České Vysoké Učení Technické
v Praze

Fakulta Jaderná a Fyzikálně
Inženýrská

Katedra Fyziky

Výzkumný úkol

Kohraniční Poisson-Lieovy grupy

Adam Brus

2013

Školitel: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

Thesis tittle: **Coboundary Poisson-Lie groups**

Author: Adam Brus

Department: Department of Physics FNSPE CTU in Prague
Branch of study: Mathematical Physics
Kind of thesis: Research work

Supervisor: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

Abstract: We present elementary introduction to Poisson-Lie groups and Lie bialgebras. We show that Lie algebra corresponding to Poisson-Lie group got bialgebraic structure.
For coboundary Lie bialgebras we compute Poisson-Lie structure on corresponding group by use of Sklyanin formula.

Keywords: Poisson manifolds, Poisson-Lie groups, Lie bialgebras, Manin triples, coboundary lie bialgebras, r-matrix, Sklyanin bracket

Název práce: **Kohraniční Poisson-Lieovy grupy**
Autor: Adam Brus

Katedra: Katedra Fyziky FJFI ČVUT v Prahe
Obor : Matematická fyzika
Druh práce: Výzkumný úkol

Školitel: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

Abstrakt: Uvádíme základní úvod do teorie Poisson-Lieových grup a Lieových bialgeber. Ukazujeme, že algebra příslušící Poisson-Lieově grupě má bialgebraickou strukturu.
Pro kohraniční Lieovy bialgebry spočteme Poisson-Lieovu strukturu na příslušné grupě užitím Sklyaninovy formule.

Klíčová slova: Poissonovy variety, Poisson-Lieovy grupy, Lieovy bialgebry, Maninovy trojice, kohraniční lieovské bialgebry, r-matice, Sklyaninovy závorky

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svůj výzkumný úkol vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb. ,o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů(autorský zákon).

V Praze dne ....

Adam Brus

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mého výzkumného úkolu za trpělivé vedení, přínosné konzultace a za kontrolu výsledků.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

V mnohých fyzikálních úlohách hrají při jejich řešeních významnou roli různé symetrie. Pro jejich popis je fundamentální teorie grup a speciálně teorie Lieových grup. Z teorie Lieových grup víme, že úlohu na popis Lieovy grupy lze lokálně převést na algebraickou úlohu o popisu příslušné Lieovy Algebry. Takový to postup má spoustu výhod a je tedy vhodné seznámit se z možnými strukturami Lieových Algeber.

V moderní fyzice má bohaté zastoupení speciální třída Lieových grup zvaná Poisson-Lieovy grupy, s kterými se seznámíme. Je přirozené se ptát jakou strukturu mají Lieovy algebry příslušící Poisson-Lieovým grupám. Zabýváme se tedy speciální třídou Lieových algeber zvaných Lieovy bialgebry. Ukážeme si, že tato struktura je přirozenou strukturou algebry Poisson-Lieovy grupy [2].

Můžeme si také klást otázku jakou strukturu má grupa příslušící Lieovské bialgebře. U speciální podtřídy kohraničních Lieových bialgeber si ukážeme, že jejich grupa má Poisson-Lieovu strukturu přirozeně definovanou pomocí Sklyaninovy závorky.

V neposlední řadě navazujeme na klasifikaci třídimenzionálních kohraničních Lieových bialgeber provedenou v mé bakalářské práci, kterou užijeme k vybudování Poissonovy struktury na příslušných Lieových grupách.

Kapitola 2

Poisson-Lieovy grupy a Lieovy algebry

V první kapitole se seznámíme s základními pojmy v teorii Poisson-Lieových grup a Lieových algeber.

2.1 Lieovy grupy a Algebry

Zde si zopakujeme základní pojmy z teorie Lieových grup a algeber.

Definice(2.1.1):
Množinu G nazveme **grupou**, pokud
(i) je definována asociativní operace $G \times G \ni [g, g'] \to gg' \in G$
(ii) existuje tzv. jednotkový prvek $e \in G$ takový, že $eg = ge = g$ pro všechna $g \in G$
(iii) ke každému $g \in G$ existuje inverzní prvek g^{-1} splňující $g^{-1}g = gg^{-1} = e$

Definice(2.1.2):
Lieova grupa je diferencovatelná varieta G vybavená binární operací $\bullet : G \times G \to G$ takovou, že
(i) $(G, \bullet)$ je grupa.
(ii) Grupové násobení $\bullet$ a grupová inverze $(\cdot)^{-1}$ jsou hladká zobrazení.

Definice(2.1.3):
Nechť G je Lieova grupa,pak zobrazení $L_g : G \to G$ resp.$R_g : G \to G$ definované jako $L_g h = gh$ resp. $R_g h = hg$, $\forall h \in G$ nazveme **levou** resp. **pravou translací**.

Pomocí levé a pravé translace můžeme nyní zadefinovat levo resp. pravo invariantní Vektorové pole

Definice(2.1.3):
Vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(G)$ nazýváme **levo**, resp. **pravo invariantní**. Pokud:
$\forall g, h \in G : L_{g*}(X|_h) = X|_{gh}$ resp $R_{g*}(X|_h) = X|_{hg}$

Tvrzení(2.1.1):
Vektorový prostor všech vektorových polí $\mathfrak{X}(G)$ grupy G tvoří Algebru vzhledem ke komutátoru vektorových polí.

Definice(2.1.4):
Množinu všech levo-invariantních vektorových polí grupy G značíme $\mathfrak{g}$

Tvrzení(2.1.2):
$\mathfrak{g}$ tvoří podalgebru $\mathfrak{X}(G)$, nazývanou **Lieovu algebrou** Lieovy grupy G.

Lieovu algebru jde také zadefinovat bez příslušné grupy, avšak existuje vždy jedna ku jedné souvislost mezi zadefinovanou algebrou a nějakou souvislou a jednoduše souvislou Lieovou grupou.

Definice(2.1.5):
Abstraktní Lieova algebra $A \equiv (A, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ taková, že:$(A, +, \cdot)$ je vektorový prostor a zobrazení $[\cdot, \cdot] : A \times A \to A$ splňuje:
i)$[\cdot, \cdot]$ je distributivní vzhledem k $+, \cdot$ (tudíž je bilineární)
ii) $[X, Y] - [Y, X] = 0, \forall X, Y \in A$ (neboli $[X, X] = 0, \forall X \in A$) (Antisymetrie)
iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \forall X, Y, Z \in A$(Jacobiho identita)

Definice(2.1.6):
Každá Lieovská algebra $\mathfrak{g}$ působí na sebe samu **adjungovanou reprezentací**,
$ad : x \in \mathfrak{g} \mapsto \text{End } \mathfrak{g}$, definovanou pro $y \in \mathfrak{g}$, jako $ad_X(Y) := [X, Y]$
Obecně $\mathfrak{g}$ působí na jakýkoliv tenzorový součet $\mathfrak{g}$ sám se sebou následovně,
pro faktorizovatelné prvky, $y_1 \otimes \cdots \otimes y_p$ z $\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}$($p$-krát) ,

$$X \triangleright (Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_p) = ad_X^{(p)}(Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_p)$$

$$= ad_X Y_1 \otimes Y_2 \otimes \cdots \otimes Y_p + Y_1 \otimes ad_X Y_2 \otimes Y_3 \otimes \cdots \otimes Y_p + \dots$$

$$y_1 \otimes Y_2 \otimes \cdots \otimes Y_{(p-1)} \otimes ad_X Y_p$$

pro $p = 2$ tedy

$$ad_X^{(2)}(Y_1 \otimes Y_2) = ad_X Y_1 \otimes Y_2 + Y_1 \otimes ad_X Y_2 = [X, Y_1] \otimes Y_2 + Y_1 \otimes [X, Y_2]$$

Je snadné ukázat, že ad_{X_i} je reprezentace.

