České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika

Poisson-Lie T-dualita jako dualita klasických bosonových strun
Poisson-Lie T-duality as a duality of classical bosonic strings

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Josef Navrátil
Vedoucí práce: Ing. Libor Šnobl, Ph.D
Rok: 2009/2010

Před svázáním místo téhle stránky $\boxed{\text{vložíte zadání práce}}$ s podpisem děkana (bude to jediný oboustranný list ve Vaší práci) !!!!

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 9.7.2010

....
Josef Navrátil

Poděkování

Děkuji Ing. Liboru Šnoblovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily.

Josef Navrátil

Název práce:
Poisson-Lie T-dualita jako dualita klasických bosonových strun

Autor: Josef Navrátil

Obor: Matematické inženýrství
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Libor Šnobl, Ph.D

Abstrakt: V roce 1995 publikoval Ctirad Klimčík článek Poisson-Lie T-dualita, kde ukázali konstrukci duálních modelů na Drinfeldově doublu. V roce 2005 nalezl prof. Hlavatý explicitní řešení sigma modelu a modelu k němu duálnímu. V této práci ověříme, že pokud přidáme k řešení podmínku vymizení tenzoru energie-hybnosti, tak že tato podmínka bude platit i pro duální model, tj. bude strunovým řešením. Následně tuto vlastnost dokážeme obecně. Také zavedeme základní pojmy z diferenciální geometrie, teorie Lieových grup a teoretické fyziky.

Klíčová slova: Poisson-Lie T-dualita, sigma model, tenzor energie-hybnosti, Drinfeldův double

Title:
Poisson-Lie T-duality as a duality of classical bosonic strings

Author: Josef Navrátil

Abstract: In 1995 Ctirad Klimčík published a seminar work Poisson-Lie T-duality. There was shown, how can be dual models on Drinfel'd double constructed. In 2005 found prof. Hlavatý explicit sollution of sigma model and dual sigma model. We will in this work verify, that if energy-stress tensor vanishing condition is valid for the model, than is this condition valid also for the dual model, so that duality sollution to string sollution is string sollution. Then will be this property proved generally. Also will be introduced basic definitions from diferential geometry, Lie group and algebras and theoretical physics.

Key words: Poisson-Lie T-duality, stress-energy tensor, sigma model, Drilfel'd double

Obsah

Úvod

Klasická teorie bosonových strun vznikla okolo roku 1960. Pro její popis se používají sigma modely, které navíc splňují další dodatečné podmínky (vymizení tenzoru energie-hybnosti). Také předpokládá že existuje více rozměrů než čtyři nám známé (prostor a čas). Důležitou symetrií těchto modelů je tzv. T-dualita. V roce 1995 publikoval C. Klimčík svoji práci Poisson-Lie T-dualita, kde ukázal jak konstruovat duální modely na Drinfeldově doublu. V dalších letech bylo nalezeno explicitní řešení sigma modelů a duální řešení. V této práci dokážeme, že při transformacích Poisson-Lie T-duality se pro řešení sigma modelu obecně zachovává dodatečná podmínka vymizení tenzoru energie-hybnosti. Následně je tato vlastnost ukázána na dvou konkrétních řešeních sigma modelů. Nejprve jsou definovány základní pojmy z diferenciální geometrie a Lieových grup použité v této práci. Dále jsou popsány základy Poisson-Lie T-duality, poté následuje krátké povídání o teorii bosonovských strun, následuje několik vzorců z teoretické fyziky a také obecný důkaz toho, že duální řešení ke strunovému je strunové řešení. Druhá polovina práce je věnovaná hledání řešení konkrétních sigma modelů a ověření obecné vlastnosti dokázané ve třetí kapitole na konkrétních příkladech.

Kapitola 1

Základní definice

1.1 Základní pojmy z diferenciální geometrie

V první části se seznámíme s několika důležitými pojmy, které v práci použijeme.

Definice 1. Buď M topologický prostor, τ jeho topologie , $\{U_i\}_{i\in I}$ otevřené, nejvýše spočetné pokrytí tohoto prostoru, $\phi_i : U_i \to R^n$, a nechť platí:

1. $U_i = {U_i}^\circ,\ \forall i \in I$,
2. $\bigcup_{i\in I} U_i = M$,
3. $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i) = \phi_i(U_i)^\circ \subset \mathbb{R}^n$,
4. ϕ_i je homeomorfismus U_i a $\phi_i(U_i)$,
5. $\forall i, j \in I$ taková, že pro $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ platí, že zobrazení $\phi_i \circ {\phi_j}^{-1} : \phi_j(U_i \bigcap U_j) \to \phi_i(U_i \bigcap U_j) \in C^\infty(\phi_j(U_i \bigcap U_j), \phi_i(U_i \bigcap U_j))$.

Potom (M, τ, ϕ_i, U_i) nazveme **hladkou varietou**.

Dalším důležitým pojmem, který v budoucnu použijeme, je tečný vektor a tečný prostor.

Definice 2. Zobrazení $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ nazveme **tečným vektorem** k varietě M v bodě P pokud platí následující:

1. $X(\alpha f + g) = \alpha X f + X g$,

2. $X(fg)(P) = (Xf)g(P) + f(P)(Xg)$.

Ekvivalentní definice je:
Tečný vektor X v bodě p je n-tice čísel a^i která se při záměně souřadnic $x^i \to x^{i'}$ transformuje podle pravidla:

$$a^i \to J^i_j(P)a^{j'},$$

kde $J^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j\prime}}$ je příslušná Jacobiho matice.

Existují ještě dvě další ekvivalentní definice (tečný vektor jako třída ekvivalence křivek a tečný vektor jako diferenciální operátor prvního řádu). Ty zde vypisovat nebudu, případný zájemce je najde v [1].

Definice 3. **Tečný prostor** T_pM v bodě p je množina všech tečných vektorů k varietě M v bodě p se strukturou vektorového prostoru. Operace se zavádí následujícím způsobem:

$$\forall X, Y \in T_pM, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\alpha X + Y)f := \alpha Xf + Yf.$$

Pokud v každém bodě variety vybereme tečný vektor, získáváme vektorové pole, ale pokud se výběr ve dvou sousedních bodech bude lišit jen infinitezimálně, je možné docílit toho že zobrazení, které bude přiřazovat bodu variety tečný vektor bude hladké. Dostáváme se tak k definici hladkého vektorového pole:

Definice 4. **Vektorové pole** $X \in \mathfrak{X}(M)$ je zobrazení $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ pro které platí:

1. $(\alpha X + Y)f = \alpha Xf + Yf$
2. $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$,

Pozn.: V libovolných souřadnicích (x^k) na U, $p \in U, X \in T_pM$ lze vektorové pole zapsat:

$$X\Big|_p \ = \ X^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

Definice 5. **Tenzorové pole** je zobrazení $t : T^0_1 \times ...T^0_1 \times \ T^1_0 \ \times ... \to C^\infty(M)$, kde T^0_1 resp. T^1_0 je prostor hladkých vektorových polí, resp. kovektorových polí, které je $C^\infty(M)$ - lineární v každém argumentu,tj.

$$\forall f \in C^\infty, t(U, ..., fV + W, ...) = ft(U, ..., V, ...) + t(U, ...W, ...),$$

$$t(U, ..., \alpha, ..., f\beta + \gamma, ...) = ft(U, ..., \alpha, ..., \beta, ...) + t(U, ..., \alpha, ..., \gamma, ...).$$

Definice 6. Nechť M,N jsou variety, f je hladké zobrazení z M do N (stejné vlastnosti budeme předpokládat i u následujících definic), $\psi : N \to \mathbb{R}$ je funkce na N. Potom definujeme funkci na M $f^*\psi$ následovně:

$$f^*\phi := \psi \circ f \tag{1.1}$$

Definice 7. Nechť máme zobrazení $f : M \to N$, bod $p \in M$, a $X \in \mathfrak{X}(M)$. Pak definujeme **push-forward** (nebo též tečné zobrazení) vztahem:

$$(f_*X)\psi = X(\psi \circ f), \quad \psi \in C^\infty(N), \tag{1.2}$$

přičemž f musí být diffeomorfismus (hladké, bijekce a f^{-1} hladké), tj.

$$f_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N).$$

Definice 8. Definujeme zobrazení

$$f^* : T^*_{f(p)}N \to T^*_p M, (f^*\alpha)(V) := \alpha(f_* V)) \tag{1.3}$$

Pozn.: V této definici není vyžadováno, aby zobrazení f bylo diffeomorfismus.

Definice 9. Nechť f je diffeomorfismus. Potom definujeme **kotečné zobrazení (pull-back) tenzorového pole** následujícím způsobem:

$$f^* : \mathcal{T}^r_s(N) \to \mathcal{T}^r_s(M), \quad (f^*t)(U, V, ..., \alpha, ...) := t(f_*U, f_*V, ..., (f^{-1})^*\alpha, ...) \tag{1.4}$$

1.2 Lieovy grupy a algebry

Většina grup používaných ve fyzice má důležitou vlastnost, a sice že se na nich dají zavést souřadnice, tedy jsou varietou. Proto se zavádí následující pojem:

Definice 10. **Lieova grupa** G je hladká varieta vybavená navíc grupovým násobením $. : G \times G \to G$ takovým, že

1. (G, .) je grupa
2. $. : G \times G \to G$ je hladké zobrazení, $(\, . \,)^{-1} : G \to G$ je hladké zobrazení

Definice 11. Na Lieově grupě dále definujeme význačná zobrazení:

1. $L_g : G \to G \quad L_g h = gh;$ tzv. levá translace.
2. $R_g : G \to G \quad R_g h = hg;$ tzv. pravá translace.

Není těžké dokázat, že zobrazení R_g, L_g jsou difeomorfismy. Díky tomu se dají konstruovat jejich tečná a kotečná zobrazení, čímž se dostáváme k velice důležitému pojmu:

Definice 12. Vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(N)$

1. je levoinvariantní $\Leftrightarrow \forall g, h \in G, \quad X|_{gh} = L_{g*}(X|_h)$,
2. je pravoinvariantní $\Leftrightarrow \forall g, h \in G, \quad X|_{gh} = R_{h*}(X|_g)$.

Podobně definujeme pro tenzorová pole:

Definice 13. T je **levoinvariantní tenzorové pole**, pokud

$$\forall g, h \in G, \quad L_{g*}(T|_h) = T|_{gh},$$

kde L^*_g je kotečné zobrazení k levé translaci.

Platí, že levoinvariantní pole je jednoznačně určené svojí hodnotou v jednotce grupy.

Definice 14. Nechť e^a, e_a jsou dvě navzájem duální báze v tečném a kotečném prostoru jednotky. Buď $e_a(g) = L_{g*}e_a$ báze levoinvariantních vektorových polí na G, $e^a(g) = L^*_{g^{-1}}e^a$ báze k ní duální levoinvariantních 1-forem na G. Libovolné tenzorové pole lze zapsat ve tvaru $T = T^{a...b}_{c...d} e^c \otimes ... \otimes e_a$, a pole je levoinvariantní právě tehdy když

$$T = T^{a...b}_{c...d} = const.$$

Definice 15. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ Lieovy grupy G je lineární prostor všech levoinvariantních vektorových polí s operací $[\ ,\ ]$, kterou definujeme jako $[X, Y] = XY - YX$

Pozn.: Lieovu algebru obecně definujeme následujícím způsobem:

Definice 16. Buď V vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem $\mathbb{R}$. Na něm zavedeme novou operaci, která musí splňovat následující podmínky:

1. bilinearita $[X, aY + Z] = a[X, Y] + [X, Z]$,
2. antisymetrie $[X, Y] = -[Y, X]$,
3. Jacobiho identita $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$.

Potom $(V, [\ ,\ ])$ nazveme **Lieovou algebrou**.

Definice 17. Nechť G je Lieova grupa, potom zobrazení $\gamma : (R, +) \to G$ nazveme **jednoparametrickou podgrupou**, pokud platí následující:

1. $\gamma(t + s) = \gamma(t).\gamma(s)$,
2. $\gamma(0) = e$.

Pozn.: Jednoparametická podgrupa je homomorfní zobrazení. Nechť L_x je levoinvariantní vektorové pole na G, které generuje vektor X.Integrální křivka s počátkem v bodě e je jednoparametrická podgrupa grupy G.

Definice 18. Nechť $\gamma^X(t)$ je jednoparametrická podgrupa generovaná vektorem $X \in \mathfrak{g}$ z Lieovy algebry levoinvariantních polí grupy G. Potom **exponenciální zobrazení** $exp : \mathfrak{g} \to G$ definujeme následovně:

$$X \to \exp\ X := \gamma^X(1)$$

Exponenciální zobrazení má následující vlastnosti:

1. $\gamma^X(kt) = \gamma^{kX}(t)$,
2. $\exp\ (0) = e$,
3. $\exp(t + s)X = \exp(tX) + \exp(sX)$.

