ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika

Generující funkce pro Lieovy grupy a algebry a jejich aplikace

Generating functions for Lie groups and Lie algebras and their applications

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Autor práce: **Bc. Jan Fuksa**
Školitel: **Doc. Ing. Severin Pošta, Ph.D.**
Datum: **30.4.2012**

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze, dne 30.4.2012

Poděkování

Děkuji doc. Severinu Poštovi za velmi ochotný a trpělivý přístup, za nesčetné konzultace a poskytnutí mnoha hodnotných studijních materiálů, za podnětné návrhy a velkorysou pomoc při řešení řady problémů, které v průběhu této práce vyvstaly.

Název práce: **Generující funkce pro Lieovy grupy a algebry a jejich aplikace**
Autor: Bc. Jan Fuksa

Obor: Matematické inženýrství
Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: Doc. Ing. Severin Pošta, Ph.D.
Katedra matematiky
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Abstrakt:

Tato práce se zabývá aplikací generujících funkcí v teorii Lieových algeber a grup a jejich reprezentací.

Klíčová slova: generující funkce, Lieovy algebry a grupy, reprezentace,
tenzorový součin reprezentací, branching

Title: **Generating functions for Lie groups and Lie algebras and their applications**
Author: Bc. Jan Fuksa

Abstract:

This thesis deals with application of generating functions in the theory of Lie algebras and groups and their representations.

Keywords: generating function, Lie algebras and groups, representation,
tensor product of representations, branching

Obsah

Úvod

Generující funkce byly objeveny jako nástroj pro řešení lineární rekurence v první polovině 18. století slavným francouzským matematikem A. de Moivre. Od té doby v diskrétní matematice zdomácněly a jejich využití se rozšířilo do celé řady oblastí matematiky.

V teorii reprezentací grup byly generující funkce poprvé použity na konci 19. století T. Molienem. Nalezly uplatnění především v diskrétních grupách a při generování invariantů reprezentací. Teprve v 70. letech 20. století se začaly používat i v teorii Lieových grup a jejich reprezentací.

V této práci inspirováni prací [1] kanadského matematika R. Sharpa a česko-kanadského J. Patery jsme se pokusili aplikovat tento šikovný nástroj v teorii Lieových grup a algeber a jejich reprezentací. Ve zmíněném článku tato dvojice publikovala řadu výsledků, kterých dosáhla pro konečné ale hlavně pro Lieovy grupy a jejich reprezentace, nicméně způsoby, jakými bylo těchto výsledků dosaženo, publikovány nejsou.[1]

Naším cílem tedy bylo dosáhnout alespoň některých výsledků publikovaných v práci [1]. Zaměřili jsme se především na problém restrikce reprezentací Lieových algeber vzhledem k podalgebrám (*branching*), kde nám byl nápomocný především článek [2] holandských matematiků A. Cohena a G. Ruitenburga. Dále jsme hledali generujících funkce pro rozklady tenzorových součinů reprezentací, pro jejichž výpočet jsme objevili elegantní algoritmus popsaný v kapitole 5. Stručně jsme také zmínili generující funkce pro rodiny ortogonálních polynomů.

Práce je členěna do pěti kapitol. V první kapitole jsou shrnuty základy teorie Lieových algeber, především poloprostých, a jejich reprezentací. V druhé kapitole jsou popsány vlastnosti obyčejných generujících funkcí a je zmíněno několik příkladů na jejich aplikaci nejen v diskrétní matematice, ale i v algebraických záležitostech, jakými jsou ortogonální polynomy či charaktery reprezentací.

Ve třetí kapitole je odvozena generující funkce pro branching algebry G_2 vzhledem k podalgebře A_2. Ve čtvrté kapitole je algoritmus popsaný v kapitole třetí použit při hledání generujících funkcí pro tenzorové součiny reprezentací algeber $\mathfrak{su}(2)$ a $\mathfrak{su}(3)$.

[1]Prof. Patera dokonce potvrdil, že po smrti R. Sharpa řada odvození těchto funkcí zmizela ze světa, takže jsou známy jenom výsledky avšak bez svých odvození.

V poslední kapitole je představen nový a efektivnější algoritmus pro řešení problému kapitoly čtvrté.

Kapitola 1

Lieovy algebry

Definice 1.0.1. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ vybavený bilineární operací $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ zvanou *Lieova závorka* nebo *komutátor*, která splňuje následující požadavky

(i) $[x, x] = 0 \quad$ pro všechna $x \in \mathfrak{g}$,

(ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad$ pro všechna $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Vlastnost (i) se nazývá *antisymetrie*, vlastnost (ii) se nazývá *Jacobiho identita*.

Poznámka 1.0.2. Vlastnost (i) se nazývá antisymetrií z následujícího důvodu:

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]. \tag{1.1}$$

Definice 1.0.3. Podprostor $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ se nazývá *Lieova podalgebra* $\mathfrak{g}$, jestliže platí $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Podalgebru $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ nazveme *ideál* algebry $\mathfrak{g}$, jestliže platí $[\mathfrak{i}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{i}$.

Definice 1.0.4. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá *řešitelná*, jestliže existuje přirozené číslo n takové, že n-tý člen derivované série

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots,\ \mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}], \ldots$$

je nulový, tj. $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$.

Definice 1.0.5. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje přirozené číslo m takové, že m-tý člen dolní centrální série

$$\mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^{1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots,\ \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k}], \ldots$$

je nulový, tj. $\mathfrak{g}^{m} = 0$.

Definice 1.0.6. Maximální řešitelný ideál $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ se nazývá *radikál* $\mathfrak{g}$.

Definice 1.0.7. Lieova algebra $\mathfrak{g}$, $\dim \mathfrak{g} > 1$, se nazývá *prostá*, jestliže není abelovská, tj. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$, a jejími jedinými ideály jsou 0 a $\mathfrak{g}$.

Definice 1.0.8. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá *poloprostá*, jestliže $\mathfrak{g} \neq 0$ a pro radikál $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ platí $\mathfrak{r} = 0$.

Věta 1.0.9. Každou poloprostou Lieovu algebru lze zapsat jako direktní součet prostých Lieových algeber.

Věta 1.0.10 (Leviho rozklad[1]). Každá konečnědimenzionální Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je rovna polopřímému součtu svého radikálu $\mathfrak{r}$ a poloprosté podalgebry $\mathfrak{s}$, tj. existuje poloprostá $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ taková, že $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$ a současně $[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$.

Důsledkem této věty je tzv. *Leviho program*, který říká, že klasifikace konečnědimenzionálních Lieových algeber se provede ve třech krocích:

1) klasifikují se všechny prosté a tudíž i poloprosté Lieovy algebry,

2) klasifikují se všechny řešitelné Lieovy algebry,

3) klasifikují se všechny způsoby, jak tyto mohou být nakombinovány do nových Lieových algeber.

Poznamenejme ještě, že dokončen byl zatím pouze první bod zásluhou pánů *É. Cartana* a *W. Killinga*.

1.1 Poloprosté Lieovy algebry

Ústředními pojmy celé teorie prostých Lieových algeber jsou kořeny a kořenové systémy. Pomocí kořenových systémů se provádí klasifikace prostých Lieových algeber. Každá prostá Lieova algebra náleží do jedné ze čtyř sérií $A_n (n \geq 1)$, $B_n (n \geq 3)$, $C_n (n \geq 2)$, $D_n (n \geq 4)$ s pěti výjimkami označovanými jako E_6, E_7, E_8, F_4 a G_2. Tím jsou prosté Lieovy algebry úplně klasifikovány.

Podle věty 1.0.9 je každá poloprostá Lieova algebra direktním součtem prostých Lieových algeber, čímž je dokončena i klasifikace poloprotých Lieových algeber.

[1] Toto tvrzení bylo formulováno jako domněnka W. Killingem a É. Cartanem, dokázal jej však až italský matematik E. E. Levi v roce 1905.

1.1.1 Kořenové systémy

Pojem kořenového systému lze zavést obecně na libovolném reálném euklidovském prostoru V vybaveném skalárním součinem $(\ ,\ ) : V \mapsto \mathbb{R}$. V této podkapitole popíšeme obecně vlastnosti kořenových systémů, které platí i pro kořenové systémy poloprostých Lieových algeber.

Pro daný nenulový vektor $v \in V$, nechť r_v je zrcadlení podle nadplochy kolmé k tomuto vektoru. Čili r_v zobrazuje v na $-v$ a všechny vektory x z nadplochy, tj. $(x, v) = 0$, zobrazuje na sebe. Explicitně

$$r_v(x) = x - \frac{2(x,v)}{(v,v)}v \quad \forall x \in V. \tag{1.2}$$

Poznamenejme, že r_v zachovává skalární součin.

Definice 1.1.1. Množinu $\Delta \subset V$ nazveme *kořenový systém*, jestliže jsou splněny následující axiomy:

(i) Δ je konečná, neobsahuje 0 a její lineární obal je celý V,

(ii) jestliže $\alpha \in \Delta$, potom jediné skalární násobky α, které náleží do Δ, jsou α a $-\alpha$,

(iii) jestliže $\alpha \in \Delta$, potom zrcadlení r_α permutuje prvky Δ,

(iv) $\alpha, \beta \in \Delta$, potom $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Prvky Δ nazveme *kořeny*.

Lemma 1.1.2. Nechť Δ je kořenový systém. Nechť $\alpha, \beta \in \Delta$, $\beta \neq \pm\alpha$. Potom

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Nyní už známe všechny možné úhly, které mohou svírat dva kořeny, a všechny možné poměry délek kořenů.

Lemma 1.1.3. Nechť $\alpha, \beta \in \Delta$.

(i) Jestliže úhel svíraný kořeny α a β leží v intervalu $(\pi/2, \pi)$, potom $\alpha + \beta \in \Delta$.

(ii) Jestliže úhel svíraný kořeny α a β leží v intervalu $(0, \pi/2)$ a $\langle\beta|\beta\rangle \geq \langle\alpha|\alpha\rangle$, potom $\alpha - \beta \in R$.

Definice 1.1.4. Podmnožinu $\Delta' \subset \Delta$ nazveme *bází kořenového systému* Δ, jestliže

(i) Δ' je báze vektorového prostoru V,

(ii) každé $\beta \in \Delta$ lze napsat ve tvaru $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta'} k_\alpha \alpha$, kde $k_\alpha \in \mathbb{Z}$. Navíc všechny nenulové koeficienty k_α mají stejné znaménko.

Prvky Δ' nazveme *prosté kořeny*.
Řekneme, že kořen $\beta \in \Delta$ je *pozitivní vzhledem k bázi* Δ', jestliže koeficienty dané (ii) jsou nezáporné. Podobně řekneme, že je *negativní vzhledem k bázi* Δ', jestliže koeficienty dané (ii) jsou nekladné.
Množinu kladných kořenů budeme značit Δ^+, množinu záporných kořenů Δ^-.

Věta 1.1.5. Každý kořenový systém má bázi.

Z této věty společně s lemmatem 1.1.3 plyne, že úhly svírané dvěma prostými kořeny jsou tupé. Konkrétně mohou nastat případy $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ a $5\pi/6$. Lemma 1.1.2 také jasně stanovuje poměry délek prostých kořenů; mohou nastat pouze dva případy:

1) buď jsou všechny kořeny stejně dlouhé,

2) nebo kořeny nabývají pouze dvou různých délek.

V Lieově teorii často používaná konvence stanovuje pro delší kořeny $(\alpha, \alpha) = 2$.

1.1.2 Weylovy grupy

Definice 1.1.6. Nechť $\Delta \subset V$ je kořenový systém. Potom množinu

$$W(\Delta) = \{r_\alpha | \alpha \in \Delta\}\,,$$

kde r_α je zobrazení (1.2), tj.

$$r_\alpha : V \mapsto V : v \mapsto v - 2\frac{(v,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}v \quad \forall v \in V,$$

nazveme *Weylova grupa*.

Poznámka 1.1.7.

i) Weylova grupa je generována zrcadleními odpovídajícími prostým kořenům.

ii) Weylova grupa je konečná. Řády Weylových grup pro prosté Lieovy algebry jsou velice dobře známy.

iii) Weylovu grupu lze definovat i na úrovni Lieových grup.

Zobrazení r_α pro $\alpha \in \Delta$ je reflexe podle nadplochy ve V kolmé k α. Tyto nadplochy rozdělují V na $|W|$ souvislých množin, kde $|W|$ je řád Weylovy grupy. Tyto množiny nazýváme *Weylovy komory*. Systém Weylových komor je permutován Weylovou grupou. Množinu

$$D^+ = \{x \in V \mid (x, \alpha) \geq 0,\ \alpha \in \Delta'\}$$

nazveme *dominantní Weylova komora*.

1.1.3 Cartanovy matice a Dynkinovy diagramy

Na začátek poznamenejme, že kořenový systém může mít více bází. Všechny tyto báze jsou však ekvivalentní ve smyslu následující věty.

Věta 1.1.8. Nechť Δ je kořenový systém, nechť Δ' a Δ'' jsou báze Δ. Potom existuje $w \in W(\Delta)$ takový, že $\Delta'' = \{w(\alpha) | \alpha \in \Delta'\}$.

Nyní můžeme s klidným svědomím zavést tzv. Cartanovu matici pro daný kořenový systém.

Definice 1.1.9. Nechť $\Delta' = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ je báze kořenového systému Δ. Potom matici $C \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, kde

$$C_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)},$$

nazveme *Cartanova matice*.

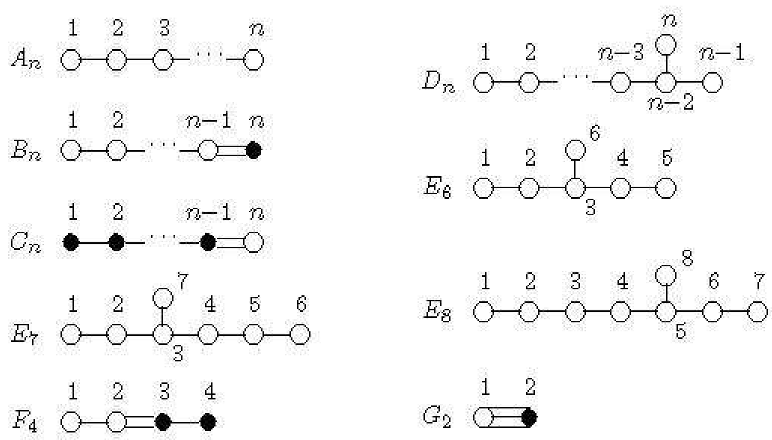
Jiný, avšak Cartanově matici ekvivalentní způsob popisu kořenových systémů je tzv. *Dynkinův diagram*. Je to graf, jehož vrcholy jsou tvořeny množinou prostých kořenů $\Delta' = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ a které jsou spolu po dvou spojeny d_{ij} čarami, kde

$$d_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \frac{2(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Jestliže $d_{ij} > 1$, tj. α_i a α_j mají různou délku, potom se od sebe nějakým označením odliší delší a kratší kořeny. (Často se rozdílná délka značí šipkou směřující od delšího kořene ke kratšímu. V této práci však budeme značit kratší kořeny černě a delší kořeny bíle.)

Protože kořenové systémy jsou úplně popsány pomocí svých Dynkinových diagramů a protože pomocí kořenových systémů jsou prosté Lieovy algebry úplně klasifikovány, lze říci, že prosté Lieovy algebry jsou úplně klasifikovány pomocí přípustných Dynkinových diagramů. Jak už jsme napsali na počátku této kapitoly, každá prostá Lieova algebra náleží do jedné ze čtyř sérií $A_n (n \geq 1)$, $B_n (n \geq 3)$, $C_n (n \geq 2)$, $D_n (n \geq 4)$, nebo mezi pětici mimořádných algeber označovaných jako E_6, E_7, E_8, F_4

a G_2. Dynkinovy diagramy všech prostých Lieových algeber jsou uvedeny na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Dynkinovy diagramy prostých Lieových algeber.

1.1.4 Kořenové systémy poloprostých Lieových algeber

Definice 1.1.10. Lieovu podalgebru $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ nazveme *Cartanova podalgebra*, jestliže je nilpotentní a rovná svému normalizátoru, tj. $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} | [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$. Dimenzi $\mathfrak{h}$ nazýváme *hodností* (nebo též *rankem*) Lieovy algebry $\mathfrak{g}$.

Při odhalování struktury $\mathfrak{g}$ je klíčovým nástrojem tzv. *adjungovaná reprezentace* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$, tj. reprezentace při které působí $\mathfrak{g}$ sama na sebe pomocí komutátoru, konkrétně

$$\mathrm{ad}_x\, y = [x, y] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Pro maticové Lieovy algebry platí, že Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ je maximální abelovská podalgebra $\mathfrak{g}$, jejíž prvky jsou při adjungované reprezentaci diagonální; tj. existuje báze $\mathfrak{g}$ taková, že pro libovolný prvek x této báze platí

$$\mathrm{ad}_h\, x = [h, x] = \alpha(h)x \quad \forall h \in \mathfrak{h}. \tag{1.3}$$

Zde α je funkcionál na $\mathfrak{h}$, tj. $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, a vektor x náleží do nějakého vlastního podprostoru

$$E_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} | [h, x] = \alpha(h)x,\ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Jestliže $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ je nenulový funkcionál a pro vektorový prostor platí $E_\alpha \neq 0$, α nazveme *kořen* Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ a E_α nazveme *kořenový podprostor*.

Poznámka 1.1.11. Nechť $\mathfrak{g}$ je poloprostá Lieova algebra, potom kořenový systém určený Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{h}$ splňuje všechny axiomy definice kořenového systému 1.1.1. Poznamenejme, že kořenový systém je v tomto případě podmnožinou duálního prostoru $\mathfrak{h}^*$ ke Cartanově algebře; dále poznamenejme, že $\mathfrak{h}^*$ je reálný vektorový prostor.