2.2 Poissonovy variety a Poisson-Lieovy grupy

Poissonovy variety jsou speciální třídou variet vybavených bilineární operací na algebře hladkých funkcí nad příslušnou varietou. Je-li takováto varieta současně Lieovou grupou a Poissonova struktura je kompatibilní s Lieovou,to jest grupové násobení je tak zvané Poissonovo zobrazení, pak dostáváme Poisson-Lieovu grupu.

Definice(2.2.1):
Nechť M je hladká varieta konečné dimenze m. Algebru všech hladkých reálných funkcí na M značíme $C^\infty(M)$

Definice(2.2.2):
Poissonova závorka na M je bilineární zobrazení

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M),$$

takové, že
(1)

$$\{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\}$$

(2)

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0$$

(3)

$$\{f_1 f_2, f_3\} = f_1 \{f_2, f_3\} + \{f_1, f_3\} f_2$$

$\forall f_1, f_2, f_3 \in C^{\infty}(M)$

Nyní můžeme definovat Poissonovu varietu.

Definice(2.2.3):
Poissonova varieta je varieta vybavená Poissonovou závorkou.

Pro formulaci Poisson-Lieovy grupy budeme potřebovat následující definici.

Definice(2.2.4):
Nechť N, M jsou Poissonovy variety, Hladké zobrazení $F : N \to M$ nazveme **Poissonovým zobrazením**, pokud zachovává Poissonovu závorku na M a N, tedy

$$\{f_1, f_2\}_M \circ F = \{f_1 \circ F, f_2 \circ F\}_N$$

Máme-li nyní obě struktury kompatibilní dostáváme Poisson-Lieovu grupu:

Definice(2.2.5):
Poisson-Lieova grupa je Lieova grupa G, která má Poissonovu strukturu $\{\cdot, \cdot\}$ takovou, že grupové násobení $\bullet : G \times G \to G$ a grupová inverze $(\cdot)^{-1} : G \to G$ je Poissonovo zobrazení.
to jest:

$$\{f_1 \circ \bullet, f_2 \circ \bullet\}_{G \times G} (g_1, g_2) = \{f_1, f_2\}_G (g_1 \bullet g_2)$$
$$\left\{f_1 \circ (\cdot)^{-1}, f_2 \circ (\cdot)^{-1}\right\}_G (g) = \{f_1, f_2\}_G ((g)^{-1})$$

Kapitola 3

Kohraniční Lieovy bialgebry

V této kapitole se seznámíme ze speciální třídou Lieových algeber zvaných bialgebry a zadefinujeme pomocí kohomologií jejich kohraniční podtřídu, s kterou budeme následně pracovat.

3.1 Kohomologie

Kohomologie Lieových Algeber jsou potřebné pro definici Lieovy bialgebry a její kohraniční podmnožiny. Definujeme proto následující pojmy, viz [3]

Definice(3.1.1):
Pro každé nezáporné celé číslo k, vektorový prostor antisymetrických k-lineárních zobrazení na $\mathfrak{g}$ do M, kde M je vektorový prostor pevně zvolené reprezentace $\triangleright$ na $\mathfrak{g}$, se nazývá prostorem k-**kořetězů** na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v M

Definice(3.1.2):
Kohranicí k-kořetězu u z $\mathfrak{g}$ do M je $(k+1)$-kořetěz δu do M definován vztahem

$$\delta u(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \textstyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i x_i \triangleright (u(x_0, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_k))$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}u([x_i, x_j], x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_k),$$

pro $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}$, kde $\hat{x}_i$ značí, že prvek x_i je vynechán a $x_i\triangleright$ značí reprezentaci prvku x_i na příslušný k-kořetěz.

Tvrzení(3.1.1):
$\delta(\delta u) = 0$ pro každý k-kořetěz u, $k \geq 0$

Definice(3.1.3):
k-kořetěz u nazveme k-**kocyklem** pokud $\delta u = 0$. k-kořetěz u nazveme k-**kohraniční** pokud existuje $(k-1)$-kořetěz v takový, že $u = \delta v$

3.2 Lieovy bialgebry

Lieovská bialgebra je lieovská algebra, která má lieovskou strukturu na svém příslušném duálním prostoru. Existuje také alternativní zápis formou Maninových trojic, který si ukážeme.

Definice(3.2.1):
Lieovská bialgebra$(\mathfrak{g}, \gamma)$ je lieovská algebra $\mathfrak{g}$ s lineárním zobrazením $\gamma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ takovým, že
(i) ${}^t\gamma : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ definuje lieovskou závorku na $\mathfrak{g}^*$
(splňující antisymetrii a Jacobiho identitu) (^{t} značí dualní zobrazení)
(ii) γ je 1-kocyklem na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, kde $\mathfrak{g}$ působí na $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ adjungovanou reprezentací $ad^{(2)}$
Podmínka (ii) značí, že 2-kořetěz $\delta\gamma = 0$, tedy pro $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$ad_X^{(2)}(\gamma(Y)) - ad_Y^{(2)}(\gamma(X)) - \gamma([X,Y])) = 0$$

Poznámka: zobrazení $\gamma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ splňující podmínky definice(3.2.1) nazýváme **lieovským kosoučinem**.

Definice(3.2.2):
Maninova trojice je trojice $(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, kde $\mathfrak{p}$ je lieovská algebra s invariantní, nedegenerovanou, symetrickou bilineární formou $\langle \cdot, \cdot \rangle$, a $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ jsou její doplňující se $(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{p})$ izotropní vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle$ lieovské podalgebry.

Přechod mezi lieovskými bialgebrami a Maninovými trojicemi je snadný. Máme-li lieovskou bialgebru pak definujeme příslušnou Maninovu trojici jako $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ kde lieovskou závorku na $\mathfrak{g}^*$ definujeme pomoci lieovského kosoučinu. Naopak máme-li Maninovu trojici $(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, pak definujeme lieovský kosoučin na $\mathfrak{a}^*$ pomocí Lieovy závorky na $\mathfrak{b}$.

Teorém(3.2.1):
V konečné dimenzi existuje jedna ku jedné souvislost mezi Maninovými trojicemi a lieovskými bialgebrami.

Existuje klasifikace šesti dimenzionálních Maninových trojic, s kterou jsem pracoval[1]

3.3 Kohraniční Lieovy bialgebry

Kohraniční lieovské bialgebry jsou speciální třídou lieovských bialgeber $(\mathfrak{g}, \gamma)$, pro které je 1-kořetez γ kohraničním. Můžeme tedy následovně hledat 0-kořetěz r takový, že $\gamma = \delta r$

Definice(3.3.1):
Lieovskou bialgebru $(\mathfrak{g}, \gamma)$ takovou, že $\exists$ 0-kořetěz r splňující $\gamma = \delta r$, nazveme **kohraniční lieovskou bialgebrou**.

0-kořetěz r definující lieovskou bialgebru $(\mathfrak{g}, \delta r)$ budeme nazývat **r-maticí**.

V Dodatku (7.2) je uveden výpis všech kohraničních lieovských bialgeber ve formě Maninových trojic se svými příslušnými r-maticemi, které jsem spočítal užitím programu Matlab[6] ve své bakalářské práci.

Kapitola 4

„Kohraniční“ Poisson-Lieovy grupy

Ačkoliv přívlastek kohraniční nepatří k pojmu grupa my jej budeme užívat z důvodu souvislosti mezi kohraničními lieovskými bialgebrami a Poisson-Lieovými grupami. Ukážeme si jakou strukturu má Lieova Algebra Poisson-Lieovy grupy. Také si ukážeme, že pro kohraniční Lieovy bialgebry má příslušná Lieova grupa strukturu Poisson-Lieovy grupu.