Pozn.: Nechť $e^1, e^2, ...e^n$ je báze n-rozměrného vektorového prostoru V, na kterém máme definovanou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$. Potom konstanty $f_l^{jk} \in \mathbb{C}; j, k, l \in \hat{n}$ nazveme **strukturní konstanty** Lieovy algebry pokud platí:

$$[e^j, e^k] = f_l^{jk} e^l.$$

Pro tyto konstanty platí několik omezení. Z antisymetrie pro ně plyne následující podmínka:

$$f_l^{jk} = -f_l^{kj}.$$

Další podmínka je o dost složitější a je důsledkem Jacobiho identity.

$$f_m^{kl} f_n^{jm} + f_m^{jk} f_n^{lm} + f_m^{lj} f_n^{km} = 0.$$

Další důležitou definicí je pojem reprezentace grupy a s ním spojený pojem přidružené reprezentace grupy.

Definice 19. Homomorfní zobrazení $\Phi : G \to GL(V)$ nazveme **reprezentací grupy** ve vektorovém prostoru V. Rozměru prostoru V se říká rozměr reprezentace Φ. Reprezentace je levou lineární akcí.

Definice 20. Homomorfismus Lieových algeber $f : \mathfrak{g} \to End\, V$ nazveme **reprezentací Lieovy algebry**.

Pozn.: f je homomorfismus Lieovy algebry pokud je lineární a zachovává bilineární formu na té algebře, tj.
$f(X + \lambda Y) = f(X) + \lambda f(Y)$,
$f([X, Y] = f(X)f(Y) - f(Y)f(X)$.
Pozn.: Reprezentace f Lieovy algebry zachovává její strukturní konstanty:

$$[e^i, e^j] = c_k^{ij} e^k \Rightarrow [f(e^i), f(e^j)] = c_k^{ij} f(e^k).$$

Podobně jako souvisí Lieovy grupy a algebry, tak souvisí i jejich reprezentace. Tedy reprezentaci Lieovy grupy Φ lze přiřadit reprezentaci Lieovy algebry ρ'. Opačné tvrzení obecně neplatí.
Pro reprezentaci Lieovy algebry lze použít vektorový prostor, na kterém je definovaná. Dostáváme se tím tzv. přidruženou reprezentaci Lieovy algebry. Nechť $X \in \mathfrak{g}$, potom definujeme zobrazení:

$$ad_X Y := [X, Y], \quad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Definice 21. Zobrazení ad zadané vztahem:

$$ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad X \to ad_X,$$

nazveme **přidruženou reprezentací Lieovy algebry** $\mathfrak{g}$.

Definice 22. Nechť G je Lieova grupa, $g \in G$, definujeme zobrazení:

$$I_g : G \to G, \quad k \to gkg^{-1}. \tag{1.5}$$

Zobrazení $Ad_g := I_{g*} : G \to \mathfrak{g}$ nazveme **přidružená reprezentace Lieovy grupy**. Platí následující vztahy:

1. $ge^X g^{-1} = e^{Ad_g X}$,
2. Pro maticové grupy: $Ad_A X = AXA^{-1}$,
3. $Ad_{\exp X} = e^{ad_X}$.

Definice 23. Nechť D je Lieova grupa, a $\mathfrak{d}$ je její Lieova algebra, $\langle\ ,\ \rangle$ je bilineární, symetrická, nedegenerovaná a ad-invariantní forma. Pokud tuto Lieovu algebru lze rozložit do dvou podalgeber $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \dot{+} \tilde{\mathfrak{g}}$, které jsou tzv. maximálně izotropní vůči její formě, tj.

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g},\ X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}},\ \ \langle X, Y\rangle = 0,\ \ \langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle = 0, \tag{1.6}$$

nazveme grupu $D \equiv (G|\tilde{G})$ **Drinfeldovým doublem**.

Pozn.: V Drinfeldově doublu lze vybrat dvě duální báze $T_a, \tilde{T}^b$ tak, že pro všechny bázové vektory jednotlivých algeber $T_a, \tilde{T}^b$, platí:

$$T_a \in \mathfrak{g},\ \tilde{T}^b \in \tilde{\mathfrak{g}},\ \ \langle T_a, \tilde{T}^b\rangle = \delta_a^b, \tag{1.7}$$

Pozn.: Nechť c_{ij}^k resp. $\tilde{c}_k^{ij}$ jsou strukturní konstanty algebry $\mathfrak{g}$, resp. $\tilde{\mathfrak{g}}$. Potom platí:

$$[T_i, \tilde{T}^j] = \tilde{c}_i^{jk} T_k + c_{ki}^j \tilde{T}^k. \tag{1.8}$$

Při důkazu této identity využijeme ad-invariantnosti formy, potom tedy:

$$\langle [T_i, \tilde{T}^j], \tilde{T}^k\rangle = \langle T_i, [\tilde{T}^j, \tilde{T}^k]\rangle = \langle T_i, \tilde{c}_l^{jk} \tilde{T}^l\rangle = \tilde{c}_i^{jk} = \langle \tilde{c}_i^{jl} T_l, \tilde{T}^k\rangle$$

Zcela analogicky odvodíme, že

$$\langle [T_i, \tilde{T}^j], T_m\rangle = \langle c_{li}^j \tilde{T}^l, T_m\rangle.$$

Oba dva výrazy sečteme a máme:

$$\langle [T_i, \tilde{T}^j], \tilde{T}^k + T_m\rangle = \langle c_{li}^j \tilde{T}^l + \tilde{c}_i^{jl} T_l, \tilde{T}^k + T_m\rangle.$$

Z nedegenerovanosti bilineární formy již plyne vztah (1.8).

Definice 24. Nechť D je Drinfeldův double, $\mathfrak{d}$ je jemu příslušná algebra, $\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}$ je její rozklad (viz definice). Potom trojici $\mathfrak{d}, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}$ nazýváme **Maninův triple** (ekvivalentně Maninova trojice).

Tvrzení: Nechť G je Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ je jí příslušná Lieova algebra $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ je exponenciální zobrazení. Potom platí:

$$(e^X e^Y) = \exp(X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]-\frac{1}{12}[Y,[X,Y]]-\frac{1}{24}[Y,[X,[X,Y]]]+...). \tag{1.9}$$

Tento vztah se nazývá **Baker-Campbell-Hausdorffova formule**.

Kapitola 2

Poisson-Lie T-dualita

Nyní se podíváme jakým způsobem se dá konstruovat duální model k sigma modelu. Označme D Drinfeldův double, a $(\mathfrak{d}, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ Maninův triple. Dále označíme G Lieovu podgrupu D, a $\tilde{G}$ Lieovu podgrupu D k ní duální. Nyní budeme postupovat podobně jako ve [10]. Pokud máme libovolný prvek Drinfeldova doublu, potom na okolí jednotky lze vždy najít rozklad toho prvku ve tvaru

$$\forall d \in D, d = g.\tilde{h}; \quad g \in G, \quad \tilde{h} \in \tilde{G}. \tag{2.1}$$

Nyní se podíváme jak obecně řešit rozklad na Drinfeldově doublu. Mějme 2n-rozměrnou algebru $\mathfrak{d}$. Najdeme v ní n-rozměrný podprostor, který označíme $\mathcal{E}^+$. Ortogonální doplněk k tomuto podprostoru vzhledem k dané bilineární formě označíme $\mathcal{E}^-$. Platí tedy:

$$\forall x \in \mathcal{E}^+, \forall y \in \mathcal{E}^-, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Součet těchto prostorů tvoří celou algebru Drinfeldova doublu. Dále vhodně zvolíme bázi prostoru $\mathfrak{g}$ a duálního prostoru $\tilde{\mathfrak{g}}$. Prvky těchto bazí označíme $T_a, \tilde{T}^b$, a vybereme je tak, aby splňovaly podmínku:

$$\langle T_a, \tilde{T}^b \rangle = \delta_a^b. \tag{2.2}$$

Pro prvek Drinfeldova doublu l postulujeme následující polní rovnici. Hledáme tedy zobrazení $l(x^+, x^-)$ ze světoplochy do Drinfeldova doublu:

$$\langle \partial_\pm l l^{-1}, \mathcal{E}^\pm \rangle = 0. \tag{2.3}$$

Jak již bylo řečeno, každý prvek $l \in D$ lze zapsat jako součin dvou prvků z grupy G, $\tilde{G}$. Dosadíme ho tedy v tomto tvaru do rovnice a zároveň využijeme vlastností, že $(g.\tilde{h})^{-1} = \tilde{h}^{-1}.g^{-1}$ a také, že $\partial_\pm(g\tilde{h}) = \partial_\pm g\tilde{h} + g\partial_\pm\tilde{h}$. Provedeme několik úprav a nakonec dostaneme rovnici:

$$\begin{aligned} \langle \partial_\pm(g\tilde{h})(g\tilde{h})^{-1}, \mathcal{E}^\pm \rangle = 0, \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \langle (\partial_\pm g\tilde{h} + g\partial_\pm\tilde{h})(\tilde{h}^{-1}g^{-1}), \mathcal{E}^\pm \rangle = 0, \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \langle (\partial_\pm g g^{-1} + g\partial_\pm\tilde{h}\tilde{h}^{-1}g^{-1}), \mathcal{E}^\pm \rangle = 0, \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \langle g^{-1}\partial_\pm g + \partial \pm h h^{-1}, g^{-1}\mathcal{E}^\pm g \rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

S ohledem na podmínku (2.2) můžeme pravý argument bilineární formy zapsat ve tvaru:

$$g^{-1}\mathcal{E}^+g = \mathrm{Span}[T_i + E_{ij}(g)\tilde{T}^j], \tag{2.5}$$

$$g^{-1}\mathcal{E}^-g = \mathrm{Span}[T_i + B_{ij}(g)\tilde{T}^j]. \tag{2.6}$$

Druhý vzorec (2.6) ještě upravíme následovně:
Mějme dva prostory které jsou na sebe kolmé:

$$0 = \langle T_i + E_{ij}(g)\tilde{T}^j, T_k + B_{kj}(g)\tilde{T}^j\rangle.$$

Potom platí:

$$0 = \langle T_i + E_{ij}\tilde{T}^j, T_k + B_{kj}\tilde{T}^j\rangle = B_{kj}\langle T_i, \tilde{T}^j\rangle + E_{ij}\langle \tilde{T}_k, T^j\rangle = B_{ki} + E_{ik} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B_{ik} = -E_{ki}. \tag{2.7}$$

Tento vzorec dosadíme do vztahu (2.4), a dostáváme následující rovnice:

$$(\partial_+\tilde{h}\tilde{h}^{-1})^i = -E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_+g)_j := A^i_+(g), \tag{2.8}$$

$$(\partial_-\tilde{h}\tilde{h}^{-1})^i = E^{ji}(g)(g^{-1}\partial_+g)_j := A^i_-(g). \tag{2.9}$$

Rovnice zderivujeme podle $\mp$ a tyto smíšené derivace porovnáme, dostáváme následující rovnice:

$$\partial_+A^i{}_-(g) - \partial_-A^i{}_+(g) - \tilde{c}^i_{kl}A^k{}_-(g)A^l{}_+(g) = 0, \tag{2.10}$$

kde $\tilde{c}^i_{kl}$ jsou strukturní konstanty algebry $\tilde{\mathfrak{g}}$. Rovnice (2.10) je polní rovnicí pro sigma model zadaný následujícím lagrangiánem [10]:

$$L = E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_-g)_i(g^{-1}\partial_+g)_j, \tag{2.11}$$

Nyní využijeme toho, že na Drinfeldově doublu máme i rozklad $d = \tilde{g}h$. Zopakujeme celý postup, a dostáváme zcela analogický sigma model:

$$\tilde{L} = \tilde{E}^{ij}(\tilde{g})(\tilde{g}^{-1}\partial_-\tilde{g})_i(\tilde{g}^{-1}\partial_+\tilde{g})_j. \tag{2.12}$$

Matice $\tilde{E}^{ij}$ bude definovaná stejně jako v minulém případě:

$$g^{-1}\mathcal{E}^+g = \mathrm{Span}[\tilde{T}_i + \tilde{E}_{ij}(\tilde{g})T^j], \tag{2.13}$$

$$g^{-1}\mathcal{E}^-g = \mathrm{Span}[\tilde{T}_i - \tilde{E}_{ji}(g)T^j]. \tag{2.14}$$

Pravou stranu (2.13) ještě upravíme do vhodnějšího tvaru:

$$g^{-1}\mathcal{E}^+g = \mathrm{Span}[g^{-1}(T^i + E^{ij}(e)\tilde{T}_j)g] = \tag{2.15}$$

$$= \mathrm{Span}[(a(g)^i_l + E^{ij}(g)b(g)_{jl})T^l + E^{ij}(e)d(g)^l_j\tilde{T}_l]. \tag{2.16}$$

