České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

## Poissonova Lieova transformace okrajových podmínek pro sigma modely s přihlížejícími proměnnými

Ivo Petr

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

7. května 2008

**Poděkování**: Rád bych tímto poděkoval všem, kteří mi při mé práci jakkoliv pomohli. Především bych chtěl poděkovat svému školiteli, Prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc., za trpělivost, mnohé cenné rady a připomínky týkající se dané problematiky.

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 7. května 2008 ..................................................

podpis

*Název práce*:
**Poissonova-Lieova transformace okrajových podmínek pro sigma modely s přihlížejícími proměnnými**

*Autor*: Ivo Petr

*Obor:* Matematické inženýrství

*Druh práce*: Diplomová práce

*Vedoucí práce*: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

*Abstrakt*: Prozkoumáme $\sigma$-modely s přihlížejícími proměnnými a odvodíme formule pro jejich Poisson-Lie T-plurální transformace. Poté analyzujeme okrajové podmínky $\sigma$-modelu a podmínky pro lepící matici popisující dobře definovanou D-bránu. Pro lepící matici rovněž najdeme transformační vztah. Na konkrétních příkladech $\sigma$-modelů a D-brán demonstrujeme, jak jsou podmínky pro lepící matici ovlivněny plurální transformací a jaká je role přihlížející proměnné.

*Klíčová slova*: sigma model, Poisson-Lie T-pluralita, D-brána

*Title:*

**Poisson-Lie transformation of the boundary conditions for sigma models with spectators**

*Author:* Ivo Petr

*Abstract:* We investigate $\sigma$-models with spectators and derive formulae for Poisson-Lie T-plurality transformations of such models. Further we analyze boundary conditions and conditions for the gluing matrix describing a well-defined D-brane. We also find transformation formula for gluing matrix. Using particular examples of $\sigma$-models and D-branes, we demonstrate how these conditions are affected by Poisson-Lie T-plurality and what the role of the spectator is.

*Key words:* $\sigma$-model, Poisson-Lie T-plurality, D-brane

# Obsah

# Kapitola 1

# Úvod

Duální symetrie jsou patrně jedněmi z nejzajímavějších symetrií ve fyzice. O "dualitě" se hovoří tehdy, máme-li co do činění se dvěma zdánlivě různými modely, které jsou pouze jinými popisy stejné fyzikální reality. Široké pole pro uplatnění duálních symetrií nabízí teorie strun, v níž hrají zásadní úlohu jako nástroj pro získávání informací neporuchovými metodami. Díky tomu, že uvádí do vztahu odlišné popisy téhož, je někdy možné problém neřešitelný v jednom modelu převést do formalismu modelu druhého, kde už řešení může být nalezeno.

Významným prostředkem pro pochopení symetrií prostoročasu z pohledu strunové teorie je T-dualita ("target space"). Tu je možno realizovat jako transformaci působící na cílové varietě dvoudimenzionálního $\sigma$-modelu, který popisuje vývoj struny pomocí zobrazení ze světoplochy struny ("worldsheet") do d-dimenzionální variety. Původně byla T-dualita chápána jako symetrie metriky prostoročasu, která připouštěla abelovskou grupu izometrií. Tento popis však nemohl obsáhnout celou řadu fyzikálně zajímavých situací. Významného zobecnění bylo dosaženo v [1], na což bezprostředně navazuje [2]. Zde byla představena myšlenka Poisson-Lie T-duality jako rozšíření dosavadní T-duality na tzv. zobecněné izometrie. Dualita se zde realizuje jako přechod mezi dvěma Poissonovými-Lieovými grupami, které působí svou akcí na cílových varietách vzájemně duálních $\sigma$-modelů a které tvoří tzv. Drinfeldův double. Tyto grupy však již nemusí být grupami izometrie a nemusí být ani abelovské. Poisson-Lie T-dualita byla zkoumána v řadě dalších prací jak z pohledu klasické, tak kvantové fyziky. Její možnosti byly ještě zesíleny na tzv. pluralitu, viz [3], a díky ní se rovněž povedlo nalézt řešení pohybových rovnic několika netriviálních $\sigma$-modelů, viz [4].

Pro chování otevřené struny je zásadní nejen znalost řešení, ale i okrajových podmínek pro konce struny. Pohyb konců struny bývá omezen na D-brány a různé způsoby fixace konců struny vedou k různým druhům vibrací struny. Při duální transformaci se transformují i okrajové podmínky a tedy i D-brány. Způsob, jakým se při plurální transformaci mění D-brány, byl studován v [5].

Doposud se většina autorů zaměřovala pouze na tzv. atomární dualitu, tedy případ, kdy grupy umožňující přechod mezi vzájemně duálními modely působí na jejich cílových varietách volně a tranzitivně. V takovém případě lze totiž ztotožnit cílovou varietu a grupu a popis problematiky se poněkud zjednoduší. Přestože již v [1] autoři uvažují možnost, že akce grupy může být volná, nikoli však tranzitivní, a poskytli i předpis, jak v tomto případě duální modely získat, nebyl donedávna zveřejněn způsob, jak s dualitou za takových okolností pracovat. Pro Poisson-Lie T-pluralitu dokonce nebyly, alespoň co je mi známo, zvěřejněny výsledky žádné. Uspokojivý popis duality $\sigma$-modelů, kdy se duální transformace účastní jen některé proměnné, zatímco ostatní jen přihlíží ("spectators"), byl nastíněn až v [6]. Přístupem použitým v této práci se v následujícím textu pokusíme popsat Poisson-Lie T-pluralitu za přítomnosti přihlížejících proměnných.

Zadáním mé diplomové práce bylo, seznámit se s problematikou $\sigma$-modelů s přihlížejícími proměnnými a pokusit se stávající Poisson-Lie T-pluralitu rozšířit na takovéto modely. Dále pak v rámci těchto modelů prozkoumat okrajové podmínky popsané tzv. lepící maticí a podmínky na tuto matici kladené. Nabyté znalosti jsem měl aplikovat a na konkrétním příkladě vyzkoušet, jak se transformuje lepící matice za přítomnosti přihlížejících proměnných a zda se podmínky na ni kladené při transformaci zachovají.

Práce je členěna následujícím způsobem. V kapitole 2 je shrnut teoretický podklad celé práce. Je zde uvedeno, co je to $\sigma$-model a jakým způsobem je nutno rozšířit stávající Poisson-Lie T-dualitu a pluralitu na přihlížející proměnné. Formulujeme zde okrajové podmínky $\sigma$-modelu pomocí lepící matice a zrekapitulujeme podmínky na tuto matici kladené. Nakonec odvodíme vztah pro její plurální transformaci. V kapitole 3 pak uvedeme konkrétní příklady transformací lepících matic mezi třemi různými rozklady Drinfeldova doublu a vyzkoušíme platnost okrajových podmínek. Kapitola 4 obsahuje shrnutí práce a diskusi výsledků.

