ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika

Dvourozměrné sigma modely

Two-Dimensional Sigma Models

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Autor práce: **Josef Schmidt**
Vedoucí práce: **Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.**
Rok: **2009**

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Benešově, dne 1.7.2009 Josef Schmidt

Název práce: **Dvourozměrné sigma modely**
Autor: Josef Schmidt

Obor: Matematické inženýrství
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ladislav Hlavatý
Katedra fyziky
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Abstrakt:

V této práci je vyložena teorie pro práci s pohybovými rovnicemi na Drinfeldově doublu. Na tomto teoretickém základě pak byly zkonstruovány sigma modely pro jednotlivé neizomorfní Maninovy trojice čtyrrozměrného Drinfeldova doublu. Po zavedení základních pojmů Riemannovské geometrie byla spočtena křivost jednotlivých sigma modelů a zjištěno, kdy je daný model plochý.

Klíčová slova: sigma modely, Drinfeldův double, Maninova trojice, Riemannovská geometrie, křivost

Title: **Two-Dimensional Sigma Models**
Author: Josef Schmidt

Abstract:

In this thesis it is explained a theory for work with equations of motion on Drinfeld double. With this theoretical background sigma models corresponding to each non-isomorphic Manin triple of four-dimensional Drinfeld double have been constructed. After introducing basic concepts of Riemannian geometry I have worked out the curvature of each sigma model and determined when the given model is flat.

Keywords: sigma models, Drinfeld double, Manin triple, Riemannian geometry, curvature

Obsah

1 Úvod

Sigma modely jsou zjednodušeným fyzikálním modelem důležitým pro teorii strun. Ukazuje se, že důležitým objektem pro konstrukci v jistém smyslu duálních sigma modelů je tzv. Drinfeldův double. V této práci tedy zkonstruujeme tyto modely na čtyřrozměrném Drinfeldově doublu a za použití nástrojů Riemannovské geometrie se pokusíme určit, zda existuje nějaký vztah mezi křivostí daného modelu a jeho duálního protějšku.

2 Úvodní pojmy

V této kapitole budou nejprve v minimálním rozsahu uvedeny a vysvětleny pojmy, které jsou potřeba k alespoň základnímu porozumění odvození a práci s pohybovými rovnicemi na tzv. Drinfeldově doublu.

Lieova grupa. Nechť G je grupa a zároveň diferencovatelná varieta taková, že zobrazení $\circ : G \times G \to G$ a $^{-1} : G \to G$ jsou hladká. Pak G nazveme **Lieovou grupou**.

Lieova algebra. Nechť V je vektorový prostor, $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ bilineární zobrazení splňující

1. $(\forall x, y \in V)\,([x, y] = -[y, x])$ antisymetrie
2. $(\forall x, y, z \in V)\,([[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0)$ Jacobiho identita

pak $(V, [\cdot,\cdot])$ nazýváme **Lieovou algebrou**.

Izomorfismus Lieových algeber. Buďte $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ Lieovy algebry. Říkáme, že jsou **izomorfní**, jestliže existuje lineární izomorfismus $I : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ takový, že

$$(\forall x, y \in \mathfrak{g})(I([x, y]_{\mathfrak{g}}) = [Ix, Iy]_{\mathfrak{h}})$$

Translace na grupě. Buď G Lieova grupa, $g \in G$, pak zobrazení

$$L_g : G \to G \quad L_g(h) := g \circ h$$

$$R_g : G \to G \quad R_g(h) := h \circ g$$

nazýváme **levou** resp. **pravou translací**. K nim jsou příslušná tečná zobrazení

$$L_{g*}(h) : T_hG \to T_{gh}G$$

$$R_{g*}(h) : T_hG \to T_{hg}G$$

Buďte $g, h \in G$, $V \in T_gG$, pak pod značením Vh resp. hV budeme rozumět $R_{h*}(g)V$ resp. $L_{h*}(g)V$.

Nechť $X \in \mathfrak{X}(G)$[I], pak řekneme, že X je **levoinvariantní vektorové pole**, jestliže platí

$$(\forall g, h \in G)(gX(h) = X(g \circ h))^{\mathrm{II}}$$

Množinu všech levoinvariantních vektorových polí označíme $\mathfrak{X}_{Linv}$. Buď $V \in T_eG$, pak $X_V(g) := gV$ je levoinvariantní vektorové pole. Dále jestliže $X, Y \in \mathfrak{X}_{Linv}$ pak $[X, Y] \in \mathfrak{X}_{Linv}$. Množinu $\mathfrak{X}_{Linv}$ s operací komutátoru vektorových polí nazveme **Lieovou algebrou Lieovy grupy** G.

[I] $\mathfrak{X}(G)$ značí množinu všech hladkých vektorových polí

[II] Zde je použito značení zavedené výše.

Ekvivalentní definicí Lieovy algebry Lieovy grupy je položit $\mathfrak{g} \equiv T_eG$ a jako komutátor definovat

$$(\forall u, v \in \mathfrak{g})([u, v] := [X_u, X_v](e))$$

kde X_u a X_v jsou levoinvariantní vektorová pole generovaná vektory u a v. Nebudeme dále rozlišovat mezi těmito dvěma definicemi.

Jednoparametrická podgrupa. Buď G Lieova grupa. Mějme zobrazení $\phi : \mathbb{R} \to G$ takové, že

$$(\forall s, t \in \mathbb{R})(\phi(t + s) = \phi(t) \circ \phi(s))$$

Pak zobrazení ϕ nazýváme **jednoparametrickou podgroupou** grupy G. Je to homomorfismus reálné aditivní grupy a nějaké podgrupy grupy G. Platí, že libovolná jednoparametrická podgrupa je integrální křivkou nějakého levoinvariantního vektorového pole procházející jednotkou a naopak (tzn. že každá integrální křivka levoinvariantního pole procházející jednotkou je jednoparametrickou podgrupou).

Maximální izotropie. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, W podprostor V, $h : V \times V \to T$ symetrická bilineární forma. Říkáme, že podprostor W je **maximálně izotropní**, právě když

1. $h|_{W\times W} \equiv 0$
2. $(\forall P \subset\subset V)(W \subsetneqq P)(h|_{P\times P} \not\equiv 0)$

ad-invariantnost. Nechť G je Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra, $h : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ bilineární forma. Říkáme, že h je **ad-invariantní**, právě když

$$(\forall x, y, z \in \mathfrak{g})(h(ad_x y, z) + h(y, ad_x z) = 0)^{\mathrm{III}}$$

Z ad-invariance navíc plyne Ad-invariantnost formy pro prvky $g \in \exp(\mathfrak{g})$[IV], která je definována takto

$$(\forall x, y \in \mathfrak{g})(\langle gxg^{-1}, gyg^{-1}\rangle = \langle x, y\rangle)$$

Drinfeldův double. Nechť D je souvislá Lieova grupa, $\mathfrak{D}$ její Lieova algebra, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ad-invariantní nedegenerovaná bilinearní forma na $\mathfrak{D}$. Říkáme, že D je **Drinfeldův double**, právě když existují maximálně izotropní (vůči $\langle\cdot,\cdot\rangle$) podalgebry $\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}$ takové, že $\mathfrak{g} \oplus \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{D}$ (jakožto součet vektorových prostorů). Trojici $(\mathfrak{D}, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ nazýváme **Maninovou trojicí**.

$\mathbb{R}^n$ jako diferencovatelná varieta. Nechť $x \in \mathbb{R}^n$, označme $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$. Atlas je definovaný jedinou mapou $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$. Bázi tečného prostoru $T_x\mathbb{R}^n$ označíme $(\partial_1^x, \ldots, \partial_n^x)$, a volíme ji tak, aby platilo

$$\partial_i^x f = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x$$

[III] Zobrazení $ad_x : V \to V : ad_x(y) := [x, y]$, blíže o tomto zobrazení v kapitole (3.3).

[IV] O zobrazení exp viz. kapitola (3.2).

kde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Konkrétně pro $n = 2$ budeme značit $x \equiv (x_+, x_-)$ a $T_x\mathbb{R}^2 = span(\partial_+^x, \partial_-^x)$.

Sigma model. Mějme diferencovatelné variety $\mathbb{R}^2$ a T. $F \in \mathcal{T}_2^0$ tenzororové pole na varietě T, zobrazení $\phi : \mathbb{R}^2 \to T$. Systém popsaný Lagrangiánem tvaru

$$\mathcal{L} = F(\phi_*\partial_-, \phi_*\partial_+) \quad \text{resp. v souřadnicích} \quad \mathcal{L} = F_{\mu\nu}\partial_-\phi^\mu\partial_+\phi^\nu$$

nazveme **sigma modelem**. Dále T nazýváme **cílovou varietou**. V této práci je cílová varieta T dvourozměrnou podgrupou čtyřrozměrného Drinfeldova doublu.

3 Cílová Lieova grupa

Cílovými varietami sigma modelů diskutovaných v této práci jsou dvourozměrné podgrupy čtyrrozměrných Drinfeldových doublů. Jejich algebry jsou tedy dvourozměrné. V této kapitole bude uveden příklad dvourozměrných grup generujících neizormorfní Lieovy algebry, nastíněny možnosti zavedení různých souřadnic na grupě, uvedeny základní pojmy reprezentací grup a hlavně přidružené reprezentace.

3.1 Dvourozměrné Lieovy algebry

Nechť $(V, [\cdot,\cdot])$ je Lieova algebra, $\dim V = 2$, (T_1, T_2) báze V. Pak existují pouze dvě neizomorfní algebry

$$[T_1, T_2] = 0 \quad \text{nebo} \quad [T_1, T_2] = T_2$$

Uvedeme nyní příklad dvou dvourozměrných Lieových grup, které za svou algebru budou mít první resp. druhý případ.

3.1.1 Abelovská grupa

Mějme $g, h \in \mathbb{R}^2$, označme $g = (g_1, g_2)$, $h = (h_1, h_2)$. Tato grupa je definována následovně

$$G \equiv (\mathbb{R}^2, \circ) \quad \circ : G \times G \to G \quad g \circ h := (g_1 + h_1, g_2 + h_2)$$

pak

$$e = (0, 0) \quad g^{-1} = (-g_1, -g_2)$$

Diferencovatelná struktura je zavedena, jak bylo popsáno v kapitole (2).

Tečná zobrazení příslušející k levé resp. pravé translaci

$$L_{g*}(h) = R_{g*}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy vektory přenášené pomocí translací nemění své složkové vyjádření. Levoinvariantní vektorové pole generované vektorem $V \in T_eG$, $V = (v^1, v^2)$ je konstantní na celé varietě

$$X_V(g) = v^1 \partial_+^g + v^2 \partial_-^g$$

Jejich komutátor $[X_V, X_W] = 0$ pro $\forall V, W \in T_eG$ tedy i $[X_{(1,0)}, X_{(0,1)}] = 0$.