Předposlední a poslední rovnost jsou důsledkem vzorce (1.5). Platí totiž, že

$$g^{-1}T^ig \equiv a(g)^i_lT^l, \quad g^{-1}\tilde{T}^jg \equiv b(g)_{jl}T^l + d(g)^l_j\tilde{T}_l,$$

kde jsme označili $b(g), a(g), d(g)$ submatice matice přidružené reprezentace:

$$Ad(g)^t = \begin{pmatrix} a(g) & 0 \\ b(g) & d(g) \end{pmatrix}.$$

Z toho již můžeme určit matici E(g):

$$E(g) = (a(g) + E(e)b(g))^{-1}E(e)d(g). \tag{2.17}$$

Zcela analogicky definujeme matici duálního modelu:

$$Ad(\tilde{g})^t = \begin{pmatrix} a(\tilde{g}) & 0 \\ d(\tilde{g}) & b(\tilde{g}) \end{pmatrix}.$$

$$E(\tilde{g}) = (\tilde{a}(\tilde{g}) + \tilde{E}(\tilde{g})\tilde{b}(\tilde{g}))^{-1}\tilde{E}(\tilde{e})\tilde{d}(\tilde{g}). \tag{2.18}$$

Z rovnosti

$$\mathrm{Span}[T_i + E_{ij}\tilde{T}^j] = \mathrm{Span}[\tilde{T}^i + \tilde{E}^{ij}T_j],$$

dostáváme, že platí

$$\tilde{E}^{ij} = E^{-1}_{ij}. \tag{2.19}$$

Lagrangián sigma modelu můžeme zapsat také pomocí levoinvariantních forem:

$$\mathcal{L} = \partial_+\phi^\mu F_{\mu\nu}\partial_-\phi^\nu, \tag{2.20}$$

$$\text{kde} \quad F_{\mu\nu}(x) = e^a_\nu(g(x))\ E_{ab}(g)\ e^b_\mu(g(x)). \tag{2.21}$$

Označili jsme e^a_μ, e^b_ν bázi levoinvariantních vektorových polí na G, tj.

$$\partial_\pm\phi^\mu e^a_\mu = (g^{-1}\partial_\pm g)^a. \tag{2.22}$$

Pozn.: Můžeme využít následující identity (viz [7]):

$$a(g)^{-1} = d(g)^t, \qquad b(g)^t a(g) = -a(g)^t b(g).$$

Provedeme přechod k pravoinvariantním polím a odvodíme si vztah, který využijeme později (indexy u E_R, E_L určují použité pole):

$$\begin{aligned} E_R(g) = (E(e)^{-1} + b(g)a(g)^{-1}))^{-1} &= (E(e)^{-1}(E(e)^{-1} + b(g)a(g)^{-1})a(g)^{-1})^{-1} = \\ &= a(g)(a(g) + E(e)b(g))^{-1}E(e)d(g)a(g)^{-t} = a(g)E_L(g)a(g)^{-t}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{gathered} E(g)^{-1} = E_0 + (b(g)^t a(g))^{-1}, \\ E^{-1} + E^{-t} = E_0^{-1} + (b(g)^t a(g))^{-1} + E_0^{-t} - (b(g)^t a(g))^{-1} = E_0^{-1} + E_0^{-t}. \end{gathered} \tag{2.24}$$

Pozn.: v článku [5] nalezne čtenář příklady sigma modelů s dvourozměrným cílovým prostorem, modelů k nim duálních a také jednotlivé typy Drinfeldových doublů.

Pokud se nám tedy podaří najít nějaké řešení sigma modelu, můžeme pomocí tohoto postupu získat duální řešení. Praktické hledání bude o trochu složitější, neboť se nám úloha přemění na hledání řešení parciální diferenciální rovnice.
V dalších kapitolách uvidíme, že tyto rovnice se v některých případech dají vyřešit.

Kapitola 3

Sigma modely, tenzor energie-hybnosti a metrický tenzor

3.1 Metrický tenzor

Definice 25. **Metrickým tenzorem na vektorovém prostoru** V nazveme symetrický nedegenerovaný tenzor 2. řádu. Tedy musí splňovat vztahy:

1. $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$,
2. $\forall X, Y \in V, \quad \eta(X,Y) = \eta(Y,X)$,
3. $\forall Y \in V, \quad \eta(X,Y) = 0 \Rightarrow X = 0$.

Pozn.: Metrický tenzor se dá jakožto symetrická nedegenerovaná bilineární forma zapsat pomocí matice dim $V\times$ dim V. Matici inverzní k matici metrického tenzoru budeme značit η^{ab}. Dále z lineární algebry víme, že matici metrického tenzoru lze převést do diagonálního tvaru. V této bázi vypadá matice následovně: $\eta_{ab} = diag(1, ...1, -1, ..., -1)$. Počet jedniček a mínus jedniček zapisujeme jako uspořádanou dvojici (r,s) a nazýváme signaturou metrického tenzoru. Báze, ve kterých má metrický tenzor diagonální tvar nazýváme ortonormální báze. Jednou z možností, jak využít metrický tenzor je třeba spouštění a zvedání indexů, celkem snadno to vidíme pokud ho zapíšeme ve tvaru tenzorového součinu $\eta^{ab} = e^a \otimes e^b$. Potom $e_a = \eta_{ab} e^b$ a obráceně, $e^a = \eta^{ab} e_b$.

Definice 26. **Metrickým tenzorem** g **na varietě** M nazveme symetrické nedegenerované kovariantní tenzorové pole 2. řádu, tj. $g \in \mathcal{T}_2{}^0$, které má vlastnost, že v každém bodě $P \in M$ je metrickým tenzorem vektorového prostoru $T_P M$ ve smyslu předcházenící definice. Varietu s metrickým tenzorem (M, g) nazýváme **Riemannovská varieta**.

Pozn.: V souřadnicích vypadá metrický tenzor následovně:

$$g = \eta_{ij}\ dx^i \otimes dx^j.$$

Pozn.: Metrický tenzor na varietě lze použít ke zvedání a spouštění indexů a také k zavedení úhlů a vzdálenosti.
Př.: Nejjednodušším případem variety s metrickým tenzorem je $\mathbb{R}^n$ společně s metrickým tenzorem signatury r+s, potom

$$g_{ij} = dx^1 \otimes dx^1 + ... + dx^r \otimes dx^r - dx^{r+1} \otimes dx^{r+1} - ...$$

Pozn.: S využitím tečného zobrazení můžeme dostat indukovaný metrický tenzor.

Definice 27. Nechť f je vložení M do riemannovské variety (N, h) s pozitivní metrikou, tj. f, f_* jsou injektivní zobrazení z $M \to N$. Potom $g := f^*h$ je metrický tenzor na varietě M, tj. (M, g) je riemannovská varieta.

Pokud na metrický tenzor aplikujeme dva vektory, dostáváme ze vzorce pro tečné zobrazení (1.2) následující vztah:

$$g(V, W) = (f^*h)(V, W) = h(f_*V, f_*W).$$

Př.: Na sféru S^2 o poloměru R můžeme indukovat metrický tenzor z vložení do E^3 ve tvaru:

$$g = R^2(d\theta \otimes d\theta + sin^2\theta d\phi \otimes d\phi).$$

3.2 Variace funkcionálu

Jedním ze základních fyzikálních principů je princip minimální akce. Pokud definujeme akci podél trajektorie pomocí integrálu, bude nás zajímat, která trajektorie minimalizuje tento funkcionál. Tuto úlohu řešíme pomocí variačního počtu, kdy jí převedeme na hledání řešení diferenciální rovnice.
Hledání pohybových rovnic vede na hledání stacionárního bodu akce, tj. extrému funkcionálu

$$S_0 = \int_{\tau_0}^{\tau_f} \mathcal{L}(X^\mu(\tau), \dot{X}^\mu(\tau), \tau) d\tau.$$

Za předpokladu pevných konců se stacionární bod získá řešením Euler-Lagrangeových rovnic:

$$\delta S = \int \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial X^\mu} \right) \delta X^\mu d\tau.$$

Ze základního lemmatu variačního počtu je zřejmé, že variace je rovna nule pouze pokud je závorka rovna nule. Hledání se nám tedy mění na řešení diferenciální rovnice 2. řádu. Celkem snadno se dají tímto postupem najít pohybové rovnice např. pro obyčejnou napnutou strunu. My si to ale ukážeme konkrétně na příkladu sigma modelu, protože v budoucnu výsledné rovnice ještě použijeme.
Př.: Hledáme pohybové rovnice pro systém zadaný pomocí funkcionálu akce:

$$S[F, \phi] = \frac{1}{2} \int d^2x \; \partial_+ \phi^\mu \; F_{\mu\nu}(\phi) \; \partial_- \phi^\nu, \tag{3.1}$$

kde předpokládáme, že $G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu}$ je regulární matice.
Provedeme tedy variaci funkcionálu vzhledem k proměnné X^μ:

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_+}\frac{\partial L}{\partial(\partial_+\phi^\mu)} + \frac{\partial}{\partial x_-}\frac{\partial L}{\partial(\partial_-\phi^\mu)} - \frac{\partial L}{\partial \phi^\mu} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_+}(\partial_-\phi^\nu F_{\mu\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_-}(\partial_+\phi^\nu F_{\nu\mu}) - F_{\sigma\nu,\mu}\partial_+\phi^\sigma\partial_-\phi^\nu =$$

$$\text{Vsuvka}: \frac{\partial}{\partial x_+}(F_{\mu\nu}) = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial\phi^\lambda}.\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial x_+}$$

$$= F_{\mu\nu}\partial_+\partial_-\phi^\nu + \partial_-\phi^\nu\partial_+F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu}\partial_-\partial_+\phi^\nu + \partial_+\phi^\nu\partial_-F_{\nu\mu} - F_{\lambda\nu,\mu}\partial_+\phi^\lambda\partial_-\phi^\nu =$$

$$= (F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu})(\partial_+\partial_-\phi^\nu) + \partial_-\phi^\nu F_{\mu\nu,\lambda}\partial_+\phi^\lambda + \partial_+\phi^\nu F_{\nu\mu,\lambda}\partial_-\phi^\lambda - \partial_+\phi^\nu F_{\lambda\nu,\mu}\partial_-\phi^\lambda =$$

$$= (F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu})(\partial_+\partial_-\phi^\nu) + (F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\mu,\nu} - F_{\lambda\nu,\mu})\partial_+\phi^\nu\partial_-\phi^\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\partial_+\partial_-\phi^\mu) + \Gamma^\mu_{\sigma\nu}\partial_+\phi^\nu\partial_-\phi^\sigma = 0, \tag{3.2}$$

kde jsme označili $\Gamma^\mu_{\sigma\nu} = G^{\mu\lambda}(F_{\lambda\nu,\sigma} + F_{\sigma\lambda,\nu} - F_{\sigma\nu,\lambda})$; $G^{\mu\nu} = G^{-1}_{\mu\nu}$; $G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu}$. Odvozené pohybové rovnice souhlasí se vzorcem uvedeným v [4].
Pozn.: V odvození jsme zavedli nový symbol $\Gamma^\mu_{\sigma\nu}$. V případě, že by F byla symetrická, tak se jedná o tzv. Chrisforellovy symboly 2. druhu. Christofellovy symboly 1. druhu jsou obecně, pro symetrickou nedegenerovanou bilineární formu g, definované následovně:

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} := \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\lambda\nu,\mu}). \tag{3.3}$$

Využívají se při tzv. paralelním přenosu. Přímo z definice vidíme, že pokud F je konstantní, tak se pohybová rovnice (3.2) zredukuje na vlnovou rovnici, jejíž řešení je již snadné. Toho ještě později využijeme.

3.3 Tenzor energie-hybnosti

Pozn.: Derivace reálné funkce vyjadřuje jak se mění funkce v závislosti na svém argumentu. Podobný pojem existuje i pro funkcionály, tzv. funkcionální derivace, a vyjadřuje, jak se mění hodnota funkcionálu v závislosti na jeho argumentu. Pokud počítáme variaci integrálu, tak jeho lineární přírustek má strukturu objemového integrálu, kde podintegrální výraz závisí lineárně na argumentu, koeficient u něj nazýváme variační derivace.

Definice 28. Nechť $S[\psi, h] := \int_D L(\psi, h)\omega_h$, kde D je oblast, ω_h je metrická forma objemu (viz [1]). Potom po označení metrického tenzoru $h_{\mu\nu}$ zavádíme tenzor energie-hybnosti vztahem

$$T_{\mu\nu} := -\frac{\delta S[\psi, h]}{\delta h_{\mu\nu}(x)}, \quad \text{tj. (viz [1])} \quad S[\psi, h + \epsilon g] =: S[\psi, h] - \epsilon\int_D \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\omega_h.$$

Z definice vidíme, že můžeme provést variaci funkcionálu i podle konstantní metriky. Tenzor energie-hybnosti se například v Minkowského prostoročase $E^{1,3}$ s metrikou $h_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ skládá z následujících veličin:
T^{00} = hustota energie
T^{i0} = hustota i-té složky hybnosti
T^{0i} = hustota i-té složky toku energie
T^{ij} = j-tá složka hustoty proudu i-té složky hybnosti.

