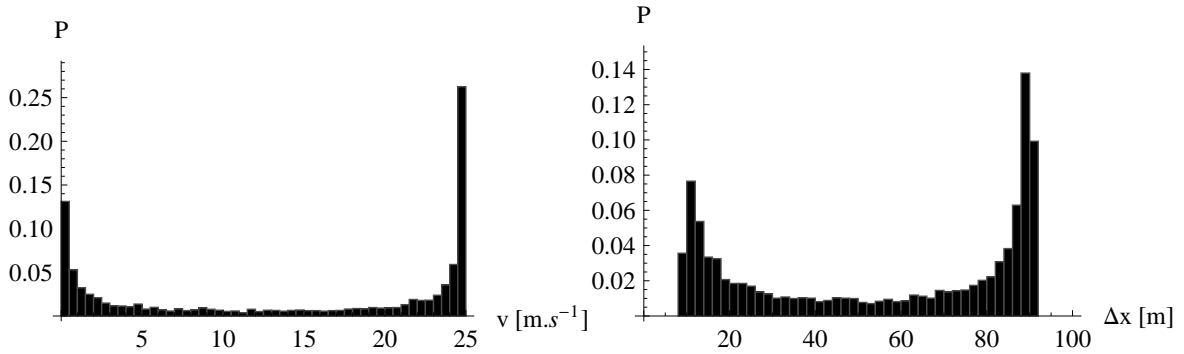


Obrázek 23: Průběh $\Delta(x)$ pro volný režim modelu optimální rychlosti.

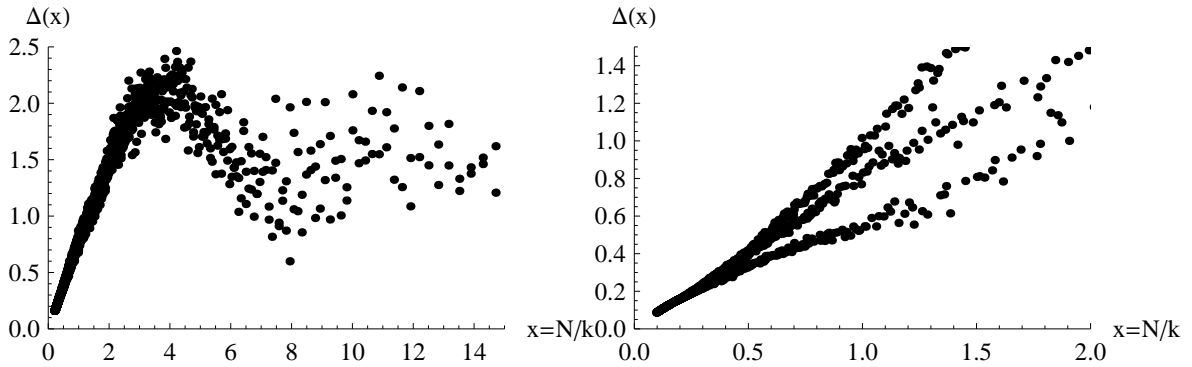
5.3.2 Kongesce

Pro režim kongesce dostáváme typické histogramy charakterizující tento režim. Na obrázku 24 vidíme zastoupení nízkých rychlostí a malých rozestupů představující vozidla stojící

v zácpe a na druhé straně vysoké rychlosti a velké rozestupy odpovídající vozidlům ve volném režimu v oblasti mezi jednotlivými kongescemi.



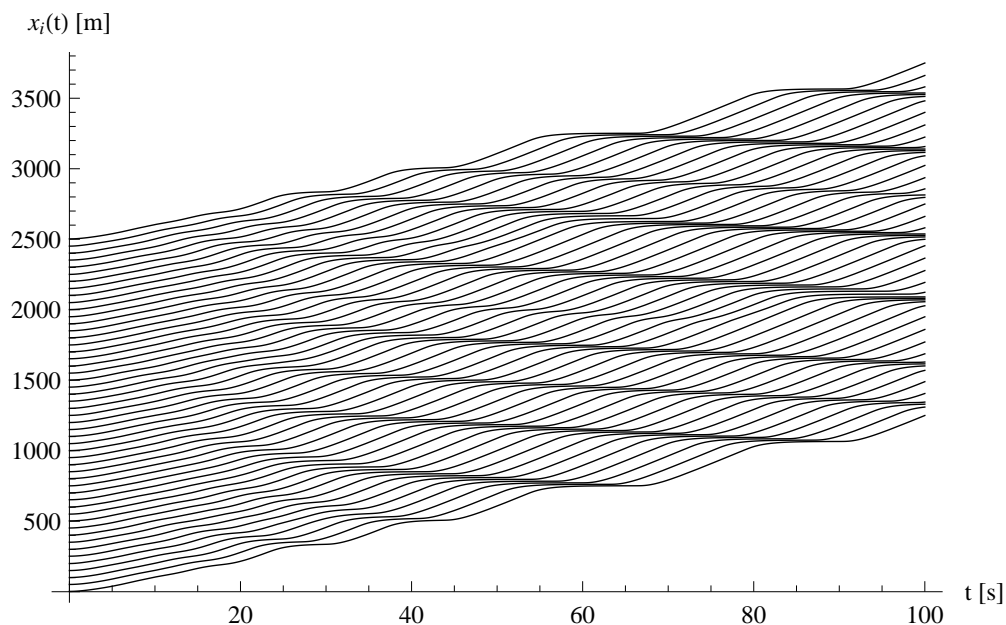
Obrázek 24: Histogram rozdělení rychlostí a vzdáleností v režimu kongesce pro hustotu $\rho = 0,018$, tj. $N = 45$.



Obrázek 25: Průběhy $\Delta(x)$ pro režim kongesce v modelu optimální rychlosti. Diagram vlevo pro hustotu $\rho = 0,02 \text{ m}^{-1}$. Grafy vpravo jsou pro hodnoty různé hodnoty hustoty dopravy $\rho \in \{0,023; 0,02; 0,017\} \text{ m}^{-1}$ (shora dolů).

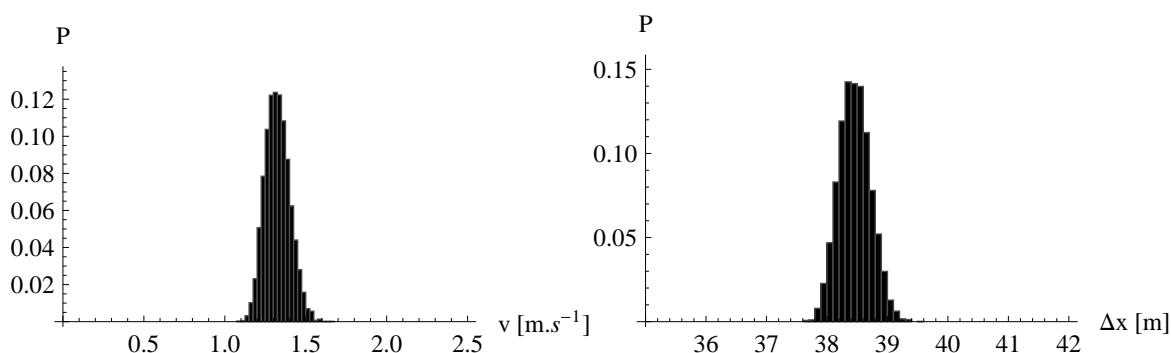
Pokud postupně tvoříme histogramy pro zvyšující se hustoty (ovšem pouze v té oblasti fundamentálního diagramu odpovídající režimu kongesce), je patrný úbytek zastoupení vozidel v pravé části histogramů a přibývání zastoupení v levé části histogramů, tzn. dochází ke zvětšování oblastí kongescí na úkor volného režimu. Pokud vykreslíme trajektorie vozidel (viz obrázek 26), můžeme vidět jednotlivé kongesce propagující se směrem dozadu.

Na obrázku 25 je zobrazena shluková analýza v režimu kongesce. Je vidět, že hustota dopravy má vliv na podobu grafu shlukové analýzy. Pokud bychom data pro $N/k < 2$ proložili přímkou, pak větší hustota způsobí větší směrnici této přímky. To odpovídá intuitivní představě, že při větší hustotě dopravy je shlukování větší.



Obrázek 26: Trajektorie vozidel v režimu kongesce pro hustotu dopravy $\rho = 0,02$, tj. $N = 50$.

5.3.3 Synchronizovaná doprava



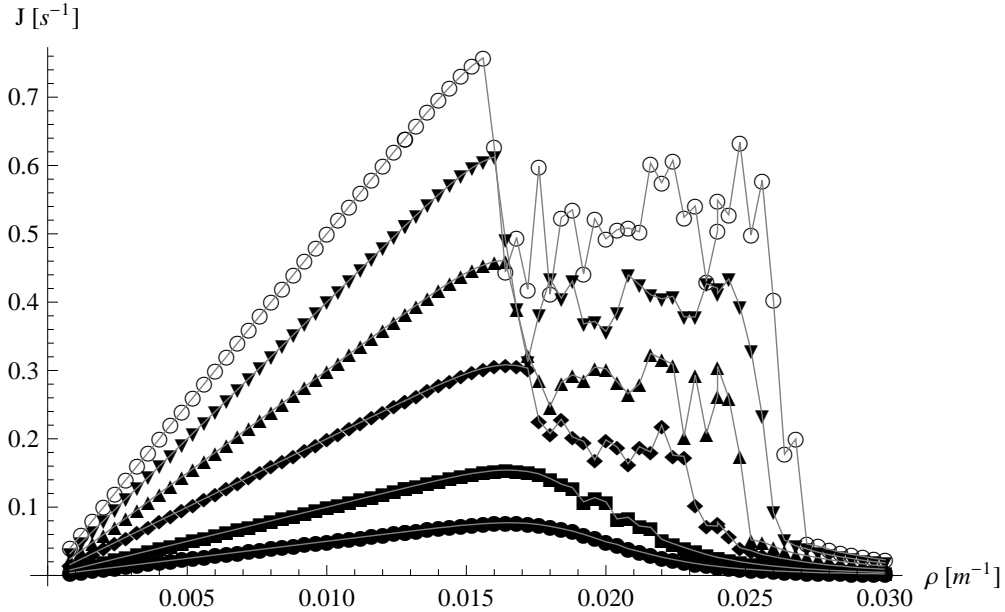
Obrázek 27: Histogram rozdělení rychlostí a vzdáleností v synchronizovaném režimu pro hustotu $\rho = 0,026$, tj. $N = 65$.

Tento zvláštní režim v oblasti vyšších hustot se vyznačuje téměř zcela synchronizovaným pohybem vozidel v ekvidistantních vzdálenostech velmi nízkou rychlostí, jak je vidět na histogramech obrázku 27. Jeho výskyt je ale jednoduše dán tvarem funkce optimální rychlosti V^{des} , která byla vytvořena s ohledem na udržování bezpečné vzdálenosti – ovšem při rychlosti 90 km/h. Pro velké hustoty jednoduše auta nemají dostatek prostoru a jejich pohyb je určován pouze tou částí V^{des} nacházející se před přechodem do vysokých rychlostí - tedy auta se pohybují rychlostí odpovídající střední vzdálenosti mezi nimi. Tento neduh modelu by bylo možno vyřešit záměnou konstanty K_t za funkci závislou

na rychlosti vozidla – tím by se dynamicky měnila udržovaná bezpečná vzdálenost. Graf shlukové analýzy zcela odpovídá rovnoměrnému rozložení vozidel.

5.4 Vliv jednotlivých parametrů na fundamentální diagram

5.4.1 Maximální rychlost v_{max}



Obrázek 28: Fundamentální diagramy pro různé maximální rychlosti $v_{max} \in \{50 \text{ m.s}^{-1}, 40 \text{ m.s}^{-1}, 30 \text{ m.s}^{-1}, 20 \text{ m.s}^{-1}, 10 \text{ m.s}^{-1}, 5 \text{ m.s}^{-1}\}$ (shora dolů).

Obrázek 28 znázorňuje závislost fundamentálního diagramu na hodnotě maximální rychlosti. V oblasti volné dopravy maximální rychlost pochopitelně lineárně škáluje velikost toku. Zajímavé je, že v tomto modelu dochází pouze k téměř neznamatelnému posouvání hustoty přechodu od volné dopravy ke kongesci (kritické hustoty) se snižováním maximální rychlosti. Tento drobný posun do oblasti vyšších hustot ovšem nevynahrazuje zmenšení směrnice přímky vytvářené ve fundamentálním diagramu volnou dopravou. V tomto modelu je tedy nejvýhodnější volit co největší maximální rychlost pro maximalizaci toku.

V zóně kongesce je pozorovatelné signifikantní zvyšování toku se zvyšující se maximální rychlostí. Tento nárůst je dán tím, že vozidla v prostoru mezi jednotlivými kongescemi akcelerují rychleji a na větší rychlost, což způsobuje rychlejší průjezd systémem.

Dále pro nízké hodnoty v_{max} dochází k úplnému vymizení režimu kongesce. Volná doprava se při zvyšující hustotě prostě změní v dopravu synchronizovanou. To napovídá, že pro vznik zácpy je důležitý dostatečně ostrý přechod ve funkci V^{des} – rychlost v_{max} lineárně škáluje funkci optimální rychlosti – lineárně tedy ovlivňuje derivaci této funkce.

5.4.2 Délka silnice L

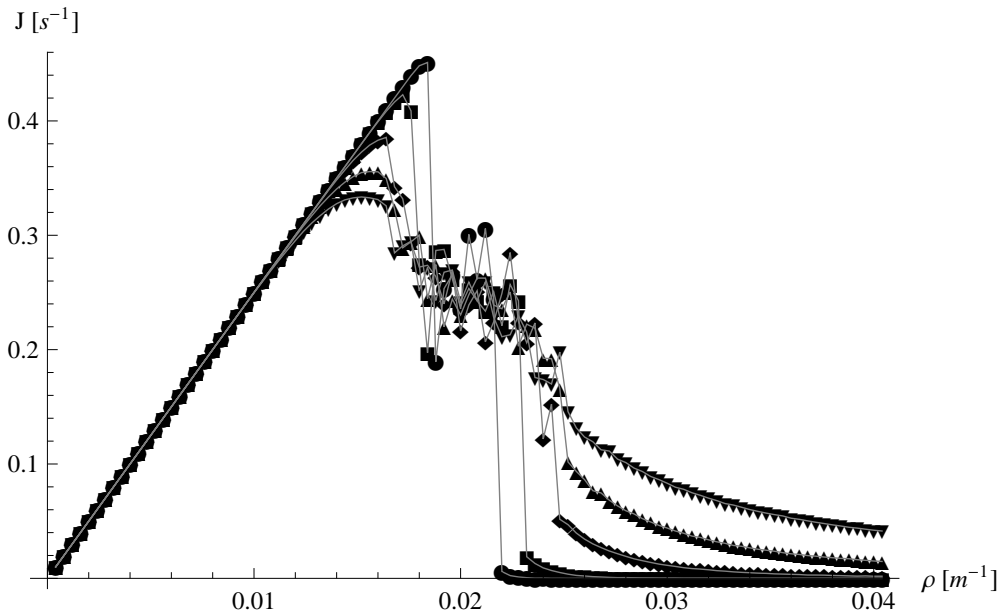
Různé délky silnice (od stovek metrů po deseti tisíce metrů) neměly absolutně žádný vliv na podobu fundamentálního diagramu.

5.4.3 Škálovací konstanta K_s

Změny fundamentálního diagramu v závislosti na změnách škálovací konstanty K_s ukazuje obrázek 29. Zjevný efekt škálovací konstanty je ten, že určuje oblast hustot, při které dochází ke vzniku zácpy. To není nic překvapivého, neboť k zácpám může docházet pouze tehdy, když se vzájemné vzdálenosti vozidel pohybují v přechodové oblasti funkce V^{des} .

Výrazná změna hodnoty toku v oblasti synchronizované dopravy je jednoduchým důsledkem toho, že v tomto režimu se auta pohybují rychlostí danou hodnotou funkce V^{des} okolo bodu střední vzdálenosti mezi vozidly.

Zde nemá smyslu hovořit o tom, jak bychom měli konstantu nastavit, aby byl pro nás průběh fundamentálního diagramu co nejvýhodnější. Škálovací konstanta je parametr modelu, který je dán chováním řidičů, nikoliv parametr, který můžeme v provozu libovolným způsobem zvolit. Stejná poznámka platí i pro translační konstantu a reakční čas.