Bázi $\mathfrak{h}^*$ tvořenou prostými kořeny označme $\Delta' = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, kde k je rank Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Kořeny z Δ lze zapsat jako lin. kombinaci prostých kořenů s celočíselnými koeficienty, které jsou vždy buď současně nezáporné (*kladné kořeny*) nebo nekladné (*záporné kořeny*).

Věta 1.1.12 (Weylova-Chevalleyho normální forma). Buď $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{h}$ její Cartanova podalgebra. Algebra $\mathfrak{g}$ se rozkládá na direktní sumu Cartanovy podalgebry $\mathfrak{h}$ a jednodimenzionálních kořenových podprostorů E_α pro které platí

1) $[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha, \quad \forall h \in \mathfrak{h}, e_\alpha \in E_\alpha,$

2) $[e_\alpha, e_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}, \quad \forall e_\alpha \in E_\alpha, e_{-\alpha} \in E_{-\alpha},$

3) $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}, \quad N_{\alpha\beta} = 0$ pokud $\alpha + \beta$ není kořen.

Navíc existuje báze ve které jsou všechny strukturní konstanty celočíselné a platí $N_{\alpha+\beta} = -N_{(-\alpha)(-\beta)}$. Potom algebru $\mathfrak{g}$ lze zapsat jako

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} E_\alpha = \sum_{\alpha \in \Delta^+} E_\alpha \oplus \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^-} E_\alpha = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-. \tag{1.4}$$

Na Lieově algebře $\mathfrak{g}$ zavádíme symetrickou bilineární formu, tzv. *Killingovu formu*,

$$\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \tag{1.5}$$

Restrikce Killingovy formy na $\mathfrak{h}$ je nedegenerovaná a pro každý kořen $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ existuje jednoznačně $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ takový, že $\alpha(h) = \kappa(h, t_\alpha)$ pro každé $h \in \mathfrak{h}$. Killingova forma navíc určuje izomorfismus mezi $\mathfrak{h}$ a $\mathfrak{h}^*$ následovně: danému $h \in \mathfrak{h}$ přiřadí funkcionál $\theta_h \in \mathfrak{h}^*$ vztahem

$$\theta_h(k) = \kappa(h, k) \quad \forall k \in \mathfrak{h}.$$

Na $\mathfrak{h}^*$ lze Killingovu formu zavést vztahem $\kappa(\alpha, \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$. Killingova forma určuje skalární součin na $\mathfrak{h}^*$ a poskytuje tak pohled na geometrickou strukturu kořenového systému.

Báze zmíněná ve větě 1.1.12 se konstruuje pomocí následujícího vektoru

$$h_\alpha = 2 \frac{t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}. \tag{1.6}$$

Potom existují kořenové vektory e_α a $e_{-\alpha}$ takové, že společně s vektorem h_α splňují komutační relace

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha, \quad [h_\alpha, e_\beta] = C_{\beta\alpha} e_\beta, \quad [e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta},$$

kde $N_{\alpha+\beta} = 0$, jestliže $\alpha + \beta$ není kořen, a

$$C_{\beta\alpha} = \beta(h_\alpha) = \frac{2\kappa(t_\beta, t_\alpha)}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}.$$

Koeficienty $C_{\beta\alpha}$ se nazývají *Cartanova celá čísla*, pro prosté kořeny tvoří prvky Cartanovy matice.

1.2 Reprezentace Lieových algeber

Definice 1.2.1. Buď V vektorový prostor, zobrazení $\rho : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(V)$ nazveme *reprezentací* Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, jestliže platí

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \tag{1.7}$$

Prostor V nazveme *modul* Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Reprezentaci nazveme *věrnou*, jestliže ρ je prosté zobrazení.

Poznámka 1.2.2. Algebra $\mathfrak{gl}(V)$ není nic jiného než algebra všech endomorfismů vektorového prostoru V, tj. lineárních zobrazení $V \mapsto V$, s komutátorem definovaným jako $[A, B] = AB - BA$.

Definice 1.2.3. Reprezentace $\rho : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(V)$ se nazývá *ireducibilní* (též *prostá*), jestliže $V \neq 0$ a jediné invariantní podprostory při akci $\mathfrak{g}$ jsou 0 a V. Reprezentace se nazývá *reducibilní*, jestliže není ireducibilní. Reprezentace se nazývá *úplně reducibilní* (též *poloprostá*), jestliže každý invariantní podprostor má invariantní doplňek.

Věta 1.2.4 (H. Weyl). Každá konečnědimenzionální reprezentace komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je úplně reducibilní.

Nechť V je konečnědimenzionální modul Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ je maximální abelovská podalgebra $\mathfrak{g}$. Prvky $\mathfrak{h}$ působí na V diagonálně, protože jejich reprezentace tvoří množinu komutujících operátorů; existuje tedy báze V ve které jsou tyto operátory současně diagonální. Proto můžeme rozložit V na direktní sumu tzv. *váhových podprostorů*.

Definice 1.2.5. Nechť $\rho : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(V)$ je reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na vektorovém prostoru V, potom funkcionál $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ takový, že existuje nenulový podprostor $V_\lambda \subset V$

$$V_\lambda = \{v \in V | \rho(h)v = \lambda(h) \cdot v, \ \forall h \in \mathfrak{h}\}, \tag{1.8}$$

nazveme *váha* reprezentace ρ, podprostor V_λ nazveme *váhový podprostor*. Množinu všech vah dané reprezentace označme Ψ.

Platí, že $V = \bigoplus_{\lambda\in\Psi} V_\lambda$. Nechť $v \in V_\lambda$, potom $e_\alpha \cdot v_\lambda \in V_{\lambda+\alpha}$ pro $\alpha \in \Delta$. Protože V je konečněrozměrný, je Ψ konečná. Potom existuje váha $\lambda \in \Psi$ taková, že pro všechna $\alpha \in \Delta^+$ platí, že $\lambda + \alpha \notin \Psi$. Tuto váhu λ nazýváme *nejvyšší váha* a $0 \neq v \in V_\lambda$ nazýváme *nejvyšší vektor*.

Věta 1.2.6. Nechť ρ je ireducibilní reprezentace poloprosté komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Potom množina všech vah Ψ obsahuje jednoznačně určenou nejvyšší váhu λ. Váhový podprostor V_λ určený touto vahou je jednodimenzionální. Všechny další váhy jsou tvaru $\lambda - \sum_{\alpha_i\in\Delta'} a_i\alpha_i$, kde $a_i \in \mathbb{N}_0$, Δ' je množina prostých kořenů.

Buď $\Delta' = \{\alpha_1, \dots \alpha_k\}$ množina prostých kořenů a $\{h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_k}\}$ jim odpovídající vektory definované vztahem (1.6). Jestliže pro váhu $\lambda \in h^*$ platí $\lambda(h_{\alpha_i}) \geq 0$, nazýváme ji *dominantní*. Jestliže platí $\lambda(h_{\alpha_i}) \in \mathbb{Z}$, nazveme ji *integrální*. Váhu pro kterou platí $\omega_j(h_{\alpha_i}) = \delta_{ji}$ nazveme *j-tá fundamentální váha*. Fundamentální váhy očividně tvoří bázi množiny integrálních vah. Zavedeme tzv. *váhovou mříž* $\Lambda = \{\sum_{i=1}^k a_i\omega_i \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$, prvky Λ jsou očividně integrální váhy. Dále zavedeme *kladnou váhovou mříž* $\Lambda^+ = \{\sum_{i=1}^k a_i\omega_i \mid a_i \in \mathbb{N}_0\}$, prvky Λ^+ jsou dominantní integrální váhy.

Věta 1.2.7. Každé váze $\lambda \in \Lambda^+$ odpovídá konečněrozměrná ireducibilní reprezentace $\mathfrak{g}$, pro niž je λ nejvyšší vahou; modul této reprezentace označujeme $V(\lambda)$. Každé dva moduly se stejnou nejvyšší vahou jsou izomorfní a každý konečněrozměrný ireducibilní $\mathfrak{g}$-modul lze zkonstruovat pomocí nejvyšší váhy. Tj. existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinou Λ^+ a množinou všech konečněrozměrných ireducibilních reprezentací $\mathfrak{g}$.

Poznámka 1.2.8. Reprezentaci určenou nejvyšší vahou λ budeme značit jako $V(\lambda)$, jak už jsme poznamenali v minulé větě. Jestliže $\mathfrak{g}$ je poloprostá Lieova algebra hodnosti k, potom váhu lze zapsat v bázi fundamentálních vah jako $\lambda = \sum_{j=0}^k a_j\omega_j$, kde $a_j \in \mathbb{N}_0$. Potom reprezentaci $V(\lambda)$ budeme někdy značit $V(a_1, \dots, a_k)$.

Ze dvou reprezentací $\rho_1 : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(V_1)$ a $\rho_2 : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(V_2)$ lze zkonstruovat reprezentaci novou. Reprezentaci $\rho : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ definovanou vztahem

$$\rho(x)v_1 \otimes v_2 = \rho_1(x)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(x)v_2,$$

kde $x \in \mathfrak{g}$, $v_i \in V_i$, nazýváme *tenzorovým součinem reprezentací* ρ_1 a ρ_2. I když původní reprezentace jsou ireducibilní, jejich tenzorový součin už obecně ireducibilní není, je však úplně reducibilní podle věty 1.2.4.

1.3 Branching

Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra, $\mathfrak{h}$ její podalgebra. Nechť ρ je reprezentace algebry $\mathfrak{g}$. Redukce reprezentace ρ algebry $\mathfrak{g}$ vzhledem k podalgebře $\mathfrak{h}$ se nazývá *branching*. Vzhledem k úplné reducibilitě reprezentací je postačující omezit se pouze na ireducibilní reprezentace algebry $\mathfrak{g}$; reprezentace algebry $\mathfrak{h}$ indukovaná ireducibilní reprezentací ρ algebry $\mathfrak{g}$ je nicméně obecně reducibilní, lze ji tedy zapsat jako sumu ireducibilních reprezentací ρ' algebry $\mathfrak{h}$. Existuje několik konvencí, jak toto zapsat, např.

$$\rho \downarrow \mathfrak{h} = \sum_i m_i \rho',$$

nebo

$$\rho \to \sum_i m_i \rho',$$

kde ρ' jsou ireducibilní reprezentace podalgebry $\mathfrak{h}$ a m_i jejich příslušné násobnosti.

Poznamenejme, že branching je důležitý nástroj pro řešení řady problémů moderní fyziky.

Pro celou řadu párů algebra–podalgebra, jsou známé výsledky pro počítání branchingu.

My zde uvedeme obecný postup, jak počítat branching pro reduktivní algebry podle článků [2] a [3]. Uveďme jen základní vlastnosti reduktivních Lieových algeber.

Definice 1.3.1. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá *reduktivní*, jestliže její adjungovaná reprezentace je úplně reducibilní.

Výroku, že $\mathfrak{g}$ je reduktivní, jsou ekvivalentní následující dvě tvrzení:

1) Každá konečnědimenzionální reprezentace $\mathfrak{g}$ je úplně reducibilní.

2) Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je direktním součtem poloprosté a abelovské podalgebry.

Buď $\mathfrak{g}$ reduktivní Lieova algebra, $\mathfrak{h}$ její podalgebra.

Buď $r : \Lambda(\mathfrak{g}) \mapsto \Lambda(\mathfrak{h})$ přirozená projekce váhového systému $\Lambda(\mathfrak{g})$ na váhový systém $\Lambda(\mathfrak{h})$. Zobrazení r lze vybrat tak, aby pro kladné kořeny $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g})$ platilo $r(\alpha) \notin \Delta^-(\mathfrak{h})$.

Označme $\Phi = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}) | r(\alpha) = 0\}$, $\Phi^+ = \Phi \cap \Delta^+(\mathfrak{g})$, $W(\Phi)$ buď Weylova grupa generovaná kořenovým systémem Φ. Φ se nazývá *parabolický kořenový podsystém* $\Delta(\mathfrak{g})$; $W(\Phi)$ je podgrupou $W(\mathfrak{g})$.

Položme $W = W(\mathfrak{g})/W(\Phi)$. Každou třídu faktorgrupy W lze jednoznačně reprezentovat prvkem $W(\mathfrak{g})$ minimální délky; každý prvek $W(\mathfrak{g})$ lze zapsat jako složení zrcadlení odpovídajících prostým kořenům, potom prvek s minimální délkou je ten, který takovýchto zrcadlení potřebuje ke svému nagenerování nejméně.

Položme $A = \{r(\Delta^+(\mathfrak{g}))\} \backslash \{0\}$, každý prvek $\alpha \in A$ vybavme konečnou násobností m_α. Pro $\alpha \notin \Delta^+(\mathfrak{h})$ položme $m_\alpha = |\{\beta \in \Delta^+(\mathfrak{g}) | r(\beta) = \alpha\}|$, pro $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{h})$ položme $m_\alpha = |\{\beta \in \Delta^+(\mathfrak{g}) | r(\beta) = \alpha\}| - 1$. Dále zavádíme mřížku $L = \{\sum_{\alpha \in A} k_\alpha \alpha | \; k_\alpha \in \mathbb{N}_0\}$.

Konstantova funkce p_A je definována na L jako

$$\frac{1}{\prod_{\alpha \in A}(1 - z^\alpha)^{m_\alpha}} = \sum_{\beta \in L} p_A(\beta) z^\beta,$$

na reálném lineárním obalu mřížky L se funkce p_A dodefinovává jako $p_A(\beta) = 0$ pro $\beta \notin L$. Podle [11] lze Konstantovu partiční funkci definovat v bodech mřížky $\beta \in L$ alternativně jako počet všech množin nezáporných celých čísel $\{k_\alpha | \; \alpha \in A\}$ takových, že $\beta = \sum_{\alpha \in A} k_\alpha \alpha$, tj. $p_A(\beta)$ není nic jiného než počet způsobů jak lze vyjádřit $\beta \in L$ pomocí prvků $\alpha \in A$.

Tzv. *Weylův dimenzionální polynom* je definován jako

$$D(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{(\lambda, \alpha)}{(\delta_\Phi, \alpha)},$$

kde δ_Φ je poloviční součet kladných kořenů Φ^+.

Celá uvedená teorie vrcholí větou, která poskytuje vzorec, jak spočítat násobnost ireducibilní reprezentace podalgebry $\mathfrak{h}$ určené nejvyšší vahou $\mu \in \Lambda(\mathfrak{h})$ v restrikci reprezentace určené nejvyšší vahou $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{g})$ na podalgebru $\mathfrak{h}$.

Věta 1.3.2. [2] Multiplicita reprezentace V_μ podalgebry $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ při restrikci reprezentace V_λ algebry $\mathfrak{g}$ na podalgebru $\mathfrak{h}$ se spočte jako

$$(V_\mu, V_\lambda \downarrow \mathfrak{h}) = \sum_{w \in W} \det(w) D(w(\lambda + \delta_\mathfrak{g})) p_A[r(w(\lambda + \delta_\mathfrak{g})) - (\mu + r(\delta_\mathfrak{g}))], \qquad (1.9)$$

kde $\delta_\mathfrak{g}$ je poloviční součet kladných kořenů $\Delta^+(\mathfrak{g})$.

[2] V článku [3] autor G. Heckman píše, že tento výsledek obdržel poprvé v raných šedesátých letech prof. B. Konstant, nicméně vzorec nikdy nepublikoval. Důkaz je uveden ve zmíněném Heckmanově článku.

Kapitola 2

Generující funkce

Generující funkce byly zavedeny *Abrahamem de Moivre* v první půli 18. století jako nástroj pro řešení lineární rekurence. Od té se staly důležitým nástrojem diskrétní matematiky.

Obecně se jedná o formální mocninnou řadu, jejíž koeficienty jsou členy hledané posloupnosti. V praxi se používá několik typů generujících funkcí; každý typ generující funkce je vhodný pro řešení jiného druhu úloh. Nejznámější a nejvíce používané jsou tyto:

- **obyčejné generující funkce**

$$(a_n) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z),$$

- **exponenciální generující funkce**

$$(a_n) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = g(z),$$

- **Dirichletovy generující funkce**

$$(a_n) \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} = d(z),$$

kde $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je nějaká posloupnost.

Poznamenejme, že v diskrétní matematice je posloupnost (a_n) obvykle číselná, nicméně posloupnost (a_n) lze volit daleko obecněji. V této práci například typickým prvkem posloupnosti (a_n) bude charakter nějaké konkrétní reprezentace poloprosté Lieovy algebry.

2.1 Formální mocninné řady

V této podkapitole zavedeme okruh formálních mocninných řad a krátce zmíníme jeho vlastnosti. Poznamenejme, že se budeme zabývat algebraickými vlastnostmi mocninných řad, analytické vlastnosti, jakou je konvergence, zde zkoumat nebudeme.

Definice 2.1.1. Formální výraz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, kde prvky a_n náleží nějakému tělesu $\mathbb{F}$, nazveme *formální mocninná řada*, posloupnost (a_n) nazveme *posloupnost koeficientů*. Dvě formální mocninné řady považujeme za stejné, jestliže mají stejnou posloupnost koeficientů.

Příklad 2.1.2. Zdůrazněme ještě jednou, že se jedná pouze o algebraickou teorii, ve které na řady nahlížíme pouze formálně. Abychom to dokumentovali, uvedeme jako příklad dobře definované formální mocninné řady řadu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n.$$

Tato řada nekonverguje pro žádné $z \in \mathbb{C}$ s výjimkou $z = 0$, přesto se jedná o dobře definovanou a užitečnou formální mocninnou řadu a generující funkci.

