**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

**Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská**

**Katedra fyziky**
**Obor: Matematické inženýrství**
**Zaměření: Matematická fyzika**

# Nappi-Wittenův model

# Nappi-Witten's Model

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Autor práce: **Josef Schmidt**
Vedoucí práce: **Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.**
Rok: **2010**

# Obsah

# 1 První dějství

Úkolem této práce je pokusit se zjistit, zda je Nappi-Wittenův takzvaně dualizovatelný či nikoliv; to jest, zda existuje takový Drinfeldův double a příslušná matice $E_0$ (viz. kap. 1.4), které by daly vzniknout tomuto modelu. Předem je třeba říci, že neexistuje žádný obecně platný postup, který by zaručeně fungoval. Jakkoliv je postup získání sigma modelů při zadaném Dinfeldově doublu víceméně mechanický, opačný postup (a zjištění, zda-li je vůbec možný) je o poznání náročnější.

V této kapitolce představíme Nappi-Wittenův model a pojem duálních sigma modelů.

## 1.1 Sigma model

Mějme diferencovatelné variety $\Sigma$ a $M$. Varieta $\Sigma$ nechť je dvourozměrná a je na ní definována metrika $\eta$ a metrická forma objemu $\omega$. Na varietě $M$ mějme metriku $g$ a 2-formu $B$.

Systém popsaný akcí tvaru

$$S = \int_\Sigma \frac{1}{2}\eta^{ij} g_{\mu\nu}\partial_i x^\mu \partial_j x^\nu - \frac{1}{2}\omega^{ij} B_{\mu\nu}\partial_i x^\mu \partial_j x^\nu \mathrm{d}^2 x$$

nazýváme sigma modelem.

Nejdůležitějším případem je situace, kdy $\Sigma = \mathbb{R}^2$ s Minkowského metrikou $\eta = \mathrm{d}\tau \otimes \mathrm{d}\tau - \mathrm{d}\sigma \otimes \mathrm{d}\sigma$ a formou objemu $\omega = \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\sigma$. Po přechodu k souřadnicím světelného kužele $x_\pm = \tau \pm \sigma$ přejde akce na tvar

$$S = \int (g_{\mu\nu} + B_{\mu\nu})\partial_+ x^\mu \partial_- x^\nu \mathrm{d}^2 x$$

Pohybové rovnice nabývají tohoto tvaru

$$\partial_+\partial_- x\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_- x^\alpha \partial_+ x^\beta = 0$$

kde

$$\Gamma^{\alpha\beta}_\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}(F_{\rho\beta,\alpha} + F_{\alpha\rho,\beta} - F_{\alpha\beta,\rho})$$

## 1.2 Wess-Zumino-Wittenův model

Nechť $G$ je kompaktní, jednoduše souvislá Lieova grupa a $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra, po které vyžadujeme, aby byla prostá. Dále mějme 2D Riemannovskou varietu $\Sigma$ a zobrazení $g : \Sigma \to G$. Pak Wess-Zumino-Wittenovým (WZW) modelem rozumíme sigma model s akcí

$$S[g] = -\frac{1}{8\pi}\int_\Sigma \mathcal{K}(g^{-1}\partial^\mu g, g^{-1}\partial_\mu g)\mathrm{d}^2 x + 2\pi S^{WZ}[g]$$

kde $\mathcal{K}$ je Killingova forma algebry $\mathfrak{g}$ a $S^{WZ}$ je tzv. Wess-Zuminův člen, o kterém bude řeč dále.

Integrand $\mathcal{K}(g^{-1}\partial^\mu g, g^{-1}\partial_\mu g)$ přepsaný do diferenciálně geometrické hantýrky nabyde tvaru

$$\sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu}\mathcal{K}(L_{g^{-1}*} g_* \partial_\mu, L_{g^{-1}*} g_* \partial_\nu)$$

Wess-Zuminův člen má tvar

$$S^{WZ}[g] = -\frac{1}{48\pi^2}\int_B \varepsilon^{ijk}\mathcal{K}\left(g^{-1}\frac{\partial g}{\partial y^i}, [g^{-1}\frac{\partial g}{\partial y^j}, g^{-1}\frac{\partial g}{\partial y^k}]\right)\mathrm{d}^3 y$$

kde $B$ je 3D varieta taková, že $\partial B = \Sigma$, zobrazení $g$ je libovolným způsobem rozšířeno na celé $B$ a $[\cdot,\cdot]$ je komutátor na algebře $\mathfrak{g}$.

### 1.3 Nappi-Wittenův model

Nappi-Wittenův model (viz. [1]) je WZW modelem s drobným zobecněním. Jeho základem je 4D Lieova grupa, jejíž algebra má následující nenulové strukturní koeficienty (pro zvolené bazické vektory $(P_1, P_2, J, T)$)

$$[J, P_1] = P_2 \qquad [J, P_2] = -P_1 \qquad [P_1, P_2] = T$$

Je zobecněním WZW modelu v tom smyslu, že použitá algebra není poloprostá. U WZW modelu má v akci použitá Killingova forma následující vlastnosti - bilinearita, symetrie, ad-invariance a nedegenerovanost. Pokud požadujeme zachování těchto vlastostí, tak pro algebru, která není poloprostá, nelze Killingovu formu v definici použít. Místo toho jí nahradíme obecnou formou $\Omega$, která tyto vlastnosti splní a která má ve vší obecnosti následující tvar

$$(\Omega_{ij}) = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kde $k$ a $b$ jsou libovolné konstanty$(k \neq 0)$.

Pro získání akce, která je tvaru

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \mathrm{d}^2\sigma \Omega_{ij} (g^{-1}\partial_\alpha g)^i (g^{-1}\partial^\alpha g)^j + \frac{1}{12\pi} \int_B \mathrm{d}^3\sigma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (g^{-1}\partial^\alpha g)^i (g^{-1}\partial^\beta g)^j (g^{-1}\partial^\gamma g)^k \Omega_{kl} f^l_{ij}$$

musíme vypočíst členy $g^{-1}\partial_\alpha g$. Pro prvky grupy volíme následující parametrizaci

$$g = e^{a_1 P_1 + a_2 P_2} e^{uJ + vT}$$

Přidružené reprezentace jednotlivých bazických vektorů pak vypadají

$$ad_{P_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ad_{P_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ad_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zde vidíme podstatný zádrhel. Postup výpočtu $g^{-1}\partial_\alpha g$ [1] použitý v [2] závisel na znalosti grupového skládání na příslušné grupě, který jsme získali díky tomu, že adjungované reprezentace byly vždy věrné - to v tomto případě nenastává. Touto metodou se nám nepodaří získat zákon skládaní v souřadnici $v$. Možností, jak z toho ven, je celá řada. Můžeme například zkusit najít takovou reprezentaci algebry, která věrná je. Nebo použitím tzv. Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkinovy formule[2] [3] prokomutovat jednotlivé exponenciely - tedy převést výraz

$$e^{a_1^g P_1 + a_2^g P_2} e^{u^g J + v^g T} e^{a_1^h P_1 + a_2^h P_2} e^{u^h J + v^h T}$$

[1]Tento člen má v korektním diferenciálně-geometrickém jazyku zápis $L_{g^{-1}*}(g_*\partial_\alpha)$

[2]Pro zajímavost je uvedená v dodatku

na tvar

$$e^{a_1^{goh}P_1+a_2^{goh}P_2}e^{u^{goh}J+v^{goh}T}$$

Výše dvě uvedené metody jsou však netriviální a ve většině případů těžko použitelné. Pokud se však oprostíme od požadavku znalosti grupové struktury, tak lze použít následující výpočet.