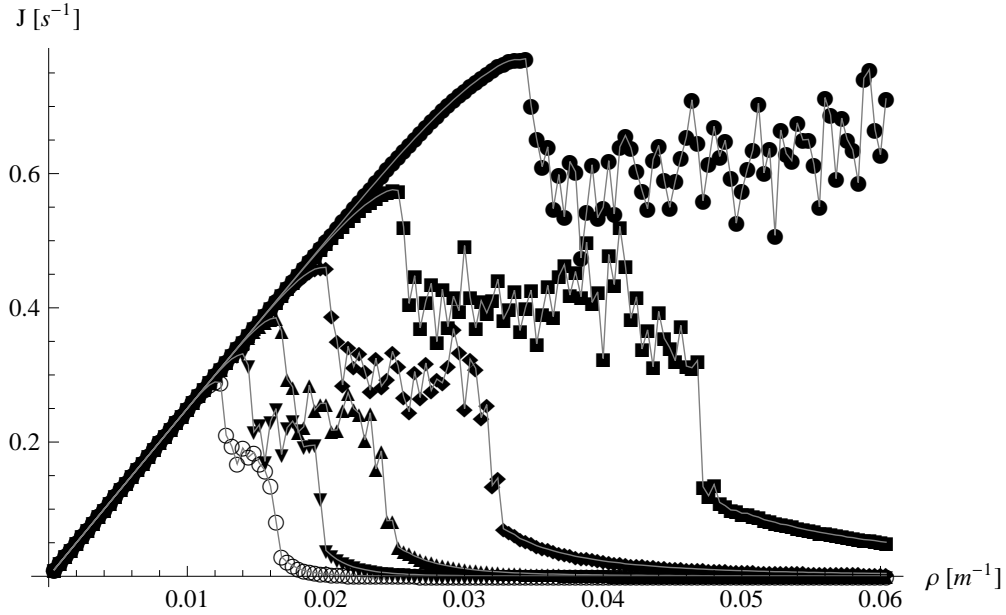


Obrázek 29: Fundamentální diagramy pro různé škálovací konstanty $K_s \in \{2 m, 4 m, 8 m, 12 m, 16 m\}$ (v oblasti volné dopravy shora dolů; v oblasti synchronní dopravy zdola nahoru).

5.4.4 Translační konstanta K_t

I translační konstanta má zásadní vliv na podobu fundamentálního diagramu, tento vliv je zobrazen na obrázku 30. V první řadě určuje, pro jakou hustotu dopravy dojde k přechodu

od volného režimu ke kongesci. Volný režim nastává pro střední vzdálenosti, při nichž $V^{des} \approx v_{max}$ – a tato oblast je přímo určena konstantou K_t .



Obrázek 30: Fundamentální diagramy pro různé translační konstanty $K_t \in \{70 m, 60 m, 50 m, 40 m, 30 m, 20 m\}$ (zleva doprava).

Stejným způsobem je určována i oblast hustot, při kterých dochází ke kongesci (a tím pádem i hustoty, v nichž je systém v synchronizovaném režimu). Velikost oblasti s režimem kongesce mění svou velikost podle nepřímé úměry hustoty na střední vzdálenosti mezi vozidly, tedy jestliže budeme uvažovat přechodovou oblast tvaru $(L + K_t, R + K_t)$ pak se dá vznik kongesce očekávat v oblasti hustot $\left(\frac{1}{R+K_t}, \frac{1}{L+K_t}\right)$.

Se zmenšováním translační konstanty ovšem dochází ke vzniku patologického chování modelu, které bude ještě diskutováno.

5.4.5 Reakční doba τ

Uvažujme nejprve, že máme řešení $x_i(t)$ rovnic modelu optimální rychlosti, tj.

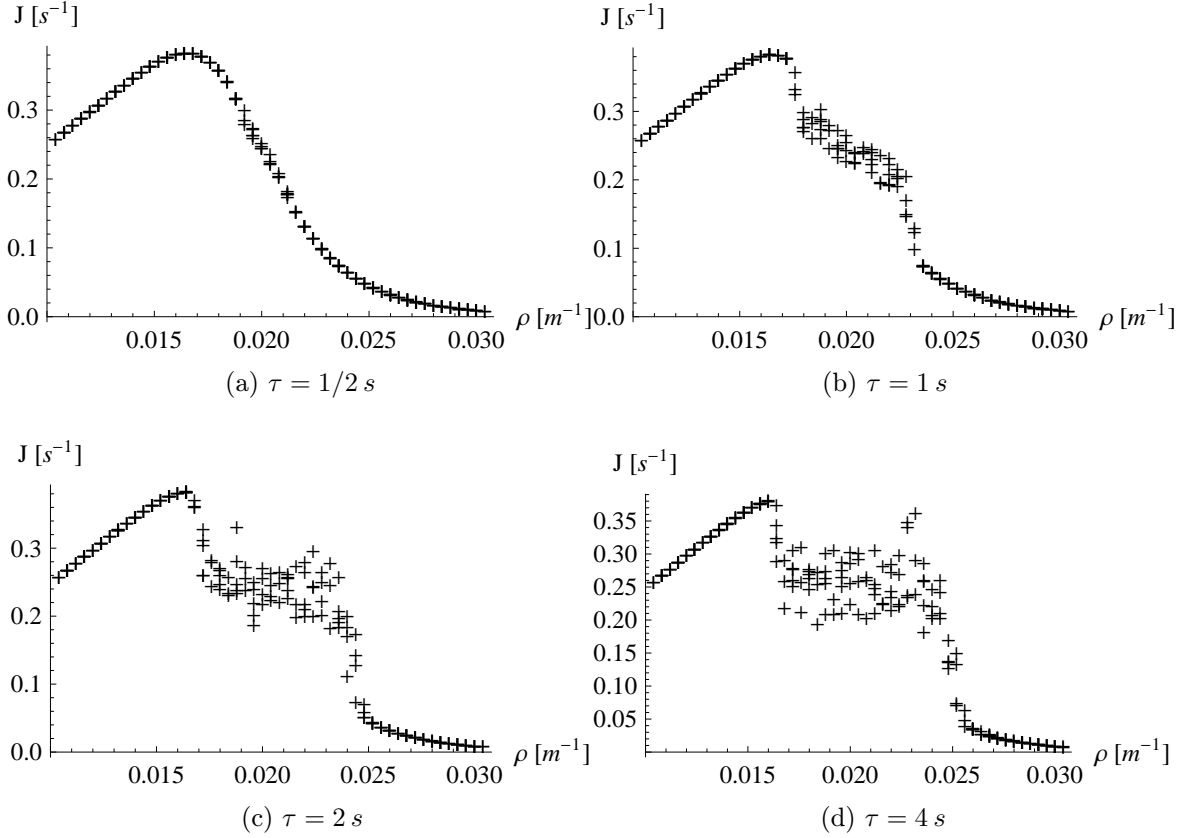
$$x_i''(t) = \frac{V^{des}(x_{i+1}(t) - x_i(t)) - x_i'(t)}{\tau}.$$

Nyní by nás zajímalo, jakou rovnici splňují funkce $y_i(t) \equiv x_i(ct)$ pro $c \in \mathbb{R}^+$. Snadno nahlédneme, že se jedná o rovnice

$$y_i''(t) = \frac{V^{des}(y_{i+1}(t) - y_i(t)) - y_i'(t)}{\frac{\tau}{c}}.$$

Tedy ty samé, kde nahradíme τ za $\tau' = \tau/c$ a V^{des} za $(V^{des})' = V^{des}/c$. V tomto smyslu se dá reakční doba τ chápat pouze jako nastavení časové škály modelu.

V našem případě ale při počítání fundamentálních diagramů pro různé reakční doby ponecháváme funkci optimální rychlosti stále stejnou. A skutečně dostáváme velmi netriviální závislost fundamentálních diagramů, jak ukazuje obrázek 31.



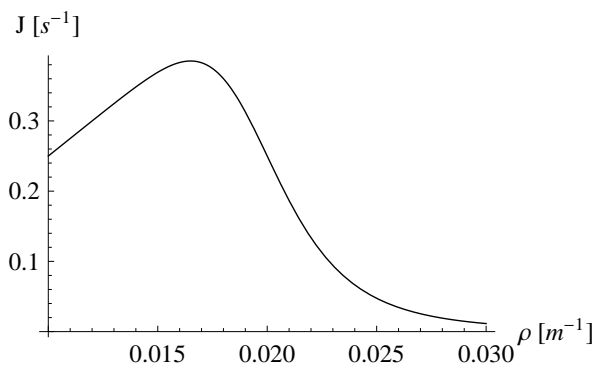
Obrázek 31: Fundamentální diagramy pro různé reakční doby τ .

Vysvětlíme podobu diagramu pro $\tau \rightarrow 0$. V takovém případě se vozidlo pohybuje vždy rychlostí udanou funkcí V_{des} . Navíc vzhledem k tomu, že funkce V_{des} je monotónně rostoucí, tak pak vozidla mají tendenci mít mezi sebou stejné rozestupy (neboť v případě, že $s_i > s_{i+1}$, tak i -té vozidlo jede rychleji než vozidlo s indexem $i + 1$ – velikost rozestupu s_i se tedy zmenšuje; v případě $s_i < s_{i+1}$ je vše naopak). Na základě těchto informací již snadno získáme funkci toku v závislosti na hustotě dopravy

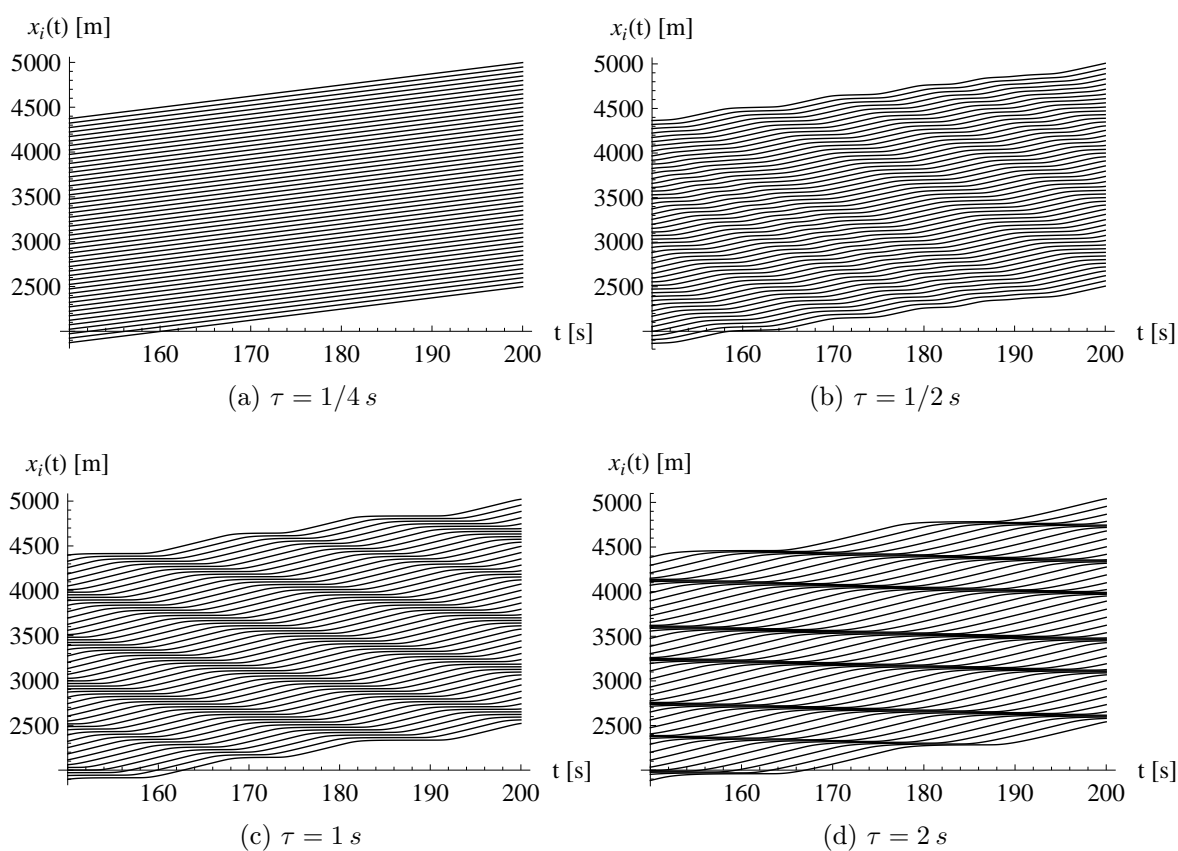
$$J(\rho) = \rho v = \rho V_{des}(s) = \rho V_{des}(1/\rho), \quad \text{neb } \rho = \frac{N}{L} \quad \text{a} \quad s = \frac{L}{N},$$

která je zobrazena na obrázku 32.

Jak se liší trajektorie vozidel pro různé hodnoty reakční doby τ je znázorněno na obrázku 33. V tomto modelu je pro vznik kongesce esenciální nepříliš rychlé dosažení optimální rychlosti – tu můžeme interpretovat jednak jako pomalou reakci řidičů anebo také jako setrvačnost vozidel bránící rychlým změnám rychlosti.



Obrázek 32: Fundamentální diagram pro " $\tau = 0$ ".



Obrázek 33: Trajektorie pro různé reakční doby τ .

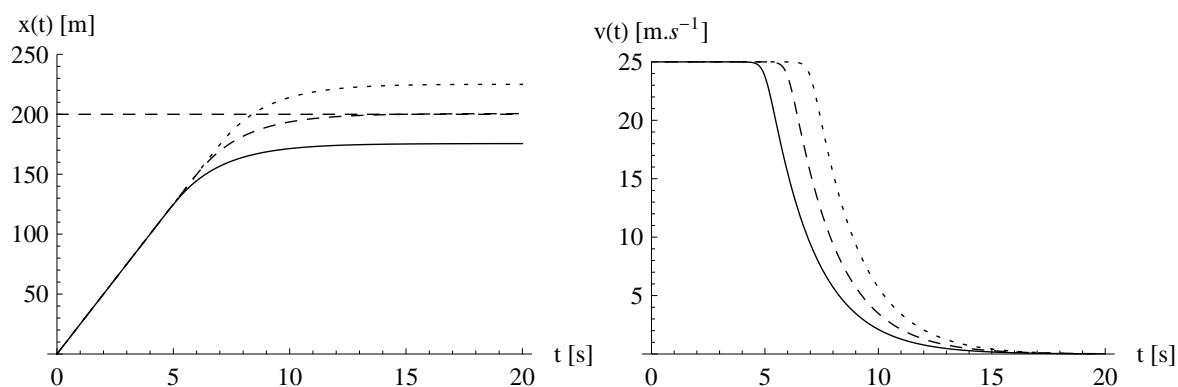
5.5 Problémy modelu

Při vysokých hustotách dopravy a nevhodném nastavení konstant τ , K_t a K_s dochází k jistému patologickému chování modelu. Vozidlo jedoucí maximální rychlostí, které se blíží k zácpě, začne snižovat svoji rychlost, ale může nastat situace, kdy "nedobrzdí" a předjede vozidlo, které bylo původně před ním. Co se v takovém případě děje matematicky? V

zásadě nic tak hrozného. Pokud nastane situace, kdy $x_i(t) > x_{i+1}(t)$ (tzn. $s_i(t) < 0$), je pohyb vozidla řízen funkcí $V_{des}(s)$ pro záporné hodnoty s . Platí

$$V_{des}(s) < 0 \quad \text{pro} \quad s < 0,$$

ale de facto pro ne zcela nevhodně zvolené konstanty platí $V_{des}(s) \approx 0$. V případě, že tedy řidič "nabourá" do vozidla před sebou, tak (v závislosti na přesné konstelaci τ , K_t a K_s) buď počká, až zase nastane situace $s > 0$, anebo dokonce zacouvá. Na obrázku 34 jsou zobrazeny průběhy uražené vzdálenosti a rychlosti pro automobily, které přijíždějí z dálky maximální rychlostí ke stojícímu vozidlu.



Obrázek 34: Graf vzdáleností a rychlostí při brzdění vozidla před pevnou překážkou pro $K_t \in \{75 \text{ m}, 50 \text{ m}, 25 \text{ m}\}$ (plný, čárkovaný, tečkovaný). Ostatní parametry jsou v nezměněné podobě. Čárkovaná linka reprezentuje vzdálenost stojícího vozidla $d = 200 \text{ m}$.