3.4 Nambu-Gotova a Polyakova akce

Jednou z prvních strunových teorií byla okolo roku 1960 teorie bosonových strun. Přestože později byla nahrazena supersymetrickou strunovou teorií, tak je i dnes vhodné od ní začít. Budeme teď pracovat s teorií, jenž nezahrnuje interakci.
Pohyb relativistické částice v D-dimensionálním prostoročase lze popsat pomocí funkcionálu akce, jenž má tvar:

$$S = -m \int ds, \tag{3.4}$$

kde předpokládáme, že $\hbar = c = 1$. V klasické teorii se tato částice pohybuje po nejkratší světočáře (geodetice). Využijeme vztahu pro ds a dostáváme následující výsledek:

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}(X) dX^\mu dX^\nu \;\Rightarrow\; S = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(X)\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu} d\tau, \quad \nu, \mu \in \{1, ...D-1\},$$

kde tečka označuje derivaci podle τ, $g_{\mu\nu}$ určuje metriku. Tato akce má důležitou vlastnost, a sice že je invariantní vůči reparametrizaci.
Struna se pohybuje po zakřivené ploše, zvané světoplocha. Ta je parametrizována dvěmi souřadnicemi, značí se τ, σ. Metrika g_{ab} je zvolena tak, že má Minkowského signaturu $(-, +, +, ...)$. Akce (3.4) poté získá následující tvar:

$$S_{NG} = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} . \frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 . \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2}, \tag{3.5}$$

kde skalární součin je definován následovně: $A.B = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ a T je konstanta. To je tzv. Nambu-Gotova akce.
Přestože tato akce má hezkou fyzikální interpretaci, tak práce s ní je nešikovná kvůli odmocnině.
V dalším textu využijeme souřadnice světelného kužele (σ^+, σ^-) na světoploše. Tyto souřadnice jsou definované tak, že platí:

$$(\partial_+ X^\mu)^2 = (\partial_- X^\mu) = 0. \tag{3.6}$$

Metriku $h_{ab}(\sigma, \tau)$ je na světoploše indukována následovně:

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad \sigma^a, \sigma^b \in \{\tau, \sigma\}.$$

V těchto souřadnicích získá Nambu-Gotova akce tento tvar:

$$S_{NG} = T\int d\sigma^+ d\sigma^- \partial_+ X^\mu \partial_- X_\mu.$$

Tato akce vede na vlnovou rovnici:

$$\partial_+\partial_- X^\mu = 0.$$

Mezi souřadnicemi (τ, σ) a (x_+, x_-) je následující vztah:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma^+ - \sigma^-), \tau = \frac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-) \tag{3.7}$$

Protože kvantování Nambu-Gotovy akce je problematické, zavádí se tzv. Polyakova akce, která má následující tvar:

$$S_P = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}h^{ab}\partial_a X^\mu.\partial_b X_\mu. \tag{3.8}$$

Označili jsme $\det h_{ab} = h$, $h_{ab} = (h^{-1})^{ab}$. Nyní je třeba ukázat, že tato akce je ekvivalentní Nambu-Gotově akci. Polyakova akce je globálně invariantní vůči Poincarého transformaci, lokálně invariantní vůči změně souřadnic a hlavně je invariantní vůči 2-dimensionální Weylově transformaci [11], která je definovaná následovně:

$$\hat{h}^{ab} \to e^{\phi(\sigma,\tau)}h^{ab} \tag{3.9}$$

Tenzor energie hybnosti je bezestopý právě kvůli této lokální symetrii. Díky tomu že je metrika h lokálně invariantní vůči reparametrizaci, můžeme zvolit její dvě komponenty. Třetí komponenta je určena ze symetrie metriky a máme tedy jednu nezávislou komponentu metriky. Ale protože je lokálně invariantní vůči Weylově transformaci tak můžeme metriku zafixovat jako Minkowského. Pokud provedeme variaci Polyakovy akce podle metriky, dostáváme následující vztah:

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\left(-\frac{1}{2\sqrt{-h}}h^{ab}\delta h + \sqrt{-h}\delta h^{ab}\right)\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu = \\
&= -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\left(-\frac{1}{2\sqrt{-h}}h^{ab}(-hh_{cd}\delta h^{cd} + \sqrt{-h}\delta h^{ab}\right)\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu = \\
&= -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}\left(\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu - \frac{1}{2}h_{ab}h^{cd}\partial_c X^\mu\partial_d X_\mu\right)\delta h^{ab}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Využili jsme pomocný vztah pro determinant [11]:

$$\delta|h| = -|h|h_{\alpha\beta}\delta h^{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad \delta\sqrt{-|h|} = -\frac{1}{2}\sqrt{-|h|}h_{\alpha\beta}\delta h^{\alpha\beta} \tag{3.11}$$

Podmínka že $\delta S = 0$ nám dává tuto rovnici:

$$h_{ab} = \Omega(\sigma,\tau)\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu. \tag{3.12}$$

Dále využijeme podmínky (3.6), abychom spočetli tenzor energie-hybnosti:

$$T_{ab} = -\frac{2}{T}\frac{1}{\sqrt{-h}}\frac{\delta S}{\delta h_{ab}} = \partial_a X^\mu\partial_b X_\mu - \frac{1}{2}h_{ab}(\partial X)^2 \Rightarrow \tag{3.13}$$

$$\Rightarrow T_{++} = (\partial_+ X^\mu)^2 = 0, \quad T_{--} = (\partial_- X^\mu)^2 = 0, \quad T_{+-} = T_{-+} = 0 \tag{3.14}$$

Vyžili jsme toho, že $h_{++} = h_{--} = 0$. Vidíme, že došlo k vymizení tenzoru energie-hybnosti. Důležitým poznatkem je, že mimodiagonální složky vymizely automaticky. Protože jsme mohli zafixovat metriku jako Minkowského, s využitím vztahu pro souřadnice světelného kužele $\sigma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau \pm \sigma)$ nám Polyakova akce nám přechází do následujícího tvaru:

$$S = -T \int d\sigma^+ d\sigma^- \partial_+ X^\mu \partial_- X_\mu$$

Pohybové rovnice pro Polyakovu akci jsou stejné jako pohybové rovnice pro Nambu-Gotovu akci, tyto akce jsou tedy ekvivalentní.

3.5 Sigma model a tenzor energie-hybnosti

Pokud najdeme řešení sigma modelu, které navíc splňuje podmínku vymizení tenzoru energie-hybnosti, tj. $\forall a, b \in \{+, -\}, T_{ab} = 0$, tak ho nazveme strunovým řešením. Podíváme se konkrétně na náš sigma model se symetrickou maticí $F_{\mu\nu}$.

Př. Najdeme tenzor energie-hybnosti pro sigma model zadaný vztahem (3.1). Pokud zavedeme metrický tenzor

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tak vidíme, že náš integrál (3.1) lze zapsat ve tvaru:

$$S[\phi, \sigma] = \frac{1}{4} \int d^2\sigma \sqrt{-|h|} h^{ab} \partial_a \phi^\mu \; F_{\mu\nu}(\phi) \; \partial_b \phi^\nu. \tag{3.15}$$

Nyní stačí provést variační derivaci, využijeme identitu (3.11), a dostáváme podmínky na složky tenzoru energie-hybnosti:

$$T_{ab} = -\frac{\delta S[\psi, h]}{\delta h_{ab}} = \frac{\delta \left(\frac{1}{4} \int d^2\sigma \sqrt{|-h|} h^{ab} \partial_a \phi^\mu \; F_{\mu\nu}(\phi) \; \partial_b \phi^\nu \right)}{\delta h_{ab}}, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} 0 = T_{ab} \Leftrightarrow 0 = \frac{\delta \left(\sqrt{-|h|} h^{ab} \partial_a \phi^\mu \; F_{\mu\nu}(\phi) \; \partial_b \phi^\nu \right)}{\delta h_{ab}} = \\ = \partial_a \phi^\mu \; F_{\mu\nu}(\phi) \; \partial_b \phi^\nu - \frac{1}{2} \sqrt{-|h|} h^{ab} \partial_a \phi^\mu \; F_{\mu\nu}(\phi) \; \partial_b \phi^\nu \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \partial_a \phi^\mu F_{\mu\nu} \partial_a \phi^\nu = 0, \forall a \in \{\pm\}. \end{aligned}$$

Také jsme využili toho, že $h_{++} = h_{--} = 0$.

V případě že matice není symetrická, tak ji rozepíšeme jako symetrickou a antisymetrickou část:

$$S[\phi, \sigma] = \frac{1}{4} \int d^2\sigma \sqrt{-|h|} h^{ab} \partial_a \phi^\mu \; G_{\mu\nu}(\phi) \; \partial_b \phi^\nu + \frac{1}{2} \int d^2\sigma \partial_a \phi^\mu (F \wedge F)_{\mu\nu} \partial_b \phi^\nu. \tag{3.17}$$

Integrál s dva-formou který jsme získali nezávisí vůbec na h_{ab}, což znamená, že jeho variace podle metrického tenzoru bude nula, tedy do tenzoru energie-hybnosti vůbec nepřispěje. Celkově poté dostáváme podmínku na vymizení tenzoru energie-hybnosti:

$$\partial_a \phi^\mu \; (G_{\mu\nu}(\phi)) \; \partial_a \phi^\nu = 0, \quad \forall a \in \{\pm\}. \tag{3.18}$$

3.6 Poisson-Lie T-dualita a tenzor energie-hybnosti

Nyní se ještě podíváme na naši akci (3.1). Jak bylo psáno v předchozí kapitole, můžeme nalezením vielbeinů a pomocí rovnice (2.21) upravit naši akci do tvaru:

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x\ \partial_+\phi^\mu\ e^a_\mu(g)\ E_{ab}(g)\ e^b_\nu(g)\partial_-\phi^\nu = \tag{3.19}$$

$$= \frac{1}{2}\int d^2x\ L_+(g)^a E_{ab}(g) L^t_-(g)^b = \frac{1}{2}\int d^2x\ L_+(g)\ E(g)\ L_-(g)^t.$$

Z toho je zároveň vidět, jak vypadá hustota lagrangiánu:

$$\mathcal{L} = (L_+(g))^a\ E_{ab}(g)\ (L^t_-(g))^b, \tag{3.20}$$

kde jsme označili $L_+(g)$ vektor se složkami $(L_+(g))^i = \partial_+\phi^\mu\ e^{L^a}_\mu$. Dále nás bude zajímat kanonická hybnost, která se definuje vztahem:

$$P^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau\phi^\mu)}, \tag{3.21}$$

kde τ má význam souřadnicového času. Nyní upravíme vztah pro kanonickou hybnost, abychom ho mohli použít pro náš lagrangián:

$$P^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau\phi^\mu)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_+\phi^\mu)}\frac{\partial(\partial_+\phi^\mu)}{\partial(\partial_\tau\phi^\mu)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_-\phi^\mu)}\frac{\partial(\partial_-\phi^\mu)}{\partial(\partial_\tau\phi^\mu)} = \tag{3.22}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_+\phi^\mu)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_-\phi^\mu)}\right).$$

V případě sigma modelu zadaného (3.1), dostáváme:

$$P^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau\phi^\mu)} = \frac{1}{2}\left(F_{\mu\nu}\partial_-\phi^\nu + \partial_+\phi^\nu F_{\nu\mu}\right), \tag{3.23}$$