Formální postup vypadá takto

$$g = e^{x_1T_1} \cdot \ldots \cdot e^{x_nT_n}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha g \;\; = \;\; & e^{x_1T_1}(\partial_\alpha x_1)T_1 e^{x_2T_2} \cdot \ldots \cdot e^{x_nT_n} + \\
& e^{x_1T_1}e^{x_2T_2}(\partial_\alpha x_2)T_2 e^{x_3T_3} \cdot \ldots \cdot e^{x_nT_n} + \\
& \ldots \\
& e^{x_1T_1} \cdot \ldots \cdot e^{x_nT_n}(\partial_\alpha x_n)T_n
\end{aligned}$$

Tedy výraz

$$g^{-1}\partial g = e^{-x_nT_n} \cdot \ldots \cdot e^{-x_1T_1}\partial_\alpha(e^{x_1T_1} \cdot \ldots e^{x_nT_n})$$

po rozepsání a drobné upravě[3] vypadá takto

$$\begin{aligned}
e^{-x_nT_n} \cdot \ldots \cdot e^{x_2T_2}(\partial_\alpha x_1)T_1 e^{x_2T_2} \cdot \ldots \cdot e^{x_nT_n} \quad & + \\
e^{-x_nT_n} \cdot \ldots \cdot e^{x_3T_3}(\partial_\alpha x_2)T_2 e^{x_3T_3} \cdot \ldots \cdot e^{x_nT_n} \quad & + \\
\cdots \quad & + \\
e^{-x_nT_n}(\partial_\alpha x_{n-1})T_{n-1}e^{x_nT_n} \quad & + \\
(\partial_\alpha x_n)T_n \quad &
\end{aligned}$$

Jednotlivé členy

$$e^{-x_nT_n} \cdot \ldots \cdot e^{-x_kT_k}T_{k-1}e^{x_kT_k} \cdot \ldots \cdot e^{x_nT_n}$$

nejsou nic jiného než působení adjungované reprezentace grupy na vektory algebry

$$Ad_{(e^{x_kT_k} \cdot \ldots \cdot e^{x_nT_n})^{-1}}T_{k-1}$$

A adjungovanou reprezentaci grupy získame snadno složením exponenciel matic adjungované reprezentace algebry.

$$Ad_{e^{x_kT_k} \cdot \ldots \cdot e^{x_nT_n}} = e^{x_k ad_{T_k}} \cdot \ldots \cdot e^{x_n ad_{T_n}}$$

Po provedení těchto výpočtů už snadno vyčteme koeficienty u jednotlivých bazických vektorů.

Proč tento formální postup funguje? Pro maticové grupy je tento postup správný i po matematické stránce. Stačí si pak jen uvědomit, že ke každé grupě můžeme nalézt izomorfní maticovou realizaci.

Bohužel v našem případě bude postup o něco složitější. Je to způsobeno zvolenou parametrizací prvků grupy, to jest $g = e^{a_1P_1+a_2P_2}e^{uJ+vT}$. Jde o to, že člen $\partial_\alpha a_1P_1 + \partial_\alpha a_2P_2$ obecně nekomutuje s $a_1P_1 + a_2P_2$. Spočtěme si tedy, čemu je roven výraz $\partial_\alpha e^{a_1P_1+a_2P_2}$.

$$\partial_\alpha e^{a_1P_1+a_2P_2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial_\alpha(a_1P_1 + a_2P_2)^n}{n!}$$

[3] Spočívající ve využití toho, že vektory $T_i$ komutují se svými exponencielami $e^{x_iT_i}$

Pro zkrácení zápisu označme $C = a_1 P_1 + a_2 P_2$.

$$\partial_\alpha C^n = \sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k-1} (\partial_\alpha C) C^k$$

Nyní musíme v každém členu prokomutovat $\partial_\alpha C$ na konec.

$$C^{n-k-1}(\partial_\alpha C) C C^{k-1} = C^{n-k}(\partial_\alpha C) C^{k-1} + C^{n-2} \varepsilon_{ij} (\partial_\alpha a_i)\, a_j T =$$

$$= \ldots = C^{n-1} \partial_\alpha C + k C^{n-2} \varepsilon_{ij} (\partial_\alpha a_i)\, a_j T$$

neboť

$$[(\partial_\alpha a_1) P_1 + (\partial_\alpha a_2) P_2, a_1 P_1 + a_2 P_2] = \varepsilon_{ij} (\partial_\alpha a_i)\, a_j T$$

Použitím toho výsledku dostáváme

$$\partial_\alpha C^n = n C^{n-1} \partial_\alpha C + \frac{n(n-1)}{2} C^{n-2} \varepsilon_{ij} (\partial_\alpha a_i)\, a_j T$$

a poté

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial_\alpha C^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C^{n-1}}{(n-1)!} \partial_\alpha C + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{C^{n-2}}{(n-2)!} \varepsilon_{ij} (\partial_\alpha a_i)\, a_j T =$$

$$= e^C \partial_\alpha C + e^C \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (\partial_\alpha a_i)\, a_j T$$

Člen s vektory $J$ a $T$ je bez problému, neboť tyto vektory spolu komutují. Takže konečně můžeme psát

$$\partial_\alpha g = e^{a_1 P_1 + a_2 P_2} ((\partial_\alpha a_1) P_1 + (\partial_\alpha a_2) P_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (\partial_\alpha a_i)\, a_j T) e^{uJ + vT} + g \partial_\alpha (uJ + vT)$$

a tedy

$$g^{-1} \partial_\alpha g = e^{-(uJ+vT)} ((\partial_\alpha a_1) P_1 + (\partial_\alpha a_2) P_2) e^{uJ+vT} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (\partial_\alpha a_i)\, a_j T + (\partial_\alpha u) J + (\partial_\alpha v) T$$

Potřebná adjungovaná reprezentace má tvar

$$Ad_{e^{uJ+vT}} = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A výsledkem tedy je

$$\begin{aligned} g^{-1} \partial_\alpha g \quad = \quad & P_1 (\cos u \partial_\alpha a_1 - \sin u \partial_\alpha a_2) + \\ & P_2 (\sin u \partial_\alpha a_1 + \cos u \partial_\alpha a_2) + \\ & J (\partial_\alpha u) + \\ & T \left( \partial_\alpha v + \frac{1}{2} (\partial_\alpha a_1)\, a_2 - \frac{1}{2} (\partial_\alpha a_2)\, a_1 \right) \end{aligned}$$