Podobné diagramy bychom mohli vygenerovat i pro různé reakční časy τ a škálovací konstanty K_s . V zásadě ale toto chování není překvapivé. Pokud reakce řidiče na blížící se překážku nebude adekvátní, tak do ní řidič prostě nabourá. Je tedy vhodné volit takovou kombinaci parametrů modelu, aby tyto situace nenastávaly.

6 Modifikovaný model optimální rychlosti

Hlavním nedostatkem modelu optimální rychlosti (pokud odhlédneme od technických nedostatků ve formě nedobrzďování vozidel) s volbou V_{des} ve tvaru

$$V_{des}(s) = \frac{v_{max}}{1 + \tanh\left(\frac{K_t}{K_s}\right)} \left(\tanh\left(\frac{s - K_t}{K_s}\right) + \tanh\left(\frac{K_t}{K_s}\right) \right)$$

je fixní nastavení bezpečné vzdálenosti pomocí konstanty K_t , které způsobuje v oblasti vyšších hustot nepřírozený synchronizovaný režim. Přírozeným zobecněním je učinit translační konstantu K_t závislou na rychlosti vozidla – simulujíc tak změnu bezpečné vzdálenosti podle aktuální rychlosti. Zvolme tedy například

$$K_t(v) = T_t v + K_t^{(0)},$$

kde $K_t^{(0)}$ představuje jakýsi minimální požadovaný rozestup vozidel a T_t škálování bezpečné vzdálenosti s rychlostí. Funkce bezpečné rychlosti se pak stane funkcí dvou proměnných s a v

$$V_{des}(s, v) = \frac{v_{max}}{1 + \tanh\left(\frac{T_t v + K_t^{(0)}}{K_s}\right)} \left(\tanh\left(\frac{s - T_t v - K_t^{(0)}}{K_s}\right) + \tanh\left(\frac{T_t v + K_t^{(0)}}{K_s}\right) \right)$$

a pohybové rovnice nabydou tvaru

$$\ddot{x}_n = \frac{V_{des}(x_{n+1} - x_n, \dot{x}_n) - \dot{x}_n}{\tau}.$$

Parametry modelu byly zvoleny: délka silnice $L = 2500 \text{ m}$, maximální rychlost $v_{max} = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, reakční doba $\tau = 2 \text{ s}$, škálovací konstanta $K_s = 4 \text{ m}$, "pravidlo dvou vteřin" $T_t = 2 \text{ s}$ a minimální rozestup $K_t^{(0)} = 10 \text{ m}$.

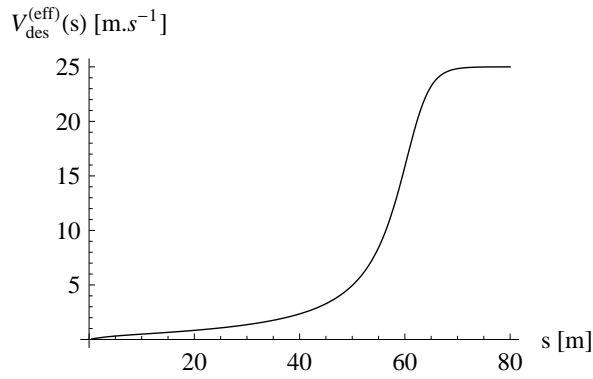
Protože je nyní průběh funkce optimální rychlosti pro obecnou situaci těžko představitelný, podívejme se alespoň, jak vypadá, pokud auto brzdí před nehybnou překážkou. Získáme tedy řešení pohybové rovnice

$$\ddot{x} = \frac{V_{des}(L - x, \dot{x}) - \dot{x}}{\tau}$$

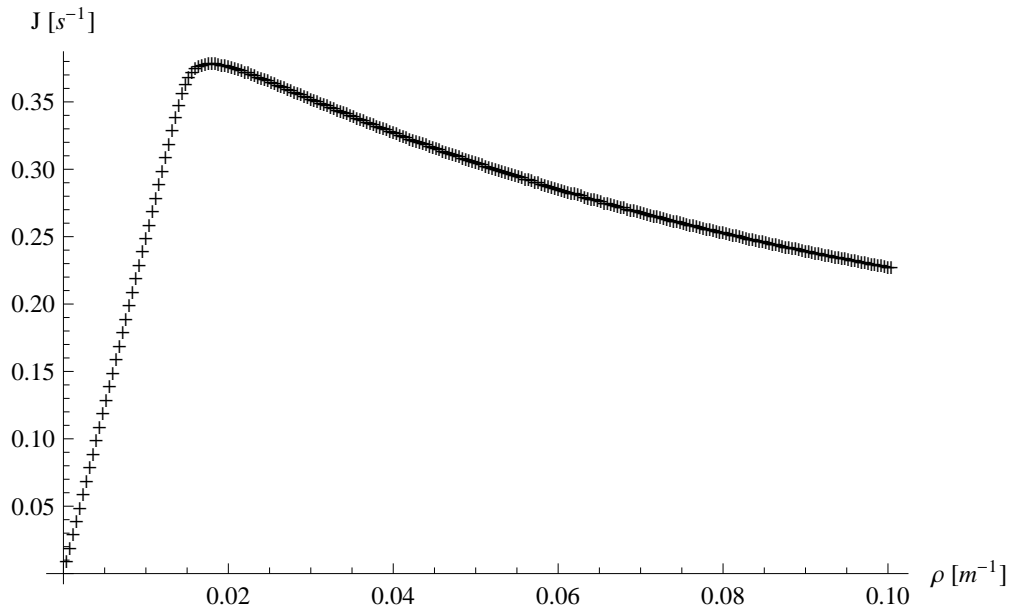
a poté vykreslíme parametricky definovanou křivku (pro dostatečně velké T)

$$\Gamma = \{(L - x(t), V_{des}(L - x(t), \dot{x}(t))) \mid t \in \langle 0, T \rangle\}.$$

Získáme tak jakousi efektivní funkci bezpečné rychlosti při brzdění $V_{des}^{(eff)}$, která je znázorněna na obrázku 35.



Obrázek 35: Efektivní průběh funkce bezpečné rychlosti.



Obrázek 36: Fundamentální diagram modifikovaného modelu optimální rychlosti.

6.1 Fundamentální diagram

Při prvním pohledu na fundamentální diagram na obrázku 36 bychom mohli říct, že se nám podařilo problém se synchronizovanou dopravou odstranit. Pro nízké hustoty je zjevná existence volné dopravy, pak dojde k nasycení a přechodu do režimu kongesce, kdy se se zvyšující hustotou dopravy dochází k pozvolnému zmenšování toku.

Bohužel není všechno zlato, co se třpytí. Pokud se podíváme na trajektorie vozidel pro jednotlivé hustoty, zjistíme, že z volného režimu model přechází rovnou do režimu synchronizované dopravy. Nedochozí tedy vůbec k tvorbám zácpy! Chování modelu se tedy značně zjednodušilo. Zkusme odvodit tvar fundamentálního diagramu, tzn. tvar funkce $J(\rho)$.

V synchronizovaném režimu jsou vozidla rovnoměrně rozložena se vzájemnou vzdáleností $s = 1/\rho$. Funkce bezpečné rychlosti se tedy efektivně stává funkcí pouze jedné proměnné,

a to rychlosti. Pro ustálený stav musí být zrychlení všech vozidel nulové a z pohybových rovnic tedy dostáváme podmínku pro rychlost při dané hustotě v_ρ

$$V_{des}(1/\rho, v_\rho) = v_\rho. \quad (10)$$

V případě, že bude platit

$$\left. \frac{\partial V_{des}(s, v)}{\partial v} \right|_{s=1/\rho} < 1 \quad \forall v \in \langle 0, v_{max} \rangle$$

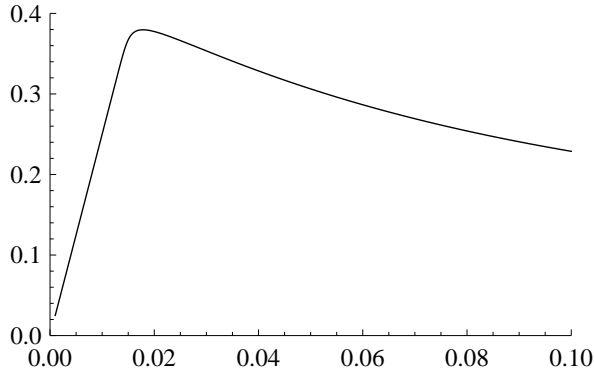
(pro $\rho \in (0, \infty)$), pak jistě bude mít rovnice (10) právě jedno řešení. Podívejme se tedy na derivaci funkce V_{des} ; po úpravě vypadá následujícím způsobem

$$\frac{\partial V_{des}(s, v)}{\partial v} = -\frac{T_t v_{max}}{K_s} \cdot e^{-\frac{s}{K_s}} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{s}{K_s}\right)}{\cosh^2\left(\frac{s - T_t v - K_t^{(0)}}{K_s}\right)},$$

což je pro $s > 0$ nepochybně záporné číslo, takže naše podmínka jednoznačnosti řešení je splněna. Fundamentální diagram je pak tvaru

$$\Gamma_{fund} = \{(\rho, \rho v_\rho) \mid \rho \in (0, \infty)\},$$

kde v_ρ je řešením rovnice (10). Výsledkem je pak skutečně diagram zcela odpovídající tomu nasimulovanému, jak je možno se přesvědčit na obrázku 37.



Obrázek 37: Fundamentální diagram Γ_{fund} získaný řešením rovnice (10).

Přestože výpočet striktně vzato není v oblasti režimu volné dopravy korektní, neboť vozidla nemusí být rovnoměrně rozprostřena na vozovce, tak se to na výsledku neprojeví, neb pro velká s (a tedy malá ρ) je řešení rovnice (10) téměř konstantní a téměř rovno v_{max} .

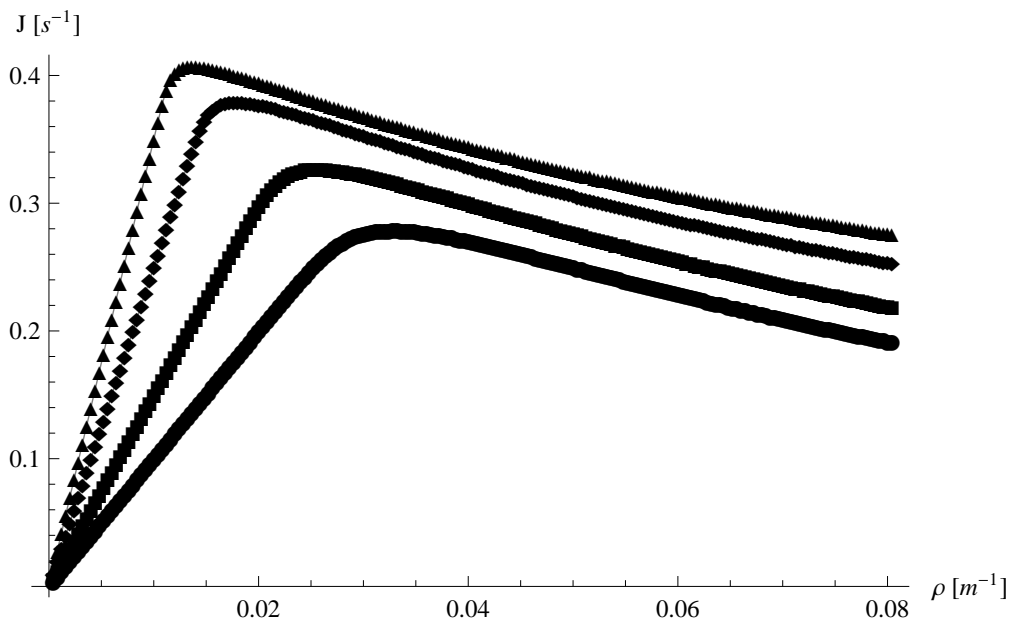
Histogramová ani shluková analýza nemá valného smyslu, výsledky budou přesně odpovídat volnému resp. synchronizovanému režimu u nemodifikovaného modelu.

Pro zajímavost se ale podívejme na vliv změny některých parametrů na podobu fundamentálního diagramu.

6.2 Vliv vybraných parametrů na fundamentální diagram

6.2.1 Maximální rychlost v_{max}

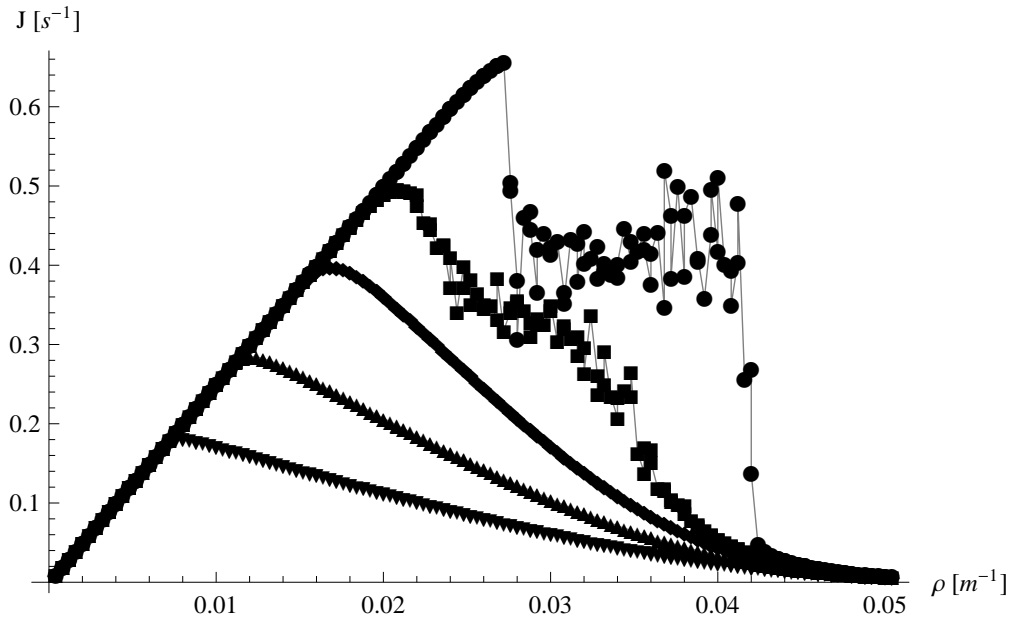
Vliv změny maximální rychlosti je k vidění na obrázku 38. Pro volnou dopravu opět dochází k pochopitelnému lineární škálování hodnot toku. Zároveň se zvyšováním maximální rychlosti dochází k posouvání bodu přechodu do synchronizované dopravy do oblasti nižších hustot, které je způsobené zvětšující se vyžadovanou bezpečnou vzdáleností. Stále tu ovšem zůstává pravidlo, že chceme-li maximalizovat tok, je nejhodnější volit co největší maximální rychlost – pokles toku v důsledku přechodu do synchronizovaného režimu je menší než pokles toku kvůli snížení maximální rychlosti.



Obrázek 38: Fundamentální diagramy pro různé maximální rychlosti $v_{max} \in \{35, 25, 15, 10\} m.s^{-1}$ (shora dolů).