Integrální křivky levoinvariantních vektorových polí procházejících jednotkou jsou přímky

$$\gamma_V(t) = (v^1 t, v^2 t) \quad t \in \mathbb{R}$$

3.1.2 Grupa afinních transformací na $\mathbb{R}$

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $g = (g_1, g_2), h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Afinní transformací $\mathbb{R}$ rozumíme zobrazení $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, A(x) := \alpha x + \beta$. Množina afinních transformací (ozn. $\mathbb{A}$) společně s operací skládání zobrazení pak tvoří grupu. Zobrazení $I : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^2 : I(A) := (\alpha, \beta)$ je izomorfismus s grupou

$$Af(1) \equiv (\mathbb{R}^2/\{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}, \circ) \quad \circ : Af(1) \times Af(1) \to Af(1)$$

$$g \circ h := (g_1 h_1, g_1 h_2 + g_2)$$

pak

$$e = (1, 0) \quad g^{-1} = (1/g_1, -g_2/g_1)$$

Tuto grupu nazveme grupou afinních transformací. Diferencovatelná struktura zavedena opět, jak bylo popsáno v kapitole (2). Tečná zobrazení k translacím

$$L_{g*}(h) = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix} \quad R_{g*}(h) = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ g_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Levoinvariantní vektorová pole

$$X_V(g) = v^1 g_1 \partial_+^g + v^2 g_1 \partial_-^g$$

Komutátor $[X_V, X_W](g) = (v^1 w^2 - v^2 w^1) g_1 \partial_-^g$ tedy $[X_{(1,0)}, X_{(0,1)}] = X_{(0,1)}$.

Integrální křivky

$$\gamma_V(t) = \left(e^{v^1 t}, \frac{v^2}{v^1} \left(e^{v^1 t} - 1 \right) \right) \quad \text{pro} \quad v^1 \neq 0$$

respektive

$$\gamma_V(t) = \left(1, v^2 t\right) \quad \text{pro} \quad v^1 = 0$$

3.2 Souřadnice na grupě

Exponentní zobrazení. Nechť G je Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra, $V \in \mathfrak{g}$. Pak definujeme zobrazení

$$\exp : \mathfrak{g} \to G \quad \exp(V) := \gamma_V(1)$$

kde γ_V je integrální křivka levoinvariantního vektorového pole generovaného vektorem V a procházející jednotkou ($\gamma(0) = e$, $\dot{\gamma}(0) = V$). Toto zobrazení nazýváme **exponentní zobrazení**.

Normální souřadnice. Buď G Lieova grupa, $\dim G = n$, $(T_i)_{i \in \hat{n}}$ báze $T_e G$. Pak existuje okolí $U \subset T_e G$ takové, že $\exp|_U : U \to \exp(U)$ je difeomorfismus. Tedy

$$(\forall g \in \exp(U))(\exists_1 (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n)(\exp(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i) = g)$$

Každému prvku $g \in U(G)$ tedy můžeme přiřadit odpovídající souřadnice $(\alpha_i)_{i\in\hat{n}}$. Takto zavedené souřadnice se nazývají **normální souřadnice** (viz. [3]).

Řešitelná algebra. Buď $\mathfrak{g}$ Lieova algebra. Definujme

$$\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g} \quad \mathfrak{g}_{n+1} := [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n] = \{[x,y] \mid x,y \in \mathfrak{g}_n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Řekneme, že $\mathfrak{g}$ je **řešitelná algebra**, jesliže $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\mathfrak{g}_{n_0} = 0$.

Ideál. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra, $I \subset\subset \mathfrak{g}$. Pak I nazveme **ideálem**, jestliže $[\mathfrak{g}, I] \subseteq I$.

Buď $\mathfrak{g}$ řešitelná Lieova algebra, pak jednotlivé členy posloupnosti $\mathfrak{g}_n$ jsou ideály. Existuje tedy posloupnost ideálů $(I_i)_{i\in\hat{n}}$ (n je dimenze algebry) taková, že

$$\mathfrak{g} = I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n = 0$$

Přímé resp. **zpětné souřadnice**. Nechť G je souvislá Lieova grupa a $\mathfrak{g}$ je její řešitelná Lieova algebra, $n \in \mathbb{N}$ dimenze $\mathfrak{g}$, mějme bázi $(T_i)_{i\in\hat{n}} \subset \mathfrak{g}$ tak, že

$$span(T_1, \ldots, T_k) = I_{n-k}$$

kde I_{n-k} jsou ideály zmíněné v předchozím odstavci. Pak pro každé $g \in G$ existuje právě jedno $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$g = \exp(\alpha_1 T_1) \circ \exp(\alpha_2 T_2) \circ \ldots \circ \exp(\alpha_n T_n)$$

resp.

$$g = \exp(\alpha'_n T_n) \circ \exp(\alpha'_{n-1} T_{n-1}) \circ \ldots \circ \exp(\alpha'_1 T_1)$$

Tímto způsobem také můžeme na grupě zavést souřadnice. Pro účely této práce budeme používat tyto dva typy souřadnic a budeme je nazývat **přímé** resp. **zpětné souřadnice**. Přímé souřadnice budeme značit nečárkovanými řeckými písmeny a zpětné čárkovanými.

Ukážeme si jednotlivé typy souřadnic na grupě $Af(1)$. To, že grupovému prvku $g \in Af(1)$ přísluší normální resp. přímé resp. zpětné souřadnice budeme značit $g \sim (g_1, g_2)$ resp. $g \sim (\alpha_1, \alpha_2)$ resp. $g \sim (\alpha'_1, \alpha'_2)$. Pro jednotlivé typy souřadnic prvky grupy fyzicky vypadají takto

Normální (N)	
$g \sim (g_1, g_2)$	$g = \left(e^{g_1}, \frac{g_2}{g_1}(e^{g_1} - 1)\right)$ pro $g_1 \neq 0$
	$g = (1, g_2)$ pro $g_1 = 0$
Přímé (P)	
$g \sim (\alpha_1, \alpha_2)$	$g = (e^{\alpha_1}, 0) \circ (1, \alpha_2) = (e^{\alpha_1}, \alpha_2 e^{\alpha_1})$
Zpětné (Z)	
$g \sim (\alpha'_1, \alpha'_2)$	$g = (1, \alpha'_2) \circ (e^{\alpha'_1}, 0) = (e^{\alpha'_1}, \alpha'_2)$

Přepočet mezi jednotlivými typy souřadnic ukazuje následující tabulka [V]

	(N)	(P)	(Z)
(N)	$g_1 = g_1$ $g_2 = g_2$	$g_1 = \alpha_1$ $g_2 = \alpha_1\alpha_2 e^{\alpha_1}(e^{\alpha_1}-1)^{-1}$	$g_1 = \alpha'_1$ $g_2 = \alpha'_1\alpha'_2(e^{\alpha'_1}-1)^{-1}$
(P)	$\alpha_1 = g_1$ $\alpha_2 = g_2 g_1^{-1} e^{-g_1}(e^{g_1}-1)$	$\alpha_1 = \alpha_1$ $\alpha_2 = \alpha_2$	$\alpha_1 = \alpha'_1$ $\alpha_2 = \alpha'_2 e^{-\alpha'_1}$
(Z)	$\alpha'_1 = g_1$ $\alpha'_2 = g_2 g_1^{-1}(e^{g_1}-1)$	$\alpha'_1 = \alpha_1$ $\alpha'_2 = \alpha_2 e^{\alpha_1}$	$\alpha'_1 = \alpha'_1$ $\alpha'_2 = \alpha'_2$

3.3 Reprezentace grup

Reprezentace grupy. Mějme grupu G, vektorový prostor V, zobrazení $\rho : G \to \text{Aut } V$ (Aut V je množina všech lineárních bijekcí na V (**automorfismů**)) takové, že

$$(\forall g, h \in G)(\rho(g \circ h) = \rho(g)\rho(h))$$

nazveme **reprezentací grupy** G ve vektorovém prostoru V.

Reprezentace Lieovy algebry. Buď $\mathfrak{g}$ Lieova algebra, V vektorový prostor, lineární zobrazení $\rho : \mathfrak{g} \to \text{End}V$ (End$V$ je množina všech lineárních zobrazení na V (**endomorfismů**)) takové, že

$$(\forall x, y \in \mathfrak{g})(\rho([x,y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) =: [\rho(x), \rho(y)])$$

nazýváme **reprezentací Lieovy algebry** v prostoru V.

Věrná reprezentace. Buď $\rho : G \to \text{Aut}(V)$ resp. $\rho' : \mathfrak{g} \to \text{End}(V)$ reprezentace grupy G resp. algebry $\mathfrak{g}$. O reprezentaci říkáme, že je **věrná**, jestliže zobrazení ρ resp. ρ' je prosté.

Maticová exponenciela. Mějme matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Pak pod značením $\exp \mathbb{A}$ rozumíme

$$\exp \mathbb{A} := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!} = I + \mathbb{A} + \frac{\mathbb{A}^2}{2} + \dots$$ [VI]

Odvozená reprezentace. Mějme G Lieovu grupu, $\mathfrak{g}$ její Lieovu algebru, V vektorový prostor, ρ reprezentaci grupy G na prostoru V. Dále buď ρ' reprezentace algebry $\mathfrak{g}$ v prostoru V taková, že splňuje komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] & \text{Aut}V \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\rho'"] & \text{End}V \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

[V] v níž jsme normální, přímé a zpětné souřadnice označili symboly po řadě (N), (P) a (Z)

[VI] $\mathbb{A}^0$ je definováno jako jednotková matice.

(levé exp značí exponentní zobrazení, kdežto pravé maticovou exponencielu), neboli

$$(\forall x \in \mathfrak{g})(\rho(\exp(x)) = \exp(\rho'(x)))$$

Tuto reprezentaci pak nazýváme **odvozenou reprezentací**.

Vnitřní automorfismus. Nechť G je grupa, $g \in G$, pak zobrazení $I_g : G \to G : I_g(h) := ghg^{-1}$ nazýváme **vnitřní automorfismus** na grupě G.

Přidružená (adjungovaná) reprezentace. Buď G Lieova grupa, I_g vnitřní automorfismus na G. Pak zobrazení $I_{g*}(e) : T_eG \to T_eG$ je automorfismus na T_eG a zobrazení

$$Ad : G \to \mathrm{Aut}T_eG \quad Ad(g) := I_{g*}(e)$$

je reprezentací G v T_eG a nazýváme ji **přidruženou reprezentací**. Odvozenou reprezentaci od Ad označíme $ad : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}T_eG$ a platí $ad(x) = [x, \cdot]$. Z důvodu přehlednosti zavedeme značení $Ad(g) \equiv Ad_g$ a $ad(g) \equiv ad_g$.

4 Polní rovnice v obecném případě

V této kapitole pro jistý tvar rovnic pro zobrazení na Drinfeldově doublu obecně odvodíme (resp. shrneme články [2], [5], [7]) pohybové rovnice pro zobrazení na podgrupách G a $\tilde{G}$ a tvar k nim příslušných Lagrangiánů.

Nechť D je Drinfeldův double o dimenzi $2n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Buďte $\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-$ podprostory $\mathfrak{D}$ dimenze n takové, že

$$(\forall x \in \mathcal{E}^+)(\forall y \in \mathcal{E}^-)(\langle x, y \rangle = 0) \quad \wedge \quad \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^- = \mathfrak{D} \tag{2}$$

Tedy, že prostory $\mathcal{E}^+$ a $\mathcal{E}^-$ jsou na sebe kolmé ve smyslu dané formy a tvoří direktní rozklad algebry $\mathfrak{D}$.