# Kapitola 2

# Sigma modely s přihlížejícími proměnnými

## 2.1 Sigma model

Začneme formulací $\sigma$-modelu relevantního pro naše potřeby. Klasický nelineární dvoudimenzionální $\sigma$-model je zobrazení $\Phi : \Sigma \mapsto M, \Phi \in C^\infty$ z diferencovatelné variety $\Sigma = \mathbb{R}^2$ s Minkowského metrikou do diferencovatelné variety $M$, která je $d$-dimenzionální a je na ní zadán kovariantní tenzor druhého řádu $\mathcal{F}$. Varieta $\Sigma$ odpovídá světoploše struny a takovýto model je možno použít k popisu bozonové struny. Na $\Sigma$ si místo tradičních parametrů $\tau, \sigma$, v nichž má metrika diagonální tvar, zavedeme souřadnice světelného kužele

$$x_\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma)$$

Dynamiku systému popíšeme pomocí akce

$$S_\mathcal{F}(\Phi) = \int_\Sigma dx_+ dx_- \partial_- \Phi^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu}(\Phi) \partial_+ \Phi^\nu \tag{2.1}$$

kde $\mathcal{F}$ je kovariantní tenzorové pole druhého řádu a $\Phi^\mu : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $\mu = 1 ... \dim M$ vznikne složením zobrazení $\Phi$ a složek souřadnicové mapy na okolí $U_\Phi$ bodu $\Phi(x_+, x_-) \in M$. Pohybové rovnice modelu získáme pomocí variačního principu ve tvaru

$$\partial_- \partial_+ \Phi^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \partial_- \Phi^\nu \partial_+ \Phi^\lambda = 0 \tag{2.2}$$

kde $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\mathcal{G}^{\mu\rho}(\mathcal{F}_{\rho\lambda,\nu} + \mathcal{F}_{\nu\rho,\lambda} - \mathcal{F}_{\nu\lambda,\rho})$, $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ je symetrická část $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ a $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ její inverze. $\mathcal{G}$ pak považujeme za metriku na $M$. Pomocí antisymetrické části $\mathcal{F}$

$$\mathcal{B}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}_{\mu\nu} - \mathcal{F}_{\nu\mu})$$

definujeme tenzor torze $\mathcal{H}_{\mu\nu\lambda}$

$$\mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} = \mathcal{B}_{\nu\lambda,\mu} + \mathcal{B}_{\lambda\mu,\nu} + \mathcal{B}_{\mu\nu,\lambda}$$

Je-li torze odpovídající tenzorovému poli $\mathcal{F}$ rovna nule, platí

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\mathcal{G}^{\mu\rho}(\mathcal{F}_{\rho\lambda,\nu} + \mathcal{F}_{\nu\rho,\lambda} - \mathcal{F}_{\nu\lambda,\rho}) = \frac{1}{2}\mathcal{G}^{\mu\rho}(\mathcal{G}_{\rho\lambda,\nu} + \mathcal{G}_{\nu\rho,\lambda} - \mathcal{G}_{\nu\lambda,\rho})$$

Při nulové torzi je tedy pro řešení pohybových rovnic rozhodující pouze tvar $\mathcal{G}$. Pohybové rovnice mohou být pro neplochou metriku komplikované a obtížně řešitelné. Pokud je však metrika plochá, tedy pokud je Riemannův tenzor z ní spočtený nulový, lze najít souřadnice, v nichž je metrika konstantní a pohybové rovnice (2.2) dostanou tvar vlnové rovnice. Tu už umíme vyřešit.

Předpokládejme, že na cílové varietě působí svou akcí nějaká Lieova grupa $G$. Pokud akce $G$ je volná a tranzitivní, můžeme pomocí diffeomorfizmu ztotožnit varietu $M$ a grupu $G$. Toto vede na poměrně dobře prostudovaný případ "atomární" duality. Pokud je akce volná, nikoli však tranzitivní, je nutno do úvah zahrnout tzv. přihlížející proměnné, které číslují jednotlivé orbity $G$ na varietě $M$ a duální transformace se neúčastní. Na tento případ se zaměříme v následující práci.

Z úvah prezentovaných v [6] vyplývá, že pokud je akce grupy $G$ volná a varieta $M/G$ existuje, je každá orbita diffeomorfní $G$ a $M$ lze lokálně nahradit $N \times G$, kde $N \subseteq M/G$ je otevřená podmnožina na prostoru orbit. Zavedeme-li nyní na $N$ souřadnice $y^\mu$, které číslují orbity $G$ a které budou při dualitě vystupovat jako přihlížející proměnné, a na $G$ souřadnice $\phi^i$, lze akci (2.1) rozepsat do tvaru

$$S_{\mathcal{F}}(y,\phi) = \int_\Sigma dx_+dx_-\Big(\partial_-y^\mu\mathcal{F}_{\mu\nu}(y,\phi)\partial_+y^\nu + \partial_-y^\mu\mathcal{F}_{\mu j}(y,\phi)\partial_+\phi^j + \partial_-\phi^i\mathcal{F}_{i\nu}(y,\phi)\partial_+y^\nu + \partial_-\phi^i\mathcal{F}_{ij}(y,\phi)\partial_+\phi^j\Big) \quad (2.3)$$

Označíme nyní $e_i^a(g)$ komponenty pravoinvariantní Maurer-Cartanovy formy $(dgg^{-1})$. Zde i v dalším textu budu, jak je zvykem, označovat závislost na grupových proměnných pomocí $g$, kde $g \in G$. Zvolíme bázi Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ Lieovy grupy $G$ jako $T_a$ a definujeme pravoinvariantní pole

$$\rho^a_\pm(g) \equiv (\partial_\pm gg^{-1})^a = \partial_\pm\phi^i e_i^a(g) \quad (\partial_\pm gg^{-1}) = (\partial_\pm gg^{-1})^a T_a \quad (2.4)$$

Akci (2.3) je nyní možno přepsat v blokovém tvaru

$$S_F(y,g) = \int_\Sigma dx_+dx_- \begin{pmatrix} \partial_-y^\mu, & \rho^a_-(g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{\mu\nu}(y,g) & F_{\mu b}(y,g) \\ F_{a\nu}(y,g) & F_{ab}(y,g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_+y^\nu \\ \rho^b_+(g) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

kde $F$ působí jako bilineární forma na Lieově algebře $\mathfrak{g}$ a tečném prostoru $T_yN$, přičemž platí

$$\mathcal{F}(y,g) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & e(g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{\mu\nu}(y,g) & F_{\mu b}(y,g) \\ F_{a\nu}(y,g) & F_{ab}(y,g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & e(g) \end{pmatrix}^T \tag{2.6}$$

V těchto vyjádřeních řecké indexy probíhají 1...dim $N$, latinské 1...dim $G$, $^T$ značí transpozici, $\cdot$ maticové násobení, $\mathbf{1}$ označuje jednotkovou matici příslušné dimenze a $e(g)$ je matice komponent $(dgg^{-1})$. Zápis pomocí matic v blokovém tvaru se ukázal jako nejvhodnější pro popis $\sigma$-modelů s přihlížejícími proměnnými, proto jej budu dále používat. Již teď vidíme, že pro práci s přihlížejícími proměnnými stačilo vielbeinová pole $e(g)$ rozšířit o blok jednotkové matice, přičemž formule zůstaly analogické těm pro atomární dualitu.

## 2.2 Poisson-Lie T-dualita

V předchozí části jsme definovali $\sigma$-model. Nyní se budeme zabývat otázkou, jak k němu najít model duální. To je komplikovaný problém. Můžeme ale postupovat i opačně a vzájemně duální modely přímo zkonstruovat.