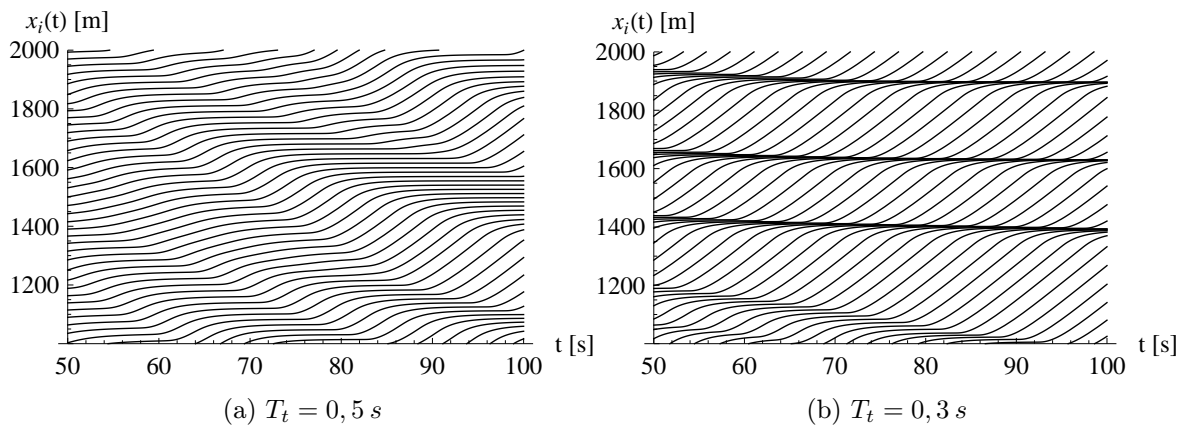
6.2.2 Konstanty T_t a $K_t^{(0)}$

Ukazuje se, že ona změna bezpečné vzdálenost v závislosti na aktuální rychlosti (reprezentovaná konstantou T_t) má zásadní vliv na existenci režimu kongesce. Pro $T_t = 0 s$ dostáváme nemodifikovaný model optimální rychlosti. Pro nenulové zvětšující se T_t režim kongesce velmi rychle vymizí, viz obrázek 39. Dalším zřejmým efektem je posouvání bodu přechodu od volné k synchronizované dopravě – konstanta T_t přímo nastavuje bezpečnou vzdálenost při maximální rychlosti, a tedy určuje, kolik vozidel jedoucích maximální rychlostí se na vozovku vejde. Důležité je si uvědomit, že pokud máme takovou hodnotu T_t , že se již neobjevuje režim kongesce, tak se fundamentální diagram přímo odvíjí od tvaru funkce optimální rychlosti (skrže řešení rovnice (10) a vztah $J(\rho) = \rho v_\rho$).



Obrázek 39: Fundamentální diagramy pro různé hodnoty $T_t \in \{0; 0,5; 1; 2; 4\}$ s (shora dolů) s hodnotou konstanty $K_t^{(0)} = 30$ m.

Podívejme se pro zajímavost na ukázky trajektorií pro různé hodnoty T_t na obrázku 40. Ono škálování bezpečné vzdálenosti skrze rychlost zabraňuje shlukování vozidel. Má tedy podobný vliv jako reakční doba τ u nemodifikovaného modelu. V případě modifikovaného modelu naopak změna hodnoty τ nemá žádný vliv na chování modelu (samozřejmě jen při dostatečně velkém T_t).



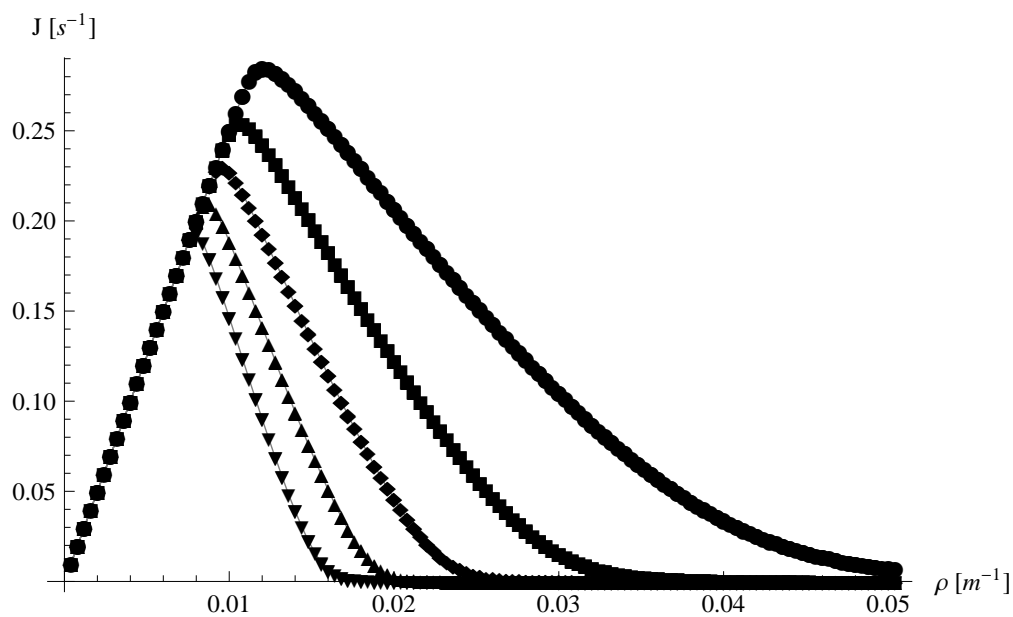
Obrázek 40: Trajektorie pro různé hodnoty konstanty T_t .

A na závěr se ještě podívejme na vliv změny minimální bezpečné vzdálenosti $K_t^{(0)}$, viz obrázek 41. Poloha hustoty přechodu do synchronizovaného režimu je ovlivňována ze

zcela stejného důvodu jako u konstanty T_t ; je prostě dána hodnotou

$$K_t(v_{max}) = T_t v_{max} + K_t^{(0)} \quad \text{a tedy} \quad \rho_{prechod} = \frac{1}{K_t(v_{max})}.$$

Pokles hodnoty toku se zvětšujícím se $K_t^{(0)}$ je jednoduše způsoben odsouváním oblasti přechodu ve funkci optimální rychlosti. Tento efekt je stejný jako u nemodifikovaného modelu.



Obrázek 41: Fundamentální diagramy pro různé hodnoty $K_t^{(0)} \in \{30, 40, 50, 60, 70\} m$ (shora dolů).

7 Tekutinový model

Jak už víme, u tekutinových modelů je základní rovnicí rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Pravá strana je nulová v případě, že neuvažujeme žádné přítoky a odtoky dopravy. Pokud použijeme vztahu $J(x, t) = \rho(x, t)v(x, t)$ dostaneme rovnici

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Máme tedy jednu rovnici pro dvě neznámé funkce, potřebujeme tedy dodat ještě jednu dodatečnou podmínku. V tom nejjednodušším případě se předpokládá, že tok dopravy v daném místě je přímo závislý na hustotě dopravy [10], tedy

$$J(x, t) = j(\rho(x, t)). \quad (12)$$

Po dosazení do rovnice kontinuity dostaneme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dj}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Po konkrétní volbě funkce j již máme vše, co potřebujeme pro řešení. Předpoklad (12) ovšem nahradíme o něco složitějším a to sice

$$J(\rho) = j(\rho) - D \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

kde D je nezáporná tzv. difuzní konstanta. V tomto vztahu je rychlost zmenšována, pokud dochází ke zhušťování dopravy a naopak. Rovnice kontinuity pak dostane následující tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dj}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

Modely tohoto typu se nazývají kinematické. V těchto modelech se ze stavu relativně uniformní hustoty spontánně nevyvine zácpa ([7],[11]). Tento poměrně výrazný nedostatek odstraňuje tzv. dynamický tekutinový model. Pro kinematický model platí, že pokud známe hodnoty toku v daném místě (případně v bezprostředním okolí pro výpočet derivací), tak toto zároveň jednoznačně určuje hodnotu rychlosti v daném místě ze vztahu (7). Dynamický model naproti tomu říká, že rychlost v daném místě by se měla plynule přiblížit jakési bezpečné rychlosti, která je funkcí hustoty dopravy – $v_{safe}(c)$. To je zajištěno následující rovnicí, podobnou Navier-Stokesově rovnici v hydrodynamice,

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\rho}{t_d} (v_{safe}(\rho) - v) - D \frac{\partial \rho}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (13)$$

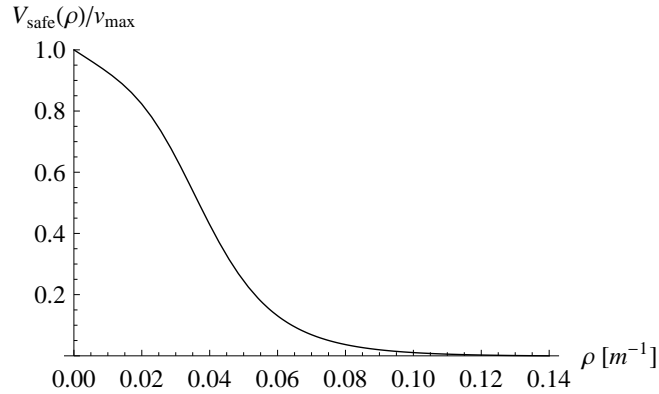
V rovnici (13) vystupuje již zmíněná funkce bezpečné rychlosti v_{safe} , tzv. relaxační čas t_d , difuzní konstanta D a v nově zavedeném členu představující jakousi viskozitu dopravu máme konstantu μ .

7.1 Počáteční podmínky, parametry modelu

Parametry modelu jsou v zásadě fenomenologické, konkrétní volba je převzata z článku [12]. Funkce bezpečné rychlosti je volena následujícím způsobem

$$V_{safe}(\rho) = v_{max} \frac{1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}}{1 + E \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} \right)^\theta}.$$

s hodnotami maximální rychlosti $v_{max} = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, maximální hustoty $\rho_{max} = 0,14 \text{ m}^{-1}$ a číselnými konstantami $E = 100$ a $\theta = 4$.



Obrázek 42: Průběh funkce bezpečné rychlosti $V_{safe}(\rho)$ tekutinového modelu.

Zbylé parametry mají hodnoty $t_d = 30 \text{ s}$, $\mu = 170 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $D = 225 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$.

V článku [12] je modelována doprava s nájezdovou a výjezdovou rampou, což vede k přidání členů na pravou stranu rovnice kontinuity (11). V našem případě kruhové silnice se ovšem ukázalo, že model nevykazuje žádné zajímavé chování. Pro libovolné počáteční podmínky se vždy po čase hustota dopravy ustálila na nějaké uniformní hodnotě $\rho(x, t > t_0) = \rho_0$ a k ní příslušné rychlosti $v(x, t > t_0) = V_{safe}(\rho_0)$.

Pro některé hodnoty parametrů naopak model vykazoval numerickou nestabilitu nebo vznik nediferencovatelných singularit. Z těchto důvodů nebudeme zkoumat vliv změn parametrů na chování modelu. Po jistém experimentování se podařilo stanovit hodnoty parametrů, pro které model prozkoumáme. Jsou to $t_d = 10 \text{ s}$, $D = 25 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ a $\mu = 50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (funkce bezpečné rychlosti a její parametry byly ponechány beze změny).

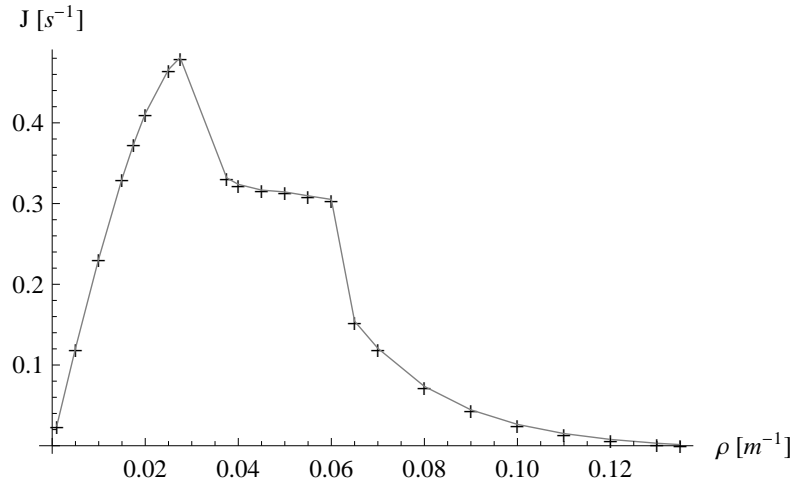
Počáteční podmínky byly voleny ve tvaru

$$\rho(x, 0) = \rho_0 \in \langle 0, \rho_{max} \rangle, \quad \text{a} \quad v(x, 0) = \frac{v_{max}}{2} + \sin\left(\frac{2\pi}{L}5x\right)$$

reprezentující rovnoměrně rozprostřená vozidla s periodickými rychlostními odchylkami.

7.2 Globální fundamentální diagram

Na obrázku 43 je zobrazen globální fundamentální diagram tekutinového modelu pro hustoty $\rho \in \langle 0, \rho_{max} \rangle$. Řešení byla získána v programu Mathematica 8 metodou NDSolve. Na diagramu jasně rozeznáváme volný režim, režim kongesce a synchronizovaný režim.

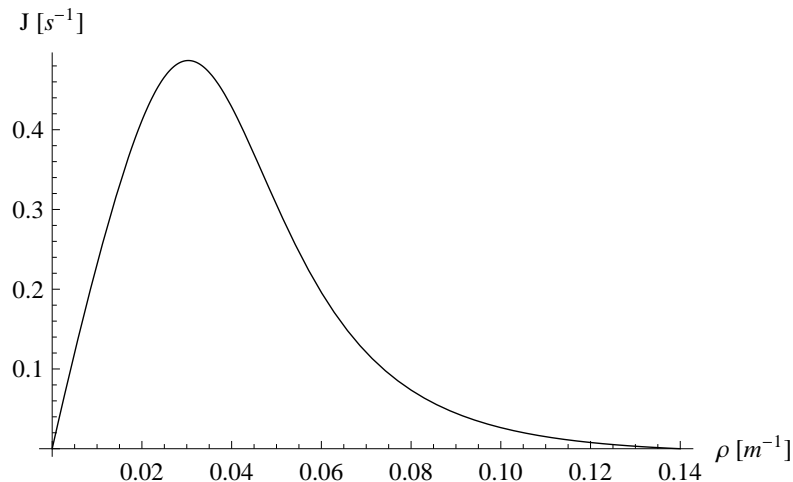


Obrázek 43: Fundamentální diagram tekutinového modelu.

Pokud bychom předpokládali, že se systém vždy ustálí do stavu, kdy funkce hustoty i rychlosti je konstantní tak, že

$$\rho(x, t > t_0) = \rho_0 \quad \text{a} \quad v(x, t > t_0) = V_{safe}(\rho_0),$$

pak dostaneme predikci fundamentálního diagramu znázorněnou na obrázku 44, která v oblasti volné a synchronizované dopravy věrně kopíruje numericky získaný výsledek, neboť v těchto režimech se systém skutečně nachází v předpokládaném stavu. Naopak režim kongesce se vyznačuje téměř konstantní velikostí toku.



Obrázek 44: Teoretická predikce fundamentálního diagramu.

7.3 Jednotlivé dopravní režimy

7.3.1 Volný režim

Jak už bylo řečeno v kapitole o globálním fundamentálním diagramu, ve volném režimu se systém ustálí ve stavu, kdy funkce hustoty i rychlosti jsou konstantní a rychlost je přímo dána funkcí bezpečné rychlosti, tedy

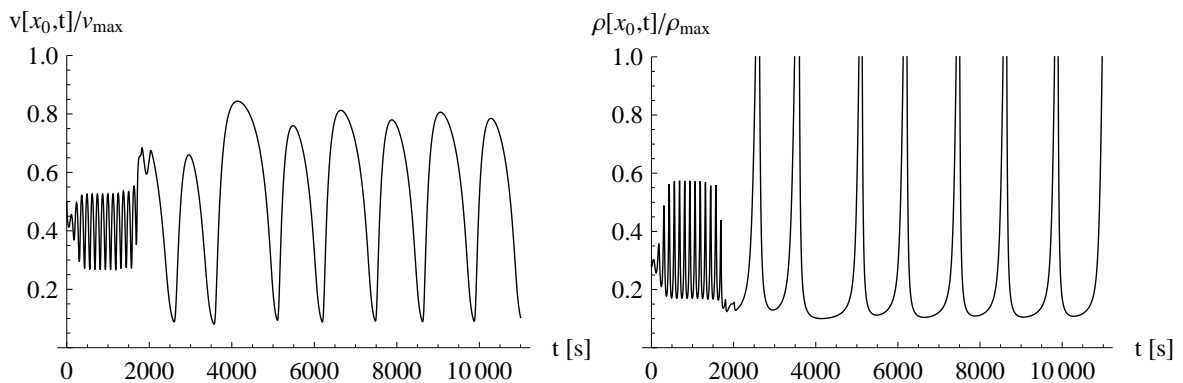
$$\rho(x, t > t_0) \equiv \rho_0, \quad v(x, t > t_0) = V_{safe}(\rho_0),$$

kde ρ_0 je hustota z počátečních podmínek (díky rovnici kontinuity). Fundamentální diagramy ať už časového nebo prostorového charakteru pak budou triviálně obsahovat jediný bod $(\rho_0, \rho_0 V_{safe}(\rho_0))$.

7.3.2 Kongesce

V porovnání s volným nebo synchronizovaným režimem, kdy vlastně není co studovat, se v režimu kongesce děje mnoho zajímavého. Podrobně se na situaci v systému podíváme pro počáteční hustotu $\rho_0 = 0,04 m^{-1}$.