Nyní popíšeme základní operace s formálními mocninnými řadami. Každou formální mocninnou řadu lze násobit číslem $c \in \mathbb{F}$ podle pravidla

$$c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) z^n.$$

Dále součet a rozdíl dvou formálních mocninných řad definujeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n.$$

Součin dvou mocninných řad zavádíme pomocí Cauchyho pravidla, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Je očividné, že při takto zavedených operacích na množině formálních mocninných řad se tato uzavírá do algebraického okruhu. Existenci neutrálního a inverzního prvku při sčítání ani existenci neutrálního prvku při násobení, jakožto distributivitu uvedených operací a všechny další vlastnosti okruhu zde nebudeme dokazovat, neboť se jedná o jednoduché algebraické cvičení.

V okruhu formálních mocninných řad lze zavést další operace. Příkladem je třeba *inverze vzhledem k násobení (reciprocal)*. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ je formální mocninná řada, potom její inverzí vzhledem k násobení je řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ pro kterou platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = 1.$$

Například pro řadu $1 - z$ je její inverzí vzhledem k násobení řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Platí však, že inverzi vzhledem k násobení nelze nalézt obecně pro každou formální mocninnou řadu, ale tehdy a jen tehdy, když $a_0 \neq 0$.

Podobně lze zavést *inverzní řadu (inverse)* $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ k řadě $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ vztahem $f(g(z)) = g(f(z)) = z$, kde

$$f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z)^n.$$

Inverzní řada opět neexistuje pro každou formální mocninnou řadu.

Zcela formálně lze také zavést derivaci řady $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Derivací nazveme řadu $f' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

2.2 Obyčejné generující funkce

Definice 2.2.1. Formální řadu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nazveme *obyčejnou generující funkcí* (ops) pro posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Tuto skutečnost budeme značit symbolem $f \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Anglicky se obyčejná generující funkce nazývá ordinary generating function, proto jsme v definici použili zkratku „ops“.

Příklad 2.2.2. Posloupnosti $\{1\}_0^{\infty}$ odpovídá generující funkce

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^n = \frac{1}{1-z},$$

tj. v našem značení

$$(1)_0^{\infty} \overset{ops}{\longleftrightarrow} f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

2.2.1 Pravidla pro práci s obyčejnými generujícími funkcemi

Práci s generujícími funkcemi lze formalizovat takovým způsobem, že jisté operaci s posloupností koeficientů odpovídá jistá operace s odpovídající formální mocninnou řadou.

Zde uvedené předpoklady budeme uvažovat v průběhu celé této podkapitoly. Nechť pro posloupnosti $(a_n)_0^\infty$ a $(b_n)_0^\infty$ platí

$$(a_n)_{n=0}^\infty \quad \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \quad \sum_{n=0}^\infty a_n z^n = f(z), \qquad (b_n)_{n=0}^\infty \quad \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \quad \sum_{n=0}^\infty b_n z^n = g(z),$$

potom pro práci s obyčejnými generujícími funkcemi platí několik následujících pravidel.

Pravidlo 2.2.3. Obecné pravidlo pro posunutí indexu o $k \in \mathbb{N}$:

$$(a_{n+k})_{n=0}^\infty \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} h(z) = \frac{f(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{k-1} z^{k-1}}{z^k}. \tag{2.1}$$

Důkaz. Začněme speciálním případem pro $k = 1$. Posloupnosti $(a_{n+1})_{n=0}^\infty$ odpovídá generující funkce

$$h(z) = \sum_{n=0}^\infty a_{n+1} z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^\infty a_{n+1} z^{n+1} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^\infty a_n z^n = \frac{1}{z}(f(z) - f(0)),$$

tj. pro $k = 1$ tvrzení platí. Nechť platí indukční předpoklad

$$(a_{n+k})_{n=0}^\infty \quad \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \quad h(z) = \frac{f(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{k-1} z^{k-1}}{z^k}$$

pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, potom

$$\begin{aligned}
(a_{n+k+1})_{n=0}^\infty \quad \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \quad & u(z) = \frac{1}{z}\left(h(z) - h(0)\right) = \\
&= \frac{1}{z}\left(\frac{f(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{k-1} z^{k-1}}{z^k} - a_k\right) = \\
&= \frac{1}{z}\left(\frac{f(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{k-1} z^{k-1} - a_k z^k}{z^k}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Pravidlo 2.2.4. Nechť $c \in \mathbb{F}$, potom $(c^n a_n)_{n=0}^\infty \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} h(z) = f(cz)$.

Pravidlo 2.2.5. Nechť P je polynom, potom platí

$$(P(n) a_n)_{n=0}^\infty \quad \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \quad h(z) = P\left(z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) f(z). \tag{2.2}$$

Důkaz. Postačuje ukázat, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$(n^k a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \quad h(z) = \left(z \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k f(z).$$

Zvolme $k = 1$, potom kvůli

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n = z f'(z) = z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z).$$

Nechť platí indukční předpoklad pro nějaké $k \in \mathbb{N}$

$$(n^k a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \quad h(z) = \left(z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k f(z),$$

potom

$$\begin{aligned}(n^{k+1} a_n)_{n=0}^{\infty} = (n \cdot n^k a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \quad & u(z) = z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} h(z) = z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k f(z) = \\ & = \left(z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{k+1} f(z).\end{aligned}$$

□

Pravidlo 2.2.6. Pro součin dvou generujících funkcí platí

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\right)_{n=0}^{\infty} \quad \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \quad h(z) = f(z) \cdot g(z). \tag{2.3}$$

Důkaz. Pro součin formálních mocninných řad platí podle Cauchyho pravidla

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\right) z^n.$$

□

Pravidlo 2.2.7. Pro posloupnost částečných součtů platí

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=0}^{\infty} \quad \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{f(z)}{1-z}. \tag{2.4}$$

Důkaz. Použijeme pravidlo 2.2.6. Jestliže vynásobíme podle Cauchyho pravidla posloupnosti (a_n) a $(b_n = 1)$, obdržíme

$$\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r} = \sum_{r=0}^{n} a_r.$$

Potom

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)_{n=0}^{\infty} \quad \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \quad h(z) = f(z) \cdot \frac{1}{1-z},$$

neboť $(1)_0^\infty \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} 1/(1-z)$. □

2.2.2 Příklady obyčejných generujících funkcí

Nyní uvedeme několik příkladů použití obyčejných generujících funkcí v diskrétní matematice.

Příklad 2.2.8 (Fibonacciho čísla)**.** Fibonacciho čísla jsou zadána rekurenčním vztahem

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

s počátečními podmínkami $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$. Nyní celou rovnost vynásobíme formálním výrazem z^n a sečteme přes všechna $n = 0, 1, 2 \ldots$, což je klasický postup při užití generujících funkcí. Generující funkce tedy bude $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$. S využitím pravidla 2.2.3 obdržíme

$$\frac{f(z) - z}{z^2} = \frac{f(z)}{z} + f(z).$$

Z čehož ihned dostáváme pro generující funkci vztah

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Nyní se ukáže výhodnost celé „mašinerie“ generujících funkcí. Stačí rozvinout funkci $f(z)$ do mocninné řady a koeficient u výrazu z^n bude hledané n-té Fibonacciho číslo. Rozvoj provedeme jednoduše. Stačí racionální funkci f převést na parciální zlomky.

$$f(z) = \frac{z}{(1 - zr_+)(1 - zr_-)} = \frac{1}{r_+ - r_-}\left(\frac{1}{1 - zr_+} - \frac{1}{1 - zr_-}\right),$$

kde $r_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Potom rozvineme zmíněné zlomky do geometrické řady

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_+^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_-^n z^n \right)$$

a pro n-té Fibonacciho číslo obdržíme explicitní vztah

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (r_+^n - r_-^n).$$

Navíc, protože $r_+ > 1$ a $|r_-| < 1$, dostáváme pro velká n, že

$$F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n. \tag{2.5}$$

A protože výraz $|r_-|^n << 0,5$ pro velká n, dostáváme, že F_n je celé číslo nejbližší hodnotě (2.5).

Příklad 2.2.9 (Kombinační čísla)**.** Platí, že

$$\binom{n+k}{k}_{k=0}^{\infty} \quad \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \quad f(z) = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}.$$

Odvození je jednoduché. Stačí uvážit k-tou derivaci funkce $1/(1-z)$.

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)^{(k)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^{(k)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{k!}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) z^{n-k}.$$

Po vydělení $k!$ obdržíme

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n.$$

Příklad 2.2.10. Sečtěme sumu

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2.$$

Z příkladu 2.2.2 víme, že

$$(1)_0^{\infty} \quad \overset{ops}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{1-z}.$$

Podle pravidla 2.2.5 platí

$$(k^2)_0^\infty \quad \overset{ops}{\longleftrightarrow} \quad f(z) = \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^2 \frac{1}{1-z} = z\frac{1+z}{(1-z)^3}.$$

Dále podle pravidla 2.2.4

$$((-1)^k k^2)_0^\infty \quad \overset{ops}{\longleftrightarrow} \quad f(-z) = -z\frac{1-z}{(1+z)^3}.$$

A podle pravidla 2.2.7 platí

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2\right)_0^\infty \quad \overset{ops}{\longleftrightarrow} \quad g(z) = \frac{1}{1-z}f(-z) = \frac{-z}{(1+z)^3}.$$

Hledaná suma je tedy koeficient A_n v rozvoji $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$. Podle minulého příkladu víme, že

$$g(z) = -z\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}(-z)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{n+1}{2}(z)^n.$$

Tj.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n\binom{n+1}{2}.$$

2.3 Generující funkce pro posloupnost koeficientů z okruhu polynomů

V úlohách diskrétní matematiky jsou prvky posloupnosti koeficientů obvykle čísla. Nicméně takovéto omezení na posloupnost koeficientů by zbytečně limitovalo úžasné nástroje generujících funkcí. Pro využití v algebře je proto vhodné rozšířit definici 2.1.1 a koeficienty a_n neomezovat pouze na těleso $\mathbb{F}$, ale připustit i koeficienty z algebraických okruhů. Poznamenejme, že i při takto rozšířené definici budou stále všechny zmíněné operace v okruhu formálních mocninných řad platné a pravidla pro práci s obyčejnými generujícími funkcemi odvozená v podkapitole 2.2.1 budou také platit.

Typicky lze volit prvky posloupnosti koeficientů z okruhu polynomů. Uvedeme si zde dva příklady.

Příklad 2.3.1 (Čebyševovy polynomy prvního druhu)**.** Rodinu Čebyševových polynomů prvního druhu lze popsat pomocí jednoduché rekurence:

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x),$$

kde $T_0(x) = 1$ a $T_1(x) = x$.

Standardně vynásobíme celou rekurentní relaci formální proměnnou z^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Pomocí pravidla 2.2.3 obdržíme rovnici pro generující funkci $f(z,x) = \sum_n T_n(x) z^n$

$$\frac{f(z,x) - 1 - xz}{z^2} = 2x\frac{f(z,x) - 1}{z} - f(z,x),$$

z čehož plyne

$$f(z,x) = \frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) z^n.$$

Generující funkci snadno rozvineme do mocninné řady pomocí parciálních zlomků. Kořeny kvadratické rovnice ve jmenovateli $z^2 - 2xz + 1$ označme jako $r_\pm = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$. Potom

$$\begin{aligned}
f(z,x) = \frac{1 - zx}{(z - r_+)(z - r_-)} &= \frac{1 - xz}{r_+ - r_-}\left[\frac{1}{r_-} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{r_-}} - \frac{1}{r_+} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{r_+}}\right] = \\
&= \frac{1 - xz}{r_+ - r_-}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r_-}\right)^{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r_+}\right)^{n+1} z^n\right] = \\
&= \frac{1}{r_+ - r_-}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{r_-}\right)^{n+1} - x\left(\frac{1}{r_-}\right)^{n} - \left(\frac{1}{r_+}\right)^{n+1} + x\left(\frac{1}{r_+}\right)^{n}\right] z^n = \\
&= \frac{1}{r_+ - r_-}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{r_-}\right)^{n+1}(1 - xr_-) - \left(\frac{1}{r_+}\right)^{n+1}(1 + xr_+)\right] z^n = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1 - x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}}{(x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}} - \frac{1 - x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}\right] z^n = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n} + \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n}\right] z^n = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\right] z^n.
\end{aligned}$$

Dostáváme vztah pro n-tý Čebyševův polynom prvního druhu

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}.$$

Příklad 2.3.2 (Exponenciální funkce symetrické vzhledem ke grupě S_2)**.** Zavedeme exponenciální funkci

$$E_{\lambda,\mu}(x,y) = e^{2\pi i(\lambda x+\mu y)} + e^{2\pi i(\lambda y+\mu x)}, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{N}_0.$$

Takto zavedená exponenciální funkce je očividně symetrická vzhledem ke grupě permutací S_2, tj. platí $E_{\lambda,\mu}(x,y) = E_{\mu,\lambda}(x,y)$. Z tohoto důvodu stačí uvažovat pouze dominantní dvojice indexů (λ,μ), tj. $\lambda \geq \mu$.

Pro součin dvou exponenciálních funkcí platí dekompoziční pravidlo

$$E_{a,b}E_{c,d} = E_{a+c,b+d} + E_{a+d,b+c}. \tag{2.6}$$

Jestliže označíme exponenciální funkce $E_{1,0} = X$ a $E_{1,1} = Y$, zjistíme, že všechny další exponenciální funkce jsou polynomy v těchto dvou proměnných.

Podle pravidla (2.6) platí, že

$$E_{n,k}E_{0,0} = E_{n,k} + E_{n,k} = 2E_{n,k} \Longrightarrow E_{0,0} = 2.$$
$$E_{n-1,k-1}E_{1,1} = E_{n,k} + E_{n,k} = 2E_{n,k} \Longrightarrow E_{n,k} = \frac{Y}{2}E_{n-1,k-1}.$$

Indukcí obdržíme

$$E_{n,k} = \left(\frac{Y}{2}\right)^k E_{n-k,0}. \tag{2.7}$$

Potřebujeme tedy odvodit už jenom vztah pro $E_{n,0}$. Opět podle (2.6) platí

$$E_{n+1,0}E_{1,0} = E_{n+2,0} + E_{n+1,1} = E_{n+2,0} + \frac{Y}{2}E_{n,0},$$

tj.

$$E_{n+2,0} = XE_{n+1,0} - \frac{Y}{2}E_{n,0}. \tag{2.8}$$

Tuto rekurenci opět budeme řešit pomocí generujících funkcí. Po vynásobení pomocnou proměnnou r^n a sečtení přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$ získáme rovnici pro generující funkci $f(X,Y,r) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,0}(X,Y)r^n$.

$$\frac{f(X,Y,r) - 2 - Xr}{r^2} = X\frac{f(X,Y,r) - 2}{r} - \frac{Y}{2}f(X,Y,r),$$

potom

$$f(X,Y,r) = \frac{4 - 2Xr}{Yr^2 - 2Xr + 2}.$$

Opět jako v minulém příkladě rozložíme generující funkci $f(X,Y,r)$ na parciální zlomky a ty potom rozložíme jako geometrickou řadu. Výpočet zde uvádět nebudeme, protože je velice podobný výpočtu z minulého příkladu na Čebyševovy polynomy. Uvedeme rovnou výslednou řadu

$$f(X,Y,r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left\{ (X + \sqrt{X^2 - 2Y})^n + (X - \sqrt{X^2 - 2Y})^n \right\} r^n.$$

Čili pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$E_{n,0} = \frac{1}{2^n} \left\{ (X + \sqrt{X^2 - 2Y})^n + (X - \sqrt{X^2 - 2Y})^n \right\}.$$

Podle (2.7) je tedy

$$E_{n,k} = \frac{Y^k}{2^n} \left\{ (X + \sqrt{X^2 - 2Y})^{n-k} + (X - \sqrt{X^2 - 2Y})^{n-k} \right\}.$$

Odvoďme na závěr ještě generující funkci pro rodinu těchto exponenciálních polynomů

$$G(X,Y,r,s) = \sum_{n,k} E_{n,k}(X,Y) r^n s^k.$$

Pro jednoduchost označíme $r_\pm = X \pm \sqrt{X^2 - 2Y}$. Pro $r_\pm$ platí dva užitečné vztahy

$$r_+ r_- = 2Y \quad \text{a} \quad r_+ + r_- = 2X.$$

V tomto značení tedy

$$\begin{aligned}
G(X,Y,r,s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y^k}{2^n} \left[(r_+)^{n-k} + (r_-)^{n-k} \right] r^n s^k = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{Y}{r_+} \right)^k (r_+)^n + \left(\frac{Y}{r_-} \right)^k (r_-)^n \right] r^n s^k = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\frac{r_+^n r^n}{1 - \frac{Ys}{r_+}} + \frac{r_-^n r^n}{1 - \frac{Ys}{r_-}} \right] r^n = \\
&= \frac{1}{1 - \frac{Ys}{r_+}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r_+ r}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{Ys}{r_-}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r_- r}{2}} = \\
&= \frac{2r_+}{(r_+ - Ys)(2 - r_+ r)} + \frac{2r_-}{(r_- - Ys)(2 - r_- r)} = \\
&= \frac{2r_+(r_- - Ys)(2 - r_- r) + 2r_-(r_+ - Ys)(2 - r_+ r)}{(r_+ - Ys)(2 - r_+ r)(r_- - Ys)(2 - r_- r)}.
\end{aligned}$$

Po dosazení za $r_\pm$ a několika jednoduchých úpravách obdržíme generující funkci

$$G(X,Y,r,s) = \frac{4(2+Yrs-Xr-Xs)}{(Ys^2-2Xs+2)(Yr^2-2Xr+2)}.$$

2.4 Generující funkce pro posloupnost koeficientů z okruhu formálních charakterů

Zmínili jsme dva příklady, ve kterých jsme posloupnost koeficientů volili v okruhu polynomů v jedné a ve dvou proměnných. Nicméně nejdůležitější aplikací generujících funkcí v této práci bude teorie reprezentací Lieových algeber. Proto zavedeme takzvaný *charakterový generátor (character generator)*.