4.1 Algebra Poisson-Lieovy grupy

Je přirozené se zeptat jakou strukturu má Lieova Algebra $\mathfrak{g}$ příslušící Poisson-Lieově grupě G. Jelikož na G máme zadefinovanou Poissonovu závorku, můžeme pomocí ní přirozeně zadefinovat lieovský kosoučin a tím vybudovat bialgebraickou strukturu.

Postup:

Nechť $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}^*$ pak pro všechna $f_1, f_2 \in C^\infty(G)$ taková, že $(df_i)_e = \xi_i$
Definujeme:

$$[\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}^*} = (d\{f_1, f_2\})_e$$

Takto definovaná závorka je dobře definovaná a závisí pouze na ξ_1, ξ_2 viz [5]

Vlastnosti Lieovy závorky plynou přímo z vlastností Poissonovy závorky a není obtížné dokázat, že tímto způsobem definovaný kosoučin je 1-kocyklem na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. K Poisson-Lieově grupě tedy přísluší lieovská bialgebra.

4.2 Sklyaninuv předpis

Nyní si klademe otázku, zda je možné přirozeně definovat Poissonovu závorku na Lieově grupě příslušící Lieově bialgebře. Ukážeme si, že pro podtřídu kohraničních lieovských bialgeber je možné Poissonovu strukturu přirozeně definovat pomocí takzvané Sklyaninovy závorky. Poisson-Lieovy grupy vybudované tímto
způsobem budeme nazývat "kohraniční".

Mějme Lieovu grupu G s příslušnou algebrou $\mathfrak{g}$, která má strukturu kohraniční lieovské
bialgebry $(\mathfrak{g}, \delta r)$. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^3$ je báze $\mathfrak{g}$, její r-matice je tvaru $r = \sum_{i,j=1}^3 r^{ij} X_i \otimes X_j$ a nechť $\left\{X_i^L\right\}_{i=1}^3$ (resp. $\left\{X_i^R\right\}_{i=1}^3$) jsou odpovídající levo (resp. pravo) invariantní vektorová pole.

Pak můžeme definovat **Skylaninovu závorku** jako:

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i,j=1}^{3} r^{ij} \left(\left(X_i^L f_1\right) \left(X_j^L f_2\right) - \left(X_i^R f_1\right) \left(X_j^R f_2\right) \right)$$

Tvrzení(4.2.1):
Sklyaninova závorka je Poissonovou závorkou. Antisymetrie a Jacoboho identita jsou splněny z vlastností r-matice a derivační vlastnosti (3) díky vlastnostem Polí.

Tvrzení(4.2.2):
Nechť G je Lieova grupa s lieovskou algebrou $\mathfrak{g}$ se strukturou kohraniční lieovské bialgebry $(\mathfrak{g}, \delta r)$. Pak odpovídající Poisson-Lieova Struktura na G je definovaná Sklyaninovou závorkou

Kapitola 5

Vlastní výpočet

Nyní se podíváme jak vybudovat Poisson-Lieovu strukturu k zadané kohraniční bialgebře $(\mathfrak{g}, \delta r)$. Nejprve je třeba nalézt levo (resp. pravo) invariantní vektorová pole příslušící k bázi algebry, v které máme zadanou r-matici a následovně užitím Sklyaninova předpisu definovat Poissonovu závorku na příslušné Lieově grupě

5.1 Hledání příslušných levo a pravo invariantních polí

Pro vlastní Sklyaninův předpis je potřebujeme kromě r-matice v bázi $\{X_i\}_{i=1}^3$ také vektorová pole příslušející této bázi. Ukážeme si na Bianchiho algebře 4 jak příslušná vektorová pole najít.

Nechť $\{X_i^3{}_{i=1}\}$ je báze $\mathfrak{g}$ mající v této bázi komutační relace:

$$[X_1, X_2] = -X_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3$$

příslušná levo (resp. pravo) invariantní vektorová pole najdeme pomocí inverzních vielbeinů

$$g^{-1}dg = dx^i e_i{}^j X_j$$

resp.

$$(dg)g^{-1} = dx^i \tilde{e}_i{}^j X_j$$

kde

$$g = exp(x_1 X_1) exp(x_2 X_2) exp(x_3 X_3)$$

lokálně resp pro řešitelné viz. [4]

následně pomocí inverze získáme příslušná levo (resp. pravo) invariantní pole:

$$X_i^L = (e^{-1})_i{}^j \frac{d}{dx^j}$$

$$X_i^R = (\tilde{e}^{-1})_i{}^j \frac{d}{dx^j}$$

Přejděme zpět k příkladu Bianchi 4 užijeme označení $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

Levo invariantní pole:

$$g^{-1}dg = exp(-zX_3)exp(-yX_2)exp(-xX_1)d(exp(xX_1)exp(yX_2)exp(zX_3)) =$$

$$= dx(exp(-zX_3)exp(-yX_2)exp(-xX_1)X_1exp(xX_1)exp(yX_2)exp(zX_3))$$

$$+dy(exp(-zX_3)exp(-yX_2)exp(-xX_1)exp(xX_1)X_2exp(yX_2)exp(zX_3))$$

$$+dz(exp(-zX_3)exp(-yX_2)exp(-xX_1)exp(xX_1)exp(yX_2)X_3exp(zX_3)) =$$

$$= dx(exp(-zX_3)exp(-yX_2)X_1exp(yX_2)exp(zX_3))$$

$$+dy(exp(-zX_3)X_2exp(zX_3)) + dz(X_3) =$$

užitím rovnosti:

$$exp(xA)Bexp(-xA) = B + x\left[A,B\right] + \frac{x^2}{2!}\left[A,\left[A,B\right]\right] + \frac{x^3}{3!}\left[A,\left[A,\left[A,B\right]\right]\right] + \dots$$

dostáváme

$$= dx(exp(-zX_3)\left(X_1 - y\left[X_2,X_1\right] + \frac{y^2}{2!}\left[X_2,\left[X_2,X_1\right]\right] - \frac{y^3}{3!}\left[X_2,\left[X_2,\left[X_2,X_1\right]\right]\right] + \dots\right)$$

$$exp(zX_3)) + dy\left(X_2 - z\left[X_3,X_2\right] + \frac{z^2}{2!}\left[X_3,\left[X_3,X_2\right]\right] - \frac{z^3}{3!}\left[X_3,\left[X_3,\left[X_3,X_2\right]\right]\right] + \dots\right)$$

$$+dz(X_3) =$$

$$= dx(exp(-zX_3)\left(X_1 - y(X_2 - X_3)\right)exp(zX_3))$$

$$+dy(X_2) + dz(X_3) =$$

$$= dx(X_1 - z\left[X_3,X_1\right] - yX_2 + yX_3)$$

$$+dy(X_2) + dz(X_3) =$$

$$= dx(X_1 - yX_2 + (y-z)X_3)$$

$$+dy(X_2) + dz(X_3) =$$

Odtud vidíme matici **e**

$$e = \begin{pmatrix} 1 & -y & y-z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Provedeme-li inverzi (pro inverzi matic jsem užívál programu Matematika 9)

$$e^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & y & z-y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příslušná levo invariantní vektorová pole tedy jsou:

$$X_1^L = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (z-y)\frac{\partial}{\partial z}$$

$$X_2^L = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_3^L = \frac{\partial}{\partial z}$$

Stejným postupem nalezneme i pravo invariantní vektorová

$$X_1^R = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_2^R = e^x\frac{\partial}{\partial y} - xe^x\frac{\partial}{\partial z}$$

$$X_3^R = e^x\frac{\partial}{\partial z}$$

5.2 Příklad výpočtu příslušných Sklyaninových závorek

Vlastní výpočet Sklyaninovy závorky je už jednoduchý, stačí jen dosadit a zjednodušit předpis. Budeme pracovat s kohraniční Maninovou trojicí (**4** |**2.ii**).