Využijeme předchozích úprav a zapíšeme podmínku vymizení tenzoru energie-hybnosti v následujícím tvaru:

$$\partial_a\phi^\mu\ G_{\mu\nu}(\phi)\ \partial_b\phi^\nu = L_a(g)\ G(g)\ L_b(g)^t \tag{3.24}$$

kde G je symetrická část matice E.
Později budeme ještě potřebovat spočítat u sigma modelu hustotu hamilotniánu, ta se spočte ze znalosti kanonické hybnosti a hustoty lagrangiánu podle následujícího vztahu:

$$\mathcal{H} = \partial_\tau\phi^\nu\mathcal{P}_\nu - \mathcal{L}. \tag{3.25}$$

Hustota hamiltoniánu po dosazení z předchozích vzorců má následující tvar:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}(\partial_+\phi^\mu P^\mu + \partial_-\phi^\mu P^\mu) - \frac{1}{2}\partial_+\phi^\mu\ F_{\mu\nu}(\phi)\ \partial_-\phi^\nu = \\ &= \tfrac{1}{4}\big(\partial_+\phi^\mu F_{\mu\nu}\partial_-\phi^\nu + \partial_+\phi^\mu F_{\mu\nu}\partial_+\phi^\nu + \partial_+\phi^\nu F_{\nu\mu}\partial_-\phi^\mu + \\ &\quad + \partial_-\phi^\nu F_{\nu\mu}\partial_-\phi^\mu\big) - \tfrac{1}{2}\partial_+\phi^\mu\ F_{\mu\nu}(\phi)\ \partial_-\phi^\nu.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Výrazy v hustotě hamiltoniánu zapíšene trochu přehledněji, maticově, pomocí L_+, L_-. Dostaneme tedy následující výraz:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \frac{1}{4}(L_-(g)\ E^t(g)\ L_+(g)^t + L_+(g)\ E^t(g)\ L_+(g)^t + L_-(g)\ E(g)\ L_-(g)^t + \\ +L_+(g)\ E(g)\ L_-(g)^t - \tfrac{1}{4}(L_+(g)\ E(g)\ L_-(g)^t + L_-(g)\ E^t(g)\ L_+(g)^t) = \\ = \tfrac{1}{4}(L_+(g)\ E(g)\ L_+(g)^t + L_-(g)\ E(g)\ L_-(g)^t).\end{aligned} \tag{3.27}$$

To souhlasí se vzorcem v [6]. Nyní využijeme identitu platnou pro matice:

$$x\ A\ x^t = x\ A^t\ x^t = \frac{1}{2}x(A^t + A)x^t, \tag{3.28}$$

a pomocí ní upravíme výraz pro hustotu hamiltoniánu do následujícího tvaru:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8}(L_+(g)\ (E(g) + E^t(g))\ L_+(g)^t + L_-(g)\ (E(g) + E^t(g))\ L_-(g)^t). \tag{3.29}$$

Ve článku [6] bylo dokázáno, že v obecnějším případě (tzv. Poisson-Lie T-pluralita), se hustota hamiltoniánu zachovává. Ze vzorce (3.24) je již vidět že hustota hamiltoniánu je součtem dvou složek tenzoru energie-hybnosti, konkrétně složek T_{++}, T_{--}. Pokud tedy dokážeme, že se pro duální model zachovává nejen hustota hamiltoniánu, ale i jednotlivé sčítance, tak z toho již vyplyne, že se bude zachovávat i hodnota tenzoru energie-hybnosti, tedy duál ke strunovému řešení bude strunové řešení.
V další části nalezneme vztah pro hustotu hamiltoniánu duálního modelu v souřadnicích na grupě G.
Prvním krokem bude určit, jakým způsobem se transformují levoinvariantní pole na grupě G, které jsme označili $L_+(g), L_-(g)$. Vyjdeme z definice levoinvariantního pole na grupě D a využijeme toho, že každý prvek grupy $d \in D$ lze jednoznačně rozložit na součin dvou prvků $d = g.\tilde{h}$:

$$\begin{aligned}l^{-1}\partial_+ l = (\tilde{h}g)^{-1}\partial_+(\tilde{h}g) = g^{-1}\tilde{h}^{-1}(\tilde{h}\partial_+ g + (\partial_+\tilde{h})g) = \\ = g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}\tilde{h}^{-1}\partial_+\tilde{h}g = \\ L_+(g).T + \tilde{L}_+(\tilde{g}).g^{-1}\tilde{T}g = L_+(g).T + \tilde{L}_+(\tilde{h}).[b(g).T + a^{-t}(g).\tilde{T}].\end{aligned} \tag{3.30}$$

Využijeme nyní polních rovnic pro sigma model (2.3), a upravíme vztah do následujícího tvaru:

$$l^{-1}\partial_+ l = L_+(g).T + L_+(g).E(g).[a^t(g).b(g).T + \tilde{T}] = L_+(g).E(g).[E_0^{-1}.T + \tilde{T}]. \tag{3.31}$$

Ale obecný prvek Drinfeldova double lze rozložit i do tvaru $l = \tilde{g}.h$, a analogicky pro tento rozklad dostaneme vztah:

$$l^{-1}\partial_+ l = \tilde{L}_+(\tilde{g}).\tilde{E}(\tilde{g})[\tilde{E}_0^{-1}.\tilde{T} + T]. \tag{3.32}$$

Pokud využijeme vlastností matice E_0, že $\tilde{E}_0 = E_0^{-1}$ (viz (2.19)) dostáváme následující vztah:

$$\tilde{L}_+(g) = L_+(g).E(g)E_0^{-1}\tilde{E}^{-1}(\tilde{g}). \tag{3.33}$$

Zcela analogicky se odvodí transformace vektoru $L_-(g)$:

$$\tilde{L}_-(g) = -L_-(g).E^t(g)E_0^{-t}\tilde{E}^{-t}(\tilde{g}), \tag{3.34}$$

kde jsme použili označení $E^{-t} = (E^{-1})^t$.
Hustota hamiltoniánu duálního sigma modelu vypadá následovně:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{4}(\tilde{L}_-(\tilde{g}).\tilde{E}(\tilde{g}).\tilde{L}_-^t(\tilde{g}) + \tilde{L}_+(\tilde{g}).\tilde{E}(\tilde{g}).\tilde{L}_+^t(\tilde{g})) \tag{3.35}$$

S využitím rovnic (3.33), (3.34) dostáváme následující vztah:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{4}(&L_-(g).E^t(g)E_0^{-t}\tilde{E}^{-t}(\tilde{g}).\tilde{E}(\tilde{g})\tilde{E}(\tilde{g})^{-1}.E_0^{-1}.E(g).L_-^t(g)+\\ &+L_+(g).E(g)E_0^{-1}\tilde{E}^{-1}(\tilde{g}).\tilde{E}(\tilde{g}).\tilde{E}^{-t}(\tilde{g}).E_0^{-t}.E(g).L_+(g))\end{aligned} \tag{3.36}$$

Dále využijeme maticovou identitu (3.28) matici $\tilde{E}^{-t}(g)$ a také identitu (2.24) a upravíme ji následujícím výrazem:

$$x\tilde{E}^{-t}(\tilde{g})x^t = x\frac{1}{2}(\tilde{E}^{-t}(\tilde{g}) + \tilde{E}(\tilde{g})^{-1})x^t = x\frac{1}{2}(\tilde{E}_0^{-t} + \tilde{E}_0^{-1})x^t$$

Dosadíme poté do vzorce a dostaváme následující vztah:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{4}(&L_-(g).E^t(g)E_0^{-t}\tilde{E}^{-t}(\tilde{g}).E_0^{-1}.E(g).L_-^t(g)+\\
&+L_+(g).E(g)E_0^{-1}.\tilde{E}^{-t}(\tilde{g}).E_0^{-t}.E(g).L_+(g)) =\\
&= \tfrac{1}{8}(L_-(g).E^t(g).E_0^{-t}(\tilde{E}_0^{-t} + \tilde{E}_0)E_0^{-1}.E(g).L_-^t(g) +\\
&+L_+(g).E(g)E_0^{-1}.(\tilde{E}_0^{-t} + \tilde{E}_0^{-1}).E_0^{-t}.E(g).L_+(g)) =\\
&= \tfrac{1}{8}(L_-(g).E^t(g).E_0^{-t}(E_0^t + E_0)E_0^{-1}.E(g).L_-^t(g) +\\
&+L_+(g).E(g)E_0^{-1}.(\tilde{E}_0^{-t} + \tilde{E}_0).E_0^{-t}.E(g).L_+(g)) =\\
&\tfrac{1}{8}(L_-(g).(E^t(g) + E(g)).L_-^t(g) +\\
&+L_+(g).(E^t(g) + E(g)).L_+(g)) =\\
&= \tfrac{1}{4}(L_-(g).E(g).L_-^t(g) + L_+(g).E(g).L_+(g)).\end{aligned} \tag{3.37}$$

První závěr, který z úprav vyplývá je, že $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Nás ale také zajímají jednotlivé složky tenzoru energie-hybnosti. Na lichých řádcích předchozích výrazů (s výjimkou posledního řádku) jsou složky tenzoru T_{--}, na sudých řádcích T_{++}. Vidíme že složky se nikde vzájemně nesčítají, tedy složky $\tilde{T}_{++}$ a T_{++} jsou si rovny, stejně jako složky $\tilde{T}_{--}$ a T_{--}. Tenzor energie-hybnosti se tedy při Poisson-Lieově transformaci zachovává, z čehož plyne že duál ke strunovému řešení je opět strunové řešení. Tím je splněna první úloha. V další části ukážeme tento výsledek na konkrétních příkladech řešení sigma modelů.

Kapitola 4

První příklad - Maninův triple $(2|1)$

4.1 Hledání řešení

První úloha na které budeme zkoumat zda duál ke strunovému řešení je strunové řešení bude následující:
Př. Hledáme strunové řešení pro sigma model zadaný maticí

$$E_0 = \begin{pmatrix} 0 & U & \kappa \\ 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde ϕ^i jsou souřadnice na grupě G, a Drinfeldův double je typu $(2|1)$ (viz [4]). Nejprve budeme hledat nějaká řešení sigma modelu, a to sice ve třech krocích, tento postup je obecný a je použit i u dalších příkladů:

1. Najde se řešení sigma modelu na G, toho se docílí vhodnou substitucí,
2. Najde se řešení parciální diferenciální rovnice (2.4) a získají se funkce $\tilde{h}_i$,
3. Najde se rozklad $d = g.\tilde{h}$, prvku Drinfeldova doublu.

Nejprve se použije vhodná transformace souřadnic a metrika se převede na konstantní metriku, tím pádem Christofellovy symboly pro metriku budou nula, rovnice se tedy zredukují na vlnovou rovnici, jejíž řešení je již snadné. Nebudu zde podrobně vypisovat postup, ale pouze se odkáži na práci Miroslava Turka. Vhodná transformace souřadnic tedy nalezneme ve [12]:

$$\phi^1 = \xi_1 - 2\xi_2(\tfrac{\xi_3}{2} + \tfrac{U\xi_2}{4\kappa}) - \tfrac{8}{3}(\tfrac{\xi_3}{2} + \tfrac{U\xi_2}{4\kappa})^3 + \tfrac{U}{4\kappa}(\xi_2 + 2(\tfrac{\xi_3}{2} + \tfrac{U\xi_2}{4\kappa})^2)^2,$$
$$\phi^2 = \xi_2 + 2(\tfrac{\xi_3}{2} + \tfrac{U\xi_2}{4\kappa})^2,$$
$$\phi^3 = 2(\tfrac{\xi_3}{2} + \tfrac{U\xi_2}{4\kappa}) - \tfrac{u}{2\kappa}(\xi_2 + 2(\tfrac{\xi_3}{2} + \tfrac{U\xi_2}{4\kappa})^2).$$

Použijeme vzorec odvozený v [12], kde je již explicitně napsaná výsledná matice metriky po transformaci, a vypadá následovně:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{U}{2} & \kappa \\ \frac{U}{2} & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rovnice tedy získají tvar:

$$\partial_+ \partial_- \xi^\nu = 0.$$

To už je standardní vlnová rovnice, které vyhovují funkce

$$\xi_\nu \ = \ W_\nu \ (x_+) \ + \ Y_\nu \ (x_-). \tag{4.1}$$

Dalším krokem bude řešení rovnic pro rozklad na Drinfeldově doublu. Algebru příslušnou grupě G drinfeldova doublu zvolíme tak, že bude mít následující strukturu:

$$[T_1, T_2] = 0, \quad [T_2, T_3] = T_1, \quad [T_1, T_3] = 0.$$

Algebra duální bude poté Abelovská. Využijeme vztah pro strukturní konstanty Drinfeldova doublu a spočítáme komutační relace mezi jednotlivými bázemi:

$$[\tilde{T}^1, T^3] = -\tilde{T}^2, \quad [\tilde{T}^1, T_2] = \tilde{T}^3. \tag{4.2}$$

Všechny ostatní Lieovy závorky prvků bazí $\tilde{T}^i, T_j$ jsou nulové. Značení jsem použil ze článku [4]. Nyní přichází poměrně pracná část, musí se spočítat všechny matice přidružené reprezentace algebry, tj. matice 6×6. V dalším kroku využijeme nilpotentnosti naší Lieovy algebry a obecný prvek Drinfeldova doublu zapíšeme pomocí rozkladu na 1-parametrické podgrupy, a dále najdeme matice přidružené reprezentace grupy, s jejichž pomocí sestrojíme matici $\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{\phi})$ pro duální sigma model.