Z nedegenerovanosti formy dané z definice Drinfeldova doublu již nutně plyne, že podalgebry $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$ mají dimenzi n. Označme bázi $\mathfrak{g}$ resp. $\tilde{\mathfrak{g}}$ jako $(T_i)_{i\in\hat{n}}$ resp. $(\tilde{T}^i)_{i\in\hat{n}}$. Tyto báze je vždy možno vybrat tak, aby

$$(\forall i, j \in \hat{n})(\langle T_i, \tilde{T}^j \rangle = \delta_i^j)$$

Splnění této podmínky pro danou bázi algebry $\mathfrak{g}$ resp. $\tilde{\mathfrak{g}}$ již je určena báze $\tilde{\mathfrak{g}}$ resp. $\mathfrak{g}$ jednoznačně. Díky maximální izotropii formy samozřejmě platí

$$\forall i, j \in \hat{n} \quad \langle T_i, T_j \rangle = 0 \quad \wedge \quad \langle \tilde{T}^i, \tilde{T}^j \rangle = 0)$$

Strutkurní koeficienty v algebrách $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$

$$[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_k \qquad [\tilde{T}^i, \tilde{T}^j] = \tilde{f}_k^{ij} \tilde{T}^k$$

již plně určují komutační relace $[T_i, \tilde{T}^j]$ díky ad-invariatnosti formy a platí

$$[T_i, \tilde{T}^j] = f_{ki}^j \tilde{T}^k + \tilde{f}_i^{jk} T_k$$

Uvažujme nyní zobrazení $l : \mathbb{R}^2 \to D$ a k němu příslušné tečné zobrazení $l_* : T\mathbb{R}^2 \to TD$. Buď $x \in \mathbb{R}^2$, pak $l_*(x) : T_x\mathbb{R}^2 \to T_{l(x)}D$. Zavedeme podobné značení jako v úvodní kapitole. Pod symbolem $\partial_\pm l$ budeme rozumět $l_*(x)\partial_\pm^x$.

Definujme rovnice pro zobrazení l jako

$$\langle \partial_\pm l \, l^{-1}, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{E}^\pm \tag{3}$$

V okolí jednotky existuje jednoznačný rozklad $l(x) = g(x) \circ \tilde{h}(x)$, kde $g : \mathbb{R}^2 \to G$ a $\tilde{h} : \mathbb{R}^2 \to \tilde{G}$ (G resp. $\tilde{G}$ jsou podgrupy příslušející podalgebrám $\mathfrak{g}$ resp. $\tilde{\mathfrak{g}}$). Dosazením tohoto rozkladu dostáváme

$$\partial_\pm l \, l^{-1} = \partial_\pm(g \circ \tilde{h})(g \circ \tilde{h})^{-1} \tag{4}$$

Platí

$$(g \circ \tilde{h})^{-1} = R_{(g\tilde{h})^{-1}} = R_{\tilde{h}^{-1}g^{-1}} = R_{\tilde{h}^{-1}} R_{g^{-1}} = \tilde{h}^{-1} g^{-1}$$

$$\partial_\pm(g \circ \tilde{h}) = (g \circ \tilde{h})_* \partial_\pm = (\circ_* \circ (g_*, \tilde{h}_*))\partial_\pm = \circ_*(\partial_\pm g, \partial_\pm \tilde{h}) = \partial_\pm g \tilde{h} + g \partial_\pm \tilde{h}$$

kde $\circ_*$ představuje tečné zobrazení ke grupovému skládání $\circ : D \times D \to D$ a platí

$$\circ_*(g, \tilde{h}) : T_g D \times T_{\tilde{h}} D \to T_{g\tilde{h}} D : \circ_*(g, \tilde{h})(V_g, V_{\tilde{h}}) = V_g \tilde{h} + g V_{\tilde{h}}$$

kde $V_g \in T_g D$ a $V_{\tilde{h}} \in T_{\tilde{h}} D$.

Dosazením do (3),(4) dostáváme

$$\langle \partial_\pm g g^{-1} + g \partial_\pm \tilde{h} \tilde{h}^{-1} g^{-1}, x \rangle = 0$$

Z Ad-invariance formy pro prvek g^{-1} dostáváme

$$\langle g^{-1} \partial_\pm g + \partial_\pm \tilde{h} \tilde{h}^{-1}, g^{-1} x g \rangle = 0 \tag{5}$$

Předpokládejme dále, že báze podprostoru $\mathcal{E}^+$ resp. $\mathcal{E}^-$ lze zvolit ve tvaru

$$(T_i + E_{ij} \tilde{T}^j)_{i \in \hat{n}} \quad \text{resp.} \quad (T_i + B_{ij} \tilde{T}^j)_{i \in \hat{n}}$$

pro nějakou matici E resp. B. Pak z 'ortogonality' podprostorů $\mathcal{E}^+$ a $\mathcal{E}^-$ (viz vztah (2)) plyne tvar matice B

$$0 = \langle T^i + E^{ik} \tilde{T}_k, T^j + B^{jk} \tilde{T}_k \rangle = B_{jk} \langle T_i, \tilde{T}_k \rangle + E_{ik} \langle \tilde{T}^k, T_j \rangle = B_{ji} + E_{ij}$$

tedy $B = -E^T$. Bázi prostorů

$$g^{-1} \mathcal{E}^\pm g := \{ g^{-1} x g | x \in \mathcal{E}^\pm \}$$

(vystupujících v upravených pohybových rovnicích (5)) lze zapsat v analogickém tvaru jako bázi původních $\mathcal{E}^\pm$

$$g^{-1} \mathcal{E}^\pm g = T_i + E_{ij}(g) \tilde{T}^j$$

Nalezněme tedy tvar matice E(g). Pro bazické vektory platí

$$Ad_{g^{-1}}(T_i + E_{ij} \tilde{T}^k) = Ad_{g^{-1}} T_i + E_{ij} Ad_{g^{-1}} \tilde{T}^j \tag{6}$$

$$Ad_{g^{-1}} T_i = a_i{}^k T_k$$
$$Ad_{g^{-1}} \tilde{T}^j = b^{jk} T_k + d^j{}_k \tilde{T}^k$$

kde jsme maticemi a, b, d (obecně jsou samozřejmě závislé od g) označili submatice v přidružené reprezentaci

$$Ad_{g^{-1}} = \begin{pmatrix} a^T & b^T \\ 0 & d^T \end{pmatrix}$$

Dosazením $Ad_{g^{-1}} T_i$ a $Ad_{g^{-1}} \tilde{T}^j$ do (6) a osamostatněním T_i dostáváme

$$E(g) = (a + Eb)^{-1} E d$$

Pokud v (5) volíme za x jednotlivé bazické vektory $\mathcal{E}^+$ resp. $\mathcal{E}^-$ dostaneme po úpravě

$$-(\partial_+ \tilde{h} \tilde{h}^{-1})_i = E_{ij}(g) (g^{-1} \partial_+ g)^j =: A^i_+(g)$$

$$-(\partial_-\tilde{h}\tilde{h}^{-1})_i = -E_{ji}(g)(g^{-1}\partial_- g)^j =: A^i_-(g)$$

kde $(\partial_+\tilde{h}\tilde{h}^{-1})_i$ a $(g^{-1}\partial_- g)^i$ označují i-té složky příslušných vektorů, a kde jsme označili nové funkce A^i_+, A^i_-. Úpravami dospějeme k rovnicím

$$\partial_+ A^i_-(g) - \partial_- A^i_+(g) - \tilde{f}^i_{jk} A^j_-(g) A^k_+(g) = 0 \tag{7}$$

Rovnice (7) jsou pohybovými rovnicemi systému s Langrangiánem (viz. [7])

$$\mathcal{L} = E_{ij}(g)(g^{-1}\partial_- g)^i(g^{-1}\partial_+ g)^j$$

Použijeme-li místo rozkladu $l = g \circ \tilde{h}$ rozklad $l = \tilde{g} \circ h$, kde

$$\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \tilde{G} \quad h : \mathbb{R}^2 \to G$$

tak obdobnými postupy dostaneme

$$\langle \tilde{g}^{-1}\partial_\pm \tilde{g} + \partial_\pm h h^{-1}, \tilde{g}^{-1} x \tilde{g} \rangle = 0$$

Báze $\mathcal{E}^+$ resp. $\mathcal{E}^-$ volíme tentokrát

$$(\tilde{T}^i + \tilde{E}^{ij}T_j)^n_{i=1} \quad \text{resp.} \quad (\tilde{T}^i - \tilde{E}^{ji}T_j)^n_{i=1}$$

Přidružená reprezentace

$$Ad_{\tilde{g}^{-1}} = \begin{pmatrix} \tilde{d}^T & 0 \\ \tilde{b}^T & \tilde{a}^T \end{pmatrix}$$

Pak

$$\tilde{E}(\tilde{g}) = (\tilde{a} + \tilde{E}\tilde{b})^{-1}\tilde{E}\tilde{d}$$

A Lagrangián

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{E}^{ij}(\tilde{g}^{-1}\partial_-\tilde{g})_i(\tilde{g}^{-1}\partial_+\tilde{g})_j$$

Pro pevně zvolené podprostory $\mathcal{E}^+$ a $\mathcal{E}^-$ získáme jedním resp. druhým rozkladem prvků grupy vzájemně duální sigma modely. Z rovnosti

$$span\{T_i + E_{ij}\tilde{T}^j | i \in \hat{n}\} = span\{\tilde{T}^i + \tilde{E}^{ij}T_j | i \in \hat{n}\}$$

plyne rovnost

$$E = \tilde{E}^{-1}$$

5 Polní rovnice v konkrétním případě

5.1 Klasifikace 4D Drinfeldových doublů

Na začátku této kapitoly pouze uvedeme výsledky klasifikace z [6], které budeme následně potřebovat pro odvození k nim příslušných Lagrangiánů.

Izomorfismus Drinfeldových doublů. Buďte D, D' Drinfeldův double, $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ jejich algebry, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}'}$ jejich bilineární formy. Říkáme, že doubly D a D' jsou **izomorfní**, jestliže existuje izomorfismus I algeber $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}'$ takový, že

$$(\forall x, y \in \mathcal{D})(\langle x, y\rangle_{\mathcal{D}} = \langle Ix, Iy\rangle_{\mathcal{D}'})$$

Izomorfismus Maninových trojic. Mějme Maninovy trojice $(\mathcal{D}, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ a $(\mathcal{D}', \mathfrak{g}', \tilde{\mathfrak{g}}')$. Říkáme, že jsou **izomorfní**, jestliže jsou izomorfní příslušné Drinfeldovy doubly a navíc daný izomorfismus I splňuje

$$I(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}' \qquad I(\tilde{\mathfrak{g}}) = \tilde{\mathfrak{g}}'$$

Existují pouze čtyři neizomorfní Maninovy trojice v dimenzi čtyři.

Neizomorfní Maninovy trojice			
A	Abelovská		
	$[T_i, T_j] = 0$	$[\tilde{T}^i, \tilde{T}^j] = 0$	$[T_i, \tilde{T}^j] = 0$
SA	Semiabelovská		
	$[\tilde{T}^1, \tilde{T}^2] = \tilde{T}^2$	$[T_2, \tilde{T}^1] = T_2$	$[T_2, \tilde{T}^2] = -T_1$
NA	Neabelovská typ A ($\delta \neq 0 \in \mathbb{R}$)		
	$[T_1, T_2] = T_2$	$[\tilde{T}^1, \tilde{T}^2] = \delta\tilde{T}^2$	$[T_1, \tilde{T}^2] = -\tilde{T}^2$
	$[T_2, \tilde{T}^1] = \delta T_2$	$[T_2, \tilde{T}^2] = -\delta T_1 + \tilde{T}^1$	
NB	Neabelovská typ B		
	$[T_1, T_2] = T_2$	$[\tilde{T}^1, \tilde{T}^2] = \tilde{T}^1$	$[T_1, \tilde{T}^1] = T_2$
	$[T_1, \tilde{T}^2] = -T_1 - \tilde{T}^2$	$[T_2, \tilde{T}^2] = \tilde{T}^1$	

kde kromě případu A nebyly nulové Lieovy závorky vypisovány.