Definice 2.4.1. Buď $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra, Λ^+ jí odpovídající kladná váhová mříž. Potom *charakterovým generátorem* nazveme formální mocninnou řadu

$$\chi(A) = \sum_{\lambda\in\Lambda^+} \chi_\lambda \cdot A^\lambda,$$

kde koeficienty χ_λ jsou charaktery reprezentací s nejvyššími vahami $\lambda \in \Lambda^+$ a A je opět formální proměnná.

Poznámka 2.4.2. Charaktery reprezentací jsou prvky okruhu formálních charakterů $\mathbb{Z}(\Lambda)$. Okruh $\mathbb{Z}(\Lambda)$ obsahuje formální prvky e^λ pro $\lambda \in \Lambda$, kde Λ je váhová mříž dané Lieovy algebry. Z takovýchto prvků lze tvořit formální lineární kombinace s koeficienty v $\mathbb{Z}$, např. $2e^\lambda - 5e^\mu$. Násobení definujeme přirozeně jako $e^\lambda \cdot e^\mu = e^{\lambda+\mu}$.

Buď $\mathfrak{g}$ Lieova algebra hodnosti n, fundamentální váhy označme jako $\omega_1,\dots,\omega_n$. Formální mocniny e^{ω_i} označme jako x_i, tj. $x_i \equiv e^{\omega_i}$, potom charakter χ_λ se stane polynomem v n proměnných $x_1,\dots,x_n$. Ve stejném smyslu ztotožněme $A_i \equiv A^{\omega_i}$. Charakterový generátor je potom racionální funkce ve $2n$ proměnných $A_1,\dots,A_n,x_1,\dots,x_n$.

Uvedeme zde příklady charakterových generátorů pro grupy $SU(2)$ a $SU(3)$. Pro tyto účely budeme potřebovat vědět, jak formální charakter reprezentace s nejvyšší vahou vypadá. Odpověď poskytuje tzv. *Weylova charakterová formule (Weyl's character formula*).

Věta 2.4.3 (Weylova charakterová formule)**.** Charakter χ_λ konečněrozměrné reprezentace s nejvyšší vahou λ poloprosté Lieovy algebry je roven

$$\chi_\lambda \equiv \chi_{V(\lambda)} = \frac{\sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)e^{w(\lambda+\delta)}}{\sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)e^{w(\delta)}}, \tag{2.9}$$

kde W je Weylova grupa příslušná dané Lieově algebře, δ je poloviční součet kladných kořenů, tj. $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$, $\operatorname{sgn}(w)$ je signatura prvku w, tj. $(-1)^{l(w)}$, kde $l(w)$ je počet zrcadlení v rozkladu w na elementární zrcadlení odpovídající prostým kořenům.

Příklad 2.4.4 (Charakterový generátor pro grupu $SU(2)$)**.** Komplexifikací Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$ je algebra A_1. Prostý kořen je pouze jeden, označme ho jako α, pro fundamentální váhu ω platí $\alpha = 2\omega$. Konečnědimenzionální ireducibilní reprezentace jsou ty s nejvyššími vahami $m\omega$, $m \in \mathbb{N}_0$. Weylova grupa obsahuje pouze dva prvky, identitu a převracení, tj. $W = \{1, r_\alpha\}$, poloviční součet kladných kořenů je $\delta = \omega$.

Charakter reprezentace s nejvyšší vahou $m\omega$ nabývá

$$\chi_m = \frac{e^{m\omega+\omega} - e^{-(m\omega+\omega)}}{e^{\omega} - e^{-\omega}}.$$

Jestliže označíme $e^{\omega} \equiv x$, obdržíme pro formální charakter

$$\chi_m = \frac{x^{m+1} - x^{-m-1}}{x - x^{-1}}.$$

Charakterový generátor poté spočítáme velice snadno jako

$$\begin{aligned}\chi(A) &= \sum_{m=0}^{\infty}\chi_m A^m = \frac{1}{x-x^{-1}}\sum_{m=0}^{\infty}(x^{m+1} - x^{-m-1})A^m = \\ &= \frac{1}{x-x^{-1}}\left(\frac{x}{1-Ax} - \frac{x^{-1}}{1-Ax^{-1}}\right) = \frac{1}{(1-Ax)(1-Ax^{-1})}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Příklad 2.4.5 (Charakterový generátor pro grupu $SU(3)$)**.** Kořenový systém komplexifikace Lieovy algebry $\mathfrak{su}(3)$ je tvořen šesti kořeny $\Delta = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\}$, prosté kořeny jsou $\Delta' = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, kladné kořeny jsou $\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2\}$. Cartanova matice je

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro prosté kořeny a fundamentální váhy tedy platí $\alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2,\ \alpha_2 = -\omega_1 + 2\omega_2$. Poloviční součet kladných kořenů je

$$\delta = \frac{1}{2}\left[\alpha_1 + \alpha_2 + (\alpha_1+\alpha_2)\right] = \omega_1 + \omega_2.$$

Kladná váhová mříž je $\Lambda^+ = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 | m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0\}$. Konečnědimenzionální ireducibilní reprezentace jsou určeny právě kladnou váhovou mříží. Orbita bodu $a\omega_1 +$

$b\omega_2 \equiv (a,b)$ vzhledem k akci Weylovy grupy je

$$\mathcal{O}(a,b) = \{(a,b), (-a-b,a), (b,-a-b), (-a,a+b), (a+b,-b), (-b,-a)\},$$

kde všechny souřadnice jsou brány v bázi fundamentálních vah, tj. v bázi ω_1, ω_2. Dále první tři prvky orbity jsou generovány prvky Weylovy grupy se signaturou $+1$, zbylé tři jsou generovány prvky Weylovy grupy se signaturou -1.

Potom charakter reprezentace s nejvyšší vahou $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ je podle (2.9)

$$\begin{aligned}
\chi_\lambda \equiv \chi_{(m_1,m_2)} \quad = \quad & \frac{1}{e^{\omega_1+\omega_2} - e^{-\omega_1+2\omega_2} - e^{2\omega_1-\omega_1} - e^{-\omega_1-\omega_2} + e^{-2\omega_1+\omega_2} + e^{\omega_1-2\omega_2}} \cdot \\
& \cdot \Big[e^{(m_1+1)\omega_1+(m_2+1)\omega_2} - e^{(-m_1-1)\omega_1+(m_1+m_2+2)\omega_2} - \\
& - e^{(m_1+m_2+2)\omega_1+(-m_2-1)\omega_2} - e^{(-m_2-1)\omega_1+(-m_1-1)\omega_2} + \\
& + e^{(-m_1-m_2-2)\omega_1+(m_1+1)\omega_2} + e^{(m_2+1)\omega_1+(-m_1-m_2-2)\omega_2} \Big].
\end{aligned}$$

Jestliže označíme $e^{\omega_1} \equiv x$ a $e^{\omega_2} \equiv y$, potom charakter χ_λ přejde na tvar

$$\begin{aligned}
\chi_{(m_1,m_2)} \quad = \quad & \frac{1}{xy - x^{-1}y^2 - x^2y^{-1} - x^{-1}y^{-1} + x^{-2}y + xy^{-2}} \cdot \\
& \cdot \Big[x^{m_1+1}y^{m_2+1} - x^{-m_1-1}y^{m_1+m_2+2} - x^{m_1+m_2+2}y^{-m_2-1} - \\
& - x^{-m_2-1}y^{-m_1-1} + x^{-m_1-m_2-2}y^{m_1+1} + x^{m_2+1}y^{-m_1-m_2-2} \Big].
\end{aligned}$$

Charakterový generátor spočteme jako

$$\begin{aligned}
& G(A,B,x,y) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \chi_{(m_1,m_2)} A^{m_1} B^{m_2} = \\
& = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{A^{m_1}B^{m_2}}{xy - x^{-1}y^2 - x^2y^{-1} - x^{-1}y^{-1} + x^{-2}y + xy^{-2}} \cdot \\
& \cdot \Big[x^{m_1+1}y^{m_2+1} - x^{-m_1-1}y^{m_1+m_2+2} - x^{m_1+m_2+2}y^{-m_2-1} - \\
& - x^{-m_2-1}y^{-m_1-1} + x^{-m_1-m_2-2}y^{m_1+1} + x^{m_2+1}y^{-m_1-m_2-2} \Big] = \\
& = \frac{1}{xy - x^{-1}y^2 - x^2y^{-1} - x^{-1}y^{-1} + x^{-2}y + xy^{-2}} \Bigg[\frac{xy}{(1-Ax)(1-By)} - \\
& - \frac{x^{-1}y^2}{(1-Ax^{-1}y)(1-By)} - \frac{x^2y^{-1}}{(1-Ax)(1-Bxy^{-1})} - \frac{x^{-1}y^{-1}}{(1-Ay^{-1})(1-Bx^{-1})} + \\
& + \frac{x^{-2}y}{(1-Ax^{-1}y)(1-Bx^{-1})} + \frac{xy^{-2}}{(1-Ay^{-1})(1-Bxy^{-1})} \Bigg] = \left\{ \begin{matrix} \text{po zdlouhavých} \\ \text{úpravách} \end{matrix} \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1-AB}{(1-Ax)(1-By)(1-Ay^{-1})(1-Bx^{-1})(1-Ax^{-1}y)(1-Bxy^{-1})} =$$
$$= \frac{x^2y^2(1-AB)}{(1-Ax)(1-By)(y-A)(x-B)(x-Ay)(y-Bx)}. \tag{2.11}$$

Kapitola 3

Generující funkce pro branching

Podle věty 1.9 se pravidla pro branching řídí vzorcem

$$(V_\mu, V_\lambda \downarrow \mathfrak{h}) = \sum_{w \in W} \det(w) D(w(\lambda + \delta_\mathfrak{g})) p_A[r(w(\lambda + \delta_\mathfrak{g})) - (\mu + r(\delta_\mathfrak{g}))].$$

Generující funkci $P_{\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{h}}$ pro branching reduktivní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ vzhledem k podalgebře $\mathfrak{h}$ obdržíme tak, že multiplicitu $(V_\mu, V_\lambda \downarrow \mathfrak{h})$ vynásobíme formálním výrazem $x^\lambda z^\mu$, kde $\lambda \in \Lambda^+(\mathfrak{g})$ a $\mu \in \Lambda^+(\mathfrak{h})$, a sečteme přes všechny váhy $\lambda \in \Lambda^+(\mathfrak{g})$ a $\mu \in \Lambda^+(\mathfrak{h})$, tj. přes všechny reprezentace $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$. Čili

$$P_{\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{h}} = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda^+(\mathfrak{g}) \\ \mu \in \Lambda^+(\mathfrak{h})}} (V_\mu, V_\lambda \downarrow \mathfrak{h}) x^\lambda z^\mu. \tag{3.1}$$

3.1 Generující funkce pro branching $\mathbf{A_2} \subset \mathbf{G_2}$

Prosté kořeny Lieovy algebry G_2 označme jako β_1 a β_2, kořenový systém je potom $\Delta(G_2) = \{\pm\beta_1, \pm\beta_2, \pm(\beta_1 + \beta_2), \pm(\beta_1 + 2\beta_2), \pm(\beta_1 + 3\beta_2), \pm(2\beta_1 + 3\beta_2)\}$. Krátké kořeny je vhodné následovně označit $\gamma_1 = \beta_1 + \beta_2, \gamma_2 = \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2 = \beta_1 + 2\beta_2$. Cartanova matice je

$$C(G_2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro fundamentální váhy platí $\omega_1^\beta = 2\beta_1 + 3\beta_2$ a $\omega_2^\beta = \beta_1 + 2\beta_2$.

Kořenový systém algebry $\Delta(A_2)$ je podsystémem kořenového systému $\Delta(G_2)$ tvořeným dlouhými kořeny G_2. Prosté kořeny jsou $\alpha_1 = \beta_1$ a $\alpha_2 = \beta_1 + 3\beta_2$. Potom

$\Delta(A_2) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\}$. Cartanova matice je

$$C(A_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální váhy jsou $\omega_1^\alpha = \beta_1 + \beta_2 = \gamma_1$ a $\omega_2^\alpha = \beta_1 + 2\beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2$. Vyjádření kořenů a vah A_2 pomocí kořenů G_2 je výhodné, neboť odtud snadno určíme restrikční zobrazení $r : \Lambda(G_2) \mapsto \Lambda(A_2)$, viz podkapitolu 1.3,

$$r(\omega_1^\beta) = \omega_1^\alpha + \omega_2^\alpha = 2\gamma_1 + \gamma_2, \quad r(\omega_2^\beta) = \omega_2^\alpha = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Tudíž

$$r(\lambda) = r(\lambda_1\omega_1^\beta + \lambda_2\omega_2^\beta) = \lambda_1(2\gamma_1+\gamma_2) + \lambda_2(\gamma_1+\gamma_2) = (2\lambda_1+\lambda_2)\gamma_1 + (\lambda_1+\lambda_2)\gamma_2.$$

Podle algoritmu popsaném v podkapitole 1.3 máme $\Phi = \{\}$, tudíž $D \equiv 1, W(\Phi) = \{1\}$ a $W = W(G_2)$. Násobnosti prvků množiny $A = r(\Delta^+(G_2))$ jsou nulové pro dlouhé kořeny a rovny jedné pro krátké kořeny. Krátké kořeny, jak už víme jsou $\gamma_1 = \beta_1+\beta_2, \gamma_2 = \beta_2, \gamma_1+\gamma_2 = \beta_1+2\beta_2$. Mřížka je potom $L = \{m\gamma_1 + n\gamma_2 | \, m, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Poznámka 3.1.1. Konstantovu funkci pro $m\gamma_1 + n\gamma_2 \in L, \; m, n \in \mathbb{N}_0$, nalezneme snadno jako:

1) jestliže $m \leq n$, je $p_A(m\gamma_1 + n\gamma_2) = m + 1$,

2) jestliže $m > n$, je $p_A(m\gamma_1 + n\gamma_2) = n + 1$,

tj. $p_A(m\gamma_1 + n\gamma_2) = \min(m+1, n+1)$.

Generující funkci pro branching potom spočítáme jako

$$P_{G_2\downarrow A_2} = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda^+(G_2)\\ \mu\in\Lambda^+(A_2)}} \sum_{w\in W} \det(w) p_A[r(w(\lambda+\delta_{G_2})) - (\mu + r(\delta_{G_2}))] x^\lambda z^\mu. \tag{3.2}$$

Jestliže označíme

$$q_A(v) = \sum_{\mu\in\Lambda^+(A_2)} p_A[v-\mu] z^\mu, \tag{3.3}$$

potom pro generující funkci dostaneme

$$P_{G_2\downarrow A_2} = \sum_{w\in W} \det(w) \sum_{\lambda\in\Lambda^+(G_2)} q_A[r(w(\lambda+\delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})] x^\lambda. \tag{3.4}$$

Postupovat budeme tak, že pro každé $w \in W$ spočítáme

$$P(w) = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(G_2)} q_A[r(w(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})]x^\lambda$$

a výsledky pak sečteme. V našem případě je $W = W(G_2)$. W má tedy 12 prvků, buď r_1 reflexe odpovídající kořenu β_1 a r_2 reflexe odpovídající kořenu β_2. Nicméně situace se velmi usnadňuje tím, že nenulové budou pouze členy odpovídající zobrazením $1, r_1, r_2$ a $r_1 r_2$, všechny ostatní budou nulové.