Pro začátek bychom zřejmě mohli postupovat tak, že bychom pro konstrukci využili postupů zavedených již v [1] a [2], získali tak blok $\mathcal{F}_{ab}$, k němu přidali nějaký blok $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ a zkoumali, co se bude dít a zda bude $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ nějak omezeno. Ukazuje se však, že v takovém případě jediné omezení na $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ je, že nezávisí na $g$. Navíc dualita ponechá tento blok beze změny a tedy studiem tohoto případu nezískáme nic nového. Zajímavá je především situace, kdy jsou mimodiagonální bloky $\mathcal{F}$ nenulové. Následující konstrukce byla provedena pomocí levoinvariantních polí, a proto ji tak i popíšeme. Nakonec pak jednoduše přejdeme do pravoinvariantních polí, s nimiž jsme zvyklí pracovat.

Působí-li na varietě $M$ svou akcí grupa $G$, vznikají jedna-formy tzv. Noetherovských proudů $J_a$ , viz [1], [2]. Při rozepsání na grupové a přihlížející proměnné mají tvar

$$J_a = (v_a^i \mathcal{F}_{i\nu}\partial_+ y^\nu + v_a^i \mathcal{F}_{ij}\partial_+\phi^j)dx_+ - (\partial_- y^\mu \mathcal{F}_{\mu i} v_a^i + \partial_-\phi^j \mathcal{F}_{ji} v_a^i)dx_- \tag{2.7}$$

kde $v_a^i(g)$ jsou komponenty levoinvariantních polí. Pokud je $G$ grupou izometrií cílové variety, platí $dJ_a = 0$. Nicméně $J_a$ mohou být definovány, i když $G$ není grupou izometrií, a to pomocí variace akce $\sigma$-modelu vůči transformacím, které vytváří akce $G$. Předpokládejme, že $J_a$ splní Maurer-Cartanovu podmínku

$$dJ_a = -\frac{1}{2}\tilde{c}_a^{bc} J_b \wedge J_c \tag{2.8}$$

kde $\tilde{c}_a^{bc}$ jsou strukturní konstanty Lieovy algebry $\tilde{\mathfrak{g}}$ příslušející Lieově grupě $\tilde{G}$. Při označení bazických vektorů algebry $\tilde{\mathfrak{g}}$ jako $\tilde{T}^a$, lze teď vytvořit formu $J_a\tilde{T}^a$ zadávající na $\tilde{G}$ plochou konexi. Pak také existují (alespoň lokálně) zobrazení $\tilde{g}(x_+, x_-)$ z $\Sigma$ do $\tilde{G}$ taková, že $J_a = (-d\tilde{g}\tilde{g}^{-1})_a$ a řešení $\sigma$-modelu na grupě $G$ můžeme považovat za plochu ve varietě $D$, která obsahuje $G, \tilde{G}$ a pro kterou platí

$$g(x_+, x_-)\tilde{g}(x_+, x_-) = l(x_+, x_-) \in D$$

Podmínku (2.8) lze formulovat jako podmínku pro lagrangián $\sigma$-modelu. Variací akce (2.3) vůči změnám generovaným levoinvariantními poli totiž zjistíme, že při $\delta S = 0$ musí za použití (2.8) platit následující rovnosti, které rovněž zapíšeme v blokovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\mu\nu,l}v_a^l & \mathcal{F}_{\mu l}v_{a,j}^l + \mathcal{F}_{\mu j,l}v_a^l \\ v_{a,i}^l\mathcal{F}_{l\nu} + \mathcal{F}_{i\nu,l}v_a^l & v_{a,i}^l\mathcal{F}_{lj} + \mathcal{F}_{il}v_{a,j}^l + \mathcal{F}_{ij,l}v_a^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\mu k}v_b^k\tilde{c}_a^{bc}v_c^l\mathcal{F}_{l\nu} & \mathcal{F}_{\mu k}v_b^k\tilde{c}_a^{bc}v_c^l\mathcal{F}_{lj} \\ \mathcal{F}_{ik}v_b^k\tilde{c}_a^{bc}v_c^l\mathcal{F}_{l\nu} & \mathcal{F}_{ik}v_b^k\tilde{c}_a^{bc}v_c^l\mathcal{F}_{lj} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$v_a^i(g)$ jsou opět komponenty levoinvariantních polí a čárka značí derivaci podle příslušné grupové proměnné. Vytvořením matice ze strukturních konstant $\tilde{c}_a^{bc}$ a rozšířením matic $v_a^i(g)$ podobně jako u vielbeinů $e_i^a(g)$, lze (2.9) zapsat ve tvaru

$$\mathcal{L}_{v_a}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\mu\nu} & \mathcal{F}_{\mu k} \\ \mathcal{F}_{i\nu} & \mathcal{F}_{ik} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & v(g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{c}_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & v(g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\mu\nu} & \mathcal{F}_{\mu j} \\ \mathcal{F}_{l\nu} & \mathcal{F}_{lj} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

kde $\mathcal{L}$ značí Lieovu derivaci a $v_a$ tvoří bázi levoinvariantních polí. V tomto zápise je rovnost (2.9) zjevně analogická tzv. Poisson-Lieově podmínce pro Lieovu derivaci tenzorového pole $\mathcal{F}$, kterou známe z atomární duality jako nutnou a postačující podmínku dualizovatelnosti $\sigma$-modelu. Je-li splněna, říkáme, že tenzor $\mathcal{F}$ je $G$-Poisson-Lie symetrický vůči $\tilde{G}$, resp. že má zobecněné izometrie.

Pro Lieovu derivaci platí $\mathcal{L}_{[v_i,v_j]} = [\mathcal{L}_{v_i}, \mathcal{L}_{v_j}]$, z čehož plyne, že strukturní konstanty algeber $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$ musí vyhovět podmínce

$$\tilde{c}_k^{ac}c_{fa}^l - \tilde{c}_k^{al}c_{fa}^c - \tilde{c}_f^{ac}c_{ka}^l + \tilde{c}_f^{al}c_{ka}^c - \tilde{c}_a^{lc}c_{fk}^a = 0 \tag{2.11}$$

K (2.9, 2.11) lze snadno napsat podmínky duální záměnou vlnkovaných a nevlnkovaných veličin. Role obou grup jsou zaměněny a $\tilde{\mathcal{F}}$ je tenzor definující $\sigma$-model na grupě $\tilde{G}$. Obtížnost hledání duálů k zadanému modelu je v praxi způsobena tím, že je velmi obtížné najít algebry $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$ a jim příslušné grupy, které splňují (2.9, 2.11) a podmínky duální. Pro zadané algebry ovšem lze vzájemně duální $\sigma$-modely zkonstruovat. Velmi elegantní způsob, jak problém vyřešit, byl představen v [1] a podrobně rozpracován v [2]. Zcela zásadní roli zde hraje Drinfeldův double.

Drinfeldův double je souvislá Lieova grupa $D$, jejíž Lieova algebra $\mathfrak{d}$, vybavená bilineární symetrickou ad-invariantní nedegenerovanou formou $\langle .,. \rangle_{\mathfrak{d}}$, se dá rozložit na dvojici podalgeber $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$, které jsou jako vektorové prostory maximálně izotropní vůči $\langle .,. \rangle_{\mathfrak{d}}$, a $\mathfrak{d}$ je jejich direktním součtem. Maninovou trojicí rozumíme uspořádanou trojici algeber $(\mathfrak{d}, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$.