Nyní zkonstruujeme Lagrangiány pro jednotlivé neizomorfní Maninovy trojice. Podrobný postup bude uveden jen v prvním případě pro semiabelovskou trojici, ostatní se získají zcela analogickým způsobem.

Buďte

$$E = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}^{-1} \qquad \tilde{E} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$$

5.2 Semiabelovská trojice

Komutační relace jsou

$$[\tilde{T}^1, \tilde{T}^2] = \tilde{T}^2 \quad [T_2, \tilde{T}^1] = T_2 \quad [T_2, \tilde{T}^2] = -T_1$$

Odvozená reprezentace k přidružené (příslušné matice lineárního zobrazení)

$$ad_{T_1} \equiv [T_1, \cdot] \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ad_{T_2} \equiv [T_2, \cdot] \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_{\tilde{T}_1} \equiv [\tilde{T}_1, \cdot] \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ad_{\tilde{T}_2} \equiv [\tilde{T}_2, \cdot] \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Z nich získáme přidruženou reprezentaci použitím komutativního diagramu (1)

$$Ad_{\exp(\alpha_1 T_1)} \equiv \exp(\alpha_1 ad_{T_1}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ad_{\exp(\alpha_2 T_2)} \equiv \exp(\alpha_2 ad_{T_2}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ad_{\exp(\beta_1 \tilde{T}^1)} \equiv \exp(\beta_1 ad_{\tilde{T}^1}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\beta_1} \end{pmatrix}$$

$$Ad_{\exp(\beta_2 \tilde{T}^2)} \equiv \exp(\beta_2 ad_{\tilde{T}^2}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & 1 \end{pmatrix}$$

kde α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$.

Přidruženou reprezentaci prvku grupy $g \in G$ resp. $\tilde{g} \in \tilde{G}$ v přímých resp. zpětných souřadnicích získáme vynásobením příslušných dvou matic v jednom resp. opačném pořadí. Nechť prvkům odpovídají tyto přímé a zpětné souřadnice

$$g \in G \quad g \sim (\alpha_1, \alpha_2) \sim (\alpha'_1, \alpha'_2)$$

$$\tilde{g} \in \tilde{G} \quad \tilde{g} \sim (\beta_1, \beta_2) \sim (\beta_1', \beta_2')$$

Pak přidružené reprezentace v jednotlivých souřadnicích vypadají takto

$$Ad_{g\sim(\alpha_1,\alpha_2)} = Ad_{\exp(\alpha_1 T_1)} Ad_{\exp(\alpha_2 T_2)} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ad_{g\sim(\alpha_1',\alpha_2')} = Ad_{\exp(\alpha_2' T_2)} Ad_{\exp(\alpha_1' T_1)} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_2' \\ 0 & 1 & \alpha_2' & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ad_{\tilde{g}\sim(\beta_1,\beta_2)} = Ad_{\exp(\beta_1 \tilde{T}_1)} Ad_{\exp(\beta_2 \tilde{T}_2)} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 e^{\beta_1} & e^{\beta_1} \end{pmatrix}$$

$$Ad_{\tilde{g}\sim(\beta_1',\beta_2')} = Ad_{\exp(\beta_2' \tilde{T}_2)} Ad_{\exp(\beta_1' \tilde{T}_1)} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \beta_2' e^{-\beta_1'} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_1'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2' & e^{\beta_1'} \end{pmatrix}$$

Je zjevné, že reprezentace grupy $\tilde{g} \in \tilde{\mathfrak{g}}$ je věrná. Odteď budeme pracovat pouze s přímými souřadnicemi. Reprezentaci inverzního prvku g^{-1} resp. $\tilde{g}^{-1}$ získáme snadno inverzí matice reprezentace prvku g resp. $\tilde{g}$.

$$Ad_{g^{-1}} = (Ad_g)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ad_{\tilde{g}^{-1}} = (Ad_{\tilde{g}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 e^{\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & e^{-\beta_1} \end{pmatrix}$$

Matice $a(g)$, $b(g)$, $d(g)$ resp. $\tilde{a}(g)$, $\tilde{b}(g)$, $\tilde{d}(g)$ mají tedy tvar

$$a(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b(g) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \quad d(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 1 & \beta_2 \\ 0 & e^{-\beta_1} \end{pmatrix} \quad \tilde{b}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{d}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_2 e^{\beta_1} & e^{\beta_1} \end{pmatrix}$$

Takže

$$E(g) = \frac{1}{vx - (u+\alpha_2)(y-\alpha_2)} \begin{pmatrix} v & \alpha_2 - y \\ -\alpha_2 - u & x \end{pmatrix}$$

$$\tilde{E}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} \beta_2^2 e^{2\beta_1} v + x - \beta_2 e^{\beta_1}(u+y) & e^{\beta_1}(-\beta_2 e^{\beta_1} v + y) \\ e^{\beta_1}(u - \beta_2 e^{\beta_1} v) & e^{2\beta_1} v \end{pmatrix}$$

Nyní již zbývá vypočítat pouze členy $(g^{-1}\partial_\pm g)^i$ resp. $(\tilde{g}^{-1}\partial_\pm \tilde{g})_i$ neboli $L_{g^{-1}*}(g_*\partial_\pm)$ resp. $L_{\tilde{g}^{-1}*}(\tilde{g}_*\partial_\pm)$. Vezměme tedy zobrazení $g : \mathbb{R}^2 \to G$ resp. $\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \tilde{G}$ (získané z rozkladu $l : \mathbb{R}^2 \to D$). Buďte

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^2 : g \to (\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{resp.} \quad \tilde{\varphi} : \tilde{G} \to \mathbb{R}^2 : \tilde{g} \to (\beta_1, \beta_2)$$

souřadnicové funkce (přímých souřadnic) na grupě G resp. $\tilde{G}$. Nebudeme dále rozlišovat mezi "čistou"funkcí g resp. $\tilde{g}$ a funkcí složenou se souřadnicemi, tedy

$$\varphi \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_+, x_-) \to (\alpha_1(x_+, x_-), \alpha_2(x_+, x_-))$$

$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_+, x_-) \to (\beta_1(x_+, x_-), \beta_2(x_+, x_-))$$

Potom

$$g_* = \begin{pmatrix} \partial_+\alpha_1 & \partial_-\alpha_1 \\ \partial_+\alpha_2 & \partial_-\alpha_2 \end{pmatrix} \quad \tilde{g}_* = \begin{pmatrix} \partial_+\beta_1 & \partial_-\beta_1 \\ \partial_+\beta_2 & \partial_-\beta_2 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\partial_\pm g = \begin{pmatrix} \partial_\pm\alpha_1 \\ \partial_\pm\alpha_2 \end{pmatrix} \quad \partial_\pm \tilde{g} = \begin{pmatrix} \partial_\pm\beta_1 \\ \partial_\pm\beta_2 \end{pmatrix}$$

kde ∂_+ resp. ∂_- uvnitř vektorů a matice lineárního zobrazení již znamená obyčejnou parciální derivaci.

Pro získání tečného zobrazení k levé translaci je třeba nejprve znát zákon skládání prvků na grupě. Buďte tedy $g \sim (\alpha_1^{(g)}, \alpha_2^{(g)}), h \sim (\alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(h)}) \in G$ a $\tilde{g} \sim (\beta_1^{(\tilde{g})}, \beta_2^{(\tilde{g})}), \tilde{h} \sim (\beta_1^{(\tilde{h})}, \beta_2^{(\tilde{h})}) \in \tilde{G}$.

Grupa G je Abelovská a tedy součin prvků je komutativní, takže platí

$$g \circ h = \exp(\alpha_1^{(g)}T_1)\exp(\alpha_2^{(g)}T_2)\exp(\alpha_1^{(h)}T_1)\exp(\alpha_2^{(h)}T_2) =$$

$$= \exp(\alpha_1^{(g)}T_1)\exp(\alpha_1^{(h)}T_1)\exp(\alpha_2^{(g)}T_2)\exp(\alpha_1^{(h)}T_1)\exp(\alpha_2^{(h)}T_2) =$$

$$= \exp((\alpha_1^{(g)} + \alpha_1^{(h)})T_1)\exp((\alpha_2^{(g)} + \alpha_2^{(h)})T_2)$$

poslední rovnost platí, protože $\exp(\lambda T_i)$ je jednoparametrická podgrupa. Takže

$$(\alpha_1^{(g)}, \alpha_2^{(g)}) \circ (\alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(h)}) = (\alpha_1^{(g)} + \alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(g)} + \alpha_2^{(h)})$$

a platí tedy

$$e = (0,0) \quad g^{-1} = (-\alpha_1^{(g)}, -\alpha_2^{(g)})$$

Násobení prvků v grupě $\tilde{G}$ získáme z přidružené reprezentace jejích prvků (která je v tomto případě věrná). Platí totiž

$$Ad_{\tilde{g}} Ad_{\tilde{h}} = Ad_{\tilde{g} \circ \tilde{h}}$$

$$Ad_{\tilde{g}\circ\tilde{h}} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_2^{(\tilde{h})} + \beta_2^{(\tilde{g})} e^{-\beta_1^{(\tilde{h})}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_1^{(\tilde{g})} - \beta_1^{(\tilde{h})}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2^{(\tilde{g})} e^{\beta_1^{(\tilde{g})}} - \beta_2^{(\tilde{h})} e^{\beta_1^{(\tilde{g})} + \beta_1^{(\tilde{h})}} & e^{\beta_1^{(\tilde{g})} + \beta_1^{(\tilde{h})}} \end{pmatrix}$$

a porovnáním s $Ad_{\tilde{g}}$ dostáváme

$$(\beta_1^{(\tilde{g})}, \beta_2^{(\tilde{g})}) \circ (\beta_1^{(\tilde{h})}, \beta_2^{(\tilde{h})}) = (\beta_1^{(\tilde{g})} + \beta_1^{(\tilde{h})}, \beta_2^{(\tilde{h})} + \beta_2^{(\tilde{g})} e^{-\beta_1^{(\tilde{h})}})$$

tím pádem

$$e = (0,0) \quad \tilde{g}^{-1} = (-\beta_1^{(\tilde{g})}, -\beta_2^{(\tilde{g})} e^{\beta_1^{(\tilde{g})}})$$

Tečná zobrazení k translacím pak jsou

$$L_{g*}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_{\tilde{g}*}(\tilde{h}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_2^{(\tilde{g})} e^{-\beta_1^{(\tilde{h})}} & 1 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$L_{g^{-1}*}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_{\tilde{g}^{-1}*}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2^{(\tilde{g})} & 1 \end{pmatrix}$$

Takže

$$(g^{-1}\partial_\pm g) = \begin{pmatrix} \partial_\pm \alpha_1 \\ \partial_\pm \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (\tilde{g}^{-1}\partial_\pm \tilde{g}) = \begin{pmatrix} \partial_\pm \beta_1 \\ \beta_2 \partial_\pm \beta_1 + \partial_\pm \beta_2 \end{pmatrix}$$