A) Začněme prvkem $w = 1$. Nejdříve spočtěme funkci $q_A(r(\lambda))$ pro $\lambda \in \Lambda^+(G_2)$. Poznamenejme, že váha μ je v souřadnicích gama $\mu = (\mu_1 + \mu_2)\gamma_1 + \mu_2\gamma_2$. Označíme $z^{\omega_1^\alpha} \equiv z$ a $z^{\omega_2^\alpha} \equiv u$, tj. $z^\mu = z^{\mu_1} u^{\mu_2}$.

$$\begin{aligned}
q_A(r(\lambda)) &= \sum_{\mu \in \Lambda^+(A_2)} p_A[r(\lambda) - \mu] z^\mu = \\
&= \sum_{\mu_1, \mu_2 \geq 0} p_A[r(\lambda_1 \omega_1^\beta + \lambda_2 \omega_2^\beta) - (\mu_1 \omega_1^\alpha + \mu_2 \omega_2^\alpha)] z^{\mu_1} u^{\mu_2} = \\
&= \sum_{\mu_1, \mu_2 \geq 0} p_A[(2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2)\gamma_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2)\gamma_2] z^{\mu_1} u^{\mu_2}.
\end{aligned}$$

Jak vypadá Konstantova funkce už víme, tudíž uvedená suma se rozpadne na dva případy, neboť pro $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}_0$ dostaneme

I) jestliže $0 \leq 2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2$,
tj. jestliže $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq 2\lambda_1 + \lambda_2$ a $0 \leq \mu_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2$, pak

$$p_A = 2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2 + 1,$$

II) jestliže $2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2 > \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 \geq 0$,
tj. jestliže $\lambda_1 > \mu_1 \geq 0$ a $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_2 \geq 0$, pak

$$p_A = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 + 1.$$

$$q_A(r(\lambda)) = \underbrace{\sum_{\mu_1=0}^{\lambda_1 - 1} \sum_{\mu_2=0}^{\lambda_1 + \lambda_2} (\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 + 1) z^{\mu_1} u^{\mu_2}}_{\text{suma podle podmínky II)}} +$$

$$+\underbrace{\sum_{\mu_1=\lambda_1}^{2\lambda_1+\lambda_2}\sum_{\mu_2=0}^{2\lambda_1+\lambda_2-\mu_1}(2\lambda_1+\lambda_2-\mu_1-\mu_2+1)z^{\mu_1}u^{\mu_2}}_{\text{suma podle podmínky I)}}.$$

$$\text{suma podle II)} = \frac{(1+\lambda_1+\lambda_2-2u-\lambda_1 u-\lambda_2 u+u^{2+\lambda_1+\lambda_2})(-1+z^{\lambda_1})}{(-1+u)^2(-1+z)},$$

$$\begin{aligned}\text{suma podle I)} = &\Big(uz^{\lambda_1}+\lambda_1 uz^{\lambda_1}+\lambda_2 uz^{\lambda_1}-2u^2z^{\lambda_1}-\lambda_1u^2z^{\lambda_1}-\lambda_2u^2z^{\lambda_1}+\\ &+u^{3+\lambda_1+\lambda_2}z^{\lambda_1}-z^{1+\lambda_1}-\lambda_1z^{1+\lambda_1}-\lambda_2z^{1+\lambda_1}+3u^2z^{1+\lambda_1}+\\ &+\lambda_1u^2z^{1+\lambda_1}+\lambda_2u^2z^{1+\lambda_1}-2u^{3+\lambda_1+\lambda_2}z^{1+\lambda_1}+2z^{2+\lambda_1}+\\ &+\lambda_1z^{2+\lambda_1}+\lambda_2z^{2+\lambda_1}-3uz^{2+\lambda_1}-\lambda_1uz^{2+\lambda_1}-\lambda_2uz^{2+\lambda_1}+\\ &+u^{3+\lambda_1+\lambda_2}z^{2+\lambda_1}-z^{3+2\lambda_1+\lambda_2}+2uz^{3+2\lambda_1+\lambda_2}-u^2z^{3+2\lambda_1+\lambda_2}\Big)\\ &\Big/\Big((-1+u)^2(u-z)(-1+z)^2\Big).\end{aligned}$$

Nyní získáme část generující funkce pro $w=1$, označme ji $P(w=1)$, jednoduše vysčítáním $q_A(r(\lambda))x^\lambda$ přes všechny kladné váhy λ. Označíme $x^{\omega_1^\beta}\equiv x$ a $x^{\omega_2^\beta}\equiv y$, tj. $x^\lambda = x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}$ pro $\lambda=\lambda_1\omega_1^\beta+\lambda_2\omega_2^\beta$.

$$\begin{aligned}P(w=1) &= \sum_{\lambda\in\Lambda(G_2)} q_A(r(\lambda))x^\lambda = \\ &= \sum_{\lambda_1,\lambda_2=0}^{\infty}\Big[\text{suma podle I) + suma podle II)}\Big]x^{\lambda_1}y^{\lambda_2} = \\ &= \Big(1-xy-2uxy+ux^2y+uxy^2+xz-x^2z-2ux^2z+ux^3z-\\ &-3xyz-3uxyz+2x^2yz+6ux^2yz+2u^2x^2yz-2ux^3yz-\\ &-u^2x^3yz+xy^2z+3uxy^2z-2ux^2y^2z-u^2x^2y^2z-uxy^3z-x^2z^2-\\ &-ux^2z^2+ux^3z^2-2xyz^2-uxyz^2+3x^2yz^2+6ux^2yz^2+u^2x^2yz^2-\\ &-3ux^3yz^2-u^2x^3yz^2+xy^2z^2+2uxy^2z^2-x^2y^2z^2-4ux^2y^2z^2-\\ &-2u^2x^2y^2z^2+u^2x^4y^2z^2-uxy^3z^2+ux^2y^3z^2+u^2x^2y^3z^2+ux^3z^3+\\ &+x^2yz^3+2ux^2yz^3-3ux^3yz^3-u^2x^3yz^3-ux^2y^2z^3-x^3y^2z^3-\\ &-ux^3y^2z^3-u^2x^3y^2z^3+ux^4y^2z^3+2u^2x^4y^2z^3+ux^3y^3z^3+\\ &+u^2x^3y^3z^3-u^2x^4y^3z^3-ux^3yz^4+ux^4y^2z^4+2u^2x^4y^2z^4-\\ &-u^2x^5y^2z^4-u^2x^4y^3z^4\Big)\Big/\Big((-1+x)^2(-1+ux)(-1+y)^2\\ &(-1+uy)(-1+xz)(-1+uxz)(-1+yz)(-1+xz^2)\Big).\end{aligned}$$

B) Zvolme $w = r_1$ zrcadlení odpovídající kořenu β_1. Označme

$$P(w = s_1) = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(G_2)} q_A[r(r_1(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})]x^\lambda.$$

Nejdříve spočítejme $q_A[r(r_1(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})]$, k tomu potřebujeme znát, jak působí r_1 na fundamentální váhy ω_1^β a ω_2^β.

$$r_1(\omega_1^\beta) = -\omega_1^\beta + 3\omega_2^\beta, \quad r_1(\omega_2^\beta) = \omega_2^\beta.$$

$$\begin{aligned}
&r_1(\lambda + \delta_{G_2}) = r_1((\lambda_1 + 1)\omega_1^\beta + (\lambda_2 + 1)\omega_2^\beta) = (-\lambda_1 - 1)\omega_1^\beta + (3\lambda_1 + \lambda_2 + 4)\omega_2^\beta,\\
&r(r_1(\lambda + \delta_{G_2})) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2)\gamma_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + 3)\gamma_2,\\
&r(\delta_{G_2}) = 3\gamma_1 + \gamma_2.
\end{aligned}$$

Nyní je podle vzorce (3.3) třeba spočítat $q_A[r(r_1(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})]$.

$$\begin{aligned}
&q_A[r(r_1(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})] = \sum_{\mu \in \Lambda^+(A_2)} p_A[r(r_1(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2}) - \mu]z^\mu = \\
&= \sum_{\mu_1, \mu_2 \geq 0} p_A[(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2 - 1)\gamma_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 + 1)\gamma_2]z^{\mu_1}u^{\mu_2}.
\end{aligned}$$

Podle poznámky 3.1.1 Konstantovu partiční funkci snadno odvodíme. Pro $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{N}_0$ vždy platí, že

$$2\lambda_1 + \lambda_2 + 1 - \mu_2 \geq \lambda_1 + \lambda_2 - 1 - \mu_1 - \mu_2,$$

tudíž $p_A = \lambda_1 + \lambda_2 - 1 - \mu_1 - \mu_2 + 1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2$. Dále musí platit $\lambda_1 + \lambda_2 - 1 - \mu_1 - \mu_2 \geq 0$, tím obdržíme nerovnost $\lambda_1 + \lambda_2 - 1 - \mu_1 \geq \mu_2$ a dále vzhledem k oboru v jakém řešení hledáme musí platit $\lambda_1 + \lambda_2 - 1 \geq \mu_1$. Tudíž

$$\begin{aligned}
&q_A[r(r_1(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})] = \sum_{\mu_1=0}^{\lambda_1+\lambda_2-1} \sum_{\mu_2=0}^{\lambda_1+\lambda_2-1-\mu_1} (\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2)z^{\mu_1}u^{\mu_2} = \\
&= \Big(\lambda_1 u + \lambda_2 u - u^2 - \lambda_1 u^2 - \lambda_2 u^2 + u^{2+\lambda_1+\lambda_2} - \lambda_1 z - \lambda_2 z + 2u^2 z + \lambda_1 u^2 z + \\
&+\lambda_2 u^2 z - 2u^{2+\lambda_1+\lambda_2} z + \lambda_1 z^2 + \lambda_2 z^2 - 2uz^2 - \lambda_1 uz^2 - \lambda_2 uz^2 - z^{2+\lambda_1+\lambda_2} + \\
&+z^2 + u^{2+\lambda_1+\lambda_2} z^2 + 2uz^{2+\lambda_1+\lambda_2} - u^2 z^{2+\lambda_1+\lambda_2}\Big) \Big/ \Big((u-1)^2(u-z)(z-1)^2\Big).
\end{aligned}$$

Nyní vysčítáním přes všechny váhy $\lambda \in \Lambda^+(G_2)$ obdržíme generující funkci $P(w = r_1)$, musíme si nicméně uvědomit, že z předchozího musí platit $\lambda_1 + \lambda_2 - 1 \geq 0$, tudíž sumu přes λ rozdělíme na dva případy:

I) $\lambda_1 \geq 1,\ \lambda_2 \geq 0$,

II) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \geq 1$.

$$
\begin{aligned}
P(w = r_1) &= \sum_{\lambda \in \Lambda^+(G_2)} q_A[r(r_1(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})]x^{\lambda} = \\
&= \underbrace{\sum_{\lambda_1=1}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} q_A[r(r_1(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})]x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} +}_{\text{suma I)}} \\
&\quad \underbrace{+ \sum_{\lambda_2=1}^{\infty} q_A[r(r_1(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})]\Big|_{\lambda_1=0} y^{\lambda_2}}_{\text{suma II)}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{suma I)} &= \Big(x - x^2y - 2ux^2y + ux^3y + ux^2y^2 - 2x^2yz - ux^2yz + x^3yz + \\
&\quad +2ux^3yz - ux^4yz + x^2y^2z + 2ux^2y^2z - ux^3y^2z - ux^2y^3z\Big)\Big/ \\
&\quad \Big((x-1)^2(-1+ux)(y-1)^2(-1+uy)(-1+xz)(-1+yz)\Big). \\
\text{suma II)} &= y\Big/\Big((y-1)^2(-1+uy)(-1+yz)\Big).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(w = r_1) = \text{suma I)} + \text{suma II)} = \\
&= \Big(x + y - 2xy - uxy + ux^2y^2 - xyz + x^2y^2z + 2ux^2y^2z - ux^3y^2z - \\
&-ux^2y^3z\Big)\Big/\Big((-1+x)^2(-1+ux)(-1+y)^2(-1+uy)(-1+xz)(-1+yz)\Big).
\end{aligned}
$$

C) Pokračujme se zrcadlením $w = r_2$ odpovídajícím kořenu β_2. Budeme počítat

$$P(w = r_2) = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(G_2)} q_A[r(r_2(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})]x^{\lambda}.$$

Zrcadlení r_2 působí ve váhovém systému

$$r_2(\omega_1^{\beta}) = \omega_1^{\beta}, \quad r_2(\omega_2^{\beta}) = \omega_1^{\beta} - \omega_2^{\beta}.$$

$$
\begin{aligned}
r_2(\lambda+\delta_{G_2}) &= r_2[(\lambda_1+1)\omega_1^\beta+(\lambda_2+1)\omega_2^\beta]=(\lambda_1+1)\omega_1^\beta+(\lambda_2+1)\omega_1^\beta- \\
&\quad -(\lambda_2+1)\omega_2^\beta=(\lambda_1+\lambda_2+2)\omega_1^\beta-(\lambda_2+1)\omega_2^\beta, \\
r(r_2(\lambda+\delta_{G_2})) &= (2\lambda_1+\lambda_2+3)\gamma_1+(\lambda_1+1)\gamma_2, \\
r(\delta_{G_2}) &= 3\gamma_1+\gamma_2.
\end{aligned}
$$

Potom

$$
q_A[r(r_2(\lambda+\delta_{G_2}))-r(\delta_{G_2})]=\sum_{\mu\in\Lambda^+(A_2)} p_A[r(r_2(\lambda+\delta_{G_2}))-r(\delta_{G_2})-\mu]z^\mu=
$$
$$
=\sum_{\mu_1,\mu_2\geq 0} p_A[(2\lambda_1+\lambda_2-\mu_1-\mu_2)\gamma_1+(\lambda_1-\mu_2-1)\gamma_2]z^{\mu_1}u^{\mu_2}.
$$

Konstantovu partiční funkci potom spočítáme opět podle poznámky 3.1.1. Jestliže $2\lambda_1+\lambda_2-\mu_1-\mu_2\geq\lambda_1-\mu_2-1\geq 0$, tj. $2\lambda_1+\lambda_2+1\geq\mu_1$ a $\lambda_1-1\geq\mu_2$, potom $p_A=\lambda_1-\mu_2$. Jestliže naopak $0\leq 2\lambda_1+\lambda_2-\mu_1-\mu_2<\lambda_1-\mu_2-1$, tj. $2\lambda_1+\lambda_2+1<\mu_1$ a $\mu_2\leq 2\lambda_1+\lambda_2-\mu_1$, potom $p_A=2\lambda_1+\lambda_2-\mu_1-\mu_2+1$.

Dostáváme tedy

$$
q_A[r(r_2(\lambda+\delta_{G_2}))-r(\delta_{G_2})]=\sum_{\mu_1=0}^{\lambda_1+\lambda_2+1}\sum_{\mu_2=0}^{\lambda_1-1}(\lambda_1-\mu_2)z^{\mu_1}u^{\mu_2}+
$$
$$
+\sum_{\mu=\lambda_1+\lambda_2+2}^{2\lambda_1+\lambda_2}\sum_{\mu_2=0}^{2\lambda_1+\lambda_2-\mu_1}(2\lambda_1+\lambda_2-\mu_1-\mu_2+1)z^{\mu_1}u^{\mu_2}=
$$
$$
\begin{aligned}
&=\Big(\lambda_1 u-u^2-\lambda_1 u^2+u^{2+\lambda_1}-\lambda_1 z+uz+u^2z+\lambda_1 u^2 z-u^{1+\lambda_1}z-u^{2+\lambda_1}z+ \\
&+\lambda_1 z^2-uz^2-\lambda_1 uz^2+u^{1+\lambda_1}z^2-uz^{2+\lambda_1+\lambda_2}+u^2z^{2+\lambda_1+\lambda_2}+u^{1+\lambda_1}z^{2+\lambda_1+\lambda_2}- \\
&-u^{2+\lambda_1}z^{2+\lambda_1+\lambda_2}+z^{3+\lambda_1+\lambda_2}-uz^{3+\lambda_1+\lambda_2}-u^{1+\lambda_1}z^{3+\lambda_1+\lambda_2}+u^{2+\lambda_1}z^{3+\lambda_1+\lambda_2}- \\
&-z^{3+2\lambda_1+\lambda_2}+2uz^{3+2\lambda_1+\lambda_2}-u^2z^{3+2\lambda_1+\lambda_2}\Big)\Big/\Big((-1+u)^2(u-z)(-1+z)^2\Big).
\end{aligned}
$$

Nyní sečteme funkci q_A přes váhy $\lambda\in\Lambda^+(G_2)$, z podmínky $\lambda_1-\mu_2-1\geq 0$ plyne $\lambda_1\geq 1$.

$$
P(w=r_2)=\sum_{\lambda_1=1}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}q_A[r(r_2(\lambda+\delta_{G_2}))-r(\delta_{G_2})]x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}=
$$
$$
\begin{aligned}
&=\Big(x+xz-x^2z-ux^2z-xyz+xz^2-2x^2z^2-ux^2z^2+ux^3z^2-xyz^2+ \\
&+x^2yz^2+ux^2yz^2+ux^4z^3+x^3yz^3+ux^3yz^3-ux^4yz^3-ux^4yz^4\Big)\Big/ \\
&\Big((1-x)^2(-1+ux)(-1+y)(-1+xz)(-1+uxz)(-1+yz)(-1+xz^2)\Big).
\end{aligned}
$$

D) Z nenulových případů už zbývá jenom $w = r_1 \circ r_2$. Analogicky předchozím případům budeme počítat

$$P(w = r_1 \circ r_2) = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(G_2)} q_A[r(r_1 \circ r_2(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})]x^\lambda.$$

$$r_1 \circ r_2(\omega_1^\beta) = -\omega_1^\beta + 3\omega_2^\beta, \quad r_1 \circ r_2(\omega_2^\beta) = -\omega_1^\beta + 2\omega_2^\beta.$$

$$\begin{aligned} r_1 \circ r_2(\lambda + \delta_{G_2}) &= r_1 \circ r_2[(\lambda_1 + 1)\omega_1^\beta + (\lambda_2 + 1)\omega_2^\beta] = \\ &= (-\lambda_1 - \lambda_2 - 2)\omega_1^\beta + (3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5)\omega_1^\beta, \\ r(r_1 \circ r_2(\lambda + \delta_{G_2})) &= (\lambda_1 + 1)\gamma_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + 3)\gamma_2. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} &q_A[r(r_1 \circ r_2(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})] = \\ &= \sum_{\mu_1, \mu_2 \geq 0} p_A[(\lambda_1 - \mu_1 - \mu_2 - 2)\gamma_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 + 1)\gamma_2] z^{\mu_1} u^{\mu_2}. \end{aligned}$$

Pro $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{N}_0$ vždy platí, že $\lambda_1 - \mu_1 - \mu_2 - 2 \leq 2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 + 1$, proto podle poznámky 3.1.1 platí $p_A = \lambda_1 - \mu_1 - \mu_2 - 1$. Protože musí platit $0 \leq \lambda_1 - \mu_1 - \mu_2 - 2$, dostáváme $\mu_2 \leq \lambda_1 - \mu_1 - 2$ a $\mu_1 \leq \lambda_1 - 2$. Potom

$$\begin{aligned} &q_A[r(r_1 \circ r_2(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})] = \sum_{\mu_1=0}^{\lambda_1-2} \sum_{\mu_2=0}^{\lambda_1-\mu_1-2} (\lambda_1 - \mu_1 - \mu_2 - 1) z^{\mu_1} u^{\mu_2} = \\ &= \Big(u^{1+\lambda_1}(-1+z)^2 + z(1 - \lambda_1 + \lambda_1 z - z^{\lambda_1}) - u(1 + z^2 - 2z^{1+\lambda_1}) + \lambda_1 u - \\ &- \lambda_1 u z^2 + u^2(-\lambda_1 + \lambda_1 z + z - z^{\lambda_1+1})\Big) \Big/ \Big((-1+u)^2(u-z)(-1+z)^2\Big). \end{aligned}$$

Zbývá spočítat $P(w = r_1 \circ r_2)$. Z podmínky $0 \leq \lambda_1 - \mu_1 - \mu_2 - 2$ plyne $2 \leq \lambda_1$. Potom

$$\begin{aligned} P(w = r_1 \circ r_2) &= \sum_{\lambda_1=2}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} q_A[r(r_1 \circ r_2(\lambda + \delta_{G_2})) - r(\delta_{G_2})] x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} = \\ &= \frac{x^2}{(1-x)^2(1-ux)(1-y)(1-xz)}. \end{aligned}$$

Pro všechny ostatní prvky Weylovy grupy jsou členy $P(w)$ nulové.