Potom

$$\Omega_{ij} (g^{-1} \partial_\alpha g)^i (g^{-1} \partial^\alpha g)^j = \partial_\alpha a_1 \partial^\alpha a_1 + \partial_\alpha a_2 \partial^\alpha a_2 - \frac{a_1}{2} (\partial_\alpha a_2 \partial^\alpha u + \partial_\alpha u \partial^\alpha a_2) +$$

$$\frac{a_2}{2}(\partial_\alpha a_1 \partial^\alpha u + \partial_\alpha a_1 \partial^\alpha u) + b\partial_\alpha u \partial^\alpha u + \partial_\alpha u \partial^\alpha v + \partial_\alpha v \partial^\alpha u$$

Stejně spočteme i člen

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(g^{-1}\partial^\alpha g)^i (g^{-1}\partial^\beta g)^j (g^{-1}\partial^\gamma g)^k \Omega_{kl} f^l_{ij}$$

Po převedení akce na tvar

$$S = \int (g_{\mu\nu} + B_{\mu\nu})\partial_\alpha x^\mu \partial^\alpha x^\nu \mathrm{d}^2\sigma$$

dostáváme $\sigma$-model s

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_1}{2} & 0 \\ \frac{a_2}{2} & -\frac{a_1}{2} & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ -u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.4 Vzájemně duální $\sigma$-modely

V této kapitolce v rychlosti shrneme postup pro získání vzájemně duální sigma modelů v Poisson-Lieově smyslu (dle [4]).

Mějme tedy Drinfeldův double $D$. To znamená, že máme direktní rozklad algebry $\mathfrak{D}$ (Lieova algebra grupy $D$) do dvou maximálně izotropních (vůči dané symetrické bilineární nedegenerované ad-invariantní formě) podalgeber $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$ (ke kterým přísluší grupy $G$ a $\tilde{G}$ a které tvoří tzv. Maninovu trojici $(\mathfrak{D}, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$).

Dále mějme regulární matici $E_0 \in \mathbb{R}^{n,n}$ (kde $n$ je dáno dimenzí Drinfeldova doublu, která je $2n$).

Potom $\sigma$-model s akcí pro zobrazení $g : \mathbb{R}^2 \to G$

$$S = \int F_{\mu\nu}(g)\partial_+ g^\mu \partial_- g^\nu \mathrm{d}^2 x$$

získáme takto

$$F_{\mu\nu}(g) = e^i_\mu(g) E_{ij}(g) e^j_\nu(g)$$

kde $e^i_\mu$ jsou komponenty pravoinvariantních forem na grupě G (získaných například pomocí $g^{-1}\partial g = \partial g^\mu e^i_\mu T_i$) a matice $E$ je dána vztahem

$$E(g) = (E_0^{-1} + \Pi(g))^{-1} \qquad \Pi(g) = b(g)a(g)^{-1}$$

Matice $a(g)$ a $b(g)$ jsou submatice adjungované reprezentace prvku $g^{-1}$

$$Ad_{g^{-1}} = \begin{pmatrix} a(g^{-1})^T & b(g^{-1})^T \\ 0 & d(g^{-1})^T \end{pmatrix}$$

Příslušný duální model

$$S = \int \tilde{F}_{\mu\nu}\partial_+ \tilde{g}^\mu \partial_- \tilde{g}^\nu$$

získáme, pokud prohodíme role grup $G$ a $\tilde{G}$. Tedy

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{g}) = e^i_\mu(\tilde{g}) \tilde{E}_{ij}(\tilde{g}) e^j_\nu(\tilde{g})$$

$$\tilde{E}(\tilde{g}) = (\tilde{E}_0^{-1} + \tilde{\Pi}(\tilde{g}))^{-1} \qquad \tilde{\Pi}(\tilde{g}) = \tilde{b}(\tilde{g})\tilde{a}(\tilde{g})^{-1}$$

$$Ad_{\tilde{g}^{-1}} = \begin{pmatrix} \tilde{d}(\tilde{g}^{-1})^T & 0 \\ \tilde{b}(\tilde{g}^{-1})^T & \tilde{a}(\tilde{g}^{-1})^T \end{pmatrix}$$

Přičemž matice $E_0$ a $\tilde{E}_0$ jsou svázány vztahem

$$E_0\tilde{E}_0 = I$$

# 2 Druhé dějství

V této kapitolce nastíníme několik postupů, které by mohly vést k rozřešení otázky dualizovatelnosti Nappi-Wittenova modelu.

## 2.1 Klimčík-Ševerovy rovnice

Jednou z možností je využít Klimčík-Ševerovy rovnice

$$\mathcal{L}_{v_i}(F)_{\mu\nu} = F_{\mu\kappa} v_j^\kappa \tilde{f}_i^{jk} v_k^\lambda F_{\lambda\nu}$$

Pokud se nám podaří zvolit takovou algebru $\mathfrak{g}$ generující na grupě $G$ bazická levoinvariantní pole $v_i$ a zároveň takovou algebru $\tilde{\mathfrak{g}}$ mající strukturní koeficienty $\tilde{f}_i^{jk}$, že jsou Klimčík-Ševerovy rovnice splněny, pak víme, že je sigma model daný tenzorem $F$ dualizovatelný. Protože $G$ a $\tilde{G}$ musí tvořit Drinfeldův double, nemáme úplně svobodnou volbu algeber $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$. Jejich direktní součet $\mathfrak{g} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$ musí také být Lieovou algebrou, přicemž komutátory "křížových"vektorů jsou dané vztahem

$$[T_i, \tilde{T}_j] = f_{ki}^j \tilde{T}_k + \tilde{f}_i^{jk} T_k$$

kde $T_i$ resp. $\tilde{T}_i$ jsou bazické vektory $\mathfrak{g}$ resp. $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Háček je v tom, že pokud máme pouze zadaný tenzor $F$ a nic víc, tak nemáme žádné vodítko, jak algebry $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$ volit. Navíc, pokud pro námi zvolené algebry $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$ Klimčík-Ševerovy rovnice splněné nejsou, tak o dualizovatelnosti nemůžeme říci nic.

V případě Nappi-Wittenova modelu ovšem známe původ $F$. Pokud bychom si odmysleli Wess-Zuminův člen, tak se odvození shoduje s klasickou konstrukcí sigma modelu, kde bychom za matici $E_0$ zvolili matici $\Omega$, za algebru $\mathfrak{g}$ zvolili onu "Nappi-Wittenovu algebru"a na grupě $\tilde{G}$ zvolili abelovskou algebru. Nabízí se tedy možnost zkusit vzít za $v_i$ levoinvariantní pole Nappi-Wittenovy algebry a pokusit se najít strukturní koeficienty $\tilde{f}_i^{jk}$ tak, aby Klimčík-Ševerovy rovnice byly splněny.

## 2.2 Symetrie tenzoru $F$

Další možný postup je popsán v práci [5]. Nejprve nalezneme podprostor vektorových polí $P \subset \mathcal{X}(G)$ takový, že

$$P = \{\xi \in \mathcal{X}(G) \,|\, \mathcal{L}_\xi F = 0\}$$

Tento podprostor je zároveň algebrou vektorových polí s operací komutátoru díky vlastnosti Lieovy derivace

$$\mathcal{L}_{[\xi,\zeta]} = [\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\zeta]$$

Z této algebry nyní vybereme 4D podalgebru - označme vektorová pole, ze kterých se skládá, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$. K této algebře samozřejmě existuje příslušná Lieova grupa $H$. Sestrojme na ní algebru levoinvariantních vektorových polí $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ takovým způsobem, že komutační relace jsou stejné jako v případě vektorových polí $\xi_i$. Naším úkolem je nyní nalézt difeomorfismus grup[4] $f : H \to G$ takový, že platí $f_* v_i = \xi_i$. Pokud se nám toto podaří a definujeme-li si tenzor $F' = f^* F$, tak pak bude platit

$$\mathcal{L}_{v_i} F' = 0$$

[4]Nebo alespoň difeomorfismus mezi okolími jednotek daných grup

Což není nic jiného než splněné Klimčík-Ševerovy rovnice s tenzorem $F'$ definovaného na grupě $H$ s levoinvariantními vektorovými poli $v_i$ a s nulovými strukturními koeficienty $\tilde{f}_k^{ij}$.