Pak Lagrangiány vyjdou

$$\mathcal{L} = \frac{1}{vx - (u+\alpha_2)(y-\alpha_2)} (v\partial_-\alpha_1\partial_+\alpha_1 + (\alpha_2 - y)\partial_-\alpha_1\partial_+\alpha_2 - (\alpha_2+u)\partial_-\alpha_2\partial_+\alpha_1 + x\partial_-\alpha_2\partial_+\alpha_2)$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = x\partial_-\beta_1\partial_+\beta_1 + e^{\beta_1} y\partial_-\beta_1\partial_+\beta_2 + e^{\beta_1} u\partial_-\beta_2\partial_+\beta_1 + e^{2\beta_1} v\partial_-\beta_2\partial_+\beta_2$$

5.3 Abelovská trojice

Přidružená reprezentace

$$Ad_{g\sim(\alpha_1,\alpha_2)} = Ad_{\tilde{g}\sim(\beta_1,\beta_2)} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice

$$E(g) = \frac{1}{xv - uy} \begin{pmatrix} v & -y \\ -u & x \end{pmatrix} \quad \tilde{E}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$$

Skládání prvků

$$g \circ h = (\alpha_1^{(g)} + \alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(g)} + \alpha_2^{(h)}) \quad \tilde{g} \circ \tilde{h} = (\beta_1^{(\tilde{g})} + \beta_1^{(\tilde{h})}, \beta_2^{(\tilde{g})} + \beta_2^{(\tilde{h})})$$

Tečná zobrazení

$$L_{g^{-1}*}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_{\tilde{g}^{-1}*}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledné Lagrangiány

$$\mathcal{L} = \frac{1}{xv-uy}(v\partial_-\alpha_1\partial_+\alpha_1 - y\partial_-\alpha_1\partial_+\alpha_2 - u\partial_-\alpha_2\partial_+\alpha_1 + x\partial_-\alpha_2\partial_+\alpha_2)$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = x\partial_-\beta_1\partial_+\beta_1 + y\partial_-\beta_1\partial_+\beta_2 + u\partial_-\beta_2\partial_+\beta_1 + v\partial_-\beta_2\partial_+\beta_2$$

5.4 Neabelovská trojice typu A

Přidružená reprezentace

$$Ad_{g\sim(\alpha_1,\alpha_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_2\delta \\ -\alpha_2 e^{\alpha_1} & e^{\alpha_1} & \alpha_2\delta e^{\alpha_1} & \alpha_2^2\delta e^{\alpha_1} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\alpha_1} \end{pmatrix}$$

$$Ad_{\tilde{g}\sim(\beta_1,\beta_2)} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_2\delta & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_1\delta} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & 1 & 0 \\ \beta_2 e^{\beta_1\delta} & \beta_2^2\delta e^{\beta_1\delta} & e^{\beta_1\delta} & e^{\beta_1\delta} \end{pmatrix}$$

Matice

$$\begin{aligned} E(g) &= \frac{1}{vx + (\alpha_2\delta e^{\alpha_1} + u)(\alpha_2\delta e^{\alpha_1} - y)} \\ &\quad \begin{pmatrix} v + \alpha_2 e^{\alpha_1}(u + \alpha_2 e^{\alpha_1} x + y) & e^{\alpha_1}(\alpha_2 e^{\alpha_1}(\delta - x) - y) \\ -e^{\alpha_1}(u + \alpha_2 e^{\alpha_1}(\delta + x)) & e^{2\alpha_1} x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\tilde{g}) &= \frac{1}{1 - \beta_2 e^{\beta_1\delta}(u - y + \beta_2 e^{\beta_1\delta}(-vx + uy))} \\ &\quad \begin{pmatrix} x + \beta_2\delta e^{\beta_1\delta}(-u + \beta_2\delta e^{\beta_1\delta} v - y) & e^{\beta_1\delta}(y - \beta_2 e^{\beta_1\delta}(\delta v - vx + uy)) \\ e^{\beta_1\delta} u - \beta_2 e^{2\beta_1\delta}(v(\delta + x) - uy) & e^{2\beta_1\delta} v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Skládání prvků

$$g \circ h = (\alpha_1^{(g)} + \alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(h)} + \alpha_2^{(g)} e^{-\alpha_1^{(h)}})$$

$$\tilde{g} \circ \tilde{h} = (\beta_1^{(\tilde{g})} + \beta_1^{(\tilde{h})}, \beta_2^{(\tilde{h})} + \beta_2^{(\tilde{g})} e^{-\beta_1^{(\tilde{h})}\delta})$$

Tečná zobrazení

$$L_{g^{-1}*}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_2^{(g)} & 1 \end{pmatrix} \quad L_{\tilde{g}^{-1}*}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta\beta_2^{(\tilde{g})} & 1 \end{pmatrix}$$

Lagrangiány

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{vx+(\alpha_2\delta e^{\alpha_1}+u)(\alpha_2\delta e^{\alpha_1}-y)} \\ &\quad (\, v\partial_-\alpha_1\partial_+\alpha_1+e^{\alpha_1}(e^{\alpha_1}\alpha_2\delta-y)\partial_-\alpha_1\partial_+\alpha_2 \\ &\quad -e^{\alpha_1}(u+\alpha_2\delta e^{\alpha_1})\partial_-\alpha_2\partial_+\alpha_1+e^{2\alpha_1}x\partial_-\alpha_2\partial_+\alpha_2\,)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{1-\beta_2 e^{\beta_1\delta}(u-y+\beta_2 e^{\beta_1\delta}(-vx+uy))} \\ &\quad (\, x\partial_-\beta_1\partial_+\beta_1+e^{\beta_1\delta}(y+\beta_2 e^{\beta_1\delta}(vx-uy))\partial_-\beta_1\partial_+\beta_2 \\ &\quad e^{\beta_1\delta}(u+\beta_2 e^{\beta_1\delta}(uy-vx))\partial_-\beta_2\partial_+\beta_1+e^{2\beta_1\delta}v\partial_-\beta_2\partial_+\beta_2\,)\end{aligned}$$

5.5 Neabelovská trojice typu B

Přidružená reprezentace

$$Ad_{g\sim(\alpha_1,\alpha_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1+e^{-\alpha_1} \\ -\alpha_2 e^{\alpha_1} & e^{\alpha_1} & e^{\alpha_1}-1 & \alpha_2(e^{\alpha_1}-1) \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\alpha_1} \end{pmatrix}$$

$$Ad_{\tilde{g}\sim(\beta_1,\beta_2)} = \begin{pmatrix} e^{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1 e^{\beta_2} & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1(e^{\beta_2}-1) & e^{\beta_2}-1 & e^{-\beta_2} & \beta_1 \\ e^{\beta_2}-1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice

$$\begin{aligned}E(g) &= \frac{1}{1+e^{2\alpha_1}+vx+e^{\alpha_1}(-2+u-y)+y-u(1+y)} \\ &\quad \begin{pmatrix} v+\alpha_2 e^{\alpha_1}(u+\alpha_2 e^{\alpha_1}x+y) & -e^{\alpha_1}(1+e^{\alpha_1}(-1+\alpha_2 x)+y) \\ -e^{\alpha_1}(-1+u+e^{\alpha_1}(1+\alpha_2 x)) & e^{2\alpha_1}x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\tilde{g}) &= \frac{1}{vx-uy+e^{\beta_2}(u-2vx-y+2uy)+e^{2\beta_2}(1+vx+y-u(1+y))} \\ &\quad \begin{pmatrix} x & -vx+uy+e^{\beta_2}((\beta_1+v)x+y-uy) \\ vx-uy+e^{\beta_2}(u+\beta_1 x-vx+uy) & e^{2\beta_2}(v+\beta_1(u+\beta_1 x+y)) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Skládání prvků

$$g\circ h = (\alpha_1^{(g)}+\alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(h)}+\alpha_2^{(g)}e^{-\alpha_1^{(h)}})$$

$$\tilde{g}\circ\tilde{h} = (\beta_1^{(\tilde{g})}+\beta_1^{(\tilde{h})}e^{-\beta_2^{(\tilde{g})}}, \beta_2^{(\tilde{g})}+\beta_2^{(\tilde{h})})$$

Tečná zobrazení

$$L_{g^{-1}*}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_2^{(g)} & 1 \end{pmatrix} \quad L_{\tilde{g}^{-1}*}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} e^{\beta_2^{(\tilde{g})}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lagrangiány

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{1 + e^{2\alpha_1} + vx + e^{\alpha_1}(-2 + u - y) + y - u(1+y)} \\ &\quad (\ v\partial_-\alpha_1\partial_+\alpha_1 + (e^{\alpha_1}(e^{\alpha_1} - y - 1))\partial_-\alpha_1\partial_+\alpha_2 + \\ &\quad (e^{\alpha_1}(1 - u - e^{\alpha_1}))\partial_-\alpha_2\partial_+\alpha_1 + e^{2\alpha_1}x\partial_-\alpha_2\partial_+\alpha_2\ ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{vx - uy + e^{\beta_2}(u - 2vx - y + 2uy) + e^{2\beta_2}(1 + vx + y - u(1+y))} \\ &\quad (\ e^{2\beta_2}x\partial_-\beta_1\partial_+\beta_1 + e^{\beta_2}(-vx + uy + e^{\beta_2}((\beta_1 + v)x + y - uy))\partial_-\beta_1\partial_+\beta_2 + \\ &\quad e^{\beta_2}(vx - uy + e^{\beta_2}(u + \beta_1 x - vx + uy))\partial_-\beta_2\partial_+\beta_1 + e^{2\beta_2}(v + \beta_1(u + \beta_1 x + y))\partial_-\beta_2\partial_+\beta_2\ ) \end{aligned}$$

6 Geometrie

Na tomto místě vyložíme potřebný aparát diferenciální geometrie pro studium geometrických vlastností σ-modelů. Bude se hlavně jednat o zavedení pojmu metriky na varietách a dále pojmu afinní konexe vedoucí k Riemannovu tenzoru křivosti.

6.1 Metrický tenzor a metrika

Metrický tenzor. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $g \in T_2^0 : V \times V \to \mathbb{R}$ kovariantní tenzor druhého řádu s následujícími vlastnostmi

1. $(\forall y \in V)\,(\ (\ (\forall x \in V)(g(x,y)=0)\ ) \Rightarrow y = 0)$ nedegenerovanost
2. $(\forall x, y \in V)(g(x,y) = g(y,x))$ symetričnost

Pak g nazýváme **metrický tenzor**. Někdy je navíc vyžadována pozitivní definitnost; tenzor, který tuto vlastnost nesplňuje, se pak nazývá pseudometrický tenzor.