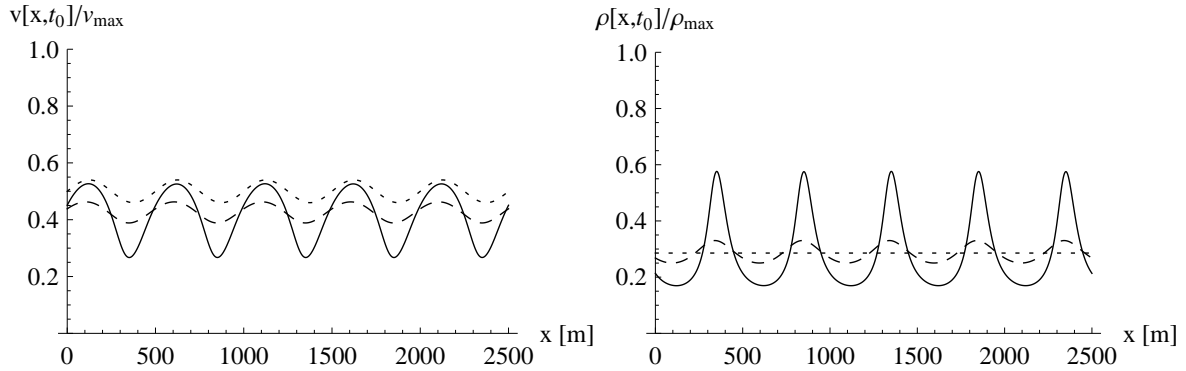
První náhled nám dá obrázek 45 znázorňující průběhy funkcí rychlosti a hustoty časového charakteru - tyto dva grafy budeme nazývat **řezem systému** (ať už časového nebo prostorového charakteru). Systém se po spuštění simulace relativně rychle (v porovnání s celkovou délkou simulace; zde řádově stovky vteřin) dostane do jakéhosi kvaziperiodického stavu. Pak ale v čase přibližně $t \approx 1800$ dojde k překlopení do jiného stavu, který se postupně (během asi 3000 sekund) ustálí na pomalých oscilacích s periodou okolo 2500 sekund.



Obrázek 45: Průběhy rychlosti a hustoty časového charakteru pro $\rho_0 = 0,04 m^{-1}$; bod na vozovce zvolen $x_0 = 0 m$.

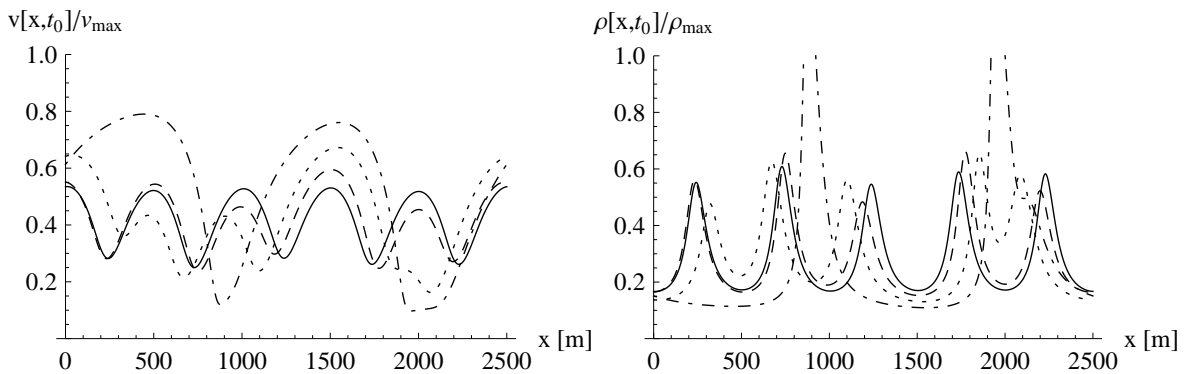
Co je příčinou přechodného stavu před překlopením do stabilních oscilací? Alespoň částečnou odpověď nám dá prozkoumání systému v prostorových řezech v konkrétním

čase, část z nich je znázorněna na obrázku 46. V první fázi dochází ke globální korekci rychlosti, protože počáteční podmínky nebyly zvoleny tak, aby platilo $v_{max}/2 = V_{safe}(\rho_0)$. Poté dochází ke zvětšování amplitud oscilací, dokud se neustaví onen kvaziperiodický režim. Stav systému do překlpení je tedy indukován počátečními podmínkami.

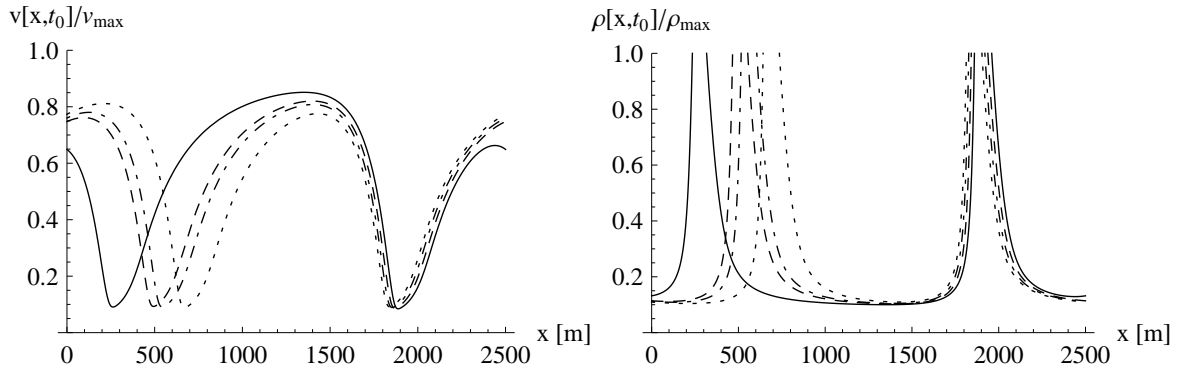


Obrázek 46: Průběhy rychlosti a hustoty prostorového charakteru pro $\rho_0 = 0,04 m^{-1}$. Jednotlivé křivky pro $t_0 \in \{0, 135, 1025\} s$ (tečkovaně, čárkovaně, plně). Takto speciální časy byly zvoleny pro přehlednost z důvodu stejné fáze křivek, v průběhu času se kromě vývoje tvaru průběhy rychlosti fázově posouvají.

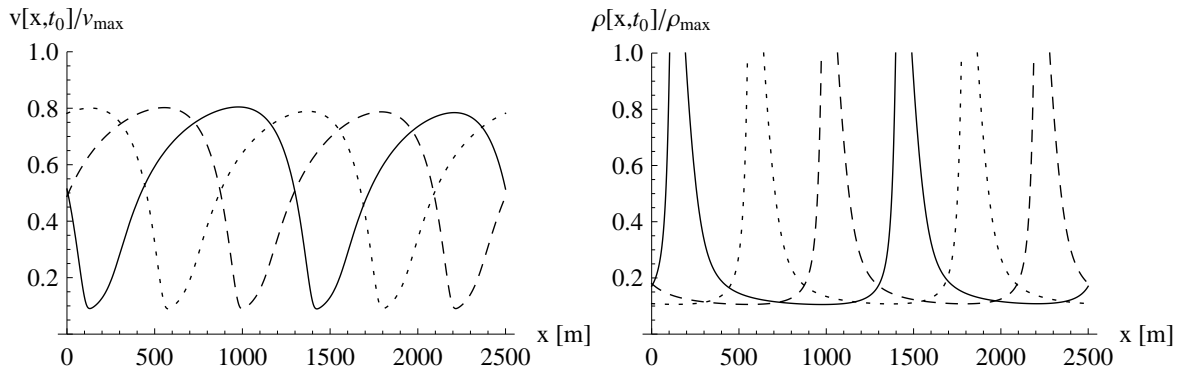
Na obrázku 47 jsou zakresleny prostorové řezy systému v časech, kdy dochází ke změně stavu. Obrázek 48 zachycuje postupné ustalování systému po radikální změně stavu, až konečně na obrázku 49 je znázorněna ustálená propagace dvou kongescí směrem vzad.



Obrázek 47: Průběhy rychlosti a hustoty prostorového charakteru pro $\rho_0 = 0,04 m^{-1}$. Jednotlivé křivky pro $t_0 \in \{1500, 1625, 1740, 1970\} s$ (plně, čárkovaně, tečkovaně, čerchovaně). Volba speciálních časů stejně jako u obrázku 46.



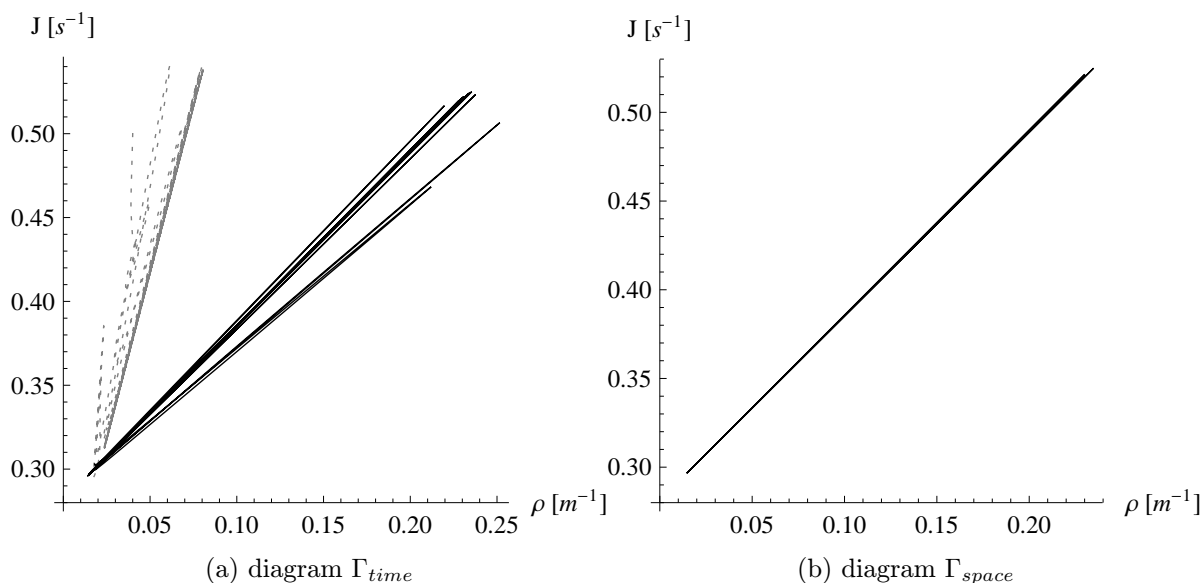
Obrázek 48: Průběhy rychlosti a hustoty prostorového charakteru pro $\rho_0 = 0,04 m^{-1}$. Jednotlivé křivky pro $t_0 \in \{2900, 5570, 6850, 8000\} s$ (plně, čárkovaně, tečkovaně, čerchovaně). Volba speciálních časů stejně jako u obrázku 46.



Obrázek 49: Průběhy rychlosti a hustoty prostorového charakteru pro $\rho_0 = 0,04 m^{-1}$. Jednotlivé křivky pro $t_0 \in \{10000, 12000, 14000\} s$ (plně, čárkovaně, tečkovaně).

Alternativní metodou zkoumání vývoje stavu tekutinového modelu představují lokální fundamentální diagramy, příkladem je obrázek 50. Fundamentální diagram časového charakteru představuje analog časového řezu, respektive fundamentální diagram prostorového charakteru je analogem prostorového řezu systémem. Jedná se vlastně o ta samá lokální data, jen prezentovaná jiným způsobem. Jak vidno, i na fundamentálních diagramech lze pozorovat vývoj systému, pro základní přehled jsou však řezy systémem přehlednější. Naopak pro zjišťování periodicity vývoje systému je fundamentální diagram vhodnější. Stačí pouze sledovat, zda křivka $(J(t), \rho(t))$ opisuje stále stejnou stopu.

V oblasti hustot, ve které nedojde k vyhlazení fluktuací rychlosti dané počátečními podmínkami, pozorujeme velmi netriviální chování systému. Kvaziperiodický režim indukovaný počátečními podmínkami však není stabilní a po určitém čase dojde k překlopení do jiného stavu. Pro počáteční hustotu ρ_0 bylo toto překlopení pouze jedno, to však obecně není pravidlem.



Obrázek 50: Lokální fundamentální diagram časového a prostorového charakteru pro $\rho_0 = 0,04 \text{ m}^{-1}$. Diagram Γ_{time} zobrazen pro $x_0 = 0 \text{ m}$ a $t \in \langle 0, 15000 \rangle \text{ s}$, tečkovaně je zobrazen časový úsek $t \in \langle 0, 2050 \rangle \text{ s}$. Diagram Γ_{space} vykreslen pro čas $t_0 = 10000 \text{ s}$.

Na řezech prostorového charakteru si můžeme všimnout dalšího problému tohoto modelu. Hustota v některých místech vozovky přesahuje hustotu maximální ρ_{max} . Toto je velmi podobný problém, jaký bylo možno pozorovat u modelu optimální rychlosti, kde mohlo docházet ke vzájemnému předjetí vozidel, což způsobilo nepatrné couvání v souladu s průběhem funkce optimální rychlosti. Průběh funkce bezpečné rychlosti $V_{safe}(\rho)$ tekutinového modelu je analogický - pro $\rho > \rho_{max}$ nabývá funkce V_{safe} záporných hodnot. Z matematického hlediska se ovšem opět neděje nic závadného. Řešením by bylo zvětšit hodnoty difuzní konstanty D a viskozity μ , ale ne natolik, abychom zcela potlačili režim kongesce.

7.3.3 Synchronizovaný režim

V tomto režimu je situace identická jako u režimu volného, samozřejmě až na mnohem nižší hodnotu rychlosti (toku) způsobenou mnohem vyšší hustotou dopravy.

8 Reálná data

Pro měření dat v reálných dopravních situacích se používají magnetické indukční smyčky umístěné ve vozovce. Tato zařízení detekují jednotlivá projíždějící vozidla a zaznamenávají hlavně následující tři parametry: čas průjezdu, rychlost vozidla a jeho délku. Označme u i -tého vozidla projetého detektorem od začátku měření jednotlivé parametry jako t_i (čas), v_i (rychlost) a d_i (délka vozidla). Z těchto údajů nyní chceme zkonstruovat dopravní charakteristiky jako jsou fundamentální diagram, histogramy vzdáleností a rychlostí a také grafy shlukové analýzy. Problémem je, že měření v určitém místě vozovky poskytuje pouze čistě lokální data, kdežto v matematických modelech jsme se mohli podívat na systém jako celek. U tekutinových modelů jsme samozřejmě měli k dispozici i lokální veličiny, ale ty vznikly jednoduše idealizací, kdy se na systém díváme z velké dálky, a tedy de facto v sobě také již obsahují jisté průměrování přes určitou oblast vozovky. Podívejme se tedy postupně na získávání jednotlivých charakteristik z reálných dat.

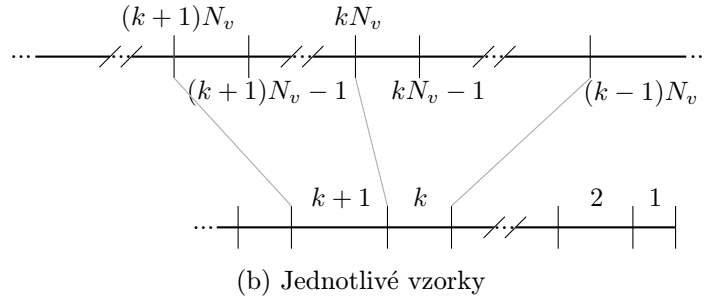
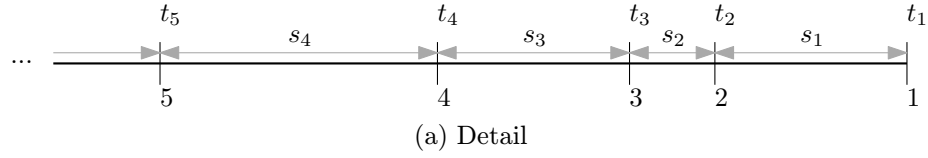
Předem si zvolíme počet vozidel N_v - velikost našeho dopravního vzorku, ze kterého budeme jednotlivé veličiny počítat. Veličinou relativně bezproblémovou je **dopravní tok**. Definice je analogem definice toku $J_{(t_s, t_e)}(x)$ z kapitoly 3.4, pouze místo zvolení fixního časového intervalu a počítání počtu vozidel, volíme naopak fixně počet vozidel N_v a měříme čas, za který projedou, tzn.

$$J^{(k)} = \frac{N_v}{t_{N_v k+1} - t_{N_v (k-1)+1}},$$

kde horní index označuje k -tý dopravní vzorek, ze kterého tok počítáme. Pokud bychom se striktně drželi slovní definice "čas, za který projede N_v vozidel", pak bychom správně měli brát koncový čas $t_{N_v k}$. Definice s časem $t_{N_v k+1}$ však dává lepší smysl, čas $t_{N_v k+1} - t_{N_v (k-1)+1}$ pak udává časový interval, který "zabírá" N_v po sobě jedoucích vozidel. Tato drobná nuance vynikne zvláště pro demonstrativně nízko volené hodnoty počtu vozidel ve vzorku, $N_v = 1$ anebo $N_v = 2$.