Podle vzorce (3.4) je generující funkce

$$\begin{aligned} P_{G_2 \downarrow A_2} &= P(w=1) - P(w=r_1) - P(w=r_2) + P(w=r_1 \circ r_2) = \\ &= \frac{1-xyzu}{(1-xu)(1-y)(1-yu)(1-xz)(1-xzu)(1-yz)}. \end{aligned}$$

Jestliže rozvineme generující funkci $P_{G_2 \downarrow A_2}$ do řady, potom koeficient u $x^{\lambda_1} y^{\lambda_2}$, který označíme $q(\lambda_1, \lambda_2)$, se spočte podle jednoduché rekurze:

$$q(\lambda_1,\lambda_2) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\lambda_2} \sum_{l=0}^{\lambda_2-k} z^k u^l, & \text{jestliže } \lambda_1 = 0, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\lambda_1} \sum_{l=0}^{\lambda_1-k} z^{\lambda_1-k} u^{k+l}, & \text{jestliže } \lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \\ q(\lambda_1,0)q(0,\lambda_2) - zuq(\lambda_1-1,0)q(0,\lambda_2-1), & \text{jestliže } \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Koeficient $q(\lambda_1, \lambda_2)$ je polynom v z a u, přítomnost členu $z^k u^l$ indikuje přítomnost reprezentace A_2 s nejvyšší vahou $k\omega_1^\alpha + l\omega_2^\alpha$ v restrikci reprezentace G_2 s nejvyšší vahou $\lambda_1\omega_1^\alpha + \lambda_2\omega_2^\alpha$.

Příklad 3.1.2. Spočítejme restrikci reprezentace s nejvyšší vahou $\omega_1^\beta + \omega_2^\beta$, tj. reprezentace $V(1,1)$ podle značení 1.2.8, algebry G_2 vzhledem k podalgebře A_2. Tato restrikce je určena koeficientem $q(1,1)$. Platí, že $q(1,1) = q(1,0)q(0,1) - zuq(0,0)q(0,0)$, $q(1,0) = 1 + z + u$, $q(0,1) = z + u + zu$ a $q(0,0) = 1$. Potom

$$q(1,1) = (1+z+u)(z+u+zu) - zu = z + u + 2zu + z^2 + u^2 + zu^2 + z^2u.$$

Takže restrikce reprezentace $V(1,1)$ algebry G_2 se rozkládá na následující reprezentace algebry A_2

$$V(1,1) = V(1,0) \oplus V(0,1) \oplus 2V(1,1) \oplus V(2,0) \oplus V(0,2) \oplus V(1,2) \oplus V(2,1),$$

kde na pravé straně se už jedná o ireducibilní reprezentace A_2. Výraz $2V(1,1)$ znamená $V(1,1) \oplus V(1,1)$, což je intuitivní.

Rekurze (3.5) tedy poskytuje velice rychlý, jednoduchý a účinný algoritmus pro výpočet branchingu algeber $G_2 \supset A_2$. Podstatné je, že implementace tohoto algoritmu bude velice jednoduchý programátorský úkol, neboť se jedná pouze o násobení a odčítání polynomů ve dvou proměnných.

Kapitola 4

Generující funkce pro rozklad tenzorových součinů reprezentací

Velmi důležitou otázkou v teorii reprezentací Lieových algeber případně grup je, jak se rozkládá tenzorový součin dvou reprezentací. Tenzorové součiny a jejich rozklady jsou důležitým nástrojem při popisu celé řady problémů kvantové mechaniky. Nicméně se ukazuje, že se jedná o problém netriviální, kolem jehož řešení se rozvinula velká a složitá teorie, viz [5].

Navíc všechny algoritmy jsou koncipované tak, že vždy rozkládají tenzorový součin pouze dvou reprezentací. Nicméně, jestliže použijeme generující funkce, budeme schopni řešit rozklady tenzorových součinů všech možných reprezentací najednou.

Buď $\mathfrak{a}$ poloprostá Lieova algebra. Ireducibilní konečnědimenzionální reprezentace $\mathfrak{a}$ jsou právě ty, jež jsou generovány nejvyšší vahou $\lambda \in \Lambda^+$, podle poznámky 1.2.8 je značíme $V(\lambda)$.

Podle věty 1.2.4 je každá reprezentace poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{a}$ úplně reducibilní. To znamená, že libovolný tenzorový součin reprezentací lze rozložit na direktní sumu ireducibilních reprezentací. Buďte $\lambda,\ \mu \in \Lambda^+$, potom

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) = \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} m^{\nu}_{\lambda,\mu} V(\nu), \tag{4.1}$$

kde koeficienty $m^{\nu}_{\lambda,\mu}$ určují násobnost reprezentace $V(\nu)$ v tenzorovém součinu reprezentací $V(\lambda) \otimes V(\mu)$; násobnosti $m^{\nu}_{\lambda,\mu}$ jsou někdy nazývány jako *Littlewood-Richardsonovy koeficienty*. Je očividné, že reprezentace $V(\nu)$ je komponentou tenzorového součinu $V(\lambda) \otimes V(\mu)$, jestliže $m^{\nu}_{\lambda,\mu} > 0$.

Případ rozkladu tenzorového součinu reprezentací algebry $\mathfrak{a}$ lze chápat jako branching pro $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}$. Označme jako

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \simeq \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \middle| X_1, X_2 \in \mathfrak{a} \right\}. \tag{4.2}$$

Podalgebru $\mathfrak{a}$ vnoříme do $\mathfrak{g}$ diagonálně, tj. označíme

$$\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{g}' = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \middle| X \in \mathfrak{a} \right\}. \tag{4.3}$$

Budeme tedy počítat branching pro $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}'$ podle algoritmu popsaném v [2], tj. postup bude stejný jako v minulé kapitole.

4.1 Generující funkce pro rozklad tenzorového součinu reprezentací SU(2)

Jestliže za bázi $\mathfrak{su}(2)$ zvolíme $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$, kde σ_j jsou Pauliho matice, potom báze Cartanovy podalgebry $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ je množina

$$\left(\begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} \right).$$

Kořeny v duální bázi pak označíme jako $\alpha_1 = (1,0)$ a $\alpha_2 = (0,1)$. Kořenový systém $\mathfrak{g}$ je tedy $\Delta(\mathfrak{g}) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2\}$.

Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$ je naproti tomu lineárním obalem vektoru

$$\begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Kořenový systém $\mathfrak{g}'$ je potom $\Delta(\mathfrak{g}') = \{\pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}$.

Podle algoritmu navrženém v [2] a popsaném v kapitole 1.3, musíme nyní zkonstruovat restrikční zobrazení $r : \Lambda(\mathfrak{g}) \mapsto \Lambda(\mathfrak{g}')$. Budeme uvažovat přirozenou projekci $\pi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}'$, která je identická na $\mathfrak{g}'$, tudíž je identická i na Cartanově podalgebře $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$. Restrikční zobrazení duálních prostorů $r : \mathfrak{h}^* \mapsto \mathfrak{h}'^*$ definujeme vztahem

$$r(\rho) = \rho \circ \pi \quad \text{pro } \rho \in \mathfrak{h}^*. \tag{4.4}$$

Vypočteme, že

$$r(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad r(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Potom podle kapitoly 1.3 je parabolický kořenový systém $\Phi = \{\}$, tudíž $\Phi^+ = \{\}$ a $W(\Phi) = \{1\}$.

Faktorizovaná Weylova grupa je rovna

$$W = W(\mathfrak{g})/W(\Phi) = W(\mathfrak{g}) = \{1, r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, r_{\alpha_1+\alpha_2}\}.$$

Dále množina $A = r(\Delta^+(\mathfrak{g})) - \{0\} = \{\alpha_1 + \alpha_2\}$. Příslušná multiplicita je $m_{\alpha_1+\alpha_2} = 1$. Konstantova mřížka je potom $L = \{m(\alpha_1+\alpha_2) | m \in \mathbb{N}_0\}$, Konstantova funkce je potom

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{m=0}^{\infty} p_A(m) z^m,$$

tj.

$$p_A(m) = 1 \quad \text{pro } m \in \mathbb{N}_0.$$

Weylův dimenzionální polynom je pro všechny váhy $\lambda \in \Lambda^+(\mathfrak{g})$ roven $D(\lambda) = 1$, protože množina Φ^+ je prázdná.

Podle vzorců (1.9) a (3.1) spočteme generující funkci jako

$$P_{\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{g}'} = \sum_{w\in W} \det(w) \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda^+(\mathfrak{g})\\ \mu\in\Lambda^+(\mathfrak{g}')}} D(w(\lambda+\delta_{\mathfrak{g}}))p_A[r(w(\lambda+\delta_{\mathfrak{g}})) - (\mu + r(\delta_{\mathfrak{g}}))]z^\lambda y^\mu. \quad (4.5)$$

Protože $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$, fundamentální váhy jsou na sebe kolmé a označíme je ω_1 a ω_2. Fundamentální váhu $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{su}(2)$ označíme ω'. Použijeme následující značení $z^{\omega_1} \equiv A$ a $z^{\omega_2} \equiv B$, potom pro váhu $\lambda = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ algebry $\mathfrak{g}$ platí $z^\lambda \equiv A^{\lambda_1}B^{\lambda_2}$. Dále označíme $y^{\omega'} \equiv x$, potom pro váhu $\mu = \mu'\omega'$ algebry $\mathfrak{g}'$ platí $y^\mu \equiv x^{\mu'}$. Generující funkci dostaneme jako součet čtyř sčítanců $P(w)$, $w \in W$.

První sčítanec pro $w = 1$ je

$$\begin{aligned}
P(w=1) = &\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\mu'=0}^{\infty} p_A\left[\frac{(\lambda_1+1)+(\lambda_2+1)-(\mu'+2)}{2}\right] A^{\lambda_1}B^{\lambda_2}x^{\mu'} = \\
= &\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\mu'=0}^{\infty} p_A\left[\frac{\lambda_1+\lambda_2-\mu'}{2}\right] A^{\lambda_1}B^{\lambda_2}x^{\mu'} = \left\{\begin{matrix}\text{rozpadne se na čtyři sčítance podle}\\ \text{sudosti a lichosti členů v Konstantově funkci}\end{matrix}\right\} = \\
= &\sum_{m,n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m+n} A^{2m}B^{2n}x^{2k} + \sum_{m,n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m+n} A^{2m+1}B^{2n}x^{2k+1} + \\
+ &\sum_{m,n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m+n} A^{2m}B^{2n+1}x^{2k+1} + \sum_{m,n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m+n+1} A^{2m+1}B^{2n+1}x^{2k} = \\
= &\frac{1-A^2B^2x^2}{(A^2-1)(B^2-1)(A^2x^2-1)(B^2x^2-1)} +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{A(B+Bx^2-A^2Bx^2-B^3x^2)}{(A^2-1)(B^2-1)(A^2x^2-1)(B^2x^2-1)}+\\
&+\frac{A(x-A^2B^2x^3)}{(A^2-1)(B^2-1)(A^2x^2-1)(B^2x^2-1)}+\\
&+\frac{Bx-A^2B^3x^3}{(A^2-1)(B^2-1)(A^2x^2-1)(B^2x^2-1)}=\\
&=\frac{1+AB-A^2Bx-AB^2x}{(A^2-1)(B^2-1)(1-Ax)(1-Bx)}.
\end{aligned}
$$

Jestliže zvolíme $w = r_{\alpha_1}$, sčítáme sumu

$$
\begin{aligned}
P(w=r_{\alpha_1}) &= \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\mu'=0}^{\infty} p_A\left[\frac{(\lambda_1+1)-(\lambda_2+1)-(\mu'+2)}{2}\right]A^{\lambda_1}B^{\lambda_2}x^{\mu'}=\\
&=\sum_{\lambda_1=2}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\lambda_1-2}\sum_{\mu'=0}^{\lambda_1-\lambda_2-2} p_A\left[\frac{\lambda_1-\lambda_2-\mu'-2}{2}\right]A^{\lambda_1}B^{\lambda_2}x^{\mu'}=\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-n-1}A^{2m}B^{2n}x^{2k}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{m-2}\sum_{k=0}^{m-n-2}A^{2m}B^{2n+1}x^{2k+1}+\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-n-1}A^{2m+1}B^{2n}x^{2k+1}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-n-1}A^{2m+1}B^{2n+1}x^{2k}=\\
&=\frac{A^2}{(A^2-1)(AB-1)(Ax-1)}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Případ $w = r_{\alpha_2}$ je podobný případu $w = r_{\alpha_1}$, budeme sčítat sumu

$$
\begin{aligned}
P(w=r_{\alpha_2}) &= \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\mu'=0}^{\infty} p_A\left[\frac{-(\lambda_1+1)+(\lambda_2+1)-(\mu'+2)}{2}\right]A^{\lambda_1}B^{\lambda_2}x^{\mu'}=\\
&=\sum_{\lambda_2=2}^{\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_2-2}\sum_{\mu'=0}^{\lambda_2-\lambda_1-2} p_A\left[\frac{\lambda_2-\lambda_1-\mu'-2}{2}\right]B^{\lambda_2}A^{\lambda_1}x^{\mu'},
\end{aligned}
$$

která se od případu $w = r_{\alpha_1}$ liší jen záměnou proměnných A a B. Tj.

$$
P(w=r_{\alpha_2})=\frac{B^2}{(B^2-1)(AB-1)(Bx-1)}.
$$

V případě $w = r_{\alpha_1}\circ r_{\alpha_2}$ je Konstantova funkce identicky rovna nule, neboť

$$
p_A\left[\frac{-(\lambda_1+1)-(\lambda_2+1)-(\mu'+2)}{2}\right]=p_A\left[\frac{-\lambda_1-\lambda_2-\mu'-2}{2}\right]\equiv 0.
$$

Potom generující funkce je rovna součtu přes Weylovu grupu

$$\begin{aligned} P_{\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{g}'} &= P(w=1) - P(w=r_{\alpha_1}) - P(w=r_{\alpha_2}) + P(w=r_{\alpha_1}\circ r_{\alpha_2}) = \\ &= \frac{1}{(AB-1)(Ax-1)(Bx-1)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Obdrželi jsme generující funkci pro rozklad tenzorových součinů reprezentací algebry $\mathfrak{su}(2)$. Jestliže ji rozvineme do řady, tj.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1-Ax)(1-AB)(1-Bx)} = 1 + Ax + Bx + AB(1+x^2) + A^2B(x+x^3) + \\ &+AB^2(x+x^3) + A^2B^2(1+x^2+x^4) + \dots, \end{aligned} \tag{4.8}$$

přítomnost členu $A^aB^bx^c$ implikuje, že restrikce reprezentace $\mathfrak{g}$ s nejvyšší vahou $a\omega_1 + b\omega_2$ na podalgebru $\mathfrak{g}'$ obsahuje reprezentaci $\mathfrak{g}'$ s nejvyšší vahou $c\omega'$. Nicméně reprezentace $\mathfrak{g}$ s nejvyšší vahou $a\omega_1 + b\omega_2$ je tenzorovým součinem reprezentací algebry $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{g}'$ s nejvyššími vahami $a\omega'$ a $b\omega'$. Podle poznámky 1.2.8 to můžeme zapsat jako $V(a) \otimes V(b) \supset V(c)$.

Člen $A^2B^2(1+x^2+x^4)$ například implikuje, že tenzorový součin reprezentací s nejvyššími vahami 2ω a 2ω (členy A^2 a B^2) se rozkládá jako

$$V(2) \otimes V(2) = V(0) \oplus V(2) \oplus V(4),$$

tj. na reprezentaci s nejvyšší vahou 0 (člen 1), $2\omega'$ (člen x^2) a $4\omega'$ (člen x^4).

V případě $\mathfrak{su}(2)$ lze interpretovat tento rozklad ještě názorněji, neboť reprezentace s nejvyšší vahou $m\omega'$ má dimenzi $m+1$. Takže člen $A^2B^2(1+x^2+x^4)$ implikuje, že tenzorový součin dvou třídimenzionálních reprezentací (členy A^2 a B^2) se rozkládá na jednu jednodimenzionální (člen 1), jednu třídimenzionální (člen x^2) a jednu pětidimenzionální (člen x^4) reprezentaci.