Buď (e_i) báze V, (e^i) příslušná duální báze a g_{ij} složky metrického tenzoru (tedy $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$). Pak vlastnosti uvedené výše nabývají tvaru

1. $\det(g_{ij}) \neq 0$
2. $(\forall i, j \in \hat{\dim} V)(g_{ij} = g_{ji})$

Definujme g^{ij} jako složky inverzní matice k g_{ij}, pak g^{ij} jsou složky kontravariantního tenzoru $g^{-1} \in T_0^2$ (tzn. $g^{-1} = g^{ij} e_i \otimes e_j$). Tenzory g a g^{-1} umožňují zavést na prostorech V a V^* **skalární součin** předpisy

$$\forall x, y \in V \quad (x,y) := g(x,y) \qquad \forall x^*, y^* \in V^* \quad (x^*, y^*)^* := g^{-1}(x^*, y^*)$$

Definujme zobrazení

$$\downarrow : V \to V^* : \downarrow(x) := g(x, \cdot) \qquad \uparrow : V^* \to V : \uparrow(x^*) := g^{-1}(x^*, \cdot)$$

(prostory V a V^{**} bereme za ztotožněné), ve složkách

$$\downarrow(a^i e_i) = a^i g_{ij} e^j \qquad \uparrow(\alpha_i e^i) = \alpha_i g^{ij} e_j$$

Pokud definujeme $a_j := a^i g_{ij}$ a $\alpha^j := \alpha_i g^{ij}$, tak můžeme psát

$$\downarrow(a^i e_i) = a_i e^i \qquad \uparrow(\alpha_i e^i) = \alpha^i e_i$$

Tato dvě zobrazení umožňují tzv. zdvihání resp. spouštění indexů. Mějme obecný tenzor $A \in T_q^p$, jeho složky $A^{i\ldots j}{}_{\alpha\ldots\beta}$. Pro tenzory

$$A_\uparrow : (x^{(1)}, \ldots, x^*, \ldots, x^{(q)}; x^{*(1)}, \ldots, x^{*(p)}) \to A(x^{(1)}, \ldots, \uparrow(x^*), \ldots)$$

$$A_\downarrow : (x^{(1)}, \ldots, x^{(q)}; x^{*(1)}, \ldots, x, \ldots, x^{*(p)}) \to A(\ldots; x^{*(1)}, \ldots, \downarrow(x), \ldots)$$

pak platí $A_\uparrow \in T^{p+1}_{q-1}$ a $A_\downarrow \in T^{p-1}_{q+1}$. Ve složkách

$$A_\uparrow{}^{i\ldots j}{}_{\alpha\ldots}{}^{\gamma}{}_{\ldots\beta} = g^{\gamma\delta} A^{i\ldots j}{}_{\alpha\ldots\delta\ldots\beta} \quad A_\downarrow{}^{i\ldots}{}_{k}{}^{\ldots j}{}_{\alpha\ldots\beta} = g_{kl} A^{i\ldots l\ldots j}{}_{\alpha\ldots\beta}$$

Při prácí se složkami vynecháváme indexy $\uparrow$ resp. $\downarrow$, neboť příslušné zdvihnutí či spuštění indentifikujeme přímo podle polohy indexů.

Metrika. Nechť M je diferencovatelná varieta, $g \in \mathcal{T}^0_2$ kovariantní tenzorové pole druhého řádu a nechť platí, že pro všechna $x \in M$ je $g(x)$ metrický tenzor. Dvojici (M, g) nazýváme varietou s metrikou nebo riemannovskou varietou (případně, pro indefinitní metrické tenzory, pseudoriemannovskou varietou).

Indukovaná metrika. Buďte M a N diferencovatelné variety, na N dána metrika h, buď $f : M \to N$ vložení M do N. Pak tenzorové pole g definované jako

$$g := f^* h$$

(tedy pullback metrického tenzoru h na M) nazýváme **indukovaný metrický tenzor**.

6.2 Kovariantní derivace a lineární konexe

Lineární konexe. Buď M diferencovatelná varieta. Jestliže každému $W \in \mathcal{X}(M)$ hladkému vektorovému poli dokážeme přiřadit lineární tenzorový operátor ∇_W s následujícími vlastnostmi

1. $(\forall p, q \in \mathbb{N})(\forall A \in \mathcal{T}^p_q)(\nabla_W A \in \mathcal{T}^p_q)$ - zachování stupně tenzoru
2. $(\forall A, B \in \mathcal{T}^p_q)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\nabla_W (A + \alpha B) = \nabla_W A + \alpha \nabla_W B)$ - linearita
3. $(\forall A \in \mathcal{T}^p_q)(\forall B \in \mathcal{T}^{p'}_{q'})(\nabla_W (A \otimes B) = (\nabla_W A) \otimes B + A \otimes (\nabla_W B))$ - Leibnizovo pravidlo
4. $(\forall f \in \mathcal{F}(M))(\nabla_W f = W f)$
5. $\nabla_{V+fW} = \nabla_V + f \nabla_W$ - $\mathcal{F}$ - linearita vůči poli W
6. $\nabla_W \circ C = C \circ \nabla_W$ - komutování s kontrakcemi [VII]

pak operátor ∇_W nazýváme **kovariantní derivací** a říkáme, že na M je zavedena **lineární konexe**, značíme (M, ∇).

Kovariantní derivace je plně určena tzv. koeficienty konexe (Christoffelovými symboly druhého druhu), které jsou definované takto

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j =: \Gamma^k_{ji} \partial_k$$

kde ∂_i jsou bazická pole definovaná na dané mapě. Pro bazické kovektory již plyne z vlastností kovariantní derivace vztah

$$\nabla_{\partial_i} dx^j = -\Gamma^j_{ki} dx^k$$

[VII]Kontrakce $C : T^p_q \to T^{p-1}_{q-1}$ pro libovolné $p, q \in \mathbb{N}$ je definována jako $(CA)(\ldots;\ldots) := A(\ldots, e_i, \ldots; \ldots, e^i, \ldots)$, kde $A \in T^p_q$, (e_i) a (e^i) jsou navzájem duální báze. (Ko)Vektory (e_i) resp. (e^i) jsou umístěny na libovolném (ale pro danou kontrakci pevně daném) argumentu. Definice nezávisí na výběru báze.

Pak kovariantní derivace na obecné tenzorové pole $A \in \mathcal{T}^p_q$ vypadá ve složkách takto

$$(\nabla_W A)^{i\dots j}_{k\dots l} = W^m A^{i\dots j}_{k\dots l,m} - \Gamma^n_{km} W^m A^{i\dots j}_{n\dots l} \dots + \Gamma^j_{nm} W^m A^{i\dots n}_{k\dots l}$$

Zavedeme ještě tzv. **kovariantní gradient** $\nabla : \mathcal{T}^p_q \to T^p_{q+1}$ takto

$$A \in \mathcal{T}^p_q \quad (\nabla A)(\dots, W; \dots) := (\nabla_W A)(\dots; \dots)$$

ve složkách

$$A^{i\dots j}_{k\dots l;m} := (\nabla A)^{i\dots j}_{k\dots lm} = (\nabla_{\partial_m} A)^{i\dots j}_{k\dots l}$$

kde jsme symbolem středníku odlišili kovariantní derivaci složek tenzoru od obyčejné parciální derivace.

Afinní konexe je struktura, která nám umožní zavést pojem rovnoběžnosti na libovolné varietě. Abychom ovšem mohli nějak porovnávat dva vektory, které nejsou ve stejném bodě (a které patří do zcela různých vektorových prostorů), je třeba nejprve jeden vektor tzv. paralelním přenosem přenést do bodu, kde se nachází náš druhý vektor. Definujeme nejprve tzv. absolutní derivaci ve směru křivky a následně pomocí ní zavedeme paralelní přenos.

Absolutní derivace. Buď (M, ∇) varieta s afinní konexí, γ křivka na varietě, V vektorové pole definované na stopě křivky γ, označme $V(t) \equiv V(\gamma(t))$. Pak **absolutní derivace** pole V ve směru křivky γ definujeme takto

$$\frac{DV(t)}{Dt} := \nabla_{\dot\gamma} V$$

V souřadnicích platí

$$\nabla_{\dot\gamma} V = \dot V^i + \Gamma^i_{jk} \dot\gamma^k V^j$$

Autoparalelní pole. Definujeme nyní tzv.**autoparalelní pole**. To je takové pole V, které má nulovou absolutní derivaci podél dané křivky γ. Autoparalelní pole musí vyhovovat rovnicím

$$\dot V^i + \Gamma^i_{jk} \dot\gamma^k V^j = 0$$

Paralelní přenos. Nyní již můžeme zavést paralelní přenos. Mějme dva body na varietě $x, y \in M$, spojené křivkou γ, $t_x, t_y \in \mathbb{R}$ takové, že $\gamma(t_x) = x, \gamma(t_y) = y$. Buď vektor $V_0 \in T_x M$. Pak sestrojíme na křivce γ autoparalelní pole $V(t) \equiv V(\gamma(t))$ takové, že $V(t_x) = V_0$. Vektor autoparalelního pole v bodě y, tedy $V(t_y)$, bude náš paralelně přenesený vektor přenesený z bodu x do bodu y. Ve složkách tedy paralelně přenášený vektor musí splňovat rovnici

$$\frac{dV^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} \frac{d\gamma^k}{dt} V^j = 0$$

s počátečními podmínkami $V(t_x) = V_0$.

Na paralelní přenos vektoru se můžeme koukat jako na konstrukci, která nám umožní (při dané křivce spojující dva body variety) sestrojit vektor rovnoběžný s vektorem zadaným v počátečním bodě křivky. Paralelní přenos zjevně obecně závisí od křivky, po které je přenášen. Navíc rovnice paralelního přenosu poskytuje asi nejnázornější pohled na význam Christoffelových symbolů. Jednoduše v každém bodě variety říkají, kterým "směrem"se bude daný vektor při přenášení daným směrem "odchylovat"(až na opačné znaménko).

Obecně samozřejmě můžeme zcela stejným způsobem zavést absolutní derivaci, autoparalelní pole a paralelní přenos tenzoru libovolného řádu.

Geodetika. Mějme varietu (M, ∇) s lineární konexí a křivku γ na varietě. Pak křivku γ nazveme **geodetikou**, jestliže v každém bodě křivky platí

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$$

neboli ve složkách

$$\ddot\gamma^i + \Gamma^i_{jk}\dot\gamma^j\dot\gamma^k = 0$$

Naopak řešením této diferenciální rovnice je křivka, která je geodetikou. Jestliže paralelní přenos vektoru chápeme jako zachovávání rovnoběžného směru po dané křivce, pak geodetika je jednoduše křivka, která "jde stále rovně", tzn. jedná se o zobecnění pojmu přímka na libovolnou varietu s lineární konexí.

Exponenciální zobrazení. Buď P bod variety s lineární konexí (M, ∇). Zobrazení

$$\exp : T_P M \to M \qquad \exp(V) := \gamma_V(1)$$

kde γ_V je geodetika taková, že $\gamma(0) = P$ a $\dot\gamma(0) = V$. Pak zobrazení exp nazýváme exponenciální zobrazení se středem v bodě P (při dané konexi).

Existuje okolí U bodu $0 \in T_P M$ takové, že zobrazení $\exp|_U : U \to \exp(U)$ je difeomorfismus.

Riemannovy normální souřadnice. Mějme (M, ∇), $P \in M$, okolí U bodu $0 \in T_P M$ takové, že zobrazení $\exp|_U$ je difeomorfismus, a bázi prostoru $T_P M$ $(e_i)_{i\in\hat n}$. Pak každému bodu $Q \in \exp(U)$ přiřadíme souřadnice $(v^1, \ldots, v^n)$ tak, že

$$\exp\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = Q$$

Takto zavedené souřadnice nazýváme **Riemannovy normální souřadnice**. Označme $V = \sum v^i e_i$. V těchto souřadnicích geodetika γ_V má složkové vyjádření $\gamma^i_V(t) = v^i t$ a v bodě P jsou Christoffelovy symboly nulové - $\Gamma^i_{jk}(P) = 0$.