Zároveň je ale možno pohlížet na tento difeomorfismus jako na pouhou změnu souřadnic na grupě $G$ a tím pádem jsme prokázali dualizovatelnost sigma modelu s tenzorem $F$.

### 2.3 Nápovědy

V článcích [1] a [6] jsou uvedeny zmínky o dualitě daného modelu.

Článek [1], v němž je studovaný model zaveden, hovoří takto: "As there are three commuting isometries, other interesting geometries are expected to emerge via $O(3,3)$ duality."

Dále článek [6] rozvíjí tuto zmínku v následujícím směru: Jestliže vezmeme akci Nappi-Wittenova modelu

$$S = \frac{k}{2\pi}\int \partial a_i \bar{\partial} a_i - \frac{1}{2}\varepsilon^{ij} a_i(\partial a_j \bar{\partial} u + \bar{\partial} a_j \partial u) + b\partial u \bar{\partial} u + \partial u \bar{\partial} v + \bar{\partial} u \partial v + u\varepsilon^{ij}\partial a_i \bar{\partial} a_j$$

a přejdeme k souřadnicím $a_1 = r\cos\theta$, $a_2 = r\sin\theta$, tak poté integrací per partes získáme akci

$$S = \frac{k}{2\pi}\int \partial r\bar{\partial} r + r^2\partial u\bar{\partial} u + b\partial u\bar{\partial} u + \partial u\bar{\partial} v + \bar{\partial} u\partial v \tag{1}$$

Pokud začneme z plochého prostoru v souřadnicích $r$, $\theta$, $u$, $v$ a provedeme $O(3,3)$ transformaci v rovině $\theta$, $u$, $v$, tak dostaneme akci (1). Odpovídající $O(3,3)$ transformace je dána

$$\hat{a} = (d^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{b} = 0 \qquad \hat{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jak se ovšem dočteme v závěru článku [1], pokud provedeme transformaci souřadnic

$$a_1 = a\cos u \qquad a_2 = f\sin u \qquad v = v + \frac{1}{2}af\sin u \qquad u = u$$

tak metrika přejde na tvar

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}f^2 + 2\mathrm{d}a\mathrm{d}f\cos u + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + b\mathrm{d}u^2$$

která má tři komutující symetrie a to

$$a \to a + c_1 \qquad f \to f + c_2 \qquad v \to v + c_3$$

Tedy veškeré poznámky týkající se duality jsou velmi pravděpodobně spojeny pouze s metrickým tenzorem $g$ a nikoliv s tenzorem $F$.

# 3 Třetí dějství

## 3.1 Klimčík-Ševerovy rovnice

Nejprve se podíváme na to, jaké algebry $\tilde{\mathfrak{g}}$ jsou přípustné, aby $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$ tvořily rozklad Lieovy algebry Drinfeldova doublu. Jedná se tedy o to, aby $\mathfrak{g} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$ splňovala Jacobiho identity. Bazické vektory algebry $\mathfrak{g}$ označíme $(T_1, T_2, T_3, T_4)$ se strukturními koeficienty $[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_k$, u algebry $\tilde{\mathfrak{g}}$ mějme vektory $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ a strukturní koeficienty zavedeme jako $[X_i, X_j] = \tilde{f}_{ij}^k X_k$. Máme tři typy Jacobiho identit, ze kterých získáme omezující rovnice pro koeficienty $\tilde{f}_{ij}^k$. Nejprve, že samotná algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ je Lieova typu

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0$$

a poté dvě rovnice pro vektory jak z algebry $\mathfrak{g}$, tak i $\tilde{\mathfrak{g}}$

$$[T_i, [T_j, X_k]] + [T_j, [X_k, T_i]] + [X_k, [T_i, T_j]] = 0$$

$$[T_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, T_i]] + [X_k, [T_i, X_j]] = 0$$

Po rozepsání těchto rovnic pomocí strukturních koeficientů máme

$$X_l(\tilde{f}_{jk}^m \tilde{f}_{im}^l + \tilde{f}_{ki}^m \tilde{f}_{jm}^l + \tilde{f}_{ij}^m \tilde{f}_{km}^l) = 0 \tag{2}$$

$$T_l(\tilde{f}_{km}^j f_{im}^l - \tilde{f}_{km}^i f_{jm}^l + f_{mj}^k \tilde{f}_{ml}^i - f_{mi}^k \tilde{f}_{ml}^j - f_{ij}^m \tilde{f}_{kl}^m) + X_l(f_{mj}^k f_{li}^m - f_{mi}^k f_{lj}^m - f_{ij}^m f_{lm}^k) = 0 \tag{3}$$

$$T_l(\tilde{f}_{jk}^m \tilde{f}_{ml}^i + \tilde{f}_{km}^i \tilde{f}_{jl}^m - \tilde{f}_{jm}^i \tilde{f}_{kl}^m) + X_l(\tilde{f}_{jk}^m f_{li}^m - f_{mi}^k \tilde{f}_{jm}^l + \tilde{f}_{km}^i f_{lm}^j + f_{mi}^j \tilde{f}_{km}^l - \tilde{f}_{jm}^i f_{lm}^k) = 0 \tag{4}$$

V rovnicích (3) a (4) u vektorů $X_l$ resp. $T_l$ se jedná o Jacobiho identity pro algebry $\mathfrak{g}$ resp. $\tilde{\mathfrak{g}}$[5]. Řešením lineárních rovnic v (3) a (4) dostaneme takovouto možnou algebru

$$\tilde{f}_{14}^2 = -\tilde{f}_{24}^1 = c_1 \qquad \tilde{f}_{14}^1 = \tilde{f}_{24}^2 = c_2 \qquad \tilde{f}_{12}^2 = \tilde{f}_{13}^3 = \tilde{f}_{34}^1 = c_3 \qquad \tilde{f}_{23}^3 = \tilde{f}_{34}^2 = -\tilde{f}_{12}^1 = c_4$$

kde $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4 \in \mathbb{R}$ jsou volné parametry, stějně jako koeficienty $\tilde{f}_{14}^3$ a $\tilde{f}_{24}^3$. Ostatní koeficienty[6] jsou nulové. S těmito omezeními na mysli pak rovnice (2) nabývají tvaru

$$c_1 c_3 - c_2 c_4 = 0 \qquad c_2 c_3 + c_1 c_4 = 0 \qquad c_3^2 + c_4^2 = 0$$

které jsou splněny jen a pouze pro $c_3 = c_4 = 0$. Výsledná algebra kompatibilní s Nappi-Wittenovou algebrou, aby dohromady tvořily algebru Drinfeldova doublu, má tedy tvar

$$[X_1, X_4] = c_2 X_1 + c_1 X_2 + \tilde{f}_{14}^3 X_3$$

$$[X_2, X_4] = -c_1 X_1 + c_2 X_2 + \tilde{f}_{24}^3 X_3$$

Nyní zaměříme pozornost na samotné Klimčík-Ševerovy rovnice.

$$\mathcal{L}_{v_i}(F)_{\mu\nu} = F_{\mu\kappa} v_j^\kappa \tilde{f}_i^{jk} v_k^\lambda F_{\lambda\nu}$$

Pro výpočet potřebujeme znát levoinvariantní vektorová pole $v_i$. Jak je získat, se dozvíme za okamžik.