Dimenze podalgeber musí být shodné a v každé z nich lze zvolit bázi $T_a \in \mathfrak{g}, \tilde{T}^a \in \tilde{\mathfrak{g}}$ tak, že

$$\langle T_a, T_b \rangle_{\mathfrak{d}} = 0 = \langle \tilde{T}^a, \tilde{T}^b \rangle_{\mathfrak{d}} \qquad \langle T_a, \tilde{T}^b \rangle_{\mathfrak{d}} = \delta_a^b \tag{2.12}$$

Díky ad-invarianci $\langle .,. \rangle_{\mathfrak{d}}$ strukturní konstanty podalgeber plně určují celou algebru $\mathfrak{d}$

$$[T_a, T_b] = c_{ab}^c T_c \qquad [\tilde{T}^a, \tilde{T}^b] = \tilde{c}_c^{ab} \tilde{T}^c \qquad [T_a, \tilde{T}^b] = c_{ca}^b \tilde{T}^c + \tilde{c}_a^{bc} T_c \tag{2.13}$$

Prvky $l \in D$ doublu lze (alespoň na nějakém okolí jednotkového prvku $e$) rozložit dvěma způsoby na

$$l(x_+, x_-) = g(x_+, x_-)\tilde{g}(x_+, x_-) = \tilde{h}(x_+, x_-)h(x_+, x_-) \tag{2.14}$$

kde $g, h \in G, \tilde{g}, \tilde{h} \in \tilde{G}$. Pro popis duality $\sigma$-modelů s přihlížejícími proměnnými nám tato struktura pořád nestačí. Využijeme proto postupu popsaného v [6] a Drinfendův double dále rozšíříme.

Naším cílem nyní bude zkonstruovat vzájemně duální $\sigma$-modely na varietách $N \times G$ a $N \times \tilde{G}$, kde $N$ je varieta a $G, \tilde{G}$ jsou grupy z rozkladu Drinfeldova doublu. Vezmeme nyní prostor $T_y N + T_y^\# N + \mathfrak{g} + \tilde{\mathfrak{g}}$ a zavedeme na něm bilineární formu $\langle .,. \rangle$

$$\forall (t, u, v, w), (t', u', v', w') \in T_y N + T_y^\# N + \mathfrak{g} + \tilde{\mathfrak{g}}$$

$$\langle (t, u, v, w), (t', u', v', w') \rangle := (t, u') + (t', u) + \langle v + w, v' + w' \rangle_{\mathfrak{d}}$$

kde $(.,.)$ je kanonická forma párující elementy $T_y N$ a $T_y^\# N$. Bazické vektory prostorů $T_y N$ a $T_y^\# N$ označíme jako $Y_\mu$ a $\tilde{Y}^\nu$. Volíme je tak, aby $(Y_\mu, \tilde{Y}^\nu) = \delta_\mu^\nu$.

Uvažujme nyní regulární lineární zobrazení $E(y, e) : T_y N + \mathfrak{g} \mapsto T_y^\# N + \tilde{\mathfrak{g}}$ zadané v bodech $y$ a jednotce grupy $G$. Pak je zadán podprostor $\mathcal{E}^+$ jako graf tohoto zobrazení a $\mathcal{E}^-$ jako ortogonální doplněk $\mathcal{E}^+$ vůči $\langle .,. \rangle$.

$$\mathcal{E}^+ = \mathrm{Span}\left( \begin{pmatrix} Y_\mu \\ T_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\mu\nu}(y,e) & E_{\mu b}(y,e) \\ E_{a\nu}(y,e) & E_{ab}(y,e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}^\nu \\ \tilde{T}^b \end{pmatrix} \right) \tag{2.15}$$

$$\mathcal{E}^- = \mathrm{Span}\left( \begin{pmatrix} Y_\mu \\ T_a \end{pmatrix}^T - \left( \begin{pmatrix} E_{\mu\nu}(y,e) & E_{\mu b}(y,e) \\ E_{a\nu}(y,e) & E_{ab}(y,e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}^\nu \\ \tilde{T}^b \end{pmatrix} \right)^T \right) \tag{2.16}$$

Oba tyto prostory mají dimenzi $\dim \mathcal{E}^{\pm} = \dim N + \dim G = \dim M$. Vezmeme nyní dva elementy prostoru $T_y N + T_y^{\#} N + \mathfrak{g} + \tilde{\mathfrak{g}}$

$$(\partial_{\pm} y, p^{\pm}, \partial_{\pm} l l^{-1}) \qquad \partial_{\pm} y \in T_y N, p^{\pm} \in T_y^{\#} N, \partial_{\pm} l l^{-1} \in \mathfrak{g} + \tilde{\mathfrak{g}}$$

a budeme požadovat, aby

$$(\partial_{\pm} y, p^{\pm}, \partial_{\pm} l l^{-1}) \in \mathcal{E}^{\mp}$$

Potom platí, že

$$0 = \langle (\partial_{\pm} y, p^{\pm}, \partial_{\pm} l l^{-1}), \mathcal{E}^{\pm} \rangle \tag{2.17}$$

Tento výraz budeme dále upravovat. Rozložíme $l \in D$ jako v (2.14) na $l = g\tilde{g}$ a využijeme toho, že $\langle .,. \rangle$ je ad-invariantní v tom smyslu, že $Ad_g$ působí pouze na bazických vektorech $\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}$, kde je $\langle .,. \rangle$ definována pomocí $\langle .,. \rangle_{\mathfrak{d}}$. Výraz (2.17) přejde na

$$0 = \langle (\partial_{\pm} y, p^{\pm}, g^{-1} \partial_{\pm} g + \partial_{\pm} \tilde{g} \tilde{g}^{-1}), g^{-1} \mathcal{E}^{\pm} g \rangle \tag{2.18}$$

přičemž výrazem $g^{-1}\mathcal{E}^{\pm} g$ rozumíme působení operátoru $Ad_{g^{-1}}$ na $\mathcal{E}^{\pm}$. Zpracujeme teď výraz $g^{-1}\mathcal{E}^{\pm} g$. Označíme $a(g), b(g), d(g)$ submatice adjungované reprezentace grupy $G$ na $\mathfrak{d}$ v bázi $T_a, \tilde{T}^a$

$$Ad_{g^{-1}} \triangleright T_a = a(g)_a^i T_i \qquad Ad_{g^{-1}} \triangleright \tilde{T}^a = b(g)^{ai} T_i + d(g)_i^a \tilde{T}^i \tag{2.19}$$

$$Ad_{g^{-1}}^T = \begin{pmatrix} a(g) & 0 \\ b(g) & d(g) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Transpozice $Ad$ je zde proto, že zobrazujeme bázové vektory a výsledek opět vyjadřujeme v bázových vektorech. V blokovém tvaru potom píšeme

$$g^{-1}\mathcal{E}^{+} g = \mathrm{Span}\left( \begin{pmatrix} Y_\mu \\ T_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{\mu\nu}(y,g) & F_{\mu b}(y,g) \\ F_{a\nu}(y,g) & F_{ab}(y,g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}^\nu \\ \tilde{T}^b \end{pmatrix} \right) \tag{2.21}$$

Matice lineárního zobrazení $E(y,e)$ byla z (2.15, 2.19, 2.21) nahrazena maticí $F(y,g)$

$$F(y,g) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & E_{\mu d}(y,e) b(g)^{da} \\ 0 & a(g)_c^a + E_{cd}(y,e) b(g)^{da} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} E_{\mu\nu}(y,e) & E_{\mu d}(y,e) d(g)_b^d \\ E_{c\nu}(y,e) & E_{cd}(y,e) d(g)_b^d \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Pro $g^{-1}\mathcal{E}^{-} g$ je situace téměř stejná, pouze v (2.21) zaměníme znaménko a $F(y,g)$ je transponovaná. Rozšíříme-li $a(g), b(g), d(g)$ následujícím způsobem

$$A(g) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & a(g) \end{pmatrix} \quad B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b(g) \end{pmatrix} \quad D(g) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & d(g) \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

dostaneme pro $F(y,g)$ předpis

$$F(y,g) = (A(g) + E(y,e) \cdot B(g))^{-1} \cdot E(y,e) \cdot D(g) \tag{2.24}$$

jež je zjevně analogií předpisu pro konstrukci matice $\sigma$-modelu pro atomární dualitu.