6.2.1 Metrická konexe

Afinní konexe je v této nejobecnější podobě zcela nezávislá na metrice (pokud na varietě vůbec je metrika daná). Mějme tedy varietu s oběma strukturami; říkáme, že konexe je kompatibilní s metrikou, jestliže libovolný paralelní přenos vektoru zachovává jeho délku. Neboli

$$g(V(t), V(t)) = konst. \quad \text{jestliže} \quad \nabla_{\dot{\gamma}} V = 0$$

ekvivalentně

$$\nabla_W (g(V, V)) = 0 \quad \text{jestliže} \quad \nabla_W V = 0$$

pro libovolné vektorové pole W.

Zachování délky paralelně přenášeného vektoru nutně implikuje i zachování vzájemného úhlu mezi dvěma paralelně přenášenými vektory, tedy

$$\nabla_W (g(U, V)) \quad \text{jestliže} \quad \nabla_W U = \nabla_W V = 0$$

Navíc platí (využijeme vztah $g(U, V) = CC(g \otimes U \otimes V)$ a komutování kovariantní derivace s kontrakcí)

$$0 = \nabla_W (g(U, V)) = (\nabla_W g)(U, V) + g(\nabla_W U, V) + g(U, \nabla_W V) = (\nabla_W g)(U, V)$$

tedy

$$\nabla g = 0 \quad \text{resp. v souřadnicích} \quad g_{ij;k} = 0$$

6.2.2 Torze

Torze. Buď (M, ∇) varieta s afinní konexí. Zobrazení

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \quad T(U, V) := \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V]$$

nazýváme **torzí** konexe ∇. Toto zobrazení se dá intepretovat jako tenzorové pole $\mathcal{T}_2^1$, ve složkách $T^i_{jk} = (T(\partial_j, \partial_k))^i$. Torze je zjevně antisymetrická ve svých argumentech (tzn. $T^i_{jk} = -T^i_{kj}$). V souřadnicích platí

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}$$

tedy jedná se vlastně o antisymetričnost Christoffelových symbolů. Pokud má daná konexe nulovou torzi, pak Christoffelovy symboly jsou symetrické v dolních indexech $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ a takovou konexi nazýváme **symetrickou konexí**.

6.2.3 RLC konexe

RLC konexe. Konexe, která je zároveň metrická a symetrická, se nazývá **Riemannova-Levi-Civitova konexe**. Definujeme-li Christoffelovy symboly prvního druhu jako

$$\Gamma_{ijk} := g_{il} \Gamma^l_{jk}$$

pak tyto symboly pro RLC konexi splňují následující vztahy

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = g_{ij,k}$$

$$\Gamma_{ijk} - \Gamma_{ikj} = 0$$

Použitím těchto vztahů dostaneme jednoznačné vyjádření pro RLC konexi z dané metriky.

$$g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i} = 2\Gamma_{ijk}$$

a tedy

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l})$$

6.3 Riemannův tenzor křivosti a křivost

Operátor křivosti. Mějme (M, ∇) varietu s afinní konexí (ne nutně RLC). Buďte $U, V \in \mathcal{X}(M)$ libovolná hladká vektorová pole, pak definujeme **operátor křivosti** jako

$$R(U, V) := \nabla_U \nabla_V - \nabla_V \nabla_U - \nabla_{[U,V]}$$

Zjevně platí $R(U, V) = -R(V, U)$.

Riemannův tenzor křivosti. Pomocí operátoru křivosti můžeme závést tenzorové pole

$$R(W, U, V, \alpha) := \alpha(R(U, V)W)$$

Tento tenzor (resp. tenzorové pole) nazýváme **Riemannův tenzor křivosti**. Ve složkách

$$R^i{}_{jkl} = dx^i(R(\partial_k, \partial_l)\partial_j)$$

Z antisymetričnosti operátoru křivosti dostáváme $R^i{}_{jkl} = -R^i{}_{jlk}$. Vyjádření pomocí Christoffelových symbolů

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml}$$

Ricciho tenzor. Kontrakci Riemannova tenzoru křivosti

$$R_{ij} := R^k{}_{ikj}$$

nazýváme **Ricciho tenzor**.

Skalární křivost. Jestliže máme varietu (M, ∇, g), tedy s konexí i metrikou, pak lze definovat tzv.**skálární křivost** takto

$$R := g^{ij} R_{ji}$$

Uvažujme nyní, že máme varietu (M, ∇, g) s RLC konexí, dále Riemannovy normální souřadnice v nějakém bodě $P \in M$. Pak složky Riemannova tenzoru v bodě P vypadají

$$R^i_{jkl}(P) = (\Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l})(P)$$

a platí

$$2\Gamma^i_{jk,l} = (g^{im}(g_{mj,kl} + g_{mk,jl} - g_{jk,ml})(P)$$

neboť díky metričnosti konexe a díky použití Riemannových normálních souřadnic je $g^{im}_{,l}(P) = 0$. Dosazením

$$R^i_{jkl}(P) = \frac{1}{2}(g^{im}(g_{ml,kj} - g_{mk,lj} + g_{jk,lm} - g_{jl,km}))(P)$$

a snížením indexu dostáváme

$$R_{ijkl}(P) = \frac{1}{2}(g_{il,kj} - g_{ik,lj} + g_{jk,li} - g_{jl,ki})(P)$$

Z tohoto vyjádření plyne antisymetričnost v bodě P v těchto dvojicích indexů

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} \qquad R_{ijkl} = -R_{ijlk}$$

Bod P ovšem byl libovolný a (anti)symetričnost nezávisí na výběru souřadnic, takže vztah uvedený výše platí obecně. Pro variety o dimenzi dva má tenzor R_{ijkl} díky těmto antisymetriím pouze jednu nezávislou složku.

6.4 Příklad na S^2

Mějme varietu $(\mathbb{R}^3, g_{\mathbb{R}^3})$ (diferencovatelná struktura a báze tečných prostorů zavedeny stejně jako v kapitole (2)) s eukleidovskou metrikou, tj.

$$g_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mějme vložení S^2 do $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\phi \\ y &= R\sin\theta\sin\phi \\ z &= R\cos\theta \\ & \quad \theta \in (0,\pi) \quad \phi \in (0, 2\pi) \end{aligned}$$

Pak indukovaný metrický tenzor na S^2

$$g_{S^2} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}^{\mathrm{VIII}}$$

[VIII] První souřadnicí je θ, druhou ϕ.

Christofellovy symboly RLC konexe

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \quad \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

(ostatní jsou nulové)

Máme-li obecnou křivku na S^2 $\gamma(t) \equiv (\theta(t), \phi(t))$, pak rovnice paralelního přenosu vektoru V vypadají takto

$$\begin{aligned} \dot{V}^{\theta} - \dot{\phi}\sin\theta\cos\theta V^{\phi} &= 0 \\ \dot{V}^{\phi} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\dot{\theta}V^{\phi} + \dot{\phi}V^{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

a rovnice geodetiky

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 &= 0 \\ \ddot{\phi} + 2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\dot{\phi}\dot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

7 Geometrické vlastnosti sigma modelů

V kapitole (5) jsme odvodili tvary Lagrangiánů pro jednotlivé neizomorfní Maninovy trojice. Jejich obecný tvar je

$$\mathcal{L} = F_{ij}(g)\partial_- x^i(g)\partial_+ x^j(g)$$

kde F_{ij} je kovariantní tenzor druhého řádu $F \in \mathcal{T}_2^0$. Definujeme-li nyní metrický tenzor na dvourozměrné grupě, na které jsou Lagrangiány definovány, jako symetrickou část tenzoru F, tzn.

$$g_{ij} := \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ji})$$

pak můžeme použít aparát vyložený v kapitole (6). Konkrétně budeme chtít určit, pro jaké tvary matic $E(e)$ resp. $\tilde{E}(e)$ vyjde skalární křivost konstantně rovná nule. Takový sigma model pak nazýváme **plochý**.

7.1 Abelovská trojice

Tento případ je triviální. Pro libovolnou matici $E(e)$ resp. $\tilde{E}(e)$ je skalární křivost nulová, neboť metrický tenzor[IX]

$$(g_{ij}) = \frac{1}{xv - uy}\begin{pmatrix} v & -\frac{y+u}{2} \\ -\frac{y+u}{2} & x \end{pmatrix} \qquad (\tilde{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} x & \frac{y+u}{2} \\ \frac{y+u}{2} & v \end{pmatrix}$$

je všude konstantní a tím pádem jsou Christoffelovy symboly v těchto souřadnicích nulové.

7.2 Semiabelovská trojice

Metrické tenzory

$$\begin{aligned}
(g_{ij}) &= \frac{1}{vx - (u+\alpha_2)(y-\alpha_2)}\begin{pmatrix} v & -\frac{y+u}{2} \\ -\frac{y+u}{2} & x \end{pmatrix} \\
(\tilde{g}_{ij}) &= \begin{pmatrix} x & e^{\beta_1}\frac{y+u}{2} \\ e^{\beta_1}\frac{y+u}{2} & e^{2\beta_1}v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Výsledná skalární křivost pro neduální model

$$R = \frac{4v(2\alpha_2^2 + u^2 - 2vx + 2\alpha_2(u-y) + y^2)}{((u+y)^2 - 4vx)(vx + (\alpha_2+u)(\alpha_2-y))}$$

Je tedy všude nulová pro $v = 0$. Výraz $2\alpha_2^2 + u^2 - 2vx + 2\alpha_2(u-y) + y^2$ jakožto nenulový polynom nemůže být všude nulový pro libovolnou matici E.

Skalární křivost pro duální model

$$\tilde{R} = \frac{8v}{(u+y)^2 - 4vx}$$

je nulová opět pouze pro $v = 0$.