Další veličina, která se snadno definuje, je **rozdělení rychlostí**. Z naměřených dat máme přímo množinu $\{v_i \mid i \in N\}$, kde N označuje celkový počet projetých vozidel. Z této množiny již snadno vypočítáme, co potřebujeme, jen je třeba mít na paměti, že se nejedná o rozdělení v jednom čase, tak jako tomu bylo v případě numerických modelů. A ani u těchto modelů tomu tak nebylo doslova. Pro nízký počet vozidel v systému bylo nutno spouštět simulace opakovaně (u modelu optimální rychlosti) anebo brát vzorky rychlostí několikrát v po sobě následujících časových okamžicích (u Nagel-Schreckenbergova modelu).

První problémy nastávají u **rozdělení vzdáleností**. Údaje, které jsou poskytovány detektory, žádné informace o vzdálenostech mezi vozidly neobsahují. Budeme tedy předpokládat, že vozidlo po projetí detektorem nemění svoji rychlost alespoň do doby, než



Obrázek 51: Rekonstrukce situace na vozovce pomocí naměřených dat.

detektor zaznamená další vozidlo. Toto je samozřejmě předpoklad, který zdaleka nemusí být pravdivý, ale vzhledem k tomu, že nemáme žádné informace o zrychlení vozidla, tak je to nejpřirozenější volba. Pak jednotlivé vzdálenosti spočteme jako

$$s_i = v_i(t_{i+1} - t_i).$$

Navíc v případě, že $v_{i+1} \neq v_i$, tak víme, že vypočtená vzdálenost s_i se bude s časem měnit. Tuto změnu zanedbáváme, budujeme jakýsi statický obraz situace na vozovce v okamžicích, ve kterých vozidla projíždějí detektorem. Tato vypočtená hodnota představuje vzdálenost mezi předními nárazníky vozidla. Pro výpočet rozestupů mezi auty je třeba odečíst jejich délku

$$r_i = s_i - d_i.$$

A na konec jsme si nechali definici **hustoty dopravy**. Pokud budeme následovat myšlenku z kapitoly 3.4, tedy že hustota je počet vozidel na jednotkovou délku určitého úseku vozovky a jako počet vozidel zvolíme velikost vzorku N_v , pak se musíme ptát, co v tomto případě bude ona délka úseku? Přirozeně se nabízí použít vzdálenosti definované v předchozím odstavci takto

$$L^{(k)} = \sum_{m=1}^{N_v} s_{(k-1)N_v+m}$$

a hustota v k -tém úseku pak budiž

$$\rho^{(k)} = \frac{N_v}{L^{(k)}}.$$

Zde budeme používat výše uvedenou definici hustoty dopravy. Alternativní možnosti [13] spočívají ve spočtení aritmetického, resp. geometrického, průměru rychlostí

$$\bar{v}^{(k)} = \frac{1}{N_v} \sum_{m=1}^{N_v} v_{(k-1)N_v+m}, \quad \frac{1}{\bar{w}^{(k)}} = \frac{1}{N_v} \sum_{m=1}^{N_v} \frac{1}{v_{(k-1)N_v+m}},$$

a poté vyjádření hustoty pomocí vztahu $J = \rho v$, tedy

$$\rho_{aritm}^{(k)} = \frac{J^{(k)}}{\bar{v}^{(k)}}, \quad \rho_{geom}^{(k)} = \frac{J^{(k)}}{\bar{w}^{(k)}}.$$

Fundamentální diagram pak budou tvořit jednotlivé body $(\rho^{(k)}, J^{(k)})$ reprezentující stav vozidel v daném vzorku.

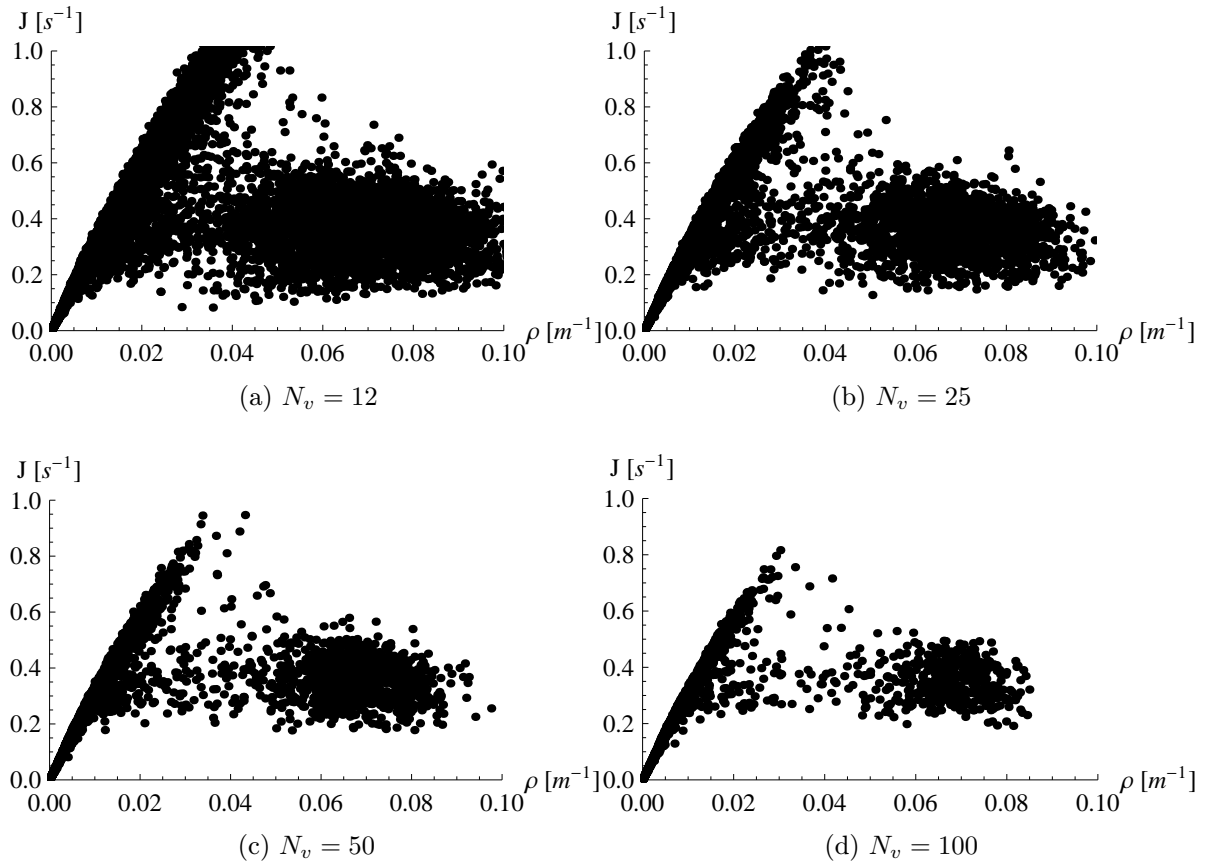
Ještě poznámka ohledně rozdělení rychlostí a vzdáleností. U matematických modelů dopravy jsme viděli, že rozdělení těchto dvou veličin velmi výrazně záviselo na hustotě dopravy. Proto je vhodné i u těchto rozdělení využít vzorky vozidel o velikosti N_v , vypočítat hustotu dopravy a pouze v tom případě, že tato hustota bude v určitém zvoleném rozmezí $\langle \rho - \delta, \rho + \delta \rangle$, vzít jednotlivé vzdálenosti, resp. rychlosti, jako vstupní data pro tvorbu histogramu. Alternativou k rozmezí hustot je brát v potaz pouze takové vzorky, u nichž bod fundamentálního diagramu $(\rho^{(k)}, J^{(k)})$ leží v určité zvolené oblasti.

Shlukovou analýzu také významně ovlivňuje hustota dopravy. Postup výpočtu tedy bude podobný jako u histogramů rychlostí a vzdáleností. Nechť $n \in \mathbb{N}$ označuje počet naměřených vzorků o velikosti N_v , máme tedy celkem $N = N_v n$ vozidel. A budiž $N_\rho^{(\delta)}$ počet vzorků, pro které platí, že $\rho^{(k)} \in \langle \rho - \delta, \rho + \delta \rangle$ – tyto vzorky nechť jsou indexovány indexy $k_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \in \{1, 2, \dots, N_\rho^{(\delta)}\}$. Graf shlukové analýzy pak budeme počítat tak, že nejprve každý vzorek přeškalujeme na délku $L^{(k)} = N_v$ a poté si představíme, že jednotlivé vybrané vzorky tvoří souvislou vozovku - odstraníme tedy vzorky nesplňující podmínku hustoty. Celková délka bez přeškalování by byla

$$L = \sum_{p=1}^{N_\rho^{(\delta)}} L^{(k_p)}$$

a po přeškalování $L = nN_v$.

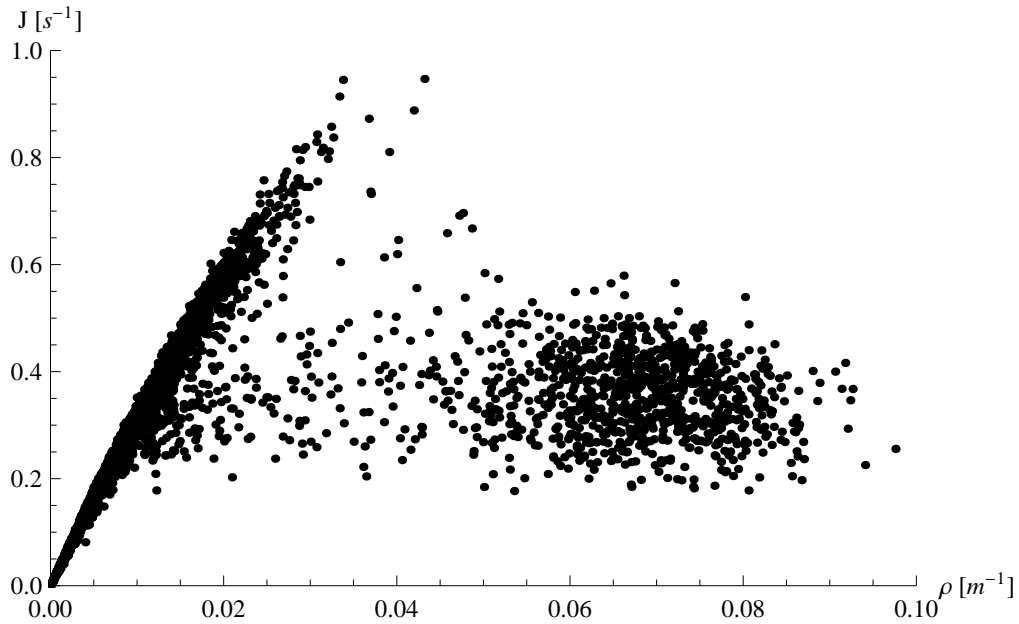
Pro výpočet fundamentálního diagramu je tedy potřeba pouze udat velikost vzorku N_v , kterou budeme volit přibližně v souladu s počtem vozidel v matematických modelech jako $N_v = 50$. Na obrázku 52 je ukázka fundamentálních diagramů pro různé hodnoty N_v . Pro zvětšující se velikost vzorku nám samozřejmě klesá počet bodů ve fundamentálním diagramu.



Obrázek 52: Fundamentální diagramy z reálných dat pro různé velikosti vzorku N_v .

8.1 Fundamentální diagram

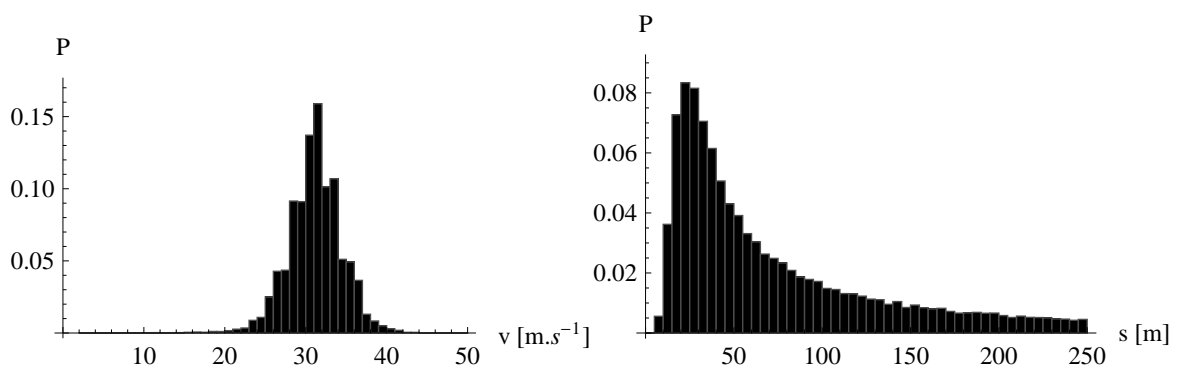
Data pro výpočet fundamentálního diagramu byla nasnímána na tříproudové dálnici během 39 dní. Prezentované výsledky na obrázku 53 jsou pro nejrychlejší pruh. Kromě volného režimu a režimu kongesce je zde patrná hysteretzní závislost hodnoty toku na aktuální hustotě. Projevuje se to tím, že pro jisté rozmezí hustot může existovat jak volná doprava, tak režim kongesce. V případě, že dojde k přechodu od volného režimu ke kongesci, pro obnovení volné dopravy nestačí pouhé opětovné snížení hustoty na hodnotu, kdy předtím došlo ke vzniku kongesce.



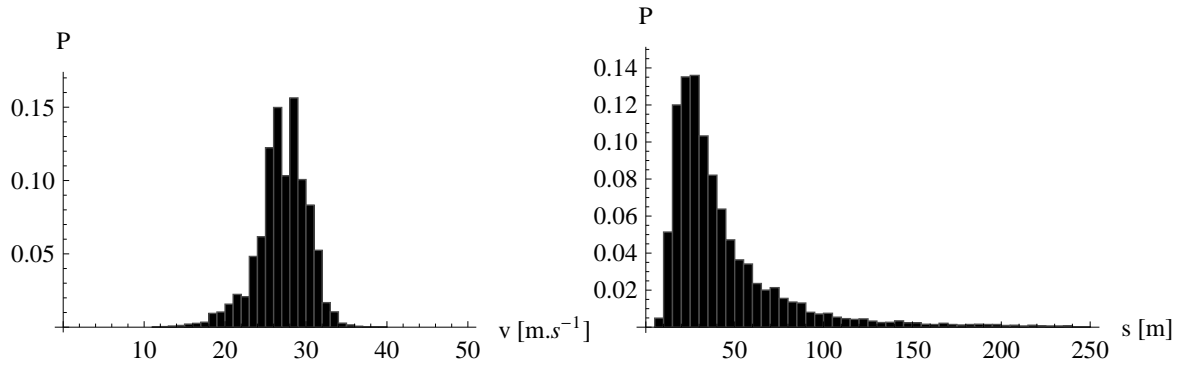
Obrázek 53: Fundamentální diagram vypočítaný z naměřených dat.

8.2 Volný režim

Obrázky 54 a 55 znázorňují histogramy rozdělení rychlostí a vzdáleností pro dva různé intervaly hustot v režimu volné dopravy. Charakteristický rys volné dopravy - tedy pohyb vozidel vysokými rychlostmi je samozřejmě zachován, u histogramů pro vyšší hustoty pozorujeme drobné snížení průměrné rychlosti, neboť se s hustotami pohybujeme již v blízkosti nasycení dopravy. U rozdělení vzdáleností pozorujeme pro vyšší hustoty úbytek zastoupení větších rozestupů – to je samozřejmě dáno definicí hustoty.