4.2 Generující funkce pro rozklad tenzorového součinu reprezentací SU(3)

Budeme postupovat stejně jako v podkapitole 4.1. Cartanova matice pro $\mathfrak{su}(3)$ je rovna

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opět označíme

$$\mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{su}(3) \simeq \mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{array} \right) \Big| x_1, x_2 \in \mathfrak{su}(3) \right\}$$

a diagonálně vnořenou $\mathfrak{su}(3)$ označíme jako

$$\mathfrak{su}(3) \simeq \mathfrak{g}' = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x & 0 \\ 0 & x \end{array} \right) \Big| x \in \mathfrak{su}(3) \right\}.$$

Cartanovy podalgebry označíme $\mathfrak{h}$ pro $\mathfrak{g}$ resp. $\mathfrak{h}'$ pro $\mathfrak{g}'$.

Kořenový systém algebry $\mathfrak{g}$ bude sjednocením dvou kořenových systémů $\mathfrak{su}(3)$, tj.

$$\Delta(\mathfrak{g}) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm\alpha'_1, \pm\alpha'_2, \pm(\alpha'_1 + \alpha'_2)\},$$

kladné kořeny potom jsou

$$\Delta^+(\mathfrak{g}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_1 + \alpha'_2\}.$$

Kořeny podalgebry $\mathfrak{g}'$ jsou

$$\Delta(\mathfrak{g}') = \{\pm(\alpha_1 + \alpha'_1), \pm(\alpha_2 + \alpha'_2), \pm(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha'_1 + \alpha'_2)\}.$$

Restrikční zobrazení $r : \Lambda(\mathfrak{g}) \to \Lambda(\mathfrak{g}')$ je

$$r(\alpha_1) = r(\alpha'_1) = \alpha_1 + \alpha'_1, \quad r(\alpha_2) = r(\alpha'_2) = \alpha_2 + \alpha'_2.$$

Příslušný parabolický kořenový systém je

$$\Phi = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}) | \, r(\alpha) = 0\} = \{\}, \quad \Phi^+ = \{\}.$$

Weylova grupa generovaná Φ je triviální, tj. $W(\Phi) = \{1\}$. Potom $W = W(\mathfrak{g})/W(\Phi) = W(\mathfrak{g})$, tj. $|W| = 3!^2 = 36$.

Konstantova množina $A = r(\Delta^+(\mathfrak{g})) - \{0\} = \{\alpha_1 + \alpha'_1, \alpha_2 + \alpha'_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha'_1 + \alpha'_2\}$. Příslušné multiplicity jsou

$$\begin{aligned} m_{\alpha_1+\alpha'_1} &= |\{\alpha_1, \alpha'_1\}| = 2 - 1 = 1, \\ m_{\alpha_2+\alpha'_2} &= |\{\alpha_2, \alpha'_2\}| = 2 - 1 = 1, \\ m_{\alpha_1+\alpha'_1+\alpha_2+\alpha'_2} &= |\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha'_1 + \alpha'_2\}| = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Potom Konstantova mřížka je $L = \{a(\alpha_1 + \alpha'_1) + b(\alpha_2 + \alpha'_2) | a, b \in \mathbb{N}_0\}$.

Jestliže označíme $z_1 = z^{\alpha_1+\alpha_1'}$ a $z_2 = z^{\alpha_2+\alpha_2'}$, potom Konstantovo rozdělení je definováno jako

$$\frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)(1-z_1z_2)} = \sum_{a,b=0}^{\infty} p_A\left[a(\alpha_1+\alpha_1') + b(\alpha_2+\alpha_2')\right] z_1^a z_2^b,$$

tj. $p_A[a(\alpha_1+\alpha_1') + b(\alpha_2+\alpha_2')] = \min\{a+1, b+1\}$ pro $a, b \in \mathbb{N}_0$.

Weylův dimenzionální polynom je pro všechny váhy $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{g})$ triviálně roven jedné, neboť $\Phi^+ = \{\}$, tj. $D(\lambda) \equiv 1$.

Potom generující funkce je rovna součtu 36 sčítanců, tedy

$$P_{\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{g}'} = \sum_{w\in W} \det(w) \sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\\ \lambda_2',\mu_1,\mu_2=0}}^{\infty} p_A[r(w(\lambda+\delta_{\mathfrak{g}})) - (\mu + r(\delta_{\mathfrak{g}}))] A^{\lambda_1} B^{\lambda_2} R^{\lambda_1'} S^{\lambda_2'} x^{\mu_1} y^{\mu_2}.$$

Pro zjednodušení budeme dále místo $p_A[a(\alpha_1+\alpha_1') + b(\alpha_2+\alpha_2')]$ psát $p_A[a,b]$.

$$\begin{aligned}
&P_{\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{g}'} = \\
&= \sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\\ \lambda_2',\mu_1,\mu_2=0}}^{\infty} \Bigg(p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_1-3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-12), \frac{1}{3}(-3\lambda_1'-3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-12)\right] + \\
&\quad + p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_1-3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-12), \frac{1}{3}(3\lambda_1'-\mu_1-2\mu_2-3)\right] + \\
&\quad + p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_1-3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-12), \frac{1}{3}(3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-3)\right] - \\
&\quad - p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_1-3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-12), \frac{1}{3}(-3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-9)\right] - \\
&\quad - p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_1-3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-12), \frac{1}{3}(3\lambda_1'+3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2)\right] - \\
&\quad - p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_1-3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-12), \frac{1}{3}(-3\lambda_1'-\mu_1-2\mu_2-9)\right] + \\
&\quad + p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_1-2\mu_1-\mu_2-3), \frac{1}{3}(-3\lambda_1'-3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-12)\right] + \\
&\quad + p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_1-2\mu_1-\mu_2-3), \frac{1}{3}(3\lambda_1'-\mu_1-2\mu_2-3)\right] + \\
&\quad + p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_1-2\mu_1-\mu_2-3), \frac{1}{3}(3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-3)\right] + \\
&\quad - p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_1-2\mu_1-\mu_2-3), \frac{1}{3}(-3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-9)\right] -
\end{aligned}$$

$$-\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_1-2\mu_1-\mu_2-3),\frac{1}{3}(3\lambda_1'+3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2)\right]-$$
$$-\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_1-2\mu_1-\mu_2-3),\frac{1}{3}(-3\lambda_1'-\mu_1-2\mu_2-9)\right]+$$
$$+\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-3),\frac{1}{3}(-3\lambda_1'-3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-12)\right]+$$
$$+\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-3),\frac{1}{3}(3\lambda_1'-\mu_1-2\mu_2-3)\right]+$$
$$+\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-3),\frac{1}{3}(3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-3)\right]-$$
$$-\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-3),\frac{1}{3}(-3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-9)\right]-$$
$$-\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-3),\frac{1}{3}(3\lambda_1'+3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2)\right]-$$
$$-\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-3),\frac{1}{3}(-3\lambda_1'-\mu_1-2\mu_2-9)\right]-$$
$$-\,p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-9),\frac{1}{3}(-3\lambda_1'-3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-12)\right]-$$
$$-\,p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-9),\frac{1}{3}(3\lambda_1'-\mu_1-2\mu_2-3)\right]-$$
$$-\,p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-9),\frac{1}{3}(-3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-3)\right]+$$
$$+\,p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-9),\frac{1}{3}(-3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-9)\right]+$$
$$+\,p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-9),\frac{1}{3}(3\lambda_1'+3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2)\right]+$$
$$+\,p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2-9),\frac{1}{3}(-3\lambda_1'-\mu_1-2\mu_2-9)\right]-$$
$$-\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_1+3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2),\frac{1}{3}(-3\lambda_1'-3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-12)\right]-$$
$$-\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_1+3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2),\frac{1}{3}(3\lambda_1'-\mu_1-2\mu_2-3)\right]-$$
$$-\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_1+3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2),\frac{1}{3}(3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-3)\right]+$$
$$+\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_1+3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2),\frac{1}{3}(-3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2-9)\right]+$$
$$+\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_1+3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2),\frac{1}{3}(3\lambda_1'+3\lambda_2'-\mu_1-2\mu_2)\right]+$$
$$+\,p_A\left[\frac{1}{3}(3\lambda_1+3\lambda_2-2\mu_1-\mu_2),\frac{1}{3}(-3\lambda_1'-\mu_1-2\mu_2-9)\right]-$$

$$
\begin{aligned}
&- p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_1 - 2\mu_1 - \mu_2 - 9), \frac{1}{3}(-3\lambda_1' - 3\lambda_2' - \mu_1 - 2\mu_2 - 12)\right] - \\
&- p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_1 - 2\mu_1 - \mu_2 - 9), \frac{1}{3}(3\lambda_1' - \mu_1 - 2\mu_2 - 3)\right] - \\
&- p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_1 - 2\mu_1 - \mu_2 - 9), \frac{1}{3}(3\lambda_2' - \mu_1 - 2\mu_2 - 3)\right] + \\
&+ p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_1 - 2\mu_1 - \mu_2 - 9), \frac{1}{3}(-3\lambda_2' - \mu_1 - 2\mu_2 - 9)\right] + \\
&+ p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_1 - 2\mu_1 - \mu_2 - 9), \frac{1}{3}(3\lambda_1' + 3\lambda_2' - \mu_1 - 2\mu_2)\right] + \\
&+ p_A\left[\frac{1}{3}(-3\lambda_1 - 2\mu_1 - \mu_2 - 9), \frac{1}{3}(-3\lambda_1' - \mu_1 - 2\mu_2 - 9)\right]\Bigg) A^{\lambda_1} B^{\lambda_2} R^{\lambda_1'} S^{\lambda_2'} x^{\mu_1} y^{\mu_2}.
\end{aligned}
$$

Řada sčítanců bude nulová kvůli Konstantově funkci, čímž se situace značně zjednoduší. Nicméně vysčítat i jediný z členů přes šest celočíselných nezáporných proměnných $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2', \mu_1, \mu_2$, jejichž lineární kombinace určená Konstantovou funkcí musí být navíc dělitelná třemi, je velice složitý problém, který jsme nevyřešili.

Ukazuje se tedy, že tento algoritmus pro odvození generující funkce nelze jednoduše aplikovat na algebry vyšších ranků. Nicméně generující funkci pro rozklad tenzorových součinů $\mathfrak{su}(3)$ jsme obdrželi pomocí jiného přístupu, který popíšeme v následující kapitole a který se jeví daleko účinějším než ten, který jsme použili v této kapitole.

Kapitola 5

Nový algoritmus pro výpočet generující funkce pro rozklad tenzorových součinů reprezentací

V této kapitole popíšeme velice účinný algoritmus pro výpočet generujících funkcí pro rozklad tenzorových součinů reprezentací.

Buď $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra. Ireducibilní konečnědimenzionální reprezentace $\mathfrak{g}$ jsou právě ty, jež jsou generovány nejvyšší vahou $\lambda \in \Lambda^+$, označme je $V(\lambda)$.

Podle věty 1.2.4 je každá reprezentace poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ úplně reducibilní. To znamená, že libovolný tenzorový součin reprezentací lze rozložit na direktní sumu ireducibilních reprezentací. Buďte $\lambda,\ \mu \in \Lambda^+$, potom

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) = \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} m^{\nu}_{\lambda,\mu} V(\nu), \tag{5.1}$$

kde koeficienty $m^{\nu}_{\lambda,\mu}$ určují násobnost reprezentace $V(\nu)$ v tenzorovém součinu reprezentací $V(\lambda) \otimes V(\mu)$. Je očividné, že reprezentace $V(\nu)$ je komponentou tenzorového součinu $V(\lambda) \otimes V(\mu)$, jestliže $m^{\nu}_{\lambda,\mu} > 0$. Pro charaktery příslušných reprezentací platí

$$\chi_\lambda \cdot \chi_\mu = \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} m^{\nu}_{\lambda,\mu} \cdot \chi_\nu. \tag{5.2}$$

Ve vztahu (5.2) můžeme za charaktery na pravé straně dosadit podle Weylovy charakterové formule

$$\chi_\nu = \frac{\sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{w(\nu+\delta)}}{\sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{w(\delta)}}. \tag{5.3}$$

Nicméně každý takovýto charakter je jednoznačně určen nejvyšší vahou ν. Čili celý komplikovaný výraz pro χ_ν na pravé straně (5.2), lze nahradit jednoduchým výrazem

e^{ν} aniž by došlo ke ztrátě informace o přítomnosti reprezentace $V(\nu)$.

Naštěstí výraz e^{ν} lze z charakteru χ_{ν} snadno vyrobit:

1) χ_{ν} vynásobíme svým jmenovatelem, tj. výrazem $\sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{w(\delta)}$,

2) dále χ_{ν} vynásobíme výrazem $e^{-\delta}$,

3) aplikujeme operátor $\mathcal{P}$, který vynuluje u každé Lawrentovy řady všechny koeficienty u jejích prvků se zápornými mocninami, tj.

$$\mathcal{P}\left(\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = -\infty}^{\infty} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}\right) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}.$$

Tento postup můžeme použít, neboť jestliže sčítáme ve Weylově vzorci pro charaktery přes Weylovu grupu, je jasné, že v dominantní Weylově komoře bude ležet pouze váha $w(\lambda)$ pro $w = 1$, koeficienty ostatních vah budou proto vynulovány operátorem $\mathcal{P}$.

Aplikujme tento algoritmus na celý výraz (5.2), obdržíme

$$\mathcal{P}\left[\left(e^{-\delta} \cdot \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{w(\delta)}\right) \cdot \chi_{\lambda} \cdot \chi_{\mu}\right] = \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} m_{\lambda,\mu}^{\nu} \cdot e^{\nu}.$$

Nyní celou rovnici vynásobme výrazem $A^{\lambda} B^{\mu}$ a sečtěme přes všechny reprezentace λ a μ.

$$\sum_{\lambda,\mu \in \Lambda^+} \mathcal{P}\left[\left(e^{-\delta} \cdot \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{w(\delta)}\right) \cdot \chi_{\lambda} \cdot \chi_{\mu}\right] \cdot A^{\lambda} \cdot B^{\mu} = \sum_{\lambda,\mu \in \Lambda^+} \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} m_{\lambda,\mu}^{\nu} \cdot e^{\nu} \cdot A^{\lambda} \cdot B^{\mu}.$$

Výraz na pravé straně je již hledaný racionální výraz. Koeficient $m_{\lambda,\mu}^{\nu}$ určuje násobnost reprezentace $V(\nu)$ v tenzorovém součinu reprezentací $V(\lambda) \otimes V(\mu)$. Levou stranu můžeme ještě upravit pomocí charakterových generátorů

$$\mathcal{P}\left[\left(e^{-\delta} \cdot \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{w(\delta)}\right) \cdot \chi(A) \cdot \chi(B)\right] = \sum_{\lambda,\mu \in \Lambda^+} \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} m_{\lambda,\mu}^{\nu} \cdot e^{\nu} \cdot A^{\lambda} \cdot B^{\mu}. \quad (5.4)$$

Generující funkce pro rozklad tenzorových součinů se tedy získá pomocí aplikace operátoru $\mathcal{P} \circ [e^{-\delta} \cdot \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{w(\delta)}]$ na součin charakterových generátorů $\chi(A) \cdot \chi(B)$, což je racionální funkce ve $3n$ proměnných $A_1, \ldots, A_n, B_1 \ldots, B_n, x_1, \ldots, x_n$, kde $x_i = e^{\omega_i}$, $A_i = A^{\omega_i}$ a $B_i = B^{\omega_i}$.

Poznámka 5.0.1. Význam generující funkce je jasný z pravé strany vztahu (5.4), kde je generující funkce rozvinuta do řady. Přítomnost členu $m_{\lambda,\mu}^{\nu} \cdot e^{\nu} \cdot A^{\lambda} \cdot B^{\mu}$ implikuje, že v tenzorovém součinu reprezentace s nejvyšší vahou λ a reprezentace s nejvyšší vahou μ je přítomna reprezentace s nejvyšší vahou ν s multiplicitou $m^{\nu}_{\lambda,\mu}$.

Poznámka 5.0.2.

1) Není jasné, jak operátor $\mathcal{P}$ působí na obecný racionální výraz, což je komplikace při aplikaci tohoto algoritmu v konkrétních příkladech.

2) Použití tohoto algoritmu si ilustrujeme na dvou příkladech. Spočítáme generující funkci pro algebry $\mathfrak{su}(2)$ a $\mathfrak{su}(3)$.

5.1 Generující funkce pro rozklad tenzorového součinu reprezentací SU(2)

Podle již odvozeného algoritmu aplikujeme operátor $\mathcal{P} \circ [e^{-\delta} \cdot \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{w(\delta)}]$ na součin $\chi(A) \cdot \chi(B)$, konkrétně

$$\mathcal{P} \circ [x^{-1}(x - x^{-1})] \left(\chi(A)\chi(B)\right), \tag{5.5}$$

kde $\chi(A)$ resp. $\chi(B)$ jsou charakterové generátory (2.10).