[IX] pro odlišení od značení pro prvek grupy je pro metrický tenzor zvoleno označení (g_{ij}) (resp. $(\tilde{g}_{ij})$ pro metrický tenzor duálního sigma modelu; stejně tak ostatní geometrické veličiny na duálním modelu budeme odlišovat tildou)

7.3 Neabelovská trojice typu A

Metrické tenzory

$$
\begin{aligned}
(g_{ij}) &= \frac{1}{vx + (\alpha_2\delta e^{\alpha_1} + u)(\alpha_2\delta e^{\alpha_1} - y)} \begin{pmatrix} v & -\frac{u+y}{2}e^{\alpha_1} \\ -\frac{u+y}{2}e^{\alpha_1} & e^{2\alpha_1}x \end{pmatrix} \\
(\tilde{g}_{ij}) &= \frac{1}{1 - \beta_2 e^{\beta_1\delta}(u - y + \beta_2 e^{\beta_1\delta}(uy - vx))} \begin{pmatrix} x & e^{\beta_1\delta}\frac{u+y}{2} \\ e^{\beta_1\delta}\frac{u+y}{2} & e^{2\beta_1\delta}v \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Pak skalární křivost neduálního modelu vyjde

$$
\begin{aligned}
R = {} & \frac{4}{(\alpha_2^2\delta^2 e^{2\alpha_1} + vx + \alpha_2\delta e^{\alpha_1}(u-y) - uy)(u^2 - 4vx + 2uy + y^2)} \cdot \\
& \big[\big(2x(vx-uy)^2 + \delta(uy-vx)(u^2-y^2) + \delta^2 v(u^2 - 2vx + y^2)\big) + \\
& 2\alpha_2\delta e^{\alpha_1}\big(\delta^2 v(u-y) + x(u-y)(vx-uy) + 2\delta(u+y)(uy-vx)\big) \\
& \alpha_2^2\delta^2 e^{2\alpha_1}\big(2\delta^2 v + \delta(y^2-u^2) + x(u^2 - 2vx + y^2)\big)\big]
\end{aligned}
$$

která je všude nulová právě tehdy pokud platí

$$
\begin{aligned}
2x(vx-uy)^2 + \delta(uy-vx)(u^2-y^2) + \delta^2 v(u^2-2vx+y^2) &= 0 \\
\delta^2 v(u-y) + x(u-y)(vx-uy) + 2\delta(u+y)(uy-vx) &= 0 \\
2\delta^2 v + \delta(y^2-u^2) + x(u^2-2vx+y^2) &= 0
\end{aligned}
$$

U duálního modelu

$$
\begin{aligned}
\tilde{R} = {} & -\frac{4}{(u^2 - 4vx + 2uy + y^2)(-1 + \beta_2 e^{\beta_1\delta}(u-y) - \beta_2^2 e^{2\beta_1\delta}(vx-uy))} \\
& \Big[\beta_2^2 e^{2\beta_1\delta}\big(2x(vx-uy)^2 + \delta(uy-vx)(u^2-y^2) + \delta^2 v(u^2-2vx+y^2)\big) + \\
& 2\beta_2 e^{\beta_1\delta}\big(\delta^2 v(y-u) + x(u-y)(uy-vx) - 2\delta(u+y)(uy-vx)\big) + \\
& \big(2\delta^2 v + \delta(y^2-u^2) + x(u^2-2vx+y^2)\big)\Big]
\end{aligned}
$$

A tedy nutnou a postačující podmínkou plochosti sigma modelu je splnění následujících rovností

$$
\begin{aligned}
2x(vx-uy)^2 + \delta(uy-vx)(u^2-y^2) + \delta^2 v(u^2-2vx+y^2) &= 0 \\
\delta^2 v(y-u) + x(u-y)(uy-vx) - 2\delta(u+y)(uy-vx) &= 0 \\
2\delta^2 v + \delta(y^2-u^2) + x(u^2-2vx+y^2) &= 0
\end{aligned}
$$

Ač se rovnice pro neduální a duální model zlehka liší, jejich řešení je překvapivě stejné a je shrnuto v následující tabulce.

Řešení			
$u = 0$	$v = 0$	$x \in \mathbb{R}\backslash\{-\delta\}$	$y = 0$
$u = 0$	$v \in \mathbb{R}$	$x = -\delta$	$y \in \mathbb{R}$
$u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$v = 0$	$x = 0$	$y = -u$
$u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$v = 0$	$x = \delta$	$y = 0$
$u \in \mathbb{R}$	$v = \frac{u^2}{4\delta}$	$x = \delta$	$y = 0$
$u \in \mathbb{R}$	$v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$x = \delta$	$y = 0$
$u \in \mathbb{R}$	$v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$x = \frac{u^2-2\delta v \pm u\sqrt{u^2-4\delta v}}{2v}$	$y = \pm\sqrt{u^2-4\delta v}$

Za relevantní bereme pouze ta řešení, pro něž je matice E resp. $\tilde{E}$ regulární. Po vyloučení řešení, která tuto podmínku nesplňují, dostáváme

Zbylá řešení			
$u = 0$	$v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$x = -\delta$	$y \in \mathbb{R}$
$u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$v = 0$	$x = 0$	$y = -u$
$u \in \mathbb{R}$	$v = \frac{u^2}{4\delta}$	$x = \delta$	$y = 0$
$u \in \mathbb{R}$	$v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$x = \delta$	$y = 0$
$u \in \mathbb{R}$	$v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$x = \frac{u^2-2\delta v \pm u\sqrt{u^2-4\delta v}}{2v}$	$y = \pm\sqrt{u^2-4\delta v}$

Opět tedy vyšlo, že neduální model je plochý, právě když je plochý i model duální.

7.4 Neabelovská trojice typu B

Metrické tenzory u neabelovské trojice typu B jsou následující

$$
\begin{aligned}
(g_{ij}) &= \frac{1}{1+e^{2\alpha_1}+vx+e^{\alpha_1}(-2+u-y)+y-u(1+y)} \cdot \begin{pmatrix} v & -e^{\alpha_1}\frac{u+y}{2} \\ -e^{\alpha_1}\frac{u+y}{2} & e^{2\alpha_1}x \end{pmatrix} \\
(\tilde{g}_{ij}) &= \frac{1}{vx-uy+e^{\beta_2}(u-2vx-y+2uy)+e^{2\beta_2}(1+vx+y-u(1+y))} \cdot \\
&\quad \begin{pmatrix} e^{2\beta_2}x & e^{2\beta_2}\left(\beta_1 x+\frac{y+u}{2}\right) \\ e^{2\beta_2}\left(\beta_1 x+\frac{y+u}{2}\right) & e^{2\beta_2}(v+\beta_1(u+\beta_1 x+y)) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

A tím pádem křivosti jsou

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{4x}{(u^2-4vx+2uy+y^2)(1+e^{2\alpha_1}+vx+e^{\alpha_1}(u-y-2)+y-u(1+y))} \cdot \\
&\quad \big[2(1+vx+y-u(1+y))^2 + \\
&\quad 2e^{\alpha_1}(2-u+y)(u-y+uy-vx-1) + \\
&\quad e^{2\alpha_1}(2-2u+u^2-2vx+2y+y^2)\big] \\
\tilde{R} &= \frac{-4x}{(u^2-4vx+2uy+y^2)\left(uy-vx+e^{2\beta_2}(u-y+uy-vx-1)+e^{\beta_2}(2vx+y-u(1+2y))\right)} \cdot \\
&\quad \Big[2e^{2\beta_2}(1+vx+y-u(1+y))^2 - \\
&\quad -2e^{\beta_2}(1+vx+y-u(1+y))(2vx+y-u(1+2y)) + \\
&\quad \left(2vx(vx-1)+2vxy+y^2+u^2(1+2y(1+y))-2u(y^2+vx(1+2y))\right)\Big]
\end{aligned}
$$

Neduální a duální sigma modely jsou ploché pro $x = 0$ anebo při splnění rovností (první tři pro neduální a další tři pro duální)

$$\begin{aligned}
1 + vx + y - u(1 + y) &= 0 \\
(2 - u + y)(u - y + uy - vx - 1) &= 0 \\
2 - 2u + u^2 - 2vx + 2y + y^2 &= 0 \\
1 + vx + y - u(1 + y) &= 0 \\
(1 + vx + y - u(1 + y))(2vx + y - u(1 + 2y)) &= 0 \\
2vx(vx - 1) + 2vxy + y^2 + u^2(1 + 2y(1 + y)) - 2u(y^2 + vx(1 + 2y)) &= 0
\end{aligned}$$

Řešení těchto rovnic přes zjevné odlišnosti je opět identické pro neduální a duální model.

Řešení			
$u = 1$	$v = 0$	$x \in \mathbb{R}$	$y = -1$
$u = 1$	$v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$x = 0$	$y = -1$
$u \in \mathbb{R}$	$v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$x = \frac{(1-u)^2}{v}$	$y = u - 2$

7.5 Shrnutí

Na tomto místě pouze přehledně (v rámci možností) zopakujeme, kdy jsou jednotlivé sigma modely ploché. U všech modelů vyšlo, že je-li plochý neduální, pak je plochý i duální a naopak.

Stále platí

$$E = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}^{-1} \qquad \tilde{E} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$$

Pro abelovskou trojice jsou modely ploché pro libovolný tvar matice E.

Modely vzniklé z semiabelovské trojice mají nulovou křivost pro matice E a $\tilde{E}$, v nichž $v = 0$.

U neabelovských trojic typu A situaci ohledně tvarů matic E a $\tilde{E}$ vedoucí k plochosti shrnuje následující tabulka

Podmínky plochosti			
$u = 0$	$v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$x = -\delta$	$y \in \mathbb{R}$
$u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$v = 0$	$x = 0$	$y = -u$
$u \in \mathbb{R}$	$v = \frac{u^2}{4\delta}$	$x = \delta$	$y = 0$
$u \in \mathbb{R}$	$v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$x = \delta$	$y = 0$
$u \in \mathbb{R}$	$v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$x = \frac{u^2 - 2\delta v \pm u\sqrt{u^2 - 4\delta v}}{2v}$	$y = \pm\sqrt{u^2 - 4\delta v}$

A případy pro neabelovskou trojici typu B opět naleznete v tabulce.

Podmínky plochosti			
$u = 1$	$v = 0$	$x \in \mathbb{R}$	$y = -1$
$u \in \mathbb{R}$	$v \in \mathbb{R}$	$x = 0$	$y \in \mathbb{R}$
$u \in \mathbb{R}$	$v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$x = \frac{(1-u)^2}{v}$	$y = u - 2$

8 Závěr

Během práce na tomto díle jsem se naučil prakticky používat aparát diferenciální geometrie a získal základní poznatky z teorie Lieových grup a Riemannovské geometrie, což už samo o sobě je neocenitelným přínosem (tedy hlavně pro mě). Jejich aplikování pak vyústilo v úspěšnou konstrukci sigma modelů pro jednotlivé Maninovy trojice a spočtení jednotlivých křivostí. Ukázalo se, že pro sigma modely vzniklé z čtyřrozměrného Drinfeldova doublu platí, že pokud je daný model plochý, pak je k němu plochý i jeho duální protějšek.

A Seznam značení

$:=$	'definujeme jako'
$W \subset\subset V$	W je lineární podprostor V
V^*	duální prostor k vektorovému prostoru V
$\hat{n}$	množina $\{1, 2, \ldots, n\}$
$spanM$	lineární obal množiny vektorů M
T^p_q	prostor tenzorů typu (p, q)
TM	tečný prostor variety M
T_xM	tečný prostor variety M v bodě x
$\mathcal{X}(M)$	množina všech hladkých vektorových polí na varietě M
$\mathcal{T}^p_q(M)$	množina všech hladkých tenzorových polí typu (p, q) na varietě M
f^*	pullback tenzorových polí
f_*	pushforward tenzorových polí

Reference

[1] Nash, Charles; Sen, Siddhartha: *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, 1988, London

[2] Štěpán, Vojtěch: *Geometrické struktury Poissonovy Lieovy T-duality*, rešeršní práce ČVUT Praha, 2005

[3] Fecko, Marián: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, IRIS, 2004, Bratislava

[4] Frankel, Theodore: *The geometry of physics: an introduction*, Cambridge University Press, 2006, Cambridge

[5] Klimčík, Ctirad: *Poisson-Lie T-duality*, Nucl.Phys.Proc.Suppl. 46:116-121, 1996

[6] Hlavatý, Ladislav; Šnobl, Libor: *Classification of Poisson-Lie T-dual models with two-dimensional targets*, Mod.Phys.Lett. A17 (2002) 429-434

[7] Turek, M.: *Lieova-Poissonova T-dualita*, výzkumný úkol ČVUT Praha, 2004

[8] prof. Ladislav Hlavatý, 1949, Praha