Po dosazení (2.21), resp. analogického výrazu pro $g^{-1}\mathcal{E}^{-}g$, zpět do (2.18) dostaneme následující rovnosti

$$\begin{aligned} p^{+}_{\mu} &= -F(y,g)_{\mu\nu}\partial_{+}y^{\nu} - F(y,g)_{\mu b}(g^{-1}\partial_{+}g)^{b} && (2.25)\\ p^{-}_{\mu} &= \partial_{-}y^{\nu}F(y,g)_{\nu\mu} + (g^{-1}\partial_{-}g)^{b}F(y,g)_{b\mu} && (2.26)\\ -A_{+,a}(g) := (\partial_{+}\tilde{g}\tilde{g}^{-1})_{a} &= -F(y,g)_{a\nu}\partial_{+}y^{\nu} - F(y,g)_{ab}(g^{-1}\partial_{+}g)^{b} && (2.27)\\ -A_{-,a}(g) := (\partial_{-}\tilde{g}\tilde{g}^{-1})_{a} &= \partial_{-}y^{\nu}F(y,g)_{\nu a} + (g^{-1}\partial_{-}g)^{b}F(y,g)_{ba} && (2.28) \end{aligned}$$

Celá konstrukce byla prováděna pro levoinvariantní pole $v_a(g)$. Proto pokud $F(y,g)$ získanou z (2.22) dosadíme do vztahu analogického (2.6), kde ovšem místo pravoinvariantních vielbeinů $e$ použijeme levoinvariantní $\overset{\mathrm{L}}{e}$, dostaneme tenzorové pole $\overset{\mathrm{L}}{\mathcal{F}}$, kterým můžeme zadat $\sigma$-model na $N \times G$ a které splňuje Poisson-Lieovu podmínku (2.9) se strukturními konstantami algebry $\tilde{\mathfrak{g}}$. (2.11) je přitom již splněno z Jakobiho identit pro strukturní konstanty algebry $\mathfrak{d}$. Navíc, označíme-li hustotu lagrangiánu modelu zadaného tenzorovým polem $\overset{\mathrm{L}}{\mathcal{F}}$ jako $\mathcal{L}(\overset{\mathrm{L}}{\mathcal{F}})$, pak platí

$$-p^{+}_{\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}(\overset{\mathrm{L}}{\mathcal{F}})}{\partial(\partial_{-}y^{\mu})} \qquad p^{-}_{\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}(\overset{\mathrm{L}}{\mathcal{F}})}{\partial(\partial_{+}y^{\mu})}$$

a rovnice

$$\partial_{+}(p^{-}_{\mu}) + \partial_{-}(-p^{+}_{\mu}) + \frac{\partial\mathcal{L}(\overset{\mathrm{L}}{\mathcal{F}})}{\partial_{-}y^{\mu}} = 0 \tag{2.29}$$

představují část pohybových rovnic $\sigma$-modelu. Zbývající pohybové rovnice jsou obsaženy již v (2.8) a jelikož máme $J_a = (-d\tilde{g}\tilde{g}^{-1})_a$, lze je zapsat v tradičním tvaru

$$\partial_{+}A_{-,a}(g) - \partial_{-}A_{+,a}(g) - \tilde{c}_{a}^{bc}A_{-,b}(g)A_{+,c}(g) = 0 \tag{2.30}$$

Celý postup lze provést i při záměně $\mathfrak{g}$ za $\tilde{\mathfrak{g}}$. Uvažujeme-li nyní zobrazení $\tilde{E}(y,e) : T_yN + \tilde{\mathfrak{g}} \mapsto T^{\#}_{y}N + \mathfrak{g}$, opět vytvoříme podprostory $\mathcal{E}^{\pm}$, jen se prohodí role bazických vektorů $T_a$ a $\tilde{T}^a$. Při úpravě (2.17) použijeme pro prvek $l \in D$ rozklad $l = \tilde{h}h$ a místo $Ad_{g^{-1}}$ vezmeme $Ad_{\tilde{h}^{-1}}$. Formule (2.22) až (2.30) se zopakují se záměnou vlnka-nevlnka. Zkonstruovali jsme tak $\sigma$-model na $N \times \tilde{G}$ zadaný pomocí $\overset{\mathrm{L}}{\tilde{\mathcal{F}}}$.

Stále však není zřejmé, proč a v jakém smyslu by takto zkonstruované modely měly být vzájemně duální. Dualita je skryta právě v možnosti přechodu od jednoho rozkladu prvku doublu $l \in D$ k druhému rozkladu jako v (2.14). Pro konstrukci vzájemně duálních modelů je důležité, aby podprostory $\mathcal{E}^{\pm}$ zadané pomocí $E(y,e)$ byly stejné jako ty určené pomocí $\tilde{E}(y,e)$. To nám dává vztah mezi maticemi zobrazení $E(y,e)$ a $\tilde{E}(y,e)$, který získáme v blokovém tvaru snadno z (2.15), když toto vyjádření přepíšeme do podobného tvaru, ale se záměnou $T_a$ a $\tilde{T}^a$.

$$\tilde{E}(y,e) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & E_{\mu c}(y,e) \\ 0 & E_{ac}(y,e) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} E_{\mu\nu}(y,e) & 0 \\ E_{c\nu}(y,e) & \mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Zavedeme-li pomocné matice $K, L$, které v blokovém tvaru vypadají jako

$$K = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

pak lze (2.31) zapsat jako

$$\tilde{E}(y,e) = (K + E(y,e)\cdot L)^{-1} \cdot (L + E(y,e)\cdot K) \tag{2.32}$$

Předchozí vztahy byly v [6] odvozeny za použití levoinvariantních Maurer-Cartanových forem $(g^{-1}\partial_{\pm} g)$. My bychom však raději, částečně ze zvyku, částečně s vyhlídkou na odvozování transformačního vztahu pro okrajové podmínky, pracovali pouze s pravoinvariantními poli. Přeformulujeme proto některé vztahy, které budeme nadále používat. K tomu nám pomůže fakt, že

$$\overset{\mathrm{L}}{e}(g) = e(g)\cdot a(g) \qquad d(g) = a^{-T}(g) \tag{2.33}$$

a analogicky i pro rozšířené matice. Abychom dostali stejný lagrangián pomocí levo i pravoinvariantních polí, upravíme (2.22) pomocí (2.33), díky čemuž zjistíme, že formule pro $F(y,g)$ pro pravoinvariantní pole zní

$$F(y,g) = \left( \begin{pmatrix} E_{\mu\nu}(y,e) & E_{\mu b}(y,e) \\ E_{a\nu}(y,e) & E_{ab}(y,e) \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b(g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & a(g) \end{pmatrix}^{-1} \right)^{-1} \tag{2.34}$$