Maninova trojice (**4**|**2.ii**):

$[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1^L = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (z-y)\frac{\partial}{\partial z}$$
$$X_2^L = \frac{\partial}{\partial y}$$
$$X_3^L = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$X_1^R = \frac{\partial}{\partial x}$$
$$X_2^R = e^x\frac{\partial}{\partial y} - xe^x\frac{\partial}{\partial z}$$
$$X_3^R = e^x\frac{\partial}{\partial z}$$

Odtud dosazením do Sklyaninova předpisu

$$\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}((X_2^L f_1)(X_3^L f_2) - (X_2^R f_1)(X_3^R f_2))$$
$$-\frac{1}{2}((X_3^L f_1)(X_2^L f_2) - (X_3^R f_1)(X_2^R f_2)) =$$
$$= \frac{1}{2}((\frac{\partial}{\partial y} f_1)(\frac{\partial}{\partial z} f_2) - ((e^x\frac{\partial}{\partial y} - xe^x\frac{\partial}{\partial z})f_1)(e^x\frac{\partial}{\partial z} f_2))$$
$$-\frac{1}{2}((\frac{\partial}{\partial z} f_1)(\frac{\partial}{\partial y} f_2) - (e^x\frac{\partial}{\partial z} f_1)((e^x\frac{\partial}{\partial y} - xe^x\frac{\partial}{\partial z})f_2)) =$$

Zjednodušením výrazu dostáváme:

$$\{f_1, f_2\} = (\frac{1}{2} - e^{2x})(\frac{\partial}{\partial y} f_1 \frac{\partial}{\partial z} f_2 - \frac{\partial}{\partial z} f_1 \frac{\partial}{\partial y} f_2)$$

5.3 Výsledky

Výpis levo a pravo invariantních vektorových polí příslušících daným algebrám v fixní bázi $\{X_i\}_{i=1}^3$. Uvádím jen algebry, které mají Kohraniční bialgebraickou strukturu alespoň u jedné Maninovy trojice. Značení algeber odpovídá Bianchiho algebrám z dodatku, kde $N.i$ značí algebru N v jiné bázi.

1. Lieovská algebra 9:

   $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

   příslušná vektorová pole

   $X_1^L = \frac{cos(z)}{cos(y)}\frac{\partial}{\partial x} + sin(z)\frac{\partial}{\partial y} - tan(y)cos(z)\frac{\partial}{\partial z}, X_2^L = \frac{-sin(z)}{cos(y)}\frac{\partial}{\partial x} + cos(z)\frac{\partial}{\partial y} + tan(y)sin(z)\frac{\partial}{\partial z}, X_3^L = \frac{\partial}{\partial z}$

   $X_1^R = \frac{\partial}{\partial x}, X_2^R = tan(y)sin(x)\frac{\partial}{\partial x} + cos(x)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{sin(x)}{cos(y)}\frac{\partial}{\partial z}, X_3^R = -tan(y)cos(x)\frac{\partial}{\partial x} + sin(x)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{cos(x)}{cos(y)}\frac{\partial}{\partial z}$

2. Lieovská algebra 8:

   $[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

   příslušná vektorová pole

   $X_1^L = \frac{cos(z)}{cosh(y)}\frac{\partial}{\partial x} + sin(z)\frac{\partial}{\partial y} - tanh(y)cos(z)\frac{\partial}{\partial z}, X_2^L = -\frac{sin(z)}{cosh(y)}\frac{\partial}{\partial x} + cos(z)\frac{\partial}{\partial y} + tanh(y)sin(z)\frac{\partial}{\partial z}, X_3^L = \frac{\partial}{\partial z}$

   $X_1^R = \frac{\partial}{\partial x}, X_2^R = -tanh(y)sinh(x)\frac{\partial}{\partial x} + cosh(x)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{sinh(x)}{cosh(y)}\frac{\partial}{\partial z}, X_3^R = -tanh(y)cosh(x)\frac{\partial}{\partial x} + sinh(x)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{cosh(x)}{cosh(y)}\frac{\partial}{\partial z}$

3. Lieovská algebra 7_a:

   $[X_1, X_2] = -aX_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3.$

   příslušná vektorová pole

   $X_1^L = \frac{\partial}{\partial x} + (ay + z)\frac{\partial}{\partial y} + (az - y)\frac{\partial}{\partial z}, X_2^L = \frac{\partial}{\partial y}, X_3^L = \frac{\partial}{\partial z}$

   $X_1^R = \frac{\partial}{\partial x}, X_2^R = e^{ax}cos(x)\frac{\partial}{\partial y} - e^{ax}sin(x)\frac{\partial}{\partial z}, X_3^R = e^{ax}sin(x)\frac{\partial}{\partial y} + e^{ax}cos(x)\frac{\partial}{\partial z}$

4. Lieovská algebra 7_0:

   $[X_1, X_2] = 0$, $[X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2$.

   příslušná vektorová pole

   $X_1^L = cos(z)\frac{\partial}{\partial x} + sin(z)\frac{\partial}{\partial y}, X_2^L = -sin(z)\frac{\partial}{\partial x} + cos(z)\frac{\partial}{\partial y}, X_3^L = \frac{\partial}{\partial z}$
   $X_1^R = \frac{\partial}{\partial x}, X_2^R = \frac{\partial}{\partial y}, X_3^R = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

5. Lieovská algebra 6_a:

   $[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3$, $[X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3$.

   příslušná vektorová pole

   $X_1^L = \frac{\partial}{\partial x} + (ay + z)\frac{\partial}{\partial y} + (az + y)\frac{\partial}{\partial z}, X_2^L = \frac{\partial}{\partial y}, X_3^L = \frac{\partial}{\partial z}$
   $X_1^R = \frac{\partial}{\partial x}, X_2^R = e^{ax}cosh(x)\frac{\partial}{\partial y} + e^{ax}sinh(x)\frac{\partial}{\partial z}, X_3^R = e^{ax}sinh(x)\frac{\partial}{\partial y} + e^{ax}cosh(x)\frac{\partial}{\partial z}$

6. Lieovská algebra $6_{1/a}.iii$:

   $[X_1, X_2] = -X_1$, $[X_2, X_3] = \frac{a-1}{a+1}(-X_2 + X_3), [X_3, X_1] = -X_1$.

   příslušná vektorová pole

   $X_1^L = e^{-y-z}\frac{\partial}{\partial x}, X_2^L = (e^{\frac{a-1}{a+1}z} - 2)\frac{\partial}{\partial y} + (1 - e^{\frac{a-1}{a+1}z})\frac{\partial}{\partial z}, X_3^L = \frac{\partial}{\partial z}$
   $X_1^R = \frac{\partial}{\partial x}, X_2^R = -x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, X_3^R = -x\frac{\partial}{\partial x} + (1 - e^{-\frac{a-1}{a+1}y})\frac{\partial}{\partial y} + e^{-\frac{a-1}{a+1}y}\frac{\partial}{\partial z}$

7. Lieovská algebra 6_0:

   $[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3$, $[X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3$.

   příslušná vektorová pole

   $X_1^L = cosh(z)\frac{\partial}{\partial x} - sinh(z)\frac{\partial}{\partial y}, X_2^L = -sinh(z)\frac{\partial}{\partial x} + cosh(z)\frac{\partial}{\partial y}, X_3^L = \frac{\partial}{\partial z}$
   $X_1^R = \frac{\partial}{\partial x}, X_2^R = \frac{\partial}{\partial y}, X_3^R = -y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

8. Lieovská algebra 5:

   $[X_1, X_2] = -X_2$, $[X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3$.