[5] Jak lze snadno nahlédnout za použití vlastnosti $f_{ij}^k = -f_{ji}^k$

[6] Samozřejmě mám na mysli pouze koeficienty $\tilde{f}_{ij}^k$, kde $i < j$; aneb máme pořád na mysli vlastnost $\tilde{f}_{ij}^k = -\tilde{f}_{ji}^k$

### 3.1.1 Intermezzo diferenciální geometrie

Mějme levoinvariantní formy $\alpha^\mu$, $\alpha^\mu_\nu(e) = \delta^\mu_\nu$, tzn.

$$\alpha^\mu(e) = dx^\mu(e) \qquad \alpha^\mu_\nu(g) = (L_{g*}(e)\alpha^\mu(e))_\nu = \left.\frac{\partial L^\lambda_{g^{-1}}}{\partial x^\nu}\right|_g \delta^\mu_\lambda = \left.\frac{\partial L^\mu_{g^{-1}}}{\partial x^\nu}\right|_g$$

A definujeme-li nyní složky vektorových polí $(X_\mu)^\nu(g) = X^\nu_\mu(g)$ tím způsobem, že matice $X^\nu_\mu(g)$ splňuje vztah $X^\lambda_\mu \alpha^\nu_\lambda = \delta^\nu_\mu$; tak vektorová pole $X_\mu$ budou tvořit levoinvariantní vektorová pole s vlastností $X_\mu(e) = \partial_\mu$. Snadno ověříme, že tomu tak skutečně je.

$$\alpha^\nu(X_\mu) = (L_{g*}(e)dx^\nu)(L_{g*}(e)\partial_\mu) = \left.\frac{\partial L^\lambda_{g^{-1}}}{\partial x^\kappa}\right|_g \delta^\nu_\lambda \left.\frac{\partial L^\kappa_g}{\partial x^\rho}\right|_e \delta^\rho_\mu = \left.\frac{\partial L^\nu_{g^{-1}}}{\partial x^\kappa}\right|_g \left.\frac{\partial L^\kappa_g}{\partial x^\mu}\right|_e = \delta^\nu_\mu$$

Poslední rovnost platí, neb komplikovaný výraz není nic jiného než Jacobiho matice zobrazení $L_{g^{-1}} \circ L_g = id$. Takže závěr je, že matici složek levoinvariantních vektorových polí získáme prostou inverzí matice složek levoinvariantních forem.

Dalším tvrzením je, že matice $e^j_i$ definovaná předpisem $g^{-1}\partial_\mu g = (\partial_\mu x_i)e^j_i T_j$ je maticí složek levoinvariantních forem. Opět snadno ověříme výpočtem členu $g^{-1}\partial_\mu g$

$$g^{-1}\partial_\mu g = L_{g^{-1}*}(g)\,(g_*\partial_\mu) = L_{g^{-1}*}(g)\,((\partial_\mu x^i)\partial^{(g)}_i) = (\partial_\mu x^i)L_{g^{-1}*}(g)\partial^{(g)}_i = (\partial_\mu x^i) \left.\frac{\partial L^j_{g^{-1}}}{\partial x^i}\right|_g T_j$$

Nyní nám již nic nebrání pokračovat ve výpočtu. Vypišme tedy matici $e^j_i$ v našem konkrétním případě

$$e^j_i = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & \frac{1}{2}a_2 \\ -\sin u & \cos u & 0 & -\frac{1}{2}a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A její inverzí tedy získáme složky levoinvariantních vektorových polí

$$v^j_i = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 & -\frac{1}{2}(a_1 \sin u + a_2 \cos u) \\ \sin u & \cos u & 0 & \frac{1}{2}(a_1 \cos u - a_2 \sin u) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A postupně rozepsaná vektorová pole

$$v_1 = \begin{pmatrix} \cos u \\ -\sin u \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(a_1 \sin u + a_2 \cos u) \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \sin u \\ \cos u \\ 0 \\ \frac{1}{2}(a_1 \cos u - a_2 \sin u) \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lieovu derivaci spočteme snadno podle vzorce

$$\mathcal{L}_\xi(F)_{\mu\nu} = \xi^\lambda F_{\mu\nu,\lambda} + \xi^\lambda{}_{,\mu} F_{\lambda\nu} + \xi^\lambda{}_{,\nu} F_{\mu\lambda}$$

a po dosazení $\xi = v_i$ dostaneme

$$\mathcal{L}_{v_1}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\sin u - u\cos u & 0 \\ 0 & 0 & -2\cos u + u\sin u & 0 \\ -2\sin u + u\cos u & -2\cos u - u\sin u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{v_2}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\cos u - u\sin u & 0 \\ 0 & 0 & -2\sin u - u\cos u & 0 \\ 2\cos u + u\sin u & -2\sin u + u\cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{v_3}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L}_{v_4}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ještě než přistoupíme k výpočtu pravé strany Klimčík-Ševerových rovnic[7] zamyslíme se nad vlastním řešením těchto rovnic. Vzhledem k tomu, že $\tilde{f}_i^{jk}$ jsou číselné konstanty, tak stačí pouze výrazy rozdělit na lineárně nezávislé funkce $f_\iota(a_1, a_2, u, v)$ a dát do rovnosti koeficienty stojící u nich.

$$\sum_\iota \alpha_L^{(\iota,k)} f_\iota(a_1, a_2, u, v) = \sum_\iota \left( \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(\iota,k)} \tilde{f}_{ij}^k \right) f_\iota(a_1, a_2, u, v)$$

kde $\alpha_L^{(\iota,k)}$ jsou koeficienty získané z výpočtu Lieovy derivace dle vektorového pole $v_k$. Zároveň platí podmínka lineární nezávislosti

$$\sum_\iota \beta_\iota f_\iota(a_1, a_2, u, v) \equiv 0 \quad \text{pouze, pokud} \quad \forall \iota\, (\beta_\iota = 0)$$

Dostaneme tedy lineární rovnice pro $\tilde{f}_{ij}^k$ tvaru

$$\alpha_L^{(\iota,k)} - \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(\iota,k)} \tilde{f}_{ij}^k = 0$$

Takovéto sady rovnic samozřejmě dostaneme pro každou složku tenzorové rovnice.

Pokud vezmeme v úvahu omezení, která jsme vypočetli pro algebru $\tilde{\mathfrak{g}}$, tak rovnice pro $\xi = v_4$ jsou splněny z důvodu $\tilde{f}_{ij}^4 = 0$.