Matici $\sigma$-modelu $\mathcal{F}$ pak dostaneme pomocí (2.6). Výrazy (2.25, 2.26, 2.27, 2.28) vyjádřené pomocí pravoinvariantních polí dostávají tvar

$$\begin{pmatrix} p^{+}_{\lambda}, & \tilde{\rho}_{c+}(\tilde{g}) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \partial_{+} y^{\nu}, & \rho^{b}_{+}(g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{\mu\nu}(y,g) & F_{\mu b}(y,g) \\ F_{a\nu}(y,g) & F_{ab}(y,g) \end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & a(g) \end{pmatrix}^{-T} \tag{2.35}$$

$$\begin{pmatrix} p^{-}_{\lambda}, & \tilde{\rho}_{c-}(\tilde{g}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{-} y^{\mu}, & \rho^{a}_{-}(g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{\mu\nu}(y,g) & F_{\mu b}(y,g) \\ F_{a\nu}(y,g) & F_{ab}(y,g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & a(g) \end{pmatrix}^{-T} \tag{2.36}$$

Poznamenejme, že ačkoliv [1] a [2] uvádí něco jiného, pro nenulové $b(g)$ a nenulové mimodiagonální bloky $E(y,e)$ se závislost na grupových proměnných dostane podle (2.22) resp. (2.34) i do bloku $F_{\mu\nu}$ matice $F(y,g)$.

## 2.3 Poisson-Lie T-pluralita

Jak bylo v [1] zmíněno a především v [3] podrobně rozpracováno, některé Drinfeldovy doubly mohou být rozložitelné více způsoby na různé direktní součty maximálně izotropních podprostorů, přičemž tyto rozklady jsou vzájemně izomorfní. To znamená, že pro každý rozklad existuje matice, která udává vztah mezi bázovými vektory jednotlivých podalgeber. Prvky doublu pak lze rozložit několika způsoby

$$l(x_+,x_-) = g(x_+,x_-)\tilde{g}(x_+,x_-) = \hat{h}(x_+,x_-)\bar{h}(x_+,x_-) \tag{2.37}$$

kde $g \in G, \tilde{g} \in \tilde{G}, \hat{h} \in \hat{H}, \bar{h} \in \bar{H}$ a $G, \tilde{G}, \hat{H}, \bar{H}$ jsou grupy příslušné algebrám $\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{h}}, \bar{\mathfrak{h}}$, pro které platí $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \tilde{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{h}} \oplus \bar{\mathfrak{h}}$. Tomuto jevu říkáme Poisson-Lie T-pluralita. Mějme matici $C$, která zobrazuje báze jednoho rozkladu na báze druhého rozkladu, přičemž pro bazické vektory obou rozkladů pořád platí (2.12).

$$\begin{pmatrix} T \\ \tilde{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U} \\ \bar{U} \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

$T_a \in \mathfrak{g}, \tilde{T}^a \in \tilde{\mathfrak{g}}, \hat{U}_a \in \hat{\mathfrak{h}}, \bar{U}^a \in \bar{\mathfrak{h}}$. Jak uvidíme, konstrukce modelů spojených Poisson-Lie T-pluralitou je velmi podobná konstrukci modelů spojených dualitou. Rozdíl spočívá především v tom, že při přechodu mezi rozklady doublu nezaměňujeme $T_a$ a $\tilde{T}^a$, nýbrž nahrazujeme je podle (2.38). Dosazením (2.38) do (2.15) a vyjádřením podprostoru $\mathcal{E}^+$ pomocí bazí $Y_a, \tilde{Y}^a, \hat{U}_a, \bar{U}^a$ získáme

$$\hat{E}(y,e) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & E_{\mu d}(y,e)R^{da} \\ 0 & P^a_c + E_{cd}(y,e)R^{da} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} E_{\mu\nu}(y,e) & E_{\mu d}(y,e)S^d_b \\ E_{c\nu}(y,e) & Q_{cb} + E_{cd}(y,e)S^d_b \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

Odtud je patrno, že (2.38) je nutno za přítomnosti přihlížejících proměnných rozšířit na

$$\begin{pmatrix} Y \\ T \\ \tilde{Y} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & Q \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & R & 0 & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ \hat{U} \\ \tilde{Y} \\ \bar{U} \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

a (2.39) psát jako

$$\hat{E}(y,e) = M^{-1} \cdot N \tag{2.41}$$

kde

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\mu\nu}(y,e) & E_{\mu b}(y,e) \\ E_{a\nu}(y,e) & E_{ab}(y,e) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\mu\nu}(y,e) & E_{\mu b}(y,e) \\ E_{a\nu}(y,e) & E_{ab}(y,e) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

Takto zkonstruované $\hat{E}(y,e)$ dosadíme do vztahu, který je analogický (2.34), pouze použijeme submatice adjungované reprezentace $\hat{H}$. Dostaneme tak $\hat{E}(y,\hat{h})$. Odtud již snadno pomocí patřičných vielbeinů dostaneme $\hat{\mathcal{F}}$ zadávajíci model na $N \times \hat{H}$.

Poznamenejme, že předchozí formule ješte nebyly publikovány. Nicméně za nepřítomnosti přihlížejících proměnných se redukují na známe vztahy pro atomární pluralitu a pro volbu $P = S = 0, R = Q = \mathbf{1}$ dostáváme z (2.39) vztah (2.31) uvedený v [1] pro Poisson-Lie T-dualitu. Dualita je evidentně speciálním případem plurality.

Uvedeme ještě několik poznámek k přechodu mezi různými rozklady prvků doublu $D$. Přejít v (2.37) od jednoho rozkladu k druhému nemusí být jednoduché. Zkoumáme-li řešitelné grupy, můžeme jejich elementy vyjadřovat jako součin prvků jednoparametrických podgrup. Ty pak vyjadřujeme pomocí exponenciálního zobrazení bazických vektorů příslušné algebry. Mějme prvky doublu rozložené jako v (2.37). Konkrétně prvek 6-ti dimenzionálního Drinfeldova doublu rozložený na součin jednoparametrických podgrup zapíšeme jako

$$e^{\phi^1 T_1} e^{\phi^2 T_2} e^{\phi^3 T_3} e^{\tilde{g}_1 \tilde{T}^1} e^{\tilde{g}_2 \tilde{T}^2} e^{\tilde{g}_3 \tilde{T}^3} = e^{\chi^3 \hat{U}_3} e^{\chi^2 \hat{U}_2} e^{\chi^1 \hat{U}_1} e^{\bar{h}_3 \bar{U}^3} e^{\bar{h}_2 \bar{U}^2} e^{\bar{h}_1 \bar{U}^1} \tag{2.44}$$

kde $T_a \in \mathfrak{g}, \tilde{T}^a \in \tilde{\mathfrak{g}}, \hat{U}_a \in \hat{\mathfrak{h}}, \bar{U}^a \in \bar{\mathfrak{h}}$ jsou vektory bazí, $(\phi^a, \tilde{g}_b)$ jsou souřadnice na doublu rozloženém do Maninovy trojice $(G|\tilde{G})$ a $(\chi^c, \bar{h}_d)$ souřadnice na $(\hat{H}|\bar{H})$. Pro demonstraci zde byl druhý rozklad vyjádřen v nestandardní parametrizaci, nicméně tento rozklad využijeme i ve třetí kapitole.