   příslušná vektorová pole

   $X_1^L = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (z)\frac{\partial}{\partial z}, X_2^L = \frac{\partial}{\partial y}, X_3^L = \frac{\partial}{\partial z}$
   $X_1^R = \frac{\partial}{\partial x}, X_2^R = (exp(x))\frac{\partial}{\partial y}, X_3^R = exp(x)\frac{\partial}{\partial z}$

9. Lieovská algebra $5.i$:

$$[X_1, X_2] = -X_1 + X_2,\ [X_2, X_3] = X_3, [X_3, X_1] = -X_3.$$

příslušná vektorová pole

$$X_1^L = exp(y)\tfrac{\partial}{\partial x} + (1 - exp(y))\tfrac{\partial}{\partial y} - z\tfrac{\partial}{\partial z}, X_2^L = \tfrac{\partial}{\partial y} - z\tfrac{\partial}{\partial z}, X_3^L = \tfrac{\partial}{\partial z}$$
$$X_1^R = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^R = (1 - exp(-x))\tfrac{\partial}{\partial x} + exp(-x)\tfrac{\partial}{\partial y}, X_3^R = exp(-x)exp(-y)\tfrac{\partial}{\partial z}$$

10. Lieovská algebra 4:

$$[X_1, X_2] = -X_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$

příslušná vektorová pole

$$X_1^L = \tfrac{\partial}{\partial x} + y\tfrac{\partial}{\partial y} + (z - y)\tfrac{\partial}{\partial z}, X_2^L = \tfrac{\partial}{\partial y}, X_3^L = \tfrac{\partial}{\partial z}$$
$$X_1^R = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^R = (exp(x))\tfrac{\partial}{\partial y} - x(exp(x))\tfrac{\partial}{\partial z}, X_3^R = exp(x)\tfrac{\partial}{\partial z}$$

11. Lieovská algebra $4.i$:

$$[X_1, X_2] = (-X_1 + X_2 + X_3),\ [X_2, X_3] = X_3, [X_3, X_1] = -X_3.$$

příslušná vektorová pole

$$X_1^L = exp(y)\tfrac{\partial}{\partial x} + (1 - exp(y)\tfrac{\partial}{\partial y} + (y - 3z + (2z)exp(y))\tfrac{\partial}{\partial z}, X_2^L = \tfrac{\partial}{\partial y} + z\tfrac{\partial}{\partial z},$$
$$X_3^L = \tfrac{\partial}{\partial z}$$
$$X_1^R = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^R = (1 - exp(-x))\tfrac{\partial}{\partial x} + (exp(-x))\tfrac{\partial}{\partial y} - xexp(-x)exp(-y)\tfrac{\partial}{\partial z},$$
$$X_3^R = exp(-x)exp(-y)\tfrac{\partial}{\partial z}$$

12. Lieovská algebra 3:

$$[X_1, X_2] = -X_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + X_3.$$

příslušná vektorová pole

$$X_1^L = \tfrac{\partial}{\partial x} + (y + z)\tfrac{\partial}{\partial y} + (y + z)\tfrac{\partial}{\partial z}, X_2^L = \tfrac{\partial}{\partial y}, X_3^L = \tfrac{\partial}{\partial z}$$
$$X_1^R = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^R = \tfrac{1}{2}(exp(2x) + 1)\tfrac{\partial}{\partial y} + \tfrac{1}{2}(exp(2x) - 1)\tfrac{\partial}{\partial z},$$
$$X_3^R = \tfrac{1}{2}(exp(2x) - 1)\tfrac{\partial}{\partial y} + \tfrac{1}{2}(exp(2x) + 1)\tfrac{\partial}{\partial z}$$

13. Lieovská algebra $3.i$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_2 + X_3, [X_3, X_1] = 0.$$

příslušná vektorová pole

$$X_1^L = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^L = exp(-z)\tfrac{\partial}{\partial y} + (exp(-z) - 1)\tfrac{\partial}{\partial z}, X_3^L = \tfrac{\partial}{\partial z}$$
$$X_1^R = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^R = \tfrac{\partial}{\partial y}, X_3^R = (exp(-y) - 1)\tfrac{\partial}{\partial y} + exp(-y)\tfrac{\partial}{\partial z}$$

14. Lieovská algebra $3.ii$:

$$[X_1, X_2] = -X_1,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_1.$$

příslušná vektorová pole

$$X_1^L = exp(-y)exp(-z)\tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^L = \tfrac{\partial}{\partial y}, X_3^L = \tfrac{\partial}{\partial z}$$
$$X_1^R = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^R = x\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{\partial}{\partial y}, X_3^R = -x\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{\partial}{\partial z}$$

15. Lieovská algebra 2:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = 0.$$

příslušná vektorová pole

$$X_1^L = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^L = -z\tfrac{\partial}{\partial z} + \tfrac{\partial}{\partial y}, X_3^L = \tfrac{\partial}{\partial z}$$
$$X_1^R = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^R = \tfrac{\partial}{\partial y}, X_3^R = -y\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{\partial}{\partial z}$$

16. Lieovská algebra $2.i$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = -X_1, [X_3, X_1] = 0.$$

příslušná vektorová pole

$$X_1^L = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^L = z\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{\partial}{\partial y}, X_3^L = \tfrac{\partial}{\partial z}$$
$$X_1^R = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^R = \tfrac{\partial}{\partial y}, X_3^R = y\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{\partial}{\partial z}$$

17. Lieovská algebra 1:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = 0.$$

příslušná vektorová pole

$$X_1^L = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^L = \tfrac{\partial}{\partial y}, X_3^L = \tfrac{\partial}{\partial z}$$
$$X_1^R = \tfrac{\partial}{\partial x}, X_2^R = \tfrac{\partial}{\partial y}, X_3^R = \tfrac{\partial}{\partial z}$$

Výpis Kohraničních Lieovských bialgeber (Maninových trojic) a k nim příslušné Sklyaninovy závorky.

1. Maninova trojice $(\mathbf{9}|\mathbf{1})$:

   $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

   $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$

   příslušná Sklyaninova závorka

   $\{f_1, f_2\} = 0$

2. Maninova trojice $(\mathbf{9}|\mathbf{5}|\mathbf{b})$:

   $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

   $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -b\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = b\tilde{X}^3, b > 0.$

   příslušná Sklyaninova závorka

   $\{f_1, f_2\} = b(tan(y)(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2) - \frac{sin(z)}{cos(y)}(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2)$
   $+ (cos(z) - \frac{1}{cos(y)})(\frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2))$

3. Maninova trojice $(\mathbf{8}|\mathbf{1})$:

   $[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

   $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$

   příslušná Sklyaninova závorka

   $\{f_1, f_2\} = 0$

4. Maninova trojice $(\mathbf{8}|\mathbf{5.i}|\mathbf{b})$:

   $[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

   $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -b\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = b\tilde{X}^3, b > 0.$

   příslušná Sklyaninova závorka

   $\{f_1, f_2\} = b(tanh(y)(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2) - \frac{sin(z)}{cosh(y)}(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2)$
   $+ (cos(z) - \frac{1}{cosh(y)})(\frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2))$

5. Maninova trojice $(\mathbf{8}|\mathbf{5}.\mathbf{ii}|\mathbf{b})$:

$$[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = b\tilde{X}^2, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -b\tilde{X}^1, b > 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$$\{f_1, f_2\} = b((cosh(x) - \tfrac{1}{cosh(y)})(\tfrac{\partial}{\partial x}f_1\tfrac{\partial}{\partial y}f_2 - \tfrac{\partial}{\partial y}f_1\tfrac{\partial}{\partial x}f_2)$$
$$+ (\tfrac{sinh(x)}{cosh(y)})(\tfrac{\partial}{\partial x}f_1\tfrac{\partial}{\partial z}f_2 - \tfrac{\partial}{\partial z}f_1\tfrac{\partial}{\partial x}f_2)$$
$$- tanh(y)(\tfrac{\partial}{\partial y}f_1\tfrac{\partial}{\partial z}f_2 - \tfrac{\partial}{\partial z}f_1\tfrac{\partial}{\partial y}f_2))$$