Pro $\xi = v_3$ vypíšeme rovnice pro první dvě tenzorové složky (při jejich psaní zatím zapomeneme na omezení kladená na algebru $\tilde{\mathfrak{g}}$)

$$2\tilde{f}_{12}^3 + \tilde{f}_{13}^3 u \sin u - \tilde{f}_{23}^3 u \cos u = 0$$

[7] Z důvodu zachování sumační konvence a také zažitého zápisu v oboru dualizovatelných sigma modelů jsou koeficienty algebry $\tilde{\mathfrak{g}}$ zapsány s přehozenými indexy; tzn. místo $\tilde{f}_{ij}^k$ píšeme $\tilde{f}_k^{ij}$

$$\tilde{f}^3_{12}u^2 - \tilde{f}^3_{12} + \tilde{f}^3_{23}(a_2\cos u) - \tilde{f}^3_{23}a_1\cos u + (\tilde{f}^3_{13} + \tilde{f}^3_{23})a_1 - (\tilde{f}^3_{13} + \tilde{f}^3_{23})a_2 u - \tilde{f}^3_{13}a_2\sin u + \tilde{f}^3_{13}a_1\sin u = 1$$

A teď se na ně zadíváme s tím, že algebraická omezení bereme v patrnost. První rovnice je splněna, neboť příslušné strukturní koeficienty jsou nulové. Ale bohužel u druhé rovnice musíme pro její splnění vyžadovat $\tilde{f}^3_{12} = -1$, což není možné.

Tímto způsobem se tedy nepodařilo ukazát, zda je Nappi-Wittenův model dualizovatelný. Povedlo se ukázat, že není dualizovatelný za použití Nappi-Wittenovy algebry. Nicméně neméně zajímavou otázkou zůstavá, které tenzory $F$ jsou dualizovatelné s Nappi-Wittenovou algebrou v roli algebry $\mathfrak{g}$.

## 3.2 Klasifikace Drinfeldových doublů

Máme-li dva Drinfeldovy doubly s algebrami $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}'$ a existuje-li zobrazení $I : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, které je izomorfismem algeber $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}'$ a které zároveň respektuje bilineární formu definovanou na doublech, tzn.

$$\langle X, Y\rangle_{\mathcal{D}} = \langle I(X), I(Y)\rangle_{\mathcal{D}'}$$

pak říkáme, že jsou dané Drinfeldovy doubly izomorfní. Uvažujme dále Maninovy trojice $(\mathcal{D}, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ a $(\mathcal{D}', \mathfrak{g}', \tilde{\mathfrak{g}}')$. Máme-li nyní izomorfismus Drinfeldových doublů $I$ respektující rozklad algeber $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}'$, tzn.

$$I(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}' \qquad I(\tilde{\mathfrak{g}}) = \tilde{\mathfrak{g}}'$$

hovoříme o izomorfismu Maninových trojic.

Naším cílem je najít neizomorfní Maninovy trojice, kde v roli algebry $\mathfrak{g}$ vystupuje Nappi-Wittenova algebra. Pro tyto trojice pak sestrojíme dualizovatelné sigma modely, kde za matici $E_0$ zvolíme matici $\Omega$. Na závěr se pak podíváme na to, zda-li jednotlivé dvojice trojic nejsou pouze různým rozkladem téhož Drinfeldova doublu.

Při hledání izomorfismů Maninových trojic vypadá nejobecnější transformace báze (v blokovém tvaru) takto

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

V prvé řadě se ovšem musíme omezit pouze na takové transformace, které zachovávají kanonický tvar bilinearní formy, tj.

$$\langle T_i, \tilde{T}_j\rangle = \delta_{ij}$$

Toto omezení nám určuje tvar matice $B = A^{-T}$.

Hledejme nyní takové matice $A$, které ponechávají strukturní koeficienty Nappi-Wittenovy algebry invariantní. Pokud tedy

$$[T_i, T_j] = f^k_{ij}T_k \qquad T_i = A_{ij}T'_j \qquad [T'_i, T'_j] = f'^k_{ij}T'_k$$

pak vztah pro nové koeficienty je následující

$$f'^k_{ij} = A_{lk}A^{-1}_{jn}A^{-1}_{im}f^l_{mn}$$

přičemž naším požadavkem je $f'^k_{ij} = f^k_{ij}$. To dává rovnice pro prvky matice $A$; pro praktický výpočet se ovšem více hodí vzorec bez inverzí

$$A_{il}A_{jm}f^k_{lm} - f^n_{ij}A_{nk} = 0$$

Řešením těchto rovnic získáme následující transformační matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mp\alpha & 0 & A_{14} \\ \alpha & 0 & 0 & A_{24} \\ \mp\frac{A_{24}}{\alpha} & \frac{A_{14}}{\alpha} & \pm 1 & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \pm\alpha^2 \end{pmatrix} \qquad \alpha, A_{14}, A_{24}, A_{34} \in \mathbb{R} \qquad \alpha \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & A_{14} \\ 0 & \pm\alpha & 0 & A_{24} \\ \mp\frac{A_{14}}{\alpha} & -\frac{A_{24}}{\alpha} & \pm 1 & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \pm\alpha^2 \end{pmatrix} \qquad \alpha, A_{14}, A_{24}, A_{34} \in \mathbb{R} \qquad \alpha \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} \beta & \pm\alpha & 0 & A_{14} \\ \alpha & \mp\beta & 0 & A_{24} \\ \pm\frac{\alpha A_{24}+\beta A_{14}}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\alpha A_{14}-\beta A_{24}}{\alpha^2+\beta^2} & \mp 1 & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \mp(\alpha^2+\beta^2) \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, A_{14}, A_{24}, A_{34} \in \mathbb{R} \qquad \alpha, \beta \neq 0$$

Mezi důležité speciální případy transformací patří: škálování $S_\alpha$, prohazování vektorů $T_1$ a $T_2$ $P$ a "míchání"vektorů $T_1$ a $T_2$ $M_{\alpha,\beta}$.

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2+\beta^2 \end{pmatrix}$$

Vrhněme se tedy nyní na hledání neizomorfních algeber (s transformacemi omezenými pouze na výše nalezené[8]) tvořených vektory $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ s komutačními relacemi

$$[X_1, X_4] = c_2 X_1 + c_1 X_2 + f_1 X_3$$

$$[X_2, X_4] = -c_1 X_1 + c_2 X_2 + f_2 X_3$$

Jednotlivé případy si rozdělíme podle dimenze $[\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}]$.

### 3.2.1 $\dim[\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}] = 0$

Tento případ nastane pro $c_1 = c_2 = f_1 = f_2 = 0$. Dostaneme abelovskou algebru a příslušnou Maninovu trojici budeme značit $\langle NW, A \rangle$.

### 3.2.2 $\dim[\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}] = 1$

V tomto případě požadujeme, aby vektory $(c_2, c_1, f_1, 0)$ a $(-c_1, c_2, f_2, 0)$ byly nenulové a lineárně zavislé. To se stane tehdy, pokud $c_1 = c_2 = 0$ a zároveň $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$. Komutační relace tvaru

$$[X_1, X_4] = f_1 X_3 \qquad [X_2, X_4] = f_2 X_3$$

lze ovšem vždy převést transformacemi $S_\alpha$ a $M_{\alpha,\beta}$ na tvar

$$[X_1, X_4] = X_3$$

Maninovu trojici s touto algebrou označíme $\langle NW, I \rangle$.