Nyní je možno z (2.38) dosadit do (2.44) za $T, \tilde{T}$ a pokusit se prvek rozložený do parametrizace $(G|\tilde{G})$ přepsat do parametrizace $(\hat{H}|\bar{H})$.

Tento proces může být velmi komplikovaný. Pokud ale pro bázové vektory algebry platí "podmínka záměnnosti"

$$[X,[X,Y]] = [Y,[X,Y]] = 0$$

lze využít speciálního tvaru Baker-Campbell-Hausdorffovy formule

$$e^X e^Y = e^{X+Y} e^{\frac{1}{2}[X,Y]} \tag{2.45}$$

$$e^X e^Y = e^Y e^X e^{[X,Y]} \tag{2.46}$$

a dospět tak k vyjádření prvku doublu

$$l = e^{\chi^3(\phi^a,\tilde{g}_b)\hat{U}_3} e^{\chi^2(\phi^a,\tilde{g}_b)\hat{U}_2} e^{\chi^1(\phi^a,\tilde{g}_b)\hat{U}_1} e^{\bar{h}_3(\phi^a,\tilde{g}_b)\bar{U}^3} e^{\bar{h}_2(\phi^a,\tilde{g}_b)\bar{U}^2} e^{\bar{h}_1(\phi^a,\tilde{g}_b)\bar{U}^1} \tag{2.47}$$

a tedy i k následující transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} \chi^c &= \chi^c(\phi^a, \tilde{g}_b) \\ \bar{h}_d &= \bar{h}_d(\phi^a, \tilde{g}_b) \end{aligned} \tag{2.48}$$

jež realizuje přechod mezi jednotlivými rozklady doublu.

## 2.4 Okrajové podmínky a D-brány

Vraťme se nyní k akci (2.1), která nerozlišuje přihlížející a grupové proměnné. $\Phi$ mohou být prostě nějaké souřadnice na cílové varietě $M$. Světoplochu struny $\Sigma$ budeme považovat za proužek $\Sigma = \langle 0, \pi \rangle \times \mathbb{R}$ nekonečný ve směru $\tau$, jehož okraje leží v $\sigma = 0, \pi$. Pro odvození okrajových podmínek je potřeba v akci (2.1) přejít od $x_\pm$ k $\tau, \sigma$.

$$S_{\mathcal{F}}(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^\pi d\tau d\sigma \left( \partial_\tau \Phi^\mu \mathcal{G}_{\mu\nu}(\Phi) \partial_\tau \Phi^\nu - \partial_\sigma \Phi^\mu \mathcal{G}_{\mu\nu}(\Phi) \partial_\sigma \Phi^\nu + 2\partial_\tau \Phi^\mu \mathcal{B}_{\mu\nu}(\Phi) \partial_\sigma \Phi^\nu \right) \tag{2.49}$$

Variací (2.49) vůči polím $\Phi$ za předpokladu $\delta\Phi^\mu(\tau_1, \sigma) = 0 = \delta\Phi^\mu(\tau_2, \sigma)$ získáme z $\delta S = 0$ jak pohybové rovnice, tak okrajové podmínky

$$\delta\Phi^\mu (\mathcal{G}_{\mu\nu}(\Phi) \partial_\sigma \Phi^\nu + \mathcal{B}_{\mu\nu}(\Phi) \partial_\tau \Phi^\nu) \mid_{\sigma=0,\pi} = 0 \tag{2.50}$$

neboli

$$\delta\Phi^\mu (\mathcal{F}_{\mu\nu}(\Phi) \partial_+ \Phi^\nu - \partial_- \Phi^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu}(\Phi)) \mid_{\sigma=0,\pi} = 0 \tag{2.51}$$

Abychom mohli dále zpracovat tyto výrazy, sáhneme nyní k popisu okrajových podmínek pomocí D-brán a lepící matice.

Podmínka pevného konce, Dirichletova podmínka, říká, že konec struny je vázán na nějakou podvarietu variety $M$, nazývanou D-brána. Dimenze D-brány je určena počtem nezávislých Dirichletových směrů, tzn. složek zobrazení $\Phi$ na které Dirichletovu podmínku uplatníme. V těchto směrech je konec struny zafixován. Označíme jako $\Psi^\mu$ takzvané adaptované souřadnice. To jsou souřadnice cílové variety takové, že část jich směřuje v Dirichletových směrech kolmých na D-bránu, zbytek míří v tzv. Neumannových směrech tečných k D-bráně. V těchto souřadnicích má Dirichletova podmínka tvar

$$\partial_\tau \Psi^\mu \mid_{\sigma=0,\pi} = 0 \qquad \text{Dirichletova podmínka} \qquad \partial_- \Psi^\mu \mid_{\sigma=0,\pi} = -\partial_+ \Psi^\mu \mid_{\sigma=0,\pi} \tag{2.52}$$

Podmínka pro volné konce udává, ve kterých směrech se konec struny může volně pohybovat, což odpovídá Neumannovým směrům. Jedná se o zobecnění Neumannových okrajových podmínek známých jako

$$\partial_\sigma \Psi^\mu \mid_{\sigma=0,\pi} = 0 \qquad \text{Neumannova podmínka} \qquad \partial_- \Psi^\mu \mid_{\sigma=0,\pi} = \partial_+ \Psi^\mu \mid_{\sigma=0,\pi} \tag{2.53}$$

jež by nešlo použít, pokud by v (2.51) vystupoval $\mathcal{F}$, který by nebyl symetrický.

Zobecněním (2.52, 2.53) na libovolné souřadnice je formulace podmínek pomocí tzv. lepící matice $\mathcal{R}$ ("gluing matrix"), viz [5], jež reprezentuje lepící operátor $\mathfrak{R}$

$$\partial_- \Phi^\mu \mid_{\sigma=0,\pi} = \partial_+ \Phi^\nu \mathcal{R}^\mu_\nu(\Phi) \mid_{\sigma=0,\pi} \tag{2.54}$$

Jelikož $\partial_\pm \Phi^\mu$ apod. jsou pro nás řádkové vektory, matice operátorů jsou ve skutečnosti transponované a působí zleva.

Lepící matice vyjadřuje veškeré informace o D-bránách. Geometrická násobnost vlastního čísla $-1$ vyjadřuje počet Dirichletových směrů, čímž určuje i dimenzi D-brány. Konkrétní tvar $\mathcal{R}$ pak vypovídá o tom, jak je brána vložena do cílové variety. V souřadnicích adaptovaných na D$p$-bránu má lepící matice tvar

$$\mathcal{R}_\Psi = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_i^j & 0 \\ 0 & -\delta_k^l \end{pmatrix} \qquad i,j = 1,...,p+1; \quad k,l = p+2,...,\mathrm{dim}M \quad (2.55)$$

Avšak ne každá matice může být lepící maticí. Prozkoumáme nyní podmínky, které musí $\mathcal{R}$ splnit, aby zadávala přípustné okrajové podmínky a D-brána byla dobře definovanou varietou.