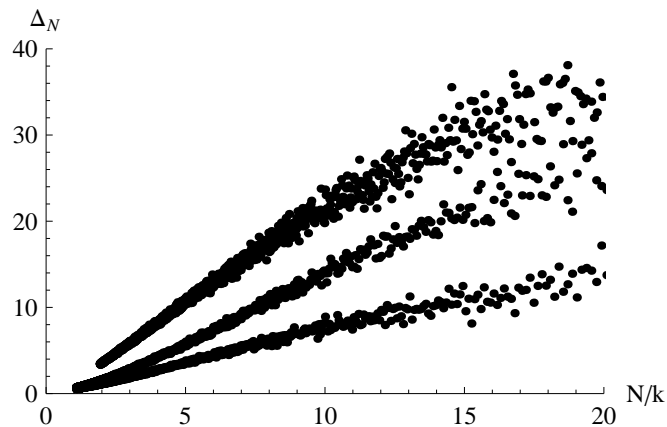


Obrázek 54: Histogramy rozdělení rychlostí a vzdáleností pro vzorky s hustotou $\rho^{(k)} \in \langle 0,005 ; 0,015 \rangle m^{-1}$. Celkem 4275 vzorků, tedy 213750 vozidel.



Obrázek 55: Histogramy rozdělení rychlostí a vzdáleností pro vzorky, pro které platí, že $(\rho^{(k)}, J^{(k)}) \in \langle 0, 02; 0, 025 \rangle m^{-1} \times \langle 0, 4; 1 \rangle s^{-1}$ – kvůli odfiltrování vzorků s nízkým tokem, které neodpovídají volnému režimu. Celkem 153 vzorků, tedy 7650 vozidel.

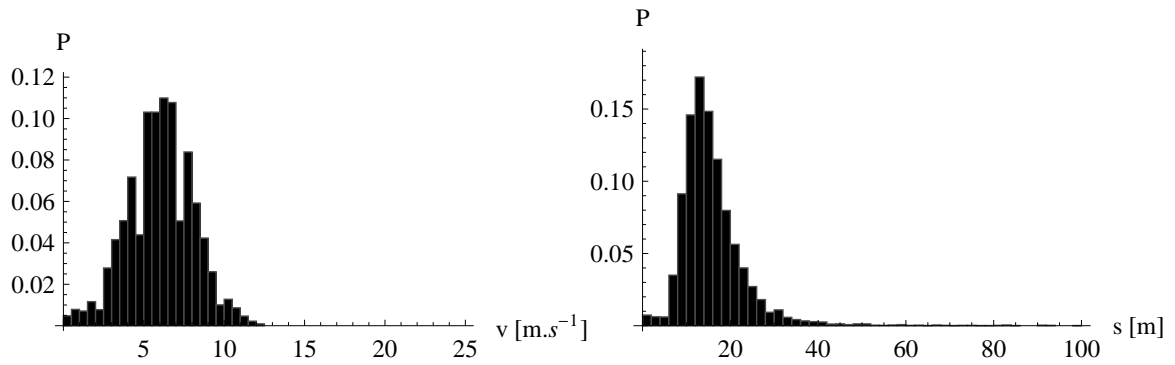
Velmi zajímavé jsou grafy shlukové analýzy na obrázku 56. Pro zvyšující se hodnotu hustoty dopravy je pozorovatelný pokles směrnice přímky, proložené jednotlivými vypočtenými body. To je dáno postupnou synchronizací dopravy, kdy pro zvyšující se hustotu jsou vozidla nucena udržovat stále pravidelnější rozestupy, v limitním případě bychom dostali až diagramy pro zcela rovnoměrně rozložená vozidla.



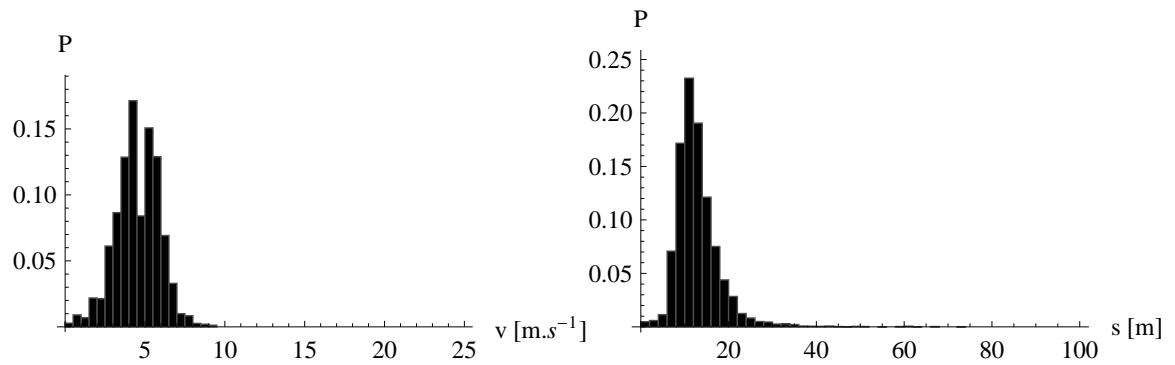
Obrázek 56: Grafy shlukové analýzy pro rozmezí hustot $\{\langle 0, 005; 0, 0055 \rangle, \langle 0, 02; 0, 021 \rangle, \langle 0, 025; 0, 03 \rangle\} m^{-1}$ (shora dolů).

8.3 Režim kongesce

Na obrázcích 57 a 58 jsou histogramy pro velké hustoty dopravy $\rho > 0,5 m^{-1}$, kdy se systém již vždy nachází v režimu kongesce. Pozorujeme typický obraz kongestivní dopravy s nízkými rychlostmi a nízkými vzdálenostmi mezi vozidly. Se zvyšující hustotou dochází ke snižování průměrné rychlosti (a samozřejmě i střední vzdálenosti mezi vozidly, ale jak už bylo řečeno, dle definice hustoty tomu nemůže být jinak).

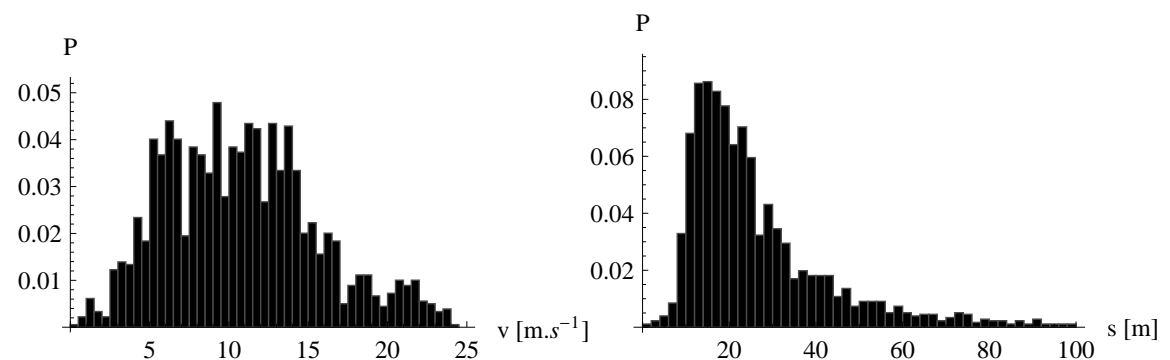


Obrázek 57: Histogramy rozdělení rychlostí a vzdáleností pro vzorky s hustotou $\rho^{(k)} \in \langle 0,06 ; 0,065 \rangle m^{-1}$. Celkem 155 vzorků, tedy 7750 vozidel.



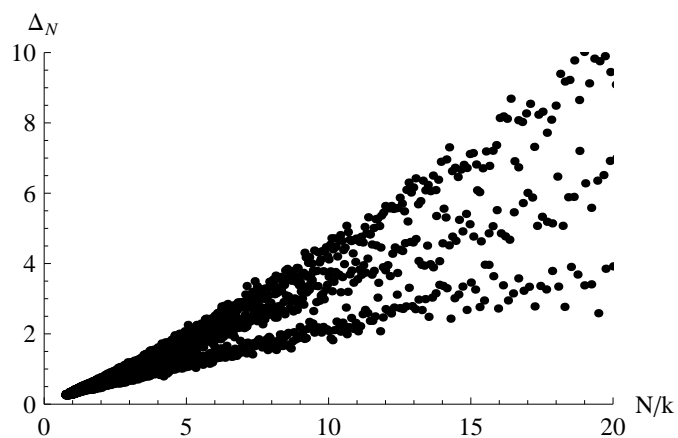
Obrázek 58: Histogramy rozdělení rychlostí a vzdáleností pro vzorky s hustotou $\rho^{(k)} \in \langle 0,075 ; 0,08 \rangle m^{-1}$. Celkem 128 vzorků, tedy 6400 vozidel.

Zajímavější situace je znázorněna na obrázku 59, kde se pohybujeme v oblasti hustot, kdy je na fundamentálním diagramu zjevná koexistence režimu volné dopravy a kongesce.



Obrázek 59: Histogramy rozdělení rychlostí a vzdáleností pro vzorky, pro které platí, že $(\rho^{(k)}, J^{(k)}) \in \langle 0,03 ; 0,04 \rangle m^{-1} \times \langle 0 ; 0,55 \rangle s^{-1}$ – kvůli odfiltrování vzorků ve stavu volné dopravy. Celkem 36 vzorků, tedy 1800 vozidel.

Shluková analýza prozrazuje, viz obrázek 60, že dochází k poklesu směrnice proložené přímkou se zvyšující se hustotou dopravy ze stejného důvodu jako u volného režimu.



Obrázek 60: Grafy shlukové analýzy pro rozmezí hustot $\{(0,06; 0,065), (0,07; 0,075), (0,08; 0,085)\} m^{-1}$ (shora dolů).

9 Srovnání jednotlivých modelů

Cílem této kapitoly je porovnat jednak samotné modely, z hlediska implementačního a z hlediska výpočetní náročnosti, ale hlavně jejich výsledky – jak navzájem, tak vůči reálným datům.

9.1 Výpočetní a implementační náročnost

Přestože výpočetní náročnost samozřejmě netvoří hlavní kritérium pro výběr modelu, je vždy výhodnější mít model co nejrychlejší, který umožní rychlé přepočítávání výsledků při všemožných změnách parametrů modelu.

Nagel-Schreckenbergův model jako zástupce modelů celulárních je jednoznačně výpočetně nejjednodušší – je třeba vykonávat pouze jednoduchá pravidla tvořící aktualizační schéma. Zároveň je tento model diskrétní v prostoru i čase, což znamená, že numerické řešení vývoje je zcela přesné (ale měli bychom mít na paměti, že se jedná o model stochastický). Tato přesnost vývoje je společná všem čistě diskrétním celulárním modelům.

Model optimální rychlosti (ať už jeho původní nebo modifikovaná verze) vyžaduje řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. To je samozřejmě výpočetně řádově složitější než u celulárních modelů, ale stále se dá říci, že na současných počítačích není žádným problémem řešit dopravní systémy obsahující stovky až tisíce vozidel. V případě, že nevyužijeme služeb nějakého matematického programu, musíme také implementovat vlastní numerickou metodu na řešení obyčejných diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami. Zároveň numerická integrace může způsobit odchylku vypočteného řešení od toho skutečného, na což je třeba dát pozor vhodnou úpravou numerického algoritmu.

U tekutinového modelu je již třeba řešit parciální diferenciální rovnice, což je obecně výpočetně poměrně náročné. Navíc tento model projevoval značnou nestabilitu zvláště v těch oblastech hustot, kde docházelo k přechodům mezi jednotlivými režimy, což vyústilo v potřebu velmi jemného dělení domény, na které řešení probíhalo ($\langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle$). O implementaci a chybách při numerickém integrování platí to samé, co bylo řečeno u modelu newtonovského typu.

9.2 Jednotlivé dopravní režimy a fundamentální diagramy

Začneme **volným režimem**, který byl přítomen u všech modelů a samozřejmě i při analýze reálných dat. Tento režim byl u všech modelů velmi podobný, přesto najdeme drobné odlišnosti. U Nagel-Schreckenbergova (N-S) modelu, modelu optimální rychlosti (Opt-vel) i jeho modifikované podoby (Mod-vel) se vozidla pro libovolnou hustotu spada-

jící do oblasti volné dopravy pohybovala maximální rychlostí⁸, což způsobovalo zcela přesné lineární škálování toku s narůstající hustotou. U tekutinového modelu byla rychlost určena funkcí $V_{safe}(\rho_0)$, u které i v oblasti volné dopravy neplatilo $V_{safe}(\rho_0) = v_{max}$, tok při dané hustotě se pak nacházel vždy pod hodnotou $v_{max}\rho_0$ – to je rozdíl oproti modelu Opt-vel, resp. Mod-vel, kde pohyb byl řízen funkcí V_{des} , která pro podmínky nastávající ve volném režimu měla vždy hodnotu maximální rychlosti.

Pokud budeme hovořit o modelech s mikrostrukturou (N-S, Opt-vel, Mod-vel) a podíváme se na rozdělení vzdáleností mezi vozidly, tak u všech je histogram silně závislý na počátečních podmínkách s jednou výjimkou a tou je udržování jistých minimálních rozestupů, které umožňují pohyb maximální rychlostí. U N-S modelu je to vzdálenost v_{max} , u Opt-vel je to nejmenší vzdálenost $s_{v_{max}}$, pro kterou platí $V_{des}(s_{v_{max}}) \approx v_{max}$, a u modelu Mod-vel je to taková nejmenší vzdálenost $s_{v_{max}}^{mod}$, že je splněno $V_{des}(s_{v_{max}}^{mod}, v_{max}) \approx v_{max}$. Důvod tohoto odpuzování je rozebrán u N-S modelu, u ostatních je princip velmi obdobný.

Je třeba prohlásit, že ani jeden z modelů nedokáže popsat mikrostrukturu zjištěnou z reálných dat. Zde je vhodné zmínit model termodynamického dopravního plynu, který dokáže rozdělení rychlostí a vzdáleností reprodukovat velmi dobře, viz například [14][15].

Zvláštním jevem u N-S modelu byl kvazivolný režim, který se vyskytoval pouze pro malé délky vozovky. Z toho lze usuzovat, že se jedná pouze o patologické chování vzniklé na základě periodických okrajových podmínek, kde pro malé velikosti systémů může docházet k nechtěné samointerakci.

Jako další budeme diskutovat **režim kongesce**. V modelu Mod-vel tento režim vůbec nebyl přítomen. V ostatních modelech však ano. Nejčastěji se režim kongesce projevoval tak, že v systému byly k nalezení oblasti, ve kterých se vozidla pohybovala velkou rychlostí, a zároveň oblasti, kde se naopak pohybovala velmi nízkou rychlostí – to se dělo u modelu N-S pro malé hustoty, modelu Opt-vel a také u tekutinového modelu, kde místo histogramu rychlostí používáme funkci rychlosti. Z mikroskopického pohledu byly N-S a Opt-vel modely kvalitativně velmi podobné – histogramy měly dva vrcholy – každý pro rychle, resp. pomalu, se pohybující dopravu.

U N-S modelu navíc platí, že v případě zvyšování hustoty postupně dochází k utlumení oné rychle jedoucí složky, až v jistém okamžiku úplně vymizí. To lze vnímat jako určitý analog synchronizovaného režimu, o kterém bude řeč dále.

Pro fundamentální diagramy tekutinového a Opt-vel modelu v oblasti kongesce platilo, že tok je pro zvětšující se hustotu téměř konstantní, pouze zlehka se zmenšující. U N-S modelu nebyla tato vlastnost dána speciální volbou počátečních podmínek. Pro tekutinový model sice skutečně byly voleny jen jisté speciální počáteční podmínky, ale radikální

⁸Respektive pro přesnost u N-S modelu $p_{dec}N$ vozidel rychlostí v_{max} a $(1 - p_{dec})N$ vozidel rychlostí $v_{max} - 1$.

změna, která se v systému vždy po určité době odehrála – překlopení do zcela jiného a stabilního stavu než toho indukovaného počátečními podmínkami, dává naději, že i v tomto případě je tok na počátečních podmínkách nezávislý. Naproti tomu zde máme Opt-vel model, kde byly voleny poměrně speciální počáteční podmínky s nepatrným šumem a kde drobné změny vedly k výrazným změnám toku (po ustálení stavu systému). Toto je vlastnost, která velmi dobře koresponduje s chováním reálného dopravního systému, kde je v kongestivním režimu také velký rozptyl možných toků při dané hustotě.