$$ad_{T_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_{T_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_{T_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_{\tilde{T}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_{\tilde{T}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_{\tilde{T}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V dalším kroku vypočítáme exponenciely matic, abychom mohli získat matici přidružené reprezentace grupy G. Všechny matice jsou nilpotentní, tedy stačí vynásobit koeficienty a přičíst jednotkovou matici. Jak bylo zmíněno výše, drinfeldův double je nilpotentní algebra, tj. i řešitelná, napíšeme tedy obecný prvek jako součin 1-parametrických podgrup:

$$g = e^{\phi^1 . T^1} e^{\phi^2 . T^2} e^{\phi^3 . T^3} e^{\tilde{h}^1 . \tilde{T}^1} e^{\tilde{h}^2 . \tilde{T}^2} e^{\tilde{h}^3 . \tilde{T}^3}.$$

Podrobnější vysvětlení lze nalézt v učebnici diferenciální geomterie [1]. V této chvíli využijeme toho, že platí $e^{ad_x} = Ad\ e^x$, spočteme exponenciely matic přidružené reprezentace algebry a poté je vynásobíme, abychom získali matici přidružené reprezentace grupy:

$$Ad_{e^{\phi^1 T_1}} . Ad_{e^{\phi^2 T_2}} . Ad_{e^{\phi^3 T_3}} = \begin{pmatrix} 1 & -\phi^3 & \phi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi^3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalším krokem bude sestavení matice přidružené reprezentace pro duální grupu, postup je úplně stejný, spočteme exponenciely a vynásobíme:

$$Ad_{e^{\tilde{\phi}^1 \tilde{T}_1}} . Ad_{e^{\tilde{\phi}^2 \tilde{T}_2}} . Ad_{e^{\tilde{\phi}^3 \tilde{T}_3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\phi}^1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tilde{\phi}^1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní už je hezky vidět, jak vypadají matice a(g),b(g),d(g), $\tilde{a}(\tilde{g}), \tilde{b}(\tilde{g}), \tilde{d}(\tilde{g})$:

$$a(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\phi^3 & 1 & 0 \\ \phi^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d(g) = \begin{pmatrix} 1 & \phi^3 & \phi^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{a}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi^1 \\ 0 & \phi^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{d}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále potřebujeme spočítat vielbeiny, abychom mohli napsat rovnice pro $\tilde{h}$ a matice $F, \tilde{F}$. K tomu bude nutné, abychom věděli, jak se skládají prvky grupy G. Využijeme řešitelnosti příslušné algebry a prvky grupy zapíšeme pomocí 1-parametrických podgrup:

$$L_g h = e^{x_1 T^1} e^{x_2 T^2} e^{x_3 T^3} e^{y_1 T^1} e^{y_2 T^2} e^{y_3 T^3} = e^{x_1 T^1} e^{y_1 T^1} e^{x_2 T^2} e^{y_2 T^2} e^{x_3 T^3} e^{x_3 y_2 T^1} e^{y_3 T^3} =$$

$$= e^{x_1 T^1} e^{y_1 T^1} e^{x_3 y_2 T^1} e^{x_2 T^2} e^{x_3 T^3} e^{y_2 T^2} e^{y_3 T^3} = e^{x_1 T^1 + y_1 T^1 + x_3 y_2 T^1} e^{x_2 T^2 + y_2 T^2} e^{x_3 T^3 + y_3 T^3} =$$
$$= e^{(x_1 + y_1 + x_3 y_2) T^1} e^{(x_2 + y_2) T^2} e^{(x_3 + y_3) T^3}.$$

Využili jsme zde tzv. Baker-Campbell-Hausdorffovy formule, která pokud komutátory [A,[B,A]],[B,[B,A]] jsou nulové (což je tento případ), nabývá jednoduchého tvaru:

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}. \tag{4.3}$$

Předposlední rovnost je důsledkem základních vlastností 1-parametrických podgrup. Pokud porovnáme první a poslední výraz, zjistíme, že pro násobení prvků v grupě platí následující vztah:

$$(x_1, x_2, x_3).(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1 + x_3 y_2, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

Nyní nám nic nebrání abychom spočítali vielbeiny pomocí definice 14.:

$$e(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\phi^3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teď již máme vše připravené, abychom mohli pomocí vzorců (2.17), (2.18) dopočítat matice sigma modelu a duálního sigma modelu.

$$F(y^i) = \begin{pmatrix} 0 & U & \kappa \\ 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & U y^2 & 2\kappa y^2 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{F}(\tilde{y}^i) = \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{y}_1^2}{\kappa^3 + U\kappa\tilde{y}_1} & -\frac{\tilde{y}_1}{\kappa^2 + U\tilde{y}_1} & \frac{1}{\kappa} \\ \frac{\tilde{y}_1}{\kappa^2 + U\tilde{y}_1} & \frac{\kappa}{\kappa^2 + U\tilde{y}_1} & 0, \\ \frac{\kappa}{\kappa^2 + U\tilde{y}_1} & -\frac{U}{\kappa^2 + U\tilde{y}_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní, když máme spočítané vielbeiny, dosadíme do vzorce (2.4) a nalezne funkce $\tilde{h}_j$ které využijeme pro nalezení duálního řešení.:

$$(\tilde{h}^{-1}\partial_+\tilde{h})_j = A_{+,j} = v_j^\mu F_{\mu\nu}\partial_+\phi^\nu, \tag{4.4}$$

$$(h^{-1}\partial_- h)_j = A_{+,j} = \partial_-\phi^\mu F_{\mu\nu} v_j^\nu. \tag{4.5}$$

Matice $A_\pm$ mají pro náš konkrétní příklad tvar:

$$A_+ = \begin{pmatrix} U\partial_+\phi^2 + \kappa\partial_+\phi^3 \\ -\kappa\phi^3\partial_+\phi^3 + \kappa\partial_+\phi^2 - U\phi^3\partial_+\phi^2 \\ \kappa\partial_+\phi^1 + U\phi^2\partial_+\phi^3 \end{pmatrix},$$

$$A_- = \begin{pmatrix} -\kappa\partial_-\phi^3 \\ -U\partial_-\phi^1 - \kappa\partial_-\phi^2 - U\phi^2\partial_-\phi^3 + \kappa\phi^3\partial_-\phi^3 \\ -\kappa\partial_-\phi^1 - 2\kappa\phi^2\partial_-\phi^3 \end{pmatrix}.$$

Souřadnice na grupě $\tilde{G}$ se dají vhodně zvolit tak, aby na pravé straně zůstalo jen $\partial_\pm\tilde{h}$. Potom dostáváme PDR které naštěstí jdou vyřešit:

$\partial_+\tilde{h}_1 = U\partial_+\phi^2 + \kappa\partial_+\phi^3,$
$\partial_+\tilde{h}_2 = -\kappa\phi^3\partial_+\phi^3 + \kappa\partial_+\phi^2 - U\phi^3\partial_+\phi^2,$
$\partial_+\tilde{h}_3 = \kappa\partial_+\phi^1 + U\phi^2\partial_+\phi^3,$
$\partial_-\tilde{h}_1 = -\kappa\partial_-\phi^3,$
$\partial_-\tilde{h}_2 = -U\partial_-\phi^1 - \kappa\partial_-\phi^2 - U\phi^2\partial_-\phi^3 + \kappa\phi^3\partial_-\phi^3,$
$\partial_-\tilde{h}_3 = -\kappa\partial_-\phi^1 - 2\kappa\phi^2\partial_-\phi^3.$

Jejich řešení lze nalézt v [2]. Nyní již zbývá poslední krok, a sice nalézt rozklad $d = \phi.\tilde{h} = \tilde{\phi}.h$. K tomu budeme potřebovat opět Baker-Campbell-Hausdorffovu formuli (4.3):

$$e^{\tilde{\phi}^1\tilde{T}^1}e^{\tilde{\phi}^2\tilde{T}^2}e^{\tilde{\phi}^3\tilde{T}^3}e^{h^1T^1}e^{h^2T^2}e^{h^3T^3} = e^{\phi^1T^1}e^{\phi^2T^2}e^{\phi^3T^3}e^{\tilde{h}^1\tilde{T}^1}e^{\tilde{h}^2\tilde{T}^2}e^{\tilde{h}^3\tilde{T}^3} =$$
$$= e^{\phi^1T^1}e^{\phi^2T^2}e^{\tilde{h}^1\tilde{T}^1}e^{\phi^3T^3}e^{\tilde{h}_1\phi^3T^2}e^{\tilde{h}^2\tilde{T}^2}e^{\tilde{h}^3\tilde{T}^3} =$$
$$= e^{\phi^1T^1}e^{\tilde{h}^1\tilde{T}^1}e^{\phi^2T^2}e^{(-\phi^2\tilde{h}^1)\tilde{T}^3}e^{\phi^3T^3}e^{\tilde{h}_1\phi^3T^2}e^{\tilde{h}^2\tilde{T}^2}e^{h^3\tilde{T}^3} =$$
$$= e^{\tilde{h}^1\tilde{T}^1}e^{(\tilde{h}^2+\phi^3\tilde{h}^1)\tilde{T}^2}e^{(\tilde{h}^3-\phi^2\tilde{h}^1)\tilde{T}^3}e^{\phi^1T^1}e^{\phi^2T^2}e^{\phi^3T^3}.$$

Nyní je již snadné napsat výsledné vztahy mezi $\phi, \tilde{\phi}, \tilde{h}$

1. $\tilde{\phi}^1 = \tilde{h}_1,$
2. $\tilde{\phi}^2 = \tilde{h}_2 + \tilde{h}_1\phi^3,$
3. $\tilde{\phi}^3 = \tilde{h}_3 - \tilde{h}_1\phi^2.$

Jako řešení diferenciálních rovnic (4.4), (4.5) vychází následující funkce:

1. $\tilde{h}^1 = \kappa(Y_3 - W_3) - UW_2 - U\Omega^2,$
2. $\tilde{h}^2 = \kappa(Y_2 - W_2) + UY_1 + \frac{U}{2}\beta + \frac{U}{2}(W_2Y_3 - W_3Y_2) + \frac{2U}{3}\Omega^3 - \frac{U}{2\kappa}(\frac{1}{2}(W_2 + Y_2) + \Omega^2)^2,$

3. $\tilde{h}^3 = \kappa(Y_1 - W_1) + \kappa(W_2 Y_3 - W_3 Y_2) + C + \kappa\beta - U(\frac{1}{2}(W_2 + Y_2) + \Omega^2)^2$,

kde

$$\Omega = \frac{\xi_2}{2} + \frac{U\xi_2}{4\kappa},$$

a funkce $\beta(x_+, x_-)$ je řešením rovnice

$$\partial_+\beta = W_2'(x_+)W_3(x_+) - W_3'(x_+)W_2(x_+), \tag{4.6}$$

$$\partial_-\beta = Y_2'(x_-)Y_3(x_-) - Y_3'(x_-)Y_2(x_-). \tag{4.7}$$

Kapitola 5

Hledání strunového řešení, první příklad

V minulé kapitole jsme našli explicitně řešení sigma modelu. Nyní se pokusíme najít strunové řešení tohoto modelu, a poté zjistit zda řešení k němu duální je opět strunové řešení. První možnost je zkusit položit $\Omega = 0$. Dostáváme následující řešení:

$$\begin{aligned} \phi^1 &= \xi_1 + \frac{U}{4\kappa}\xi_2^2, \\ \phi^2 &= \xi_2, \\ \phi^3 &= -\frac{U}{2\kappa}\xi_2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Po zderivování podle proměnných x_+, x_- a dosazení do tenzoru energie-hybnosti zjišťujeme po krátkém výpočtu, že se nám vychází podmínka na nulovost složky T_{++} následovně:

$$\xi_2 = C_1,\ \xi_3 = C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \xi_1 = W_1(x_+) + Y_1(x_-).$$

To není nijak zajímavé řešení, proto zkusíme najít jiné. Pokud se na řešení zadíváme ještě jednou, zjišťujeme, že se nám hodnota ϕ^2 objevuje ve všech třech složkách. Položíme tedy $\phi^2 = 0$. Tím dostáváme podmínku:

$$-\xi_2 = 2\Omega^2. \tag{5.2}$$

Tu později využijeme, abychom dopočítali funkci ξ_3.
Matice $G_{\mu\nu}$ bude mít nenulové pouze prvky 12, 13, 22, tj. bude následujícího tvaru:

$$G(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{U}{2} & \kappa \\ \frac{U}{2} & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

Protože $\phi^2 = 0$, tak podmínka pro nulovost tenzoru energie-hybnosti bude vypadat následovně:

$$\left(\partial_+\xi_1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{-\xi_2}{2}}\right)\partial_+\xi_2\right)\left(\sqrt{\frac{-\xi_2}{2}}\right)\partial_+\xi_2 = 0. \tag{5.4}$$

Po záměně $+ \to -$ dostaneme podmínku pro T_{--}:

$$\left(\partial_-\xi_1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{-\xi_2}{2}}\right)\partial_-\xi_2\right)\left(\sqrt{\frac{-\xi_2}{2}}\right)\partial_-\xi_2 = 0. \tag{5.5}$$