Označíme příslušnou D-bránu jako varietu $B$ a její bod jako $b \in B$. Jelikož $B$ je podvarieta $M$, je tečný prostor $T_bB$ podprostorem $T_bM$. Definujeme Neumannův projektor $\mathfrak{N}$ jako projektor na tečný prostor brány $\mathfrak{N} : T_bM \mapsto T_bB$. Ať už používáme jakékoliv souřadnice, je zřejmé, že pohyb konce struny se musí dít ve směru tečném k bráně, tedy $\partial_\tau \Phi^\mu \mid_{\sigma=0,\pi} \in T_bB$. Stejně tak při variaci akce $\sigma$-modelu musí být $\delta\Phi^\mu \mid_{\sigma=0,\pi} \in T_bB$. Proto také $\mathfrak{N}(\delta\Phi) = \delta\Phi$ a $\mathfrak{N}(\partial_\tau\Phi) = \partial_\tau\Phi$. Tyto rovnosti přepíšeme pomocí matice $\mathcal{N}$ Neumannova projektoru jako $(\delta\Phi)\mathcal{N} = \delta\Phi$ a $(\partial_\tau\Phi)\mathcal{N} = \partial_\tau\Phi$. Když v poslední rovnosti použijeme $\partial_\tau = \frac{1}{2}(\partial_+ + \partial_-)$ a (2.54), dostaneme

$$(\mathbf{1} + \mathcal{R}) \cdot \mathcal{N} = \mathbf{1} + \mathcal{R} \quad (2.56)$$

Obory hodnot operátorů $\mathfrak{N}$ a $(\mathbf{1} + \mathfrak{R})$ jsou tedy stejné a $\mathfrak{R}$ určuje tečný prostor D-brány.

Teď už můžeme zpracovat výraz (2.51). Za použití (2.54) a předchozích vztahů dostaneme

$$\delta\Phi^\lambda \mathcal{N}_\lambda^\mu (\mathcal{F}_{\mu\kappa}(\Phi) - \mathcal{F}_{\nu\mu}(\Phi)\mathcal{R}_\kappa^\nu)\partial_+\Phi^\kappa \mid_{\sigma=0,\pi} = 0$$

kde $\delta\Phi$ a $\partial_+\Phi$ už jsou libovolné, takže finální podoba okrajových podmínek $\sigma$-modelu je

$$\mathcal{N} \cdot (\mathcal{F} - \mathcal{F}^T \cdot \mathcal{R}^T) = 0 \quad (2.57)$$

Zatím jsme ještě nevzali v potaz několik věcí. Není zaručeno, že algebraická a geometrická násobnost $-1$ jsou stejné a že nalezneme adaptované souřadnice, v nichž dostane lepící matice tvar (2.55). Navíc projektor $\mathfrak{N}$ není plně specifikován svým oborem hodnot. Abychom $\mathfrak{N}$ určili, je nutné znát nejen kam promítá, ale i podle čeho. Potřebujeme tedy znát jeho jádro. Zdá se přirozené postupovat dále následujícím způsobem.

Definujeme Dirichletův projektor $\mathfrak{Q} = \mathbf{1} - \mathfrak{N}$ tak, že $\mathfrak{Q}$ promítá $T_bM$ na vlastní prostor $\mathfrak{R}$ příslušný vlastnímu číslu $-1$. Promítá tedy na Dirichletovy směry. Zřejmě $Ker\mathfrak{N} = Im\mathfrak{Q}$ a naopak. Pro matice projektorů $\mathfrak{R}, \mathfrak{Q}$ platí

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^2 \qquad \mathcal{Q} \cdot \mathcal{R} = -\mathcal{Q} \tag{2.58}$$

Z (2.56) navíc plyne

$$\mathcal{R} \cdot \mathcal{Q} = -\mathcal{Q} \tag{2.59}$$

Zatímco $\mathfrak{Q}$ promítá na vlastní prostor $\mathfrak{R}$ příslušný vlastnímu číslu $-1$, $\mathfrak{N}$ promítá na vlastní prostory příslušné ostatním vlastním číslům. Lze tudíž najít adaptované souřadnice v nichž má lepící matice tvar (2.55) a blok $\mathcal{R}_i^j$ už nemá vlastní číslo $-1$. Z (2.57) za použití (2.58) snadno zjistíme, že platí

$$\mathcal{N} \cdot \mathcal{G} \cdot \mathcal{Q}^T = 0$$

a Dirichletovy směry jsou vzhledem k metrice $\mathcal{G}$ kolmé na tečný prostor D-brány.

Metrika však omezuje lepící matice jinou podmínkou, která je nezávislá na těch, které jsme dosud uvedli. Jelikož naše $\sigma$-modely studujeme s vyhlídkou na jejich aplikaci ve strunové teorii, musíme požadovat, aby lepící matice byla ortogonální vůči metrice, viz [5]. Tzv. podmínka konformní symetrie zní

$$\mathcal{R} \cdot \mathcal{G} \cdot \mathcal{R}^T = \mathcal{G} \tag{2.60}$$

Nakonec požadujme, aby D-brána byla dobře definovanou varietou. Projektor $\mathfrak{N}$ definuje v každém bodě $b \in B$ podprostor $T_bM$ a jedná se tedy o distribuci. Jestliže máme v $M$ podvarietu takovou, že podprostory zadané distribucí jsou tečnými prostory této podvariety v každém jejím bodě, nazýváme podvarietu integrální varietou distribuce. Frobeniova věta o integrabilitě distribucí říká, že integrální varieta (D-brána) existuje právě tehdy, když je distribuce v involuci, tedy když

$$\forall b \in B \quad \forall v(b), w(b) \in Im\mathfrak{N}_b \qquad [v(b), w(b)] \in Im\mathfrak{N}_b$$

To nám dává pro matici projektoru $\mathfrak{N}$ podmínku

$$\mathcal{N}_\kappa^\mu \mathcal{N}_\lambda^\nu \partial_{[\mu} \mathcal{N}_{\nu]}^\rho = 0 \tag{2.61}$$

Celkem tedy můžeme říct, že dobrý popis okrajových podmínek a D-brán je zajištěn lepící maticí $\mathcal{R}$, pro kterou existují $\mathcal{Q}, \mathcal{N}$ takové, že je splněna tato sada podmínek

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q} &= \mathcal{Q}^2 \\
\mathcal{Q}\cdot\mathcal{R} = \mathcal{R}\cdot\mathcal{Q} &= -\mathcal{Q} \\
\mathcal{N} &= \mathbf{1} - \mathcal{Q} \\
\mathcal{N}^{\mu}_{\kappa}\mathcal{N}^{\nu}_{\lambda}\partial_{[\mu}\mathcal{N}^{\rho}_{\nu]} &= 0 \\
\mathcal{R}\cdot\mathcal{G}\cdot\mathcal{R}^{T} &= \mathcal{G} \\
\mathcal{N}\cdot(\mathcal{F} - \mathcal{F}^{T}\cdot\mathcal{R}^{T}) &= 0
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

Úvahy, které jsme doposud prováděli, jsou naprosto nezávislé na tom, jaké souřadnice máme na cílové varietě zavedeny. Nemuseli jsme se zabývat tím, že v některých souřadnicích se varieta rozpadá na grupové a přihlížející proměnné, protože pro formulaci okrajových podmínek a D-brán je zcela irrelevantní jakou, a zda vůbec nějakou, dualitu máme. Dále nás bude zajímat, zda se podmínky