Opět je třeba prohlásit, že mikrostruktura matematických modelů je velmi odlišná od té, která je k naměření na reálné vozovce. Jistou podobu s předpověďmi modelů vykazuje pouze histogram rychlostí pro kongesci v hysterezní oblasti fundamentálního diagramu.

Synchronizovaným režimem jsme v pravém slova smyslu rozuměli pohyb vozidel rovnoměrně rozložených pohybujících se nízkými rychlostmi. Navíc byla tato konfigurace stabilní – při drobném vychylení se vozidla opět vrátila do rovnoměrného rozdělení. Na fundamentálním diagramu se tento režim projevoval velmi nízkými hodnotami toků v oblasti vysokých hustot. V tomto smyslu jsme se s tímto režimem setkávali u Opt-vel modelu a u tekutinového modelu. Přestože u tekutinového modelu nemáme přímo žádné rozdělení vzdáleností vozidel, tak si můžeme představit, že funkce hustoty udává jakousi převrácenou hodnotu vzdálenosti mezi vozidly (dle vztahu $\rho = N/L$), a v tekutinovém modelu byla funkce hustoty konstantní jak v prostorové, tak v časové proměnné.

Za účelem odstranění tohoto režimu byl modifikován model optimální rychlosti. Bohužel tato modifikace vedla k vymizení režimu kongesce a jeho nahrazení synchronizovaným v širším slova smyslu – dosahované rychlosti byly totiž poměrně vysoké. To se také odrazilo na tvaru fundamentálního diagramu, kdy v oblasti synchronizované dopravy máme poměrně vysoký tok, který pomalu klesá se zvyšující se hustotou.

Speciální poznámku opět vyžaduje N-S model, kde se pro malé délky vozovky vyskytoval režim, který také nesl název synchronizovaný. To se ovšem jedná pouze o duplicitu názvů, který s výše diskutovaným nemá nic společného. Název vznikl tak, že vozidla jsou natolik synchronizovaná, že nevytvářejí ani skupiny stojících vozidel ani shluky vozidel pohybujících se maximální rychlostí. A podobně jako u druhého režimu specifického pro malé délky vozovky, i zde platí poznámka o jisté patologičnosti pravděpodobně způsobené samointerakcí.

A na závěr se podívejme na **přechody** mezi jednotlivými režimy. Pro všechny modely s výjimkou modelu Mod-vel platí, že přechody mezi jednotlivými režimy jsou velmi ostré. Tím myslíme dvojí věc – zaprvé, že existuje pouze velmi úzké rozmezí hustot, při nichž se z počátečních podmínek mohou vyvinout oba režimy (to je případ N-S modelu), a zadruhé, že při změně režimu dochází ke značné změně toku v systému. U modifikovaného modelu optimální rychlosti naopak je pozvolný přechod mezi volným a synchronizovaným režimem.

V případě fundamentálního diagramu získaného z reálných dat byla patrná výrazná hystereze. Tedy vyskytovala se oblast hustot, kdy se mohl vyskytovat jak volný režim, tak režim kongesce. To byl dost podstatný rozdíl oproti fundamentálním diagramům matematických modelů – tento rozdíl by se dal odstranit opuštěním okrajových podmínek kruhové silnice a zavedením přítoků a odtoků na kraji vozovky. Tím bychom se mnohem více přiblížili situaci, která panuje na skutečné vozovce.

9.3 Shluková analýza

Nejprve pár poznámek k interpretaci shlukových diagramů, které vznikly syntézou informací poskytnutých jednak analytickými předpovědmi pro jednoduchá rozložení vozidel a druhá jako numericky vypočítané diagramy pro simulace jednotlivých modelů. Víme, že pro zcela náhodně rozmístěná vozidla má v průměru graf shlukové analýzy tvar identity (alespoň pro vysoký počet dílků vozovky k). Pro zcela rovnoměrně rozložené vozidla dostaneme takový tvar grafu shlukové analýzy, že pokud bychom ho proložili přímkou, tak tato bude mít směrnici blízkou nule. Naopak pro dokonalé shluky o velikosti s vozidel náhodně rozmístěné na vozovce dostaneme přímkou o směrnici s . Interpretace je tedy následující: čím více se graf odchyluje nad identitu, tím větší shluky⁹ se v systému tvoří. Naopak čím více leží graf shlukové analýzy pod identitou, tím více jsou auta synchronizována do rovnoměrného rozložení. Shlukovou analýzu mělo samozřejmě smysl počítat jen pro modely s mikrostrukturou, tedy modely N-S, Opt-vel a Mod-vel.

Tvar grafů shlukové analýzy pro **volný režim** byl dán hlavně počátečními podmínkami. Dostali jsme tedy diagramy přesně korespondující s teoretickou předpovědí pro rovnoměrně rozložená vozidla. U N-S modelu, kde s průběhem simulace docházelo díky náhodné procházce k postupnému vzdalování od rovnoměrných poloh, jsme pozorovali největší odchylku od předpovědi. V případě shlukového diagramu získaného z reálných dat dostáváme pro hustoty blízko přechodu do režimu kongesce v zásadě podobné výsledky, tedy do jisté míry synchronizovanou dopravu. Naopak pro velmi nízké hustoty nám shlukový diagram naznačuje, že vozidla vytvářejí určité shluky jdoucí za rámeček shluků, které se vytvoří při zcela náhodném rozmístění vozidel (shlukový diagram totiž pro velmi nízké hustoty ležel nad identitou).

V **režimu kongesce** dosahoval největších hodnot rozptylu N-S model. Pro zvyšující se hodnotu hustoty dopravy dostáváme snižující se hodnoty rozptylu. Abychom toto mohli vysvětlit, podívejme se, jak vypadají kongesce v N-S modelu. Vlastní "jádro" kongesce tvoří vozidla, která stojí bez mezer na sousedících buňkách. Napravo od jádra se vozidla postupně rozjíždějí (zvyšují v každém kroku rychlost maximálně o jedna) a nalevo přijíždějí vozidla rychlostí, na kterou jim dovolí akcelarovat prostor mezi jednotlivými kongescemi, aby mohla naráz zastavit a rozšiřovat tak jádro kongesce směrem doleva. Při

⁹Slovem větší je myšleno tvořeno z více aut a zaujímající menší prostor.

zvyšování hustoty se tedy kongesce nemohou zahušťovat v tom smyslu, že vozidla v jádru kongesce již mají nejmenší možnou vzdálenost mezi sebou. Dále dochází k tomu, že mezi jednotlivými kongescemi vozidla akcelerují na stále menší a menší rychlost, což způsobuje, že mezi sebou mají menší a menší rozestupy. Celkově tedy zvyšování globální hustoty zmenšuje fluktuace hustoty v jednotlivých místech systému, což se samozřejmě odrazí na shlukovém diagramu.

U modelu optimální rychlosti je závislost velikosti rozptylu na hustotě opačná. V tomto modelu se jednotlivé kongesce pro zvyšující hustotu skládají z více vozidel a koncentrují se do menšího prostoru. Naopak mezi kongescemi zůstává stále dostatek prostoru, aby vozidla akcelerovala až na maximální rychlost – tím si udržují jisté minimální rozestupy – a tímto procesem se fluktuace lokální hustoty zvyšují se zvyšující se globální hustotou.

U reálných dat jsme viděli, že pro zvětšující se hustotu dostáváme stále synchronizovanější vozidla, což je tedy kvalitativně ve shodě s N-S modelem.

Vzhledem k povaze **synchronizovaného režimu**, kdy vozidla stabilně udržují rovnoměrné vzdálenosti mezi sebou, není divu, že u všech modelů, u nichž se synchronizovaný režim vyskytuje, jsme dostali graf shlukové analýzy přesně odpovídající teoreticky předpovězenému pro rovnoměrně rozprostřená vozidla.

10 Závěr

Byl zformulován základní obecný matematický rámec vhodný pro popis sociálních systémů. Teorie rozhodování zavedená pomocí formalismu statistické fyziky vedla k master rovnici, která určuje časový vývoj těchto systémů. Omezením našeho zájmu pouze na časové střední hodnoty okupačních čísel jsme obdrželi zobecněnou Boltzmannovu rovnici, jejíž aproximací byl důležitý model sociálních sil.

Dopravní modely byly rozděleny do tří kategorií podle jejich prostoročasového charakteru na modely celulárního typu, newtonovského typu a modely tekutinové. Byly definovány základní charakteristiky popisující dopravní systém jako jsou hustota dopravy, dopravní tok a fundamentální diagram. Definice těchto charakteristik byla vhodně přizpůsobena pro potřeby konkrétních kategorií modelů. Byla popsána metoda shlukové analýzy zjišťující fluktuace hustoty ve zvoleném úseku vozovky a byla odvozena analytická vyjádření pro následující rozložení vozidel – rovnoměrné rozložení dokonalých shluků a na druhé straně zcela náhodné rozložení dokonalých shluků vozidel.

Byly popsány tři konkrétní dopravní modely, každý pro jednu prostoročasnou kategorii. Jednalo se o Nagel-Schreckenbergův model jako zástupce celulárního typu, model optimální rychlosti s konkrétní volbou funkce V_{des} byl zástupcem newtonovského modelu a na závěr tekutinový model s pohybovou rovnicí Navier-Stokesova typu. Tyto vybrané modely byly implementovány a byla provedena jejich zevrubná analýza – vypočtení fundamentálních diagramů a za zjednodušujících podmínek jejich teoretická predikce, identifikace jednotlivých dopravních režimů a jejich mikroskopická analýza včetně shlukové analýzy (kde to mělo smysl). Dále bylo zanalyzováno chování modelů v závislosti na jednotlivých parametrech, které je definovaly. U všech základních modelů se podařilo reprodukovat fenomén kongesce.

Nagel-Schreckenbergův model vykazoval netriviální závislost fundamentálních diagramů na maximální rychlosti, kdy bylo možno odsouvat bod přechodu z volného režimu do režimu kongesce do oblasti vyšších hustot. Tato vlastnost se nevyskytovala u žádného z dalších modelů. Pro kratší délky kruhové vozovky se vyskytly nové dopravní režimy pravděpodobně vyvolané samointerakcí v příliš malém systému s periodickými okrajovými podmínkami.

Model optimální rychlosti vykazoval zajímavé chování v režimu kongesce, kdy pro danou hustotu vozidel docházelo při nepatrných změnách počátečních podmínek k velkým rozdílům ve výsledném toku – parametr zodpovědný za toto chování byla tzv. reakční doba řidiče a jeho dostatečně velká hodnota. Tato vlastnost je typická pro kongesce v reálné dopravě, kdy pro danou konkrétní hustotu také pozorujeme velký rozptyl toků. Také byly zmíněny problémy tohoto modelu, kdy pro ne zcela vhodně zvolené parametry docházelo k nedobrždění vozidel při příjezdu k jednotlivým kongescím.

Synchronizovaný režim s velmi nízkými hodnotami toků přítomný v modelu optimální

rychlosti byl důvodem pro jeho modifikaci skrze změnu funkce optimální rychlosti. Tyto nepřírodně nízké toky v oblasti vyšších hustot byly eliminovány – ovšem za cenu vymizení režimu kongesce.

Z důvodu velmi velké výpočetní náročnosti a nestabilitě tekutinového modelu nebyla provedena analýza závislosti fundamentálních diagramů na jednotlivých definujících parametrech. Model vykazoval velmi zajímavé chování v režimu kongesce, kdy stav systému indukovaný počátečními podmínkami se ukázal jako nestabilní a po určitém čase se vždy překlopil do diametrálně odlišného stabilního stavu. Byly prezentovány příklady lokálních fundamentálních diagramů, které u ostatních typů modelů neměly smysl. I v tomto modelu byl přítomen synchronizovaný režim.

Byly popsány metody vypočtení základních dopravních charakteristik z reálných naměřených dat. Tyto metody pak byly aplikovány na data získaná z brněnské dálnice. Opět byly identifikovány jednotlivé dopravní režimy a provedena jejich mikroskopická a shluková analýza.

Modely byly porovnány z hlediska výpočetních a implementačních nároků. Dále byly z kvalitativního hlediska vzájemně porovnány získané výsledky. Jednalo se o porovnání výskytu jednotlivých režimů a jejich mikroskopické struktury, tvaru fundamentálních diagramů a grafů shlukové analýzy. Mikroskopická struktura modelů příliš neodpovídala reálným datům. V režimu kongesce u shlukové analýzy vykazoval Nagel-Schreckenbergův model pro zvyšující se hustotu větší synchronizaci vozidel směrem k rovnoměrnému rozložení – to odpovídalo reálným datům. U modelu optimální rychlosti tomu bylo právě naopak – s vyšší hustotou docházelo ke koncentrování shluků, což je v rozporu s naměřenými daty.

Podarilo se tedy reprodukovat řada jevů, které se vyskytují v reálných dopravních situacích. Samotný výskyt kongestivní dopravy, oddálení přechodu do režimu kongesce snížením maximální rychlosti, velký rozptyl hodnot toků v oblasti kongestivní dopravy. Naopak, jak už bylo několikrát řečeno, mikroskopickou strukturu dopravy vybrané modely vysvětlit nedokázaly. Dále se pro vysokou výpočetní náročnost a nestabilitu nepodařilo prozkoumat tekutinový model v takové hloubce, jako tomu bylo u ostatních modelů.

Z této práce vzešly tři základní směry, kudy se ubírat v dalším výzkumu. První vyplývá z toho, že veškeré modely jsme zkoumali pro okrajovou podmínku kruhové silnice. Přirozeným zobecněním, které navíc lépe vystihuje reálnou situaci, je vozovka s přítokem a odtokem. Tento přístup by pravděpodobně umožňoval zachytit hysteretní závislost toku na hustotě vyskytující se v reálné dopravě.

Dále je také možno hlouběji zkoumat shlukový diagram. Ať už snahou analyticky odvodit jeho tvar pro co nejvíc různých rozložení vozidel, anebo přípravou různých modelových rozložení vozidel, například závislých na parametrech, a sledování, jak tyto změny ovlivňují shlukový diagram. To pak umožní lepší porozumění výsledků získaných z jed-

notlivých modelů či reálných dat.

A v poslední řadě by také bylo vhodné zkoumat další různé modifikace modelu optimální rychlosti za účelem dosažení co největší shody fundamentálního diagramu získaného modelováním a toho získaného z reálných dat.

Reference

- [1] Helbing, Dirk: Quantitative Sociodynamics – Stochastic Methods and Models of Social Interaction Processes, 2nd ed., 2010, Springer, New York
- [2] Helbing, Dirk (1993), Boltzmann-like and Boltzmann-Fokker-Planck equations as a foundation of behavioral models, *Physica A* 196:546-573
- [3] R. Kühne, in: N. Gartner, C. J. Messner, A. J. Rathi (eds.), Transportation Research Board (TRB) Special Report 165, "Traffic Flow Theory," 2nd ed. (1998)
- [4] M. L. Mehta, Random matrices (revised and enlarged), New York: Academic Press, 1991
- [5] M. Krbálek, P. Šeba, Spectral rigidity of vehicular streams (random matrix theory approach), *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009) 345001 (10pp)
- [6] K. Nagel, M. Schreckenberg, A cellular automaton model for freeway traffic, *J. Phys. I France* **2** 2221, 1992
- [7] D. Chowdury, L. Santen, A. Schadschneider, *Physics Report* **329**, 199 (2000)
- [8] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama, *Phys. Rev. E* **51**, 1035 (1995); *Jpn. J. Ind. Appl. Math.* **11**, 202 (1994)
- [9] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama, *J. Physique I* **5**, 1389 (1995)
- [10] M. J. Lighthill, G. B. Whitham, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **229**, 281 (1955)
- [11] M. Leibig, *Phys. Rev. E* **49**, 184 (1994)
- [12] H. Y. Lee, H.-W. Lee, D. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1130 (1998): Origin of Synchronized Traffic Flow on Highways and Its Dynamic Phase Transitions
- [13] M. Krbálek, Socio-fyzikální modelování dynamiky transportních systémů (habilitační práce), FJFI ČVUT, 2011
- [14] M. Krbálek, Equilibrium distributions in a thermodynamical traffic gas, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007) 5813-5821
- [15] M. Krbálek, D. Helbing, Determination of interaction potentials in freeway traffic from steady-state statistics, *Physica A* 333 (2004) 370-378