Abychom dostali nekonstantní řešení, položíme $\xi_2 = \xi_2(x_+)$ a dostaneme $T_{--} = 0$. A můžeme volit $Y_1(x_-)$ libovolně.
Pokud zvolíme funkci ξ_2 tak, aby byla na celém $\mathbb{R}$ nenulová, včetně parciální derivace v proměnné x_+, můžeme pokrátit výraz $\partial_+\xi_2$ a dostaneme rovnici pro $\partial_+\xi_1$:

$$\partial_+\xi_1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{-\xi_2}{2}}\right)\partial_+\xi_2 = 0. \tag{5.6}$$

Ta se již nedá obecně řešit, proto zvolíme nějakou vhodnou funkci se kterou budeme dále pracovat. Teď se vrátíme k výrazu (5.2). Zvolíme funkci ξ_2 následovně:

$$\xi_2 = -2e^{2x_+} \quad \Rightarrow \quad \xi_3 = 2\left(e^{x_+} - \frac{U}{2\kappa}e^{2x_+}\right). \tag{5.7}$$

Poté dostaneme, že

$$\partial_+\xi_1 = -2e^{3x_+} \quad \Rightarrow \quad \xi_1 = -\frac{2}{3}e^{3x_+} + Y(x_-). \tag{5.8}$$

Pokud se podíváme na mimodiagonální složky tenzoru, dostáváme podmínku:

$$(\partial_-\xi_1)(2e^{x_+}) = e^{\omega}, \tag{5.9}$$

kde ω je funkce x_+, x_-. Pokud zvolíme funkci $Y_1(x_-)$ hladkou, tak bude podmínka zřejmě splněna.
Dalším krokem bude napsat vztah pro duální řešení a to poté dosadit do podmínky na vymizení tenzoru energie-hybnosti a zjistit zda výsledek bude nula. Matice $\tilde{G}_{\mu\nu}$ vypadá následovně:

$$\tilde{G}(\tilde{y}^i) = \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{y}_1^2}{\kappa^3+U\kappa\tilde{y}_1} & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa}+\frac{\kappa}{\kappa^2+U\tilde{y}_1}\right) \\ 0 & \frac{\kappa}{\kappa^2+U\tilde{y}_1} & -\frac{1}{2}\frac{U}{\kappa^2+U\tilde{y}_1} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa}+\frac{\kappa}{\kappa^2+U\tilde{y}_1}\right) & -\frac{1}{2}\frac{U}{\kappa^2+U\tilde{y}_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Funkce $\tilde{\phi}^i$ budou následujícího tvaru:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^1 &= \kappa(Y_3 - W_3(x_+)) - UW_2(x_+) - U\Omega^2, \\ \tilde{\phi}^2 &= \kappa(Y_2 - W_2(x_+)) + UY_1(x_-) + \frac{U}{2}\beta(x_+) + \frac{U}{2}(W_2(x_+)Y_3 - \\ &- W_3(x_+)Y_2) + \frac{2U}{3}\Omega^3 + [\kappa(Y_3 - W_3(x_+)) - UW_2(x_+) - U\Omega^2](-\frac{U}{2\kappa}\xi_2), \\ \tilde{\phi}^3 &= \kappa(Y_1(x_-) - W_1(x_+)) + \kappa(W_2(x_+)Y_3 - W_3(x_+)Y_2) + C + \kappa\beta(x_+), \end{aligned} \tag{5.10}$$

kde $\Omega, \beta(x_+)$ viz (4.6), a $Y_2, Y_3 \in \mathbb{R}$. První co spočítáme bude složka T_{--}. Protože na x_- závisí pouze 2. a 3. složka, bude výpočet snadný.

$$\begin{aligned} \partial_- \tilde{\phi}^1 &= 0, \\ \partial_- \tilde{\phi}^2 &= UY_1', \\ \partial_- \tilde{\phi}^3 &= \kappa Y_1'. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Po dosazení do podmínky (3.18) dostáváme:

$$-\frac{U}{\kappa^2 + U\tilde{y}_1} UY_1 \kappa Y_1 + \frac{\kappa}{\kappa^2 + U\tilde{y}_1} U^2 Y_1^2 = 0.$$

Mimodiagonální složky se ověří podobně, opět je výpočet celkem snadný. Nejtěžší část bude spočítat T_{++}. Neprve upravíme prvek matice $\tilde{F}_{13}$.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa} + \frac{\kappa}{\kappa^2 + U\tilde{y}_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\kappa^2 + U\tilde{y}_1}{\kappa^3 + U\kappa\tilde{y}_1}\right).$$

Pak zapíšeme matici $\tilde{G}$ ve tvaru:

$$\tilde{G}(\tilde{y}^i) = \frac{1}{\kappa^2 + U\tilde{y}_1} \begin{pmatrix} \frac{\tilde{y}_1^2}{\kappa} & 0 & \frac{1}{2\kappa}(2\kappa^2 + U\tilde{y}_1) \\ 0 & \kappa & -\frac{U}{2} \\ \frac{1}{2\kappa}(2\kappa^2 + U\tilde{y}_1) & -\frac{U}{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Nyní zderivujeme fuknce ϕ^i podle x_+ a dosadíme do podmínky (3.18). Derivací dostaneme poměrně komplikovaný výraz, využijeme následujících vlastností funkcí ξ_2, ξ_3:

$$\partial_+\Omega = \Omega, \quad \Omega^3 = \frac{1}{2}\partial_+\xi_1 \tag{5.13}$$

Po zderivování dostáváme následující funkce (vynecháváme označení proměnných u funkce, a derivaci označíme apostrofem):

$$\partial_+\tilde{\phi}_1(x_+, x_-) = -\kappa W_3' - UW_2' - 2U\Omega^2, \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} \partial_+\tilde{\phi}_2(x_+, x_-) = &-\kappa W_2' + \frac{U}{2}(W_2'W_3 - W_3'W_2) + \frac{U}{2}(W_2'Y_3 - W_3'Y_2) + \\ &+ 2U\Omega^3 + \phi^3\partial_+\tilde{h}_1 + \tilde{h}_1\partial_+\phi^3, \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\partial_+\tilde{\phi}_3(x_+, x_-) = -\kappa W_1' + \kappa(W_2'Y_3 - W_3'Y_2) + \kappa(W_2'W_3 - W_3'W_2). \tag{5.16}$$

Vypočítané funkce $\partial_+\phi^i$ dosadíme do následujícího výrazu:

$$T_{++} = \frac{\tilde{\phi}_1^2}{\kappa}(\partial_+\tilde{\phi}_1)^2 + \frac{1}{\kappa}(2\kappa^2 + U\tilde{\phi}_1)\partial_+\tilde{\phi}_1\partial_+\tilde{\phi}_3 + \kappa(\partial_+\tilde{\phi}_2)^2 - U\partial_+\tilde{\phi}^3\tilde{\phi}^2. \tag{5.17}$$

Dostáváme velice dlouhý výraz, který celkem obsahuje stovky členů. Po dosazení se všechny členy odečtou, a dostáváme hodnotu $T_{++} = 0$, tj. duál k našemu strunovému řešení je opět strunové řešení.

Pozn.: Výpočet předchozího příkladu se dá hodně zjednodušit, pokud položíme $Y_2, Y_3 = 0$.

Kapitola 6

Druhý příklad

6.1 Hledání řešení sigma modelu

Hledáme řešení sigma modelu zadaného maticí

$$E_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa \\ 0 & \kappa & 0. \\ \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

na Drinfeldově doublu určeném algebrou $\mathfrak{d} = (5|1)$ (viz [4]). Existuje tu ale i jiný rozklad Drinfeldova doublu, jako druhá Maninova trojice je zvolena trojice $(6_0|1)$. Algebra příslušná nezakřivenému modelu je $\mathfrak{g}$ = Bianchi 5, která je zadaná komutačními relacemi [4]:

$$[T_1, T_2] = -T_2, \quad [T_2, T_3] = 0, \quad [T_3, T_1] = T_3. \tag{6.2}$$

Duální algebra je Abelovská.
Algebra druhého rozkladu je typu Bianchi 6 a je zadaná komutačními relacemi:

$$[U_1, U_2] = 0, \quad [U_2, U_3] = U_1, \quad [U_3, U_1] = -U_2. \tag{6.3}$$

Duální algebra k ní je opět Abelovská.
Nechť $\vec{T}, \vec{\tilde{T}}, \vec{U}, \vec{\hat{U}}$ jsou báze a duální báze algeber. Potom Poisson-Lieova transformace tenzoru F je zadaná následující maticí transformace:

$$\begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{\tilde{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{\hat{U}} \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

kde matice K,Q,R,S jsou určeny tak, aby pro vektory $T_a = (T_1, T_2, T_3, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3)$, $U_a = (U_1, U_2, U_3, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3)$ platilo $U_a = C_a^b T_b$, kde matice C je právě ona matice tvořená submaticemi K,Q,R,S. Zakřivený model je dán obecně maticí [6]:

$$\hat{E}(\hat{g}) = \left(\hat{E}_0^{-1} + \hat{\Pi}(\hat{g})\right)^{-1}, \quad \hat{\Pi}(\hat{g}) = \hat{b}^t(\hat{g}).\hat{a}(\hat{g}) = -\hat{\Pi}(\hat{g})^t, \tag{6.5}$$

kde matice $\hat{a}(\hat{g}), \hat{b}(\hat{g}), \hat{d}(\hat{g})$ jsou matice přidružené reprezentace grupy $\hat{G}$

$$\hat{E}_0 = (K + E_0.R)^{-1}.(Q + E_0.S) \tag{6.6}$$

Pro náš případ bude matice zakřiveného modelu vypadat následovně [3]:

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa}e^{-2\tilde{y}_3} & \frac{1}{\kappa}e^{-2\tilde{y}_3} & \frac{\kappa}{2}e^{\tilde{y}_3} \\ \frac{1}{\kappa}e^{-2\tilde{y}_3} & \frac{1}{\kappa}e^{-2\tilde{y}_3} & -\frac{\kappa}{2}e^{\tilde{y}_3} \\ \frac{\kappa}{2}e^{\tilde{y}_3} & -\frac{\kappa}{2}e^{\tilde{y}_3} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Zopakujeme postup jako u minulého příkladu, tentokrát transformace souřadnic vypadá takhle [12]:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -e^{-\phi^1}, \\ \xi_2 &= \phi^2 e^{-\phi^1}, \\ \xi_3 &= \phi^3 + \frac{1}{2}(\phi^2)^2 - e^{-\phi^1}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Opět se nám úloha redukuje na vlnovou rovnici, jejíž řešením jsou funkce

$$\xi_i = W_i(x_+) + Y_i(x_-), \quad i \in \hat{3}. \tag{6.9}$$

Dále je postup totožný jako v předchozím případě, spočítáme matice přidružené reprezentace, vielbeiny, a nakonec funkce $\tilde{h}$. Ty vycházejí následovně [3]:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= \kappa[Y_1(x_-)W_3(x_+) - Y_3(x_-)W_1(x_+)] + \gamma(x_+) + \delta(x_-)], \\ \tilde{h}_2 &= \kappa[Y_1(x_-)W_2(x_+) - Y_2(x_-)W_1(x_+)] + \alpha(x_+) + \beta(x_-)], \\ \tilde{h}_3 &= \kappa[Y_1(x_-) - W_1(x_+)], \end{aligned} \tag{6.10}$$

kde funkce $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ splňují následující rovnice:

$$\partial_+\alpha = W_1(x_+)W_2'(x_+) - W_2(x_+)W_1'(x_+), \quad \partial_-\beta = Y_1(x_+)Y_2'(x_+) - Y_2(x_+)Y_1'(x_+),$$
$$\partial_+\gamma = W_1(x_+)W_3'(x_+) - W_2(x_+)W_1'(x_+), \quad \partial_-\delta = Y_3(x_+)Y_1'(x_+) - Y_1(x_+)Y_2'(x_+).$$

Derivaci jsme označili apostrofem. Nyní bude postup trochu jiný, než v předchozím příkladě. Obecný rozklad prvku drinfeldova doublu bude:

$$d = \phi(x_+, x_-).\tilde{h}(x_+, x_-) = \hat{\phi}(x_+, x_-).h'(x_+, x_-), \quad \phi \in G, \tilde{h} \in \tilde{G}, \hat{\phi} \in \hat{G}, h' \in G'$$