[8] A stále máme na mysli onu transpozici, kterou je třeba s transformací provést

### 3.2.3 $\dim[\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\mathfrak{g}}]=2$

Lineární nezávislost vektorů stojících na pravé straně komutačních relací zajistíme podmínkou $c_1^2+c_2^2\neq 0$. Koeficienty $f_1$ a $f_2$ mohou být libovolné. Použijeme-li transformaci tvaru

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A_{14} \\ 0 & 1 & 0 & A_{24} \\ -A_{14} & -A_{24} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

odstraníme z komutantů vektor $X_3$, tzn. dostaneme

$$[X_1,X_4]=c_2X_1+c_1X_2 \qquad [X_2,X_4]=-c_1X_1+c_2X_2$$

Naopak koeficienty $c_1$ a $c_2$ lze pouze škálovat $\alpha^2$ a provést změnu $c_2\to -c_2$. S těmito poznatky již snadno určíme jednotlivé neizomorfní algebry. Jsou to

$$\begin{array}{llll} \text{pro} \quad c_1>0, c_2=0, f_{12}\in\mathbb{R} & [X_1,X_4]=X_2 & [X_2,X_4]=-X_1 & \\ \text{pro} \quad c_1<0, c_2=0, f_{12}\in\mathbb{R} & [X_1,X_4]=-X_2 & [X_2,X_4]=X_1 & \\ \text{pro} \quad c_1\in\mathbb{R}, c_2\neq 0, f_{12}\in\mathbb{R} & [X_1,X_4]=X_1+cX_2 & [X_2,X_4]=-cX_1+X_2 & (c=c_1/c_2) \end{array}$$

Tyto trojice po řadě označíme $\langle NW, II_+\rangle$, $\langle NW, II_-\rangle$, $\langle NW, III_c\rangle$.

## 3.3 Sigma modely pro jednotlivé Maninovy trojice

V této kapitolce přichází na řadu výpočet sigma modelů pro jednotlivé neizomorfní Maninovy trojice. Jak už bylo řečeno, za matici $E_0$ bude volena matice $\Omega$ použitá při konstrukci Nappi-Wittenova modelu. Budeme uvádět pouze tvary výsledných tenzorů $F$ - výpočet je dostatečně popsán v [2] a kapitolách 1.3 a 1.4.

### 3.3.1 Maninova trojice $\langle NW, A\rangle$

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_1}{2} & 0 \\ \frac{a_2}{2} & -\frac{a_1}{2} & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Skutečně nám tedy vyšla metrika $g$ Nappi-Wittenova modelu, což byl hlavní důvod pro zkoumání řešení Klimčík-Ševerových rovnic s Nappi-Wittenovou algebrou v roli algebry $\mathfrak{g}$.

### 3.3.2 Maninova trojice $\langle NW, I\rangle$

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_2}{2}+\sin u & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_1}{2}+\cos u-1 & 0 \\ \frac{a_2}{2}-\sin u & -\frac{a_1}{2}-\cos u+1 & b+2(\cos u-1) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.3.3 Maninova trojice $\langle NW, II_{\pm}\rangle$

$$F_{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_2}{2} + a_2\cos u - a_1\sin u & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_1}{2} - a_2\sin u - a_1\cos u & 0 \\ \frac{a_2}{2} - a_2\cos u + a_1\sin u & -\frac{a_1}{2} + a_2\sin u + a_1\cos u & c - a_1^2 - a_2^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_2}{2} - a_2\cos u + a_1\sin u & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_1}{2} + a_2\sin u + a_1\cos u & 0 \\ \frac{a_2}{2} + a_2\cos u - a_1\sin u & -\frac{a_1}{2} - a_2\sin u - a_1\cos u & c - a_1^2 - a_2^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.3.4 Maninova trojice $\langle NW, III_c\rangle$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_2}{2} + K_1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_1}{2} + K_2 & 0 \\ \frac{a_2}{2} - K_1 & -\frac{a_1}{2} - K_2 & b - (1+c^2)(a_1^2 + a_2^2) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kde

$$K_1 = (a_1 + a_2 c)\cos u + (-a_1 c + a_2)\sin u$$

$$K_2 = (-a_1 c + a_2)\cos u - (a_1 + a_2 c)\sin u$$

## 3.4 Pokračování klasifikace Drinfeldových doublů

Pro přehlednost ještě jednou uveďme jednotlivé neizomorfní Maninovy trojice

| **Typ** | **Pro** | | | | **Kanonický tvar** |
|---|---|---|---|---|---|
| A | $c_1 = 0$ | $c_2 = 0$ | $f_1 = 0$ | $f_2 = 0$ | $[X_i, X_j] = 0$ |
| I | $c_1 = 0$ | $c_2 = 0$ | $f_1 \in \mathbb{R}$ | $f_2 \in \mathbb{R}$ | $[X_1, X_4] = X_3$ |
| II$_+$ | $c_1 > 0$ | $c_2 = 0$ | $f_1 \in \mathbb{R}$ | $f_2 \in \mathbb{R}$ | $[X_1, X_4] = X_2 \quad [X_2, X_4] = -X_1$ |
| II$_-$ | $c_1 < 0$ | $c_2 = 0$ | $f_1 \in \mathbb{R}$ | $f_2 \in \mathbb{R}$ | $[X_1, X_4] = -X_2 \quad [X_2, X_4] = X_1$ |
| III$c$ | $c_1 \in \mathbb{R}$ | $c_2 \neq 0$ | $f_1 \in \mathbb{R}$ | $f_2 \in \mathbb{R}$ | $[X_1, X_4] = X_1 + cX_2 \quad [X_2, X_4] = -cX_1 + X_2$ |

Zajímalo by nás, zda nejsou některé neizomorfní Maninovy trojice izomorfní ve smyslu izomorfie Drinfeldových doublů. Znamenalo by to, že jeden Drinfeldův double má různé možnosti rozkladu algebry $\mathcal{D} = \mathfrak{g} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$, což je vlastnost důležitá pro tzv. Poisson-Lieovu T-pluralitu. V tomto případě připouštíme širší třídu transformací - vypouštíme totiž podmínky $I(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}'$ a $I(\tilde{\mathfrak{g}}) = \tilde{\mathfrak{g}}'$. Mějme tedy transformaci

$$T = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \tag{5}$$

interpretovanou jako

$$T_i' = P_{ij} T_j + Q_{ij} X_j \tag{6}$$

$$X'_i = R_{ij}T_j + S_{ij}X_j \tag{7}$$

Pak zachování kanoničnosti bilineární formy

$$\langle T'_i, T'_j\rangle = 0 \qquad \langle X'_i, X'_j\rangle = 0 \qquad \langle T'_i, X'_j\rangle = \delta_{ij}$$