6. Maninova trojice $(\mathbf{8}|\mathbf{5}.\mathbf{iii})$:

$$[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^2, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -(\tilde{X}^1 + \tilde{X}^3).$$

příslušná Sklyaninova závorka

$$\{f_1, f_2\} = (cosh(x) - \tfrac{1-sinh(y)}{cosh(y)})(\tfrac{\partial}{\partial x}f_1\tfrac{\partial}{\partial y}f_2 - \tfrac{\partial}{\partial y}f_1\tfrac{\partial}{\partial x}f_2)$$
$$+ (\tfrac{sinh(x)+sin(z)}{cosh(y)})(\tfrac{\partial}{\partial x}f_1\tfrac{\partial}{\partial z}f_2 - \tfrac{\partial}{\partial z}f_1\tfrac{\partial}{\partial x}f_2)$$
$$(-cos(z) + \tfrac{1-sinh(y)}{cosh(y)}))(\tfrac{\partial}{\partial y}f_1\tfrac{\partial}{\partial z}f_2 - \tfrac{\partial}{\partial z}f_1\tfrac{\partial}{\partial y}f_2))$$

7. Maninova trojice $(\mathbf{7_a}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -aX_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$$\{f_1, f_2\} = 0$$

8. Maninova trojice $(\mathbf{7_a}|\mathbf{2}.\mathbf{i})$:

$$[X_1, X_2] = -aX_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$$\{f_1, f_2\} = \tfrac{-1}{2a}(1 - e^{2ax})(\tfrac{\partial}{\partial y}f_1\tfrac{\partial}{\partial z}f_2 - \tfrac{\partial}{\partial z}f_1\tfrac{\partial}{\partial y}f_2)$$

9. Maninova trojice $(\mathbf{7_a}|\mathbf{2}.\mathbf{ii})$:

$$[X_1, X_2] = -aX_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$$\{f_1, f_2\} = \tfrac{1}{2a}(1 - e^{2ax})(\tfrac{\partial}{\partial y}f_1\tfrac{\partial}{\partial z}f_2 - \tfrac{\partial}{\partial z}f_1\tfrac{\partial}{\partial y}f_2)$$

10. Maninova trojice $(\mathbf{7_0}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = 0$

11. Maninova trojice $(\mathbf{7_0}|\mathbf{5.i})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^3.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = -y(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2) - sin(z)(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2) + (cos(z) - 1)(\frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2)$

12. Maninova trojice $(\mathbf{6_a}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, a > 0, a \neq 1.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = 0$

13. Maninova trojice $(\mathbf{6_a}|\mathbf{2})$:

$$[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, a > 0, a \neq 1.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = (e^{2ax} - 1)(\frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2)$

14. Maninova trojice $(\mathbf{6_a}|\mathbf{6_{1/a}.ii})$:

$$[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, a > 0, a \neq 1.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \frac{a+1}{a-1}(\tilde{X}^2 + \tilde{X}^3), [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^1.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = \frac{1}{a-1}[(1 - e^{(a+1)x})(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2)$
$- (1 - e^{(a+1)x})(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2)$
$- ((a+1)y + (a+1)z)(\frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2)]$

15. Maninova trojice $(\mathbf{6_a}|\mathbf{6_{1/a}.iii})$:

$$[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, a > 0, a \neq 1.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tfrac{a-1}{a+1}(-\tilde{X}^2 + \tilde{X}^3), [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -\tilde{X}^1.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = \frac{-1}{a+1}[(1 - e^{(a+1)x})(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2)$
$+ (1 - e^{(a+1)x})(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2)$
$+ ((a-1)y - (a-1)z)(\frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2)]$

16. Maninova trojice $(\mathbf{6_{1/a}.iii}|\mathbf{6_a})$:

$$[X_1, X_2] = X_1,\ [X_2, X_3] = \tfrac{a-1}{a+1}(-X_2 + X_3), [X_3, X_1] = -X_1.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -a\tilde{X}^2 - \tilde{X}^3,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^2 + a\tilde{X}^3, a > 0, a \neq 1.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = (e^{\frac{2a}{a+1}z-y} + e^{\frac{a-1}{a+1}y} - 2e^{-y-z} - 2)(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2) - (e^{\frac{2a}{a+1}z-y} + e^{\frac{a-1}{a+1}y} - 2e^{-y-z})(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2)$

17. Maninova trojice $(\mathbf{6_0}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = -X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = 0$

18. Maninova trojice $(\mathbf{4.ii}|\mathbf{6_0})$:

$$[X_1, X_2] = (-X_1 + X_2 + X_3),\ [X_2, X_3] = X_3, [X_3, X_1] = -X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = X_1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -X_2.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}(e^y - 2e^{-x-y} + e^{-2x-y})(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2)$
$- \frac{1}{2}(e^y - 2 + e^{-2x-y})(\frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2)$

19. Maninova trojice $(\mathbf{6_0}|\mathbf{5.i})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = -X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^3.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = -y(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2) - sinh(z)(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2) + (cosh(z) - 1)(\frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2)$

20. Maninova trojice $(\mathbf{6_0}|\mathbf{5.ii})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = -X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^1 + \tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -\tilde{X}^3.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = (y-x)(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2) + (sinh(z) - cosh(z) + 1)(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2) + (sinh(z) - cosh(z) + 1)(\frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2)$

21. Maninova trojice $(\mathbf{5.ii}|\mathbf{6_0})$:

$$[X_1, X_2] = -X_1 + X_2,\ [X_2, X_3] = X_3, [X_3, X_1] = -X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -\tilde{X}^2.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}(e^y - 2e^{-x-y} + e^{-2x-y})(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2)$
$- \frac{1}{2}(e^y - 2 + e^{-2x-y})(\frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2)$

22. Maninova trojice $(\mathbf{5}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = 0$

23. Maninova trojice $(\mathbf{5}|\mathbf{2.i})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1)(\frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 - \frac{\partial}{\partial z}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2)$

24. Maninova trojice $(\mathbf{2.i}|\mathbf{5})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = 0.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^3.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = -y(\frac{\partial}{\partial x}f_1\frac{\partial}{\partial y}f_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1\frac{\partial}{\partial x}f_2)$

25. Maninova trojice $(\mathbf{4}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = 0$

26. Maninova trojice $(\mathbf{4}|\mathbf{2}.\mathbf{ii})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}(1 - e^{2x})(\frac{\partial}{\partial y} f_1 \frac{\partial}{\partial z} f_2 - \frac{\partial}{\partial z} f_1 \frac{\partial}{\partial y} f_2)$

27. Maninova trojice $(\mathbf{3}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = 0$

28. Maninova trojice $(\mathbf{3}|\mathbf{2})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1)(\frac{\partial}{\partial y} f_1 \frac{\partial}{\partial z} f_2 - \frac{\partial}{\partial z} f_1 \frac{\partial}{\partial y} f_2)$

29. Maninova trojice $(\mathbf{3}.\mathbf{ii}|\mathbf{3})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_2 + X_3, [X_3, X_1] = 0.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}_2 - \tilde{X}_3,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}_2 + \tilde{X}_3.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$\{f_1, f_2\} = (e^{-y} + e^{-z} - 2)(\frac{\partial}{\partial x} f_1 \frac{\partial}{\partial y} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1 \frac{\partial}{\partial x} f_2) + (e^{-y} + e^{-z} - 2)(\frac{\partial}{\partial x} f_1 \frac{\partial}{\partial z} f_2 - \frac{\partial}{\partial z} f_1 \frac{\partial}{\partial x} f_2)$