Úprava tohoto výrazu je zdlouhavá, nicméně ji zde uvedeme. Při úpravách použijeme pomocný vzorec

$$\frac{1}{(1-Px)(1-Qx^{-1})} = \frac{1}{1-PQ}\left(\frac{1}{1-Px} + \frac{Qx^{-1}}{1-Qx^{-1}}\right).$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}x^{-1}(x-x^{-1})\chi(A)\chi(B) = \\
&= \mathcal{P}x^{-1}(x-x^{-1})\frac{1}{(1-Ax)(1-Ax^{-1})(1-Bx)(1-Bx^{-1})} = \\
&= \mathcal{P}x^{-1}\frac{1}{(1-Ax)(1-Ax^{-1})} \cdot \frac{x-x^{-1}}{(1-Bx)(1-Bx^{-1})} = \\
&= \mathcal{P}x^{-1}\frac{1}{(1-Ax)(1-Ax^{-1})} \cdot \frac{x-B+B-x^{-1}}{(1-Bx)(1-Bx^{-1})} = \\
&= \mathcal{P}x^{-1}\frac{1}{(1-Ax)(1-Ax^{-1})} \cdot \left(\frac{x}{1-Bx} - \frac{x^{-1}}{1-Bx^{-1}}\right) = \\
&= \mathcal{P}\frac{1}{(1-Ax)(1-Ax^{-1})} \cdot \left(\frac{1}{1-Bx} - \frac{x^{-2}}{1-Bx^{-1}}\right) = \\
&= \mathcal{P}\left(\frac{1}{(1-Ax)(1-Ax^{-1})(1-Bx)} - \frac{x^{-2}}{(1-Ax)(1-Ax^{-1})(1-Bx^{-1})}\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{P}\frac{1}{1-Ax}\left(\underbrace{\frac{1}{1-AB}\left(\frac{1}{1-Bx}+\frac{Ax^{-1}}{1-Ax^{-1}}\right)}_{\text{zde jsme použili pomocný vzorec}}\right)-\\
&- \mathcal{P}\frac{x^{-2}}{1-Ax^{-1}}\left(\underbrace{\frac{1}{1-AB}\left(\frac{1}{1-Ax}+\frac{Bx^{-1}}{1-Bx^{-1}}\right)}_{\text{zde jsme použili pomocný vzorec}}\right) =\\
&= \frac{1}{(1-Ax)(1-AB)(1-Bx)} + \mathcal{P}\frac{Ax^{-1}}{(1-Ax)(1-AB)(1-Ax^{-1})}-\\
&- \mathcal{P}\frac{x^{-2}}{(1-Ax^{-1})(1-AB)(1-Ax)} - \underbrace{\mathcal{P}\frac{Bx^{-3}}{(1-Ax^{-1})(1-AB)(1-Bx^{-1})}}_{=0} =\\
&= \frac{1}{(1-Ax)(1-AB)(1-Bx)} + \mathcal{P}\frac{Ax^{-1}}{1-AB}\left(\underbrace{\frac{1}{1-A^2}\left(\frac{1}{1-Ax}+\frac{Ax^{-1}}{1-Ax^{-1}}\right)}_{\text{opětovné použití pomocného vzorce}}\right)-\\
&- \mathcal{P}\frac{x^{-2}}{1-AB}\left(\underbrace{\frac{1}{1-A^2}\left(\frac{1}{1-Ax}+\frac{Ax^{-1}}{1-Ax^{-1}}\right)}_{\text{opětovné použití pomocného vzorce}}\right) =\\
&= \frac{1}{(1-Ax)(1-AB)(1-Bx)} + \mathcal{P}\frac{Ax^{-1}}{(1-AB)(1-A^2)(1-Ax)}+\\
&+ \underbrace{\mathcal{P}\frac{A^2x^{-2}}{(1-AB)(1-A^2)(1-Ax^{-1})}}_{=0} - \mathcal{P}\frac{x^{-2}}{(1-AB)(1-A^2)(1-Ax)}-\\
&- \underbrace{\mathcal{P}\frac{Ax^{-3}}{(1-AB)(1-A^2)(1-Ax^{-1})}}_{=0} = \frac{1}{(1-Ax)(1-AB)(1-Bx)}+\\
&+ \mathcal{P}\frac{A^2A^{-1}x^{-1}}{(1-AB)(1-A^2)(1-Ax)} - \mathcal{P}\frac{A^2A^{-2}x^{-2}}{(1-AB)(1-A^2)(1-Ax)} =\\
&= \frac{1}{(1-Ax)(1-AB)(1-Bx)} + \frac{A^2}{(1-AB)(1-A^2)(1-Ax)}-\\
&- \frac{A^2}{(1-AB)(1-A^2)(1-Ax)} = \frac{1}{(1-Ax)(1-AB)(1-Bx)}.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Výsledek je shodný s generující funkcí (4.7).

5.2 Generující funkce pro rozklad tenzorového součinu reprezentací SU(3)

Postupujme podle již odvozeného algoritmu, tedy vynásobme dva charakterové generátory $\chi(A,B)$ a $\chi(R,S)$ odvozené v (2.11) a aplikujme na ně operátor $\mathcal{P} \circ [e^{-\delta} \cdot \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{w(\delta)}]$. Generující funkci označme jako $G(A,B,R,S,x,y)$. Po dosazení tedy bude

$$
\begin{aligned}
&G(A,B,R,S,x,y) = \\
&= \mathcal{P}\Bigg[(x^{-1}y^{-1})\left(xy - x^{-1}y^2 - x^2y^{-1} - x^{-1}y^{-1} + x^{-2}y + xy^{-2}\right) \cdot \\
&\cdot \frac{x^4y^4(1-AB)(1-RS)}{(1-Ax)(1-By)(y-A)(x-B)(x-Ay)(y-Bx)} \cdot \\
&\cdot \frac{1}{(1-Rx)(1-Sy)(y-R)(x-S)(x-Ry)(y-Sx)}\Bigg] = \\
&= \mathcal{P}\Bigg[\frac{(x^4y^4 - x^2y^5 - x^5y^2 - x^2y^2 + xy^4 + x^4y)}{(1-Ax)(1-By)(y-A)(x-B)(x-Ay)(y-Bx)} \cdot \\
&\cdot \frac{(1-AB)(1-RS)}{(1-Rx)(1-Sy)(y-R)(x-S)(x-Ry)(y-Sx)}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Nyní na G budeme nahlížet jako na funkci jedné proměnné x, můžeme ji rozložit na parciální zlomky vzhledem k osmi kořenovým činitelům polynomu v x ve jmenovateli. G získáme jako součet osmi zlomků

$$
\begin{aligned}
&G(A,B,R,S,x,y) = \\
&= \mathcal{P}\Bigg[\frac{B^2y(BRS - B - RSy^2 + y^2)}{(y-A)(BR-1)(B-S)(R-y)(Sy-1)(B-Ay)(B-Ry)(BS-y)(Bx-y)} - \\
&- \frac{y(A^2RSy^2 - A^2y^2 - ARS + A)}{(A-R)(AS-1)(By-1)(R-y)(Sy-1)(Ay-B)(ARy-1)(Ay-S)(x-Ay)} - \\
&- \frac{B^2RSy - B^2y - BRSy^3 + By^3}{(A-y)(BR-1)(B-S)(x-B)(R-y)(Sy-1)(B-Ay)(B-Ry)(BS-y)} + \\
&- \frac{A^2(ARSy^3 - Ay^3 - RSy + y)}{(A-R)(AS-1)(Ax-1)(By-1)(R-y)(Sy-1)(Ay-B)(ARy-1)(Ay-S)} + \\
&+ \frac{R^2(ABRy^3 - ABy - Ry^3 + y)}{(A-R)(A-y)(BR-1)(By-1)(Rx-1)(Sy-1)(ARy-1)(Ry-B)(Ry-S)} + \\
&+ \frac{y(ABR^2y^2 - ABR - R^2y^2 + R)}{(A-R)(A-y)(BR-1)(By-1)(Sy-1)(ARy-1)(Ry-B)(Ry-S)(x-Ry)} -
\end{aligned}
$$

$$- \frac{ABS^2y - ABSy^3 - S^2y + Sy^3}{(AS-1)(A-y)(B-S)(By-1)(y-R)(x-S)(S-Ay)(BS-y)(S-Ry)} -$$
$$\left. - \frac{S^2y(ABS - ABy^2 - S + y^2)}{(AS-1)(A-y)(B-S)(By-1)(y-R)(S-Ay)(BS-y)(S-Ry)(Sx-y)} \right].$$

Nyní je ve jmenovateli každého zlomku pouze jeden člen závislý na x, aplikací operátoru $\mathcal{P}$ se některé zlomky vyruší, neboť vedou na negativní mocniny v x. První zatím zůstane, protože člen $(Bx - y)$ vede na pozitivní mocniny, druhý zlomek bude vynulován, protože člen $(x - Ay)$ vede na negativní mocniny, podobně třetí, šestý a sedmý budou vynulovány, zatímco čtvrtý, pátý a osmý zůstanou. Takže generující funkce G má zatím tvar

$$G(A,B,R,S,x,y) =$$
$$= \mathcal{P}\left[\frac{B^2y(BRS - B - RSy^2 + y^2)}{(y-A)(BR-1)(B-S)(R-y)(Sy-1)(B-Ay)(B-Ry)(BS-y)(Bx-y)} - \right.$$
$$- \frac{A^2(ARSy^3 - Ay^3 - RSy + y)}{(A-R)(AS-1)(Ax-1)(By-1)(R-y)(Sy-1)(Ay-B)(ARy-1)(Ay-S)} +$$
$$+ \frac{R^2(ABRy^3 - ABy - Ry^3 + y)}{(A-R)(A-y)(BR-1)(By-1)(Rx-1)(Sy-1)(ARy-1)(Ry-B)(Ry-S)} +$$
$$\left. - \frac{S^2y(ABS - ABy^2 - S + y^2)}{(AS-1)(A-y)(B-S)(By-1)(y-R)(S-Ay)(BS-y)(S-Ry)(Sx-y)} \right].$$

Nyní musíme tyto čtyři členy rozložit na parciální zlomky v proměnné y. Obdržíme

$$G(A,B,R,S,x,y) =$$
$$= \mathcal{P}\left[\frac{R^2A^3}{(A-R)(AR-B)(BR-1)(AR-S)(AS-1)(Ax-1)(ARy-1)} + \right.$$
$$+ \frac{RA^2}{(A-R)(AR-B)(BR-1)(AR-S)(AS-1)(Ax-1)(y-R)} -$$
$$- \frac{R^3A^2}{(A-R)(AR-B)(BR-1)(AR-S)(AS-1)(Rx-1)(ARy-1)} +$$
$$+ \frac{S^2A^2}{(A-R)(AR-S)(S-B)(AS-1)(A-BS)(Ax-1)(Sy-1)} -$$
$$- \frac{R^2A}{(A-R)(AR-B)(BR-1)(AR-S)(AS-1)(Rx-1)(y-A)} -$$
$$- \frac{S^2A}{(A-R)(B-S)(AR-S)(AS-1)(A-BS)(A-Sx)(y-A)} +$$
$$+ \frac{AB^2RS - AB^2}{(A-R)(AR-B)(BR-1)(B-S)(AS-1)(A-BS)(A-Bx)(y-A)} -$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{B^2R}{(A-R)(AR-B)(BR-1)(B-S)(R-BS)(R-Bx)(y-R)}+\\
&+\frac{ABRS^2-RS^2}{(A-R)(BR-1)(B-S)(AR-S)(AS-1)(R-BS)(R-Sx)(y-R)}-\\
&-\frac{BS}{(BR-1)(B-S)(AS-1)(BS-A)(BS-R)(B-x)(y-BS)}+\\
&+\frac{BS}{(BR-1)(B-S)(AS-1)(BS-A)(BS-R)(S-x)(y-BS)}-\\
&-\frac{B(RS-1)(Bx^3-x)}{(BR-1)(B-S)(S-x)(Ax-1)(Bx-A)(Bx-R)(Rx-1)(BSx-1)(y-Bx)}+\\
&+\frac{(AB-1)S(Sx^3-x)}{(B-S)(AS-1)(B-x)(Ax-1)(Rx-1)(Sx-A)(Sx-R)(BSx-1)(y-Sx)}+\\
&+\frac{B^2(A^2RS-A^2)}{(A-R)(AR-B)(BR-1)(B-S)(AS-1)(A-BS)(Ax-1)(By-1)}-\\
&-\frac{B^2R^2}{(A-R)(AR-B)(BR-1)(B-S)(R-BS)(Rx-1)(By-1)}+\\
&+\frac{B^3S^2}{(BR-1)(B-S)(AS-1)(BS-A)(BS-R)(BSx-1)(By-1)}+\\
&+\frac{(ABR^2-R^2)S^2}{(A-R)(BR-1)(B-S)(AR-S)(AS-1)(R-BS)(Rx-1)(Sy-1)}-\\
&-\left.\frac{B^2S^3}{(BR-1)(B-S)(AS-1)(BS-A)(BS-R)(BSx-1)(Sy-1)}\right].
\end{aligned}
$$

Nyní operátor $\mathcal{P}$ opět vynuluje ty zlomky, ve kterých jsou členy odpovídající záporným mocninám v y. Nakonec zbude osm sčítanců

$$
\begin{aligned}
&G(A,B,R,S,x,y)=\\
&=\frac{R^2A^3}{(A-R)(AR-B)(BR-1)(AR-S)(AS-1)(Ax-1)(ARy-1)}+\\
&-\frac{R^3A^2}{(A-R)(AR-B)(BR-1)(AR-S)(AS-1)(Rx-1)(ARy-1)}+\\
&+\frac{S^2A^2}{(A-R)(AR-S)(S-B)(AS-1)(A-BS)(Ax-1)(Sy-1)}-\\
&+\frac{B^2(A^2RS-A^2)}{(A-R)(AR-B)(BR-1)(B-S)(AS-1)(A-BS)(Ax-1)(By-1)}-\\
&-\frac{B^2R^2}{(A-R)(AR-B)(BR-1)(B-S)(R-BS)(Rx-1)(By-1)}+\\
&+\frac{B^3S^2}{(BR-1)(B-S)(AS-1)(BS-A)(BS-R)(BSx-1)(By-1)}+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{(ABR^2-R^2)S^2}{(A-R)(BR-1)(B-S)(AR-S)(AS-1)(R-BS)(Rx-1)(Sy-1)}-$$
$$-\frac{B^2S^3}{(BR-1)(B-S)(AS-1)(BS-A)(BS-R)(BSx-1)(Sy-1)}.$$

Po převedení na společného jmenovatele se celý výraz velice zjednoduší, obdržíme explicitní tvar generující funkce

$$G(A,B,R,S,x,y)=$$
$$=\frac{1-ABRSxy}{(AS-1)(BR-1)(Ax-1)(By-1)(Rx-1)(Sy-1)(ARy-1)(BSx-1)}. \tag{5.7}$$

Opět tento výsledek krátce okomentujme. Symboly A,B resp. R,S připadají první resp. druhé faktorreprezentaci. Člen A^aB^b odpovídá reprezentaci s nejvyšší vahou $a\omega_1+b\omega_2$, označme ji $V(a,b)$; člen R^rS^s odpovídá reprezentaci s nejvyšší vahou $r\omega_1+s\omega_2$, označme ji $V(r,s)$. Člen x^my^n odpovídá reprezentaci s nejvyšší vahou $m\omega_1+n\omega_2$, označme ji $V(m,n)$. Potom, jestliže rozvineme generující funkci $G(A,B,R,S,x,y)$ do řady, přítomnost členu

$$A^aB^bR^rS^sx^my^n$$

v rozvoji implikuje, že v tenzorovém součinu reprezentací $V(a,b)$ a $V(r,s)$ je obsažena reprezentace $V(m,n)$, tj.

$$V(a,b)\otimes V(r,s)\supset V(m,n).$$

Závěr

V této práci jsme odvodili generující funkce pro branching $G_2 \supset A_2$ a pro rozklady tenzorových součinů reprezentací $\mathfrak{su}(2)$ a $\mathfrak{su}(3)$. Odvodili jsme nový algoritmus pro výpočet generujících funkcí pro tenzorové součiny, který je velice elegantní a účinnější než algoritmus starý, uvedený v [2].

Bylo by jistě užitečné získat v budoucnosti generující funkce pro branching více párů algebra-podalgebra a pro rozklady tenzorových součinů pro další Lieovy algebry.

Zajímavým úkolem by bylo rovněž odvodit generující funkce i pro další úkoly z teorie Lieových algeber, jakými je třeba hledání Casimirových operátorů univerzální obalové algebry atd.

V neposlední řadě by bylo zajímavé, porozumět některým aplikacím generujících funkcí v konečných grupách, viz [7].

To jsou jenom některé z úkolů, kterým by se v této oblasti dalo věnovat v budoucnu, na které však už při přípravě této práce nezbyl čas.

Literatura

[1] J. Patera, R. T. Sharp, *Generating Functions for Characters of Group Representations and Their Applications*, Lecture Notes in Physics **94**, 1979.

[2] A. M. Cohen, G. C. M. Ruitenburg, *Generating Functions and Lie Groups*, Computational aspects of Lie group representations and related topics: proceedings of the 1990 Computational Algebra Seminar at CWI, Amsterdam, 1991.

[3] G. Heckman, *Projections of Orbits and Asymptotic Behavior of Multiplicities for Compact Connencted Lie Groups*, Inventiones Math. **67**, 1982.

[4] N. Okeke, M. A. Walton, *On character generators for simple Lie algebras*, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 2007.

[5] S. Kumar, *Tensor Product Decomposition*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Hyderabad, India, 2010.

[6] A. Wangberg, T. Dray, *Visualizing Lie Subalgebras using Root and Weight Diagrams*, 2007, `mathdl.maa.org/mathDL/23/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=3287`.

[7] N. J. A. Sloane, *Error-correcting Codes and Invariant Theory: New Applications of a Nineteenth-Century Technique*, Amer. Math. Monthly, vol. 84, No. 2, 1977.

[8] M. Thoma, *Weyl orbit-orbit branching rules for Lie algebras*, PhD Thesis, McGill University, Montreal, 1997.

[9] K. Erdmann, M. J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer-Verlag, London, 2006.

[10] D. H. Sattinger, O. L. Weaver, *Lie Groups and Algebras with Application to Physics, Geometry, and Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[11] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1972.

[12] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory: A First Course*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[13] H. S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, Waltham, 1994.

[14] T. Filler, *Poznámky z generujících funkcí*, zápisky z přednášky 01ZTGA konané na FJFI ČVUT, 2006, `http://people.fjfi.cvut.cz/pelanedi/GenerujiciFunkce.pdf`.