vede na podmínky

$$PQ^T + QP^T = 0 \qquad RS^T + SR^T = 0 \qquad PS^T + QR^T = I$$

což můžeme samozřejmě zapsat maticově jako

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Jak budeme postupovat? Vybereme si dvě Maninovy trojice a pokusíme se najít transformaci, která převadí jedny strukturní koeficienty na druhé. Abychom toto mohli udělat, odvodíme rovnice pro transformaci strukturních koeficientů v případě naší transformace T. Máme tedy

$$[T'_i, T'_j] = f'^k_{ij}T'_k \qquad [X'_i, X'_j] = \tilde{f}'^k_{ij}X'_k$$

a po dosazení z transformačních vztahů a rozepsání komutárů dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}
T_m(P_{ik}P_{jl}f^m_{kl} + P_{ik}Q_{jl}\tilde{f}^k_{lm} - Q_{ik}P_{jl}\tilde{f}^l_{km} - f'^k_{ij}P_{km}) &\quad + && (9)\\
X_m(P_{ik}Q_{jl}f^l_{mk} - Q_{ik}P_{jl}f^k_{ml} + Q_{ik}Q_{jl}\tilde{f}^m_{kl} - f'^k_{ij}Q_{km}) &= \quad 0 && (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_m(R_{ik}P_{jl}f^m_{kl} + R_{ik}S_{jl}\tilde{f}^k_{lm} - S_{ik}R_{jl}\tilde{f}^l_{km} - \tilde{f}'^k_{ij}R_{km}) &\quad + && (11)\\
X_m(S_{ik}S_{jl}\tilde{f}^m_{kl} + R_{ik}S_{jl}f^l_{mk} - S_{ik}R_{jl}f^k_{ml} - \tilde{f}'^k_{ij}S_{km}) &= \quad 0 && (12)
\end{aligned}$$

Dříve než přistoupíme k řešení těchto složitých rovnic pro veškeré dvojice Maninových trojic, podíváme se na charakteristické série[9] jednotlivých algeber, což by nám mohlo umožnit určit neizomorfní algebry bez náročných výpočtů. Bohužel pro libovolnou Maninovu trojici mají charakteristické série následující tvar

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{(1)} &= span\{T_1, T_2, T_4, X_1, X_2, X_3\}\\
\mathcal{D}^{(2)} &= span\{T_4, X_3\}\\
\mathcal{D}^{(3)} &= \{0\}\\
\mathcal{D}^{k} &= span\{T_1, T_2, T_4, X_1, X_2, X_3\} \qquad k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Tato metoda nám tedy ke zjednodušení našeho úkolu nepomůže, nezbývá než tedy řešit rovnice (8), (9), (10), (11) a (12) pro matice $P$, $Q$, $R$ a $S$ pro všechny dvojice Maninových trojic.

Ukázalo se, že jediné izomorfní Maninovy trojice ve smyslu izomorfie Drinfeldových doublů jsou trojice $\langle NW, III_c\rangle$ a $\langle NW, III_{-c}\rangle$. Pro ostatní dvojice trojic neexistovalo reálné řešení[10] pro matice $P$, $Q$, $R$ a $S$, které by převádělo jedny strukturní koeficienty na druhé.

[9]Používáme značení $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$ a $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}]$.

[10]Toto tvrzení se opírá o výsledky metody Reduce v programu Mathematica 7.0

Příkladem transformace, která převádí strukturní koeficienty trojice $\langle NW, III_c\rangle$ na koeficienty trojice $\langle NW, III_{-c}\rangle$, je[11]

$$T_{III_c\to III_{-c}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{c}{1+c^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{c^2}{1+c^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{c^2}{1+c^2} & -\frac{c}{1+c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[11] Transformace je uvedena ve stejném zápisu a smyslu jako v (5), (6) a (7)

# 4 Závěr

Byla prozkoumána jedna z možností, která měla naději odpovědět na otázku dualizovatelnosti Nappi-Wittenova modelu. Bohužel se ukázalo, že danou metodou nelze o dualizovatelnosti rozhodnout. Dílčí výsledkem alespoň byla klasifikace Drinfeldových doublů, jejichž jednu algebru tvoří Nappi-Wittenova algebra, a konstrukce příslušných sigma modelů korespondujících s jednotlivými Maninovými trojicemi.

Dalším možným směrem pátrání je využití Lieových symetrií tenzoru $F$ definujícího sigma model, což je metoda, která zcela opomíjí "původ"Nappi-Wittenova modelu, ale již v minulosti v případě jiného modelu vedla k výsledku.

# 5 Dodatek

## 5.1 Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkinova formule

Mějme Lieovu grupu $G$ a nechť $\mathfrak{g}$ je její Lieovou algebrou. Vezměme nyní libovolné, ale dané, vektory $X, Y \in \mathfrak{g}$ a neznámý vektor $Z \in \mathfrak{g}$ a zajímejme se o řešení rovnice

$$\exp Z = \exp X \exp Y$$

kde $\exp : \mathfrak{g} \to G$ je exponentní zobrazení.

Odpovědí na to, jak získat onen neznámý vektor, je tzv. Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkinova formule, která ve vší obecnosti vypadá následujícím způsobem (viz. [3])

$$Z = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i + s_i > 0 \\ 1 \le i \le n}} \frac{(\sum_{i=1}^{n}(r_i + s_i))^{-1}}{\prod_{i=1}^{n} r_i! s_i!} [X^{r_1} Y^{s_1} X^{r_2} Y^{s_2} \dots X^{r_n} Y^{s_n}]$$

kde je použito značení

$$[X^{r_1} Y^{s_1} \dots X^{r_n} Y^{s_n}] := [\underbrace{X, [X, \dots [X}_{r_1}, [\underbrace{Y, [Y, \dots [Y}_{s_1}, \dots [\underbrace{X, [X, \dots [X}_{r_n}, [\underbrace{Y, [Y, \dots Y}_{s_n}] \dots]$$

Tento člen je zjevně nulový pro $s_n > 1$ anebo pro $s_n = 0$ a $r_n > 1$. Speciální případy jsou definovány takto

$$\begin{aligned} [X^1 Y^0] &= X \\ [X^0 Y^1] &= Y \\ [X^{r_1} Y^{s_1} \dots X^{r_n} Y^1] &= [\dots [[\underbrace{X, [X, \dots [X}_{r_n}, Y]] \dots]] \end{aligned}$$

Ostatní speciální případy jsou analogické.

# Reference

[1] C.R.Nappi, E.Witten; **A WZW model based on a non-semi-simple group**; http://arxiv.org/abs/hep-th/9310112

[2] J.Schmidt; **Dvourozměrné sigma modely**; bakalářská práce; FJFI Praha; 2009

[3] Sagle, A.A.; Walde R.E.: **Introduction to Lie Groups and Lie Algebras**, Academic Press New York and London, 1973

[4] Hlavatý, L., Hýbl, J., Turek, M.; **Classical Solutions of Sigma Models in Curved Backgrounds by the Poisson-Lie T-Plurality**; International Journal of Modern Physics A, vol.22, no.5, 1039-1052; 2007

[5] Černý, A.; **Homogenní rovinné vlny jako pozadí dualizovatelného sigma modelu**; diplomová práce; Praha

[6] Kiritsis, E., Kounnas, C.; **String Propagation in Gravitational Wave Backgrounds**; http://arxiv.org/abs/hep-th/9310202