30. Maninova trojice (**3.iii**|**3**):

$$[X_1, X_2] = X_1,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = -X_1.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}_2 - \tilde{X}_3,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}_2 + \tilde{X}_3.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$$\{f_1, f_2\} = (e^{-y-z}-1)(\tfrac{\partial}{\partial x}f_1\tfrac{\partial}{\partial y}f_2 - \tfrac{\partial}{\partial y}f_1\tfrac{\partial}{\partial x}f_2) + (e^{-y-z}-1)(\tfrac{\partial}{\partial x}f_1\tfrac{\partial}{\partial z}f_2 - \tfrac{\partial}{\partial z}f_1\tfrac{\partial}{\partial x}f_2)$$

31. Maninova trojice (**2**|**1**):

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = 0.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$$\{f_1, f_2\} = 0$$

32. Maninova trojice (**1**|**1**):

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = 0.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

příslušná Sklyaninova závorka

$$\{f_1, f_2\} = 0$$

Kapitola 6

Závěr

V průběhu práce jsem se lépe seznámil z danou problematikou a uvědomil jsem si některé skutečnosti z teorie lieovských grup a algeber, které mi v minulosti nebyly zřejmé. Sklyaninův předpis samotný se jevil jako přímá cesta k výsledkům, avšak při hledání příslušných invariantních polí jsem se několikrát potýkal z problémy z kterých vyplynulo, že tato úloha je komplikovaná a vyžaduje nové znalosti.

Samotný výpočet byl přímý a aplikovatelný pro všechny kohraniční lieovské bialgebry. Už na dimenzi 3 byl značně numericky náročný, jak v hledání invariantních polí tak v samotném dosazení do Sklyaninova předpisu.

Ve své bakalářské práci, v které jsem klasifikoval kohraniční lieovské bialgebry dimenze 3 jsem našel 32 různých kohraničních lieovských bialgeber. U 21 z těchto 32 bialgeber se ukázalo, že generuji pomocí Sklyaninova předpisu netriviální Poisson-Lieovu strukturu na příslušné lieově grupě.

Kapitola 7

Dodatek

7.1 Bianchiho algebry

Každou tří-dimenzionální lieovskou algebru je možné převést na jeden z 11 vypsaných tvarů změnou báze. Tyto tvary reprezentují neizomorfní lieovské algebry a jsou známy jako Bianchiho algebry. Pokud se v algebře vyskytuje parametr, pak pro různou volbu parametru jsou algebry neizomorfní.

$9: \ [X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2 \ (\mathrm{so}(3)),$

$8: \ [X_1, X_2] = -X_3, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2 \ (\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})),$

$7_a: \ [X_1, X_2] = -aX_2 + X_3, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, a > 0,$

$7_0: \ [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2$

$6_a: \ [X_1, X_2] = -aX_2 - X_3, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, a \neq 1$

$6_0: \ [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = -X_2$

$5: \ [X_1, X_2] = -X_2, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3$

$4: \ [X_1, X_2] = -X_2 + X_3, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3$

$3: \ [X_1, X_2] = -X_2 - X_3, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + X_3$

$2: \ [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = 0$

$1: \ [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = 0$

7.2 Počítání Vielbeinů

Máme li souvislou a jednoduše souvislou n-dimenzionální Lieovu grupu G mající řešitelnou Lieovu algebru g. Pak každý prvek $g \in G$ můžeme napsat jako

$$g = e^{\alpha_1 T_1} e^{\alpha_2 T_2} \cdots e^{\alpha_n T_n}$$

Kde $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ a $(T_i)_{i=1}^n$ je báze g. Můžeme užít n-tici $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jako souřadnice na G, označme souřadnicové funkcionály jako y^i, tedy $y^i(g) = \alpha_i$

Transformační matici mezi souřadnicovými polemi $\frac{\partial}{\partial y^i}$ a levo-invariantními polmi generovanými $T_i \in g$. Hledáme tedy matici $e^L(g)$ takovou, že

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \big|_g = (e^L(g))_i^k L_{g*}(T_k)$$

Pro libovolnou hladkou funkci $f : G$ a bod $p \in G$ linearní zobrazení $f_* : T_p G_{f(p)} G$ definujeme jako:

$$[f_*(V)]_{f(p)} = \frac{d}{dt} \big|_{(t=0)} f(\gamma_p^V(t))$$

kde $V \in T_p G$ a γ^V je integrální křivka vycházející z bodu $p \in G$.
Je jednoduché najít integrální křivky $\gamma^i(t)$ přislušící vektorům $\frac{\partial}{\partial y^i} |_g$ vycházejících z bodu g. Pokud $g = e^{\alpha_1 T_1} e^{\alpha_2 T_2} \cdots e^{\alpha_n T_n}$ pak

$$\gamma^i(t) = e^{\alpha_1 T_1} \cdots e^{(t+\alpha_i) T_i} \cdots e^{\alpha_n T_n}$$

Nyní už je snadné spočítat $L_{g^{-1}*}(\frac{\partial}{\partial y^i} |_g)$, jelikož z definice pushforwardu výše vyplývá, že můžeme psát g jako $g = e^{\alpha_1 T_1} e^{\alpha_2 T_2} \cdots e^{\alpha_n T_n}$ a proto

$$L_{g^{-1}*}(\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_g) = \frac{d}{dt} \Big|_{(t=0)} L_{g^{-1}}(\gamma^i(t)) = \frac{d}{dt} \big|_{(t=0)} \left\{ e^{-\alpha_n T_n} \cdots e^{-\alpha_i T_i} e^{(t+\alpha_i) T_i} \cdots e^{\alpha_n T_n} \right\} =$$

$$= \frac{d}{dt} \big|_{(t=0)} \left\{ e^{-\alpha_n T_n} \cdots e^{-\alpha_{i+1} T_{i+1}} e^{(t) T_i} e^{\alpha_{i+1} T_{i+1}} \cdots e^{\alpha_n T_n} \right\} =$$

$$= Ad_{(e^{-\alpha_n T_n} \cdots e^{-\alpha_{i+1} T_{i+1}})}(T_i) = \left\langle T^k, Ad_{(e^{-\alpha_n T_n} \cdots e^{-\alpha_{i+1} T_{i+1}})}(T_i) \right\rangle T_k$$

Definujeme li nyní matici $e^L(g)$ jako

$$e^L(e^{\alpha_1 T_1} e^{\alpha_2 T_2} \cdots e^{\alpha_n T_n}) = \left\langle T^k, Ad_{(e^{-\alpha_n T_n} \cdots e^{-\alpha_{i+1} T_{i+1}})}(T_i) \right\rangle,$$

Dostaneme výsledek jelikož:

$$L_{g^{-1}*}(\frac{\partial}{\partial y^i}\big|_g = e^L(g)_i^k T_k$$

a tudíž

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\big|_g = e^L(g)_i^k L_{g*} T_k$$

7.3 Třídimenzionální kohraniční Lieovy bialgebry

Výpis všech tři dimenzionálních kohraničních lieovských bialgeber (Maninových trojic) a jejich r-matice. Příslušné r-matice jsou uvedeny v bázi $\{X_i\}_{i=1}^{3}$ první algebry v Maninově trojiciX_i.