Rozklad prvků grupy zapíšeme pomocí jednoparametrických podgrup:

$$e^{\phi^1 T_1} e^{\phi^2 T_2} e^{\phi^3 T_3} e^{\tilde{h}_1 \tilde{T}^1} e^{\tilde{h}_2 \tilde{T}^2} e^{\tilde{h}_3 \tilde{T}^3} = e^{\hat{\phi}^3 U_3} e^{\hat{\phi}^2 U_2} e^{\hat{\phi}^1 U_1} e^{h_3' \tilde{U}^3} e^{h_2' \tilde{U}^2} e^{h_1' \tilde{U}^1},$$

kde $T_i, \tilde{T}^j, U_i, \tilde{U}^j$ jsou bázové vektory algeber $(5|1), (6_0|1)$. Ze vztahu pro rozklad algeber dostaneme vzorec:

$$e^{\hat{\phi}^3(-T_1)} e^{\hat{\phi}^2(\frac{1}{2}T_3 + \tilde{T}^2)} e^{\hat{\phi}^3(-\frac{1}{2}T_3 + \tilde{T}^2)} e^{h_3'(-\tilde{T}_1)} e^{h_3'(-\tilde{T}_1)} e^{h_2'(\frac{1}{2}T_2 + \tilde{T}^3)} e^{h_1'(\frac{1}{2}T_2 - \tilde{T}^3)}.$$

Rozklad prvků Drinfeldova doublu lze nalézt v práci [9]. Vztah pro $\hat{\phi}^i$ vypadá následovně:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^1 &= -\phi^3 + \frac{1}{2}\tilde{h}_2, \\ \hat{\phi}^1 &= \phi^3 + \frac{1}{2}\tilde{h}_2, \\ \hat{\phi}^1 &= -\phi^1. \end{aligned} \tag{6.11}$$

6.2 Hledání strunového řešení a ověření pro duální model

Nyní se dostáváme ke stěžejní části této úlohy. Bude třeba v množině řešení sigma modelu najít strunové řešení a zjistit zda jeho duál je též strunové řešení. Vezmeme matici (6.7) jako matici $G_{\mu\nu}$ a do ní dosadíme jako řešení funkce $\xi_{1,2,3}$ a pokusíme se najít strunové řešení. Poté ověříme, že po dosazení do $\phi_{1,2,3}$ zůstane strunovým řešením a nakonec vezmeme duál k tomuto řešení a ověříme že podmínka zůstane zachována. Pokud využijeme matici metriky v souřadnicích, ve kterých je konstantní, dostáváme po dosazení do vzorce

$$T_{++} = 0 = \kappa.\partial_+\phi^\mu G_{\mu\nu}\partial_-\phi^\nu = \partial_+ W_1 \partial_+ W_3 + (\partial_+ W_2)^2.$$

například následující jednoduché řešení:

$$W_2 = k_1 W_1 + k_0 \quad W_3 = -\frac{{k_1}^2}{2} W_1 + k_0.$$

Zcela obdobně dostaneme podmínku pro $Y_{1,2,3}(x_-)$.
Nyní tyto vztahy dosadíme do řešení a spočteme opět tenzor energie-hybnosti. Ale nejprve si připravíme matici $G_{\mu\nu}$:

$$e^{-\phi_1} = e^{ln(-W_1 - W_2)} = -W_1 - Y_1, e^{-2\phi_1} = e^{ln(W_1+W_2)^2} = (W_1 + Y_1)^2,$$

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa(-W_1 - Y_1) \\ 0 & \kappa(-W_1 - Y_1)^2 & 0 \\ \kappa(-W_1 - Y_1) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dále si připravíme parciální derivace:

$$\partial_+\phi^1 = \tfrac{-W_1'}{W_1+Y_1},$$

$$\partial_+\phi^2 = \tfrac{W_1'(k_1W_1+k_0+c_1Y_1+c_0)-k_1W_1'(W_1+Y_1)}{(W_1+Y_1)^2} = \tfrac{W_1'}{(W_1+Y_1)^2}.(k_1Y_1 - k_0 - c_1Y_1 - c_0),$$

$$\partial_+\phi^3 = -\tfrac{k_1^2}{2}W_1' + \tfrac{2W_2'(W_2+Y_2)(W_1+Y_1)-W_1'(W_2+Y_2)^2}{2(W_1+Y_1)^2}.$$

Nyní vše dosadíme do naší rovnice a podíváme se, zda se to vzájemně odečte.

$$2.\kappa\frac{(W_1+Y_1).W_1'}{W_1+Y_1}\left(\frac{2W_3'(W_1+Y_1)^2 + 2W_2'(W_2+Y_2)(W_1+Y_1) - W_1'(W_2+Y_2)^2}{2(W_1+Y_1)^2}\right)$$
$$+\kappa(-W_1 - Y_1)^2\left(\frac{k_1W_1'(W_1+Y_1) - W_1'(k_1W_1+k_0+c_1Y_1+c_0)}{(W_1+Y_1)^2}\right)^2.$$

Vsuvka: První sčítanec upravíme stranou, dosadíme za W_2 a W_3 a vytkneme W_1'. Zjednodušení výrazu v závorce jsem provedl v programu Mathematica:

$$-{k_1}^2(W_1+Y_1)^2 + 2k_1(k_1W_1 + c_1Y_1 + c_0 + k_0).(W_1+Y_1) - (k_1W_1 + c_1Y_1 + c_0 + k_0)^2 =$$
$$= -(c_0 + k_0 + (c_1 - k_1)Y_1)^2 \tag{6.12}$$

Nyní již lze snadno vidět, že složka T_{++} je skutečně nula. Podmínka pro +- se ověří zcela analogicky, podmínka pro – je díky symetrii funkcí vzhledem k záměně $W \leftrightarrow Y$ již triviální.
Nyní se podíváme jak na duální model s maticí

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa}(W_1+Y_1)^{-2} & \frac{1}{\kappa}(W_1+Y_1)^{-2} & \frac{\kappa}{2}(-W_1-Y_1) \\ \frac{1}{\kappa}(W_1+Y_1)^{-2} & \frac{1}{\kappa}(W_1+Y_1)^{-2} & -\frac{\kappa}{2}(-W_1-Y_1) \\ \frac{\kappa}{2}(-W_1-Y_1) & -\frac{\kappa}{2}(-W_1-Y_1) & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Než začneme počítat duální řešení tak si ještě spočteme koeficienty $\alpha(x_+) = -k_0W_1 + k_2, \quad \beta(x_-) = c_0Y_1 + c_2$. A můžeme přejít k dalšímu kroku:
Naše strunové řešení teď dosadíme do vztahů pro duální řešení a získáme následující výrazy:

$$\partial_+\hat{\phi}^1 = \frac{W_3'+2W_2'(W_2+Y_2)(W_1+Y_1)-W_1'(W_1+Y_1)(W_2+Y_2)^2}{-(W_1+Y_1)^2} + \frac{\kappa}{2}(Y_1W_2' - Y_2W_1' - K_0W_1'),$$

$$\partial_+\hat{\phi}^2 = -\frac{W_3'+2W_2'(W_2+Y_2)(W_1+Y_1)-W_1'(W_1+Y_1)(W_2+Y_2)^2}{-(W_1+Y_1)^2} + \frac{\kappa}{2}(Y_1W_2' - Y_2W_1' - K_0W_1'),$$

$$\partial_+\hat{\phi}^3 = \frac{W_1'}{W_1+Y_1}.$$

Pokud si označíme parciální derivace funkce $\partial_+\hat{\phi}^2 = a, \quad \partial_+\tilde{h}_2 = b$, tak pro pro výpočet složek tenzoru energie-hybnosti pro hodnoty $\mu,\nu = 1,2$ dostáváme následující vztah:

$$\frac{1}{\kappa}.(W_1+Y_1)^{-2}.[2(a+b)^2 + 2.(-a+b).(a+b)] = \frac{1}{\kappa}.(W_1+Y_1)^{-2}(4b^2).$$

To je trochu jednodušší vzorec. Pro prvky $\mu\nu = 13, 23, 31, 32$ dostáváme celkem snadno následující vztah:

$$\frac{\kappa}{2}2[(\partial_+\phi^3\partial_+\phi^1 - \frac{1}{2}\partial_+h_2\partial_+\phi^1) + (\partial_+\phi^3\partial_+\phi^1 + \frac{1}{2}\partial_+h_2\partial_+\phi^1)] = 2\kappa(\partial_+\phi^3)\partial_+\phi^1.$$

Jediné co se nám zatím neodečetlo jsou výrazy obsahující κ. To jsou složky tenzoru odpovídající hodnotám $\mu\nu = 13, 23$, a dále člen v předešlé rovnici $\partial_+\tilde{h}_2$. Využijeme již předešlých výpočtů. Předně víme z předchozího výpočtu, že

$$2.\partial_+\hat{\phi}^3 = -W_1'(W_1+Y_1)^{-2}(k_1Y_1 - k_0 - c_1Y_1 - c_0)^2 = -(\partial_+\hat{\phi}^2)^2.$$

Dále zjišťujeme užitím vztahu pro α (vynecháme κ), že

$$\alpha' = k_1W_1 \Rightarrow (W_1+Y_1)^{-2}\partial_+(\tilde{h}_2)^2 = W_1'(W_1+Y_1)^{-2}(k_1Y_1 - c_1Y_1 - c_0 - k_0)^2.$$

A tedy že členy obsahující κ se odečtou. Řešení pro Y je zcela stejné, díky symetrii. Celkově tedy dostáváme že tenzor energie-hybnosti je roven nule a tedy jsme ověřili že duál ke strunovému řešení je opět strunové řešení.

Závěr

V této práci se mi podařilo u sigma modelu na Drinfeldově doublu s Maninovou trojicí (2|1) nalézt strunové řešení. Následně jsem dokázal, že k němu příslušné duální řešení je též strunovým řešením. U dalšího sigma modelu se mi podařilo ukázat, že duální řešení k řešení nalezenému v [5] je též strunovým řešením.
Dále se podařilo dokázat, že obecně duál ke strunovému řešení je opět strunové řešení.
Hlavním cílem této práce bylo pochopit a naučit se pojmy z diferenciální geometrie a Lieových algeber a také základy Poisson-Lie T-duality, abych mohl tyto znalosti využít při řešení jiných problémů v této oblasti fyziky.

Seznam použitých zdrojů

[1] Fecko Marián. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, Vydavatelství IRIS (2004), ISBN 80-89018-10-6.

[2] Hlavatý Ladislav. *Classical solution of a sigma model in curved background* [online]. Phys.Lett. B (2005) 625, [cit. 6. dubna 2010]. Dostupné na: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0506188v2>.

[3] Hlavatý Ladislav, Hýbl Jan, Turek Miroslav *Classical solutions of sigma models in curved backgrounds by the Poisson-Lie T-plurality.* [online]. Int.J.Mod.Phys.A22 (2006) 1039-1052, [cit. 15. května 2010]. Dostupné na: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0608069v1>.

[4] Hlavatý Ladislav, Šnobl Libor. *Classification of 6-dimensional Drinfel'd doubles,* [online]. Int.J.Mod.Phys. A17 (2002) 4043, [cit. 6. května 2010]. Dostupné na: <http://arxiv.org/abs/math/0202210>.

[5] Hlavatý Ladislav, Šnobl Libor. *Classification of Poisson-Lie T-dual models with two-dimensional targets* [online]. Mod.Phys.Lett. A17 (2002) s.429-434, [cit. 27. května 2010]. Dostupné na: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0110139>.

[6] Hlavatý Ladislav, Šnobl Libor. *Poisson-Lie T-plurality as a canonical transformation,* [online]. Nuclear Physics B 768 (2007) 209-218, [cit. 6. června 2010]. Dostupné na: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0608133>.

[7] Hlavatý Ladislav, Šnobl Libor. *Poisson-Lie T-plurality of three-dimensional conformally invariant sigma models.* [online]. J. High Energy Phys., JHEP05(2004)010, [cit. 8. července 2010]. Dostupné na: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0403164>.

[8] Hooft Gerard't . *Introduction to string theory*, [online]. (2004), [cit 7.července 2010]. Dostupné na: <http://www.phys.uu.nl/t̃hooft/>.

[9] Hýbl Jan. *Použití Baker-Campbell-Hausdorffovy formule pro výpočet tranformací souřadnic v Drinfeldových doublech*, výzkumný úkol, [online]. 2005, [cit. 15. června 2010]. Dostupné na: <http://ssmf.fjfi.cvut.cz/studthes/2003/hybl_res.pdf>.

[10] Klimčík Ctirad. *Poisson-Lie T-duality* [online]. Nuclear Physics B 46 (1995) 116, [cit. 15. června 2010]. Dostupné na: <http://arxiv.org/abs/hep-th/9509095>.

[11] Schwartz John H., Becker Katrin, Becker Melanie. *String theory and M-theory.* 1.vyd. Cambridge University press, ISBN 13 978-0-521-86069-7.

[12] Turek, Miroslav. *Hledání plochých souřadnic sigma modelů,* [online]. 2005, [cit. 6. června 2010]. Dostupné na: <http://ssmf.fjfi.cvut.cz/studthes/2002/turek_thesis.pdf>.