1. Maninova trojice $(\mathbf{9}|\mathbf{1})$:

   $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

   $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$

$$r = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

2. Maninova trojice $(\mathbf{9}|\mathbf{5}|\mathbf{b})$:

   $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

   $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -b\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = b\tilde{X}^3, b > 0.$

$$r = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & -b & c \end{pmatrix}$$

3. Maninova trojice $(\mathbf{8}|\mathbf{1})$:

   $[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

   $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$

$$r = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

4. Maninova trojice $(\mathbf{8}|\mathbf{5.i}|\mathbf{b})$:

$$[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -b\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = b\tilde{X}^3, b > 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & -b & -c \end{pmatrix}$$

5. Maninova trojice $(\mathbf{8}|\mathbf{5.ii}|\mathbf{b})$:

$$[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = b\tilde{X}^2, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -b\tilde{X}^1, b > 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} c & -b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

6. Maninova trojice $(\mathbf{8}|\mathbf{5.iii})$:

$$[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^2, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -(\tilde{X}^1 + \tilde{X}^3).$$

$$r = \begin{pmatrix} c & -1 & 0 \\ 1 & c & -1 \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}$$

7. Maninova trojice $(\mathbf{7_a}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -aX_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Maninova trojice ($\mathbf{7_a}|\mathbf{2.i}$):

$$[X_1, X_2] = -aX_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2a} \\ 0 & \frac{1}{2a} & 0 \end{pmatrix}$$

9. Maninova trojice ($\mathbf{7_a}|\mathbf{2.ii}$):

$$[X_1, X_2] = -aX_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2a} \\ 0 & \frac{-1}{2a} & 0 \end{pmatrix}$$

10. Maninova trojice ($\mathbf{7_0}|\mathbf{1}$):

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ -c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Maninova trojice ($\mathbf{7_0}|\mathbf{5.i}$):

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^3.$$

$$r = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ -c_2 & c_1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Maninova trojice $(\mathbf{6_a}|\mathbf{1})$:

$$[X_1,X_2]=-aX_2-X_3,\ [X_2,X_3]=0,[X_3,X_1]=X_2+aX_3,a>0,a\neq 1.$$
$$[\tilde{X}^1,\tilde{X}^2]=0,\ [\tilde{X}^2,\tilde{X}^3]=0,[\tilde{X}^3,\tilde{X}^1]=0.$$

$$r=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

13. Maninova trojice $(\mathbf{6_a}|\mathbf{2})$:

$$[X_1,X_2]=-aX_2-X_3,\ [X_2,X_3]=0,[X_3,X_1]=X_2+aX_3,a>0,a\neq 1.$$
$$[\tilde{X}^1,\tilde{X}^2]=0,\ [\tilde{X}^2,\tilde{X}^3]=\tilde{X}^1,[\tilde{X}^3,\tilde{X}^1]=0.$$

$$r=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\frac{-1}{2a}\\0&\frac{1}{2a}&0\end{pmatrix}$$

14. Maninova trojice $(\mathbf{6_a}|\mathbf{6_{1/a}.ii})$:

$$[X_1,X_2]=-aX_2-X_3,\ [X_2,X_3]=0,[X_3,X_1]=X_2+aX_3,a>0,a\neq 1.$$
$$[\tilde{X}^1,\tilde{X}^2]=\tilde{X}^1,\ [\tilde{X}^2,\tilde{X}^3]=\tfrac{a+1}{a-1}(\tilde{X}^2+\tilde{X}^3),[\tilde{X}^3,\tilde{X}^1]=\tilde{X}^1.$$

$$r=\begin{pmatrix}0&\frac{-1}{a-1}&\frac{1}{a-1}\\\frac{1}{a-1}&0&0\\\frac{-1}{a-1}&0&0\end{pmatrix}$$

15. Maninova trojice $(\mathbf{6_a}|\mathbf{6_{1/a}.iii})$:

$$[X_1,X_2]=-aX_2-X_3,\ [X_2,X_3]=0,[X_3,X_1]=X_2+aX_3,a>0,a\neq 1.$$
$$[\tilde{X}^1,\tilde{X}^2]=\tilde{X}^1,\ [\tilde{X}^2,\tilde{X}^3]=\tfrac{a-1}{a+1}(-\tilde{X}^2+\tilde{X}^3),[\tilde{X}^3,\tilde{X}^1]=-\tilde{X}^1.$$

$$r=\begin{pmatrix}0&\frac{-1}{a+1}&\frac{-1}{a+1}\\\frac{1}{a+1}&0&0\\\frac{1}{a+1}&0&0\end{pmatrix}$$

16. Maninova trojice $(\mathbf{6_{1/a}.iii}|\mathbf{6_a})$:

$$[X_1, X_2] = X_1,\ [X_2, X_3] = \tfrac{a-1}{a+1}(-X_2 + X_3), [X_3, X_1] = -X_1.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -a\tilde{X}^2 - \tilde{X}^3,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^2 + a\tilde{X}^3, a > 0, a \neq 1.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a+1}{2} & \frac{a+1}{2} \\ \frac{-a-1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-a-1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17. Maninova trojice $(\mathbf{6_0}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = -X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ -c_2 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Maninova trojice $(\mathbf{4.ii}|\mathbf{6_0})$:

$$[X_1, X_2] = (-X_1 + X_2 + X_3),\ [X_2, X_3] = X_3, [X_3, X_1] = -X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = X_1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -X_2.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

19. Maninova trojice $(\mathbf{6_0}|\mathbf{5.i})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = -X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^3.$$

$$r = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ -c_2 & -c_1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

20. Maninova trojice $(\mathbf{6_0}|\mathbf{5.ii})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = -X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^1 + \tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -\tilde{X}^3.$$

$$r = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & -1 \\ -c_2 & -c_1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

21. Maninova trojice $(\mathbf{5.ii}|\mathbf{6_0})$:

$$[X_1, X_2] = -X_1 + X_2,\ [X_2, X_3] = X_3, [X_3, X_1] = -X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -\tilde{X}^2.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

22. Maninova trojice $(\mathbf{5}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

23. Maninova trojice $(\mathbf{5}|\mathbf{2.i})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

24. Maninova trojice ($\mathbf{2.i}|\mathbf{5}$):

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = 0.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^3.$$

$$r = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 1 \\ -c_3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

25. Maninova trojice ($\mathbf{4}|\mathbf{1}$):

$$[X_1, X_2] = -X_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

26. Maninova trojice ($\mathbf{4}|\mathbf{2.ii}$):

$$[X_1, X_2] = -X_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

27. Maninova trojice ($\mathbf{3}|\mathbf{1}$):

$$[X_1, X_2] = -X_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -c \\ 0 & -c & c \end{pmatrix}$$

28. Maninova trojice $(\mathbf{3}|\mathbf{2})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -c - \frac{1}{2} \\ 0 & -c + \frac{1}{2} & c \end{pmatrix}$$

29. Maninova trojice $(\mathbf{3.ii}|\mathbf{3})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_2 + X_3, [X_3, X_1] = 0.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}_2 - \tilde{X}_3,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}_2 + \tilde{X}_3.$$

$$r = \begin{pmatrix} c & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

30. Maninova trojice $(\mathbf{3.iii}|\mathbf{3})$:

$$[X_1, X_2] = X_1,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = -X_1.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}_2 - \tilde{X}_3,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}_2 + \tilde{X}_3.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & c & -c \\ -1 & -c & c \end{pmatrix}$$

31. Maninova trojice $(\mathbf{2}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = 0.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 0 \\ -c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

32. Maninova trojice $(\mathbf{1}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = 0.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = lib.$$

Literatura

[1] L. Hlavatý and L. Šnobl, *Classification of six-dimensional real drinfeld doubles*, International Journal of Modern Physics A, Vol. 17, No. 28 (2002) 4043-4067.

[2] C. Klimčík and P. Ševera, *T-duality and the moment map*, arXiv:hep-th/9610198v2, 1996

[3] Y. Kosmann-Schwarzbach , *Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations*, Lectures Notes in Physics 638, Springer 2004, pp. 107–173.

[4] A.O. Barut, R. Raczka, *Theory of group representation and applications,* PWN Warszawa, 1977

[5] V. Chari and A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1994

[6] Program Matlab verze R2011b

[7] Program Wolfram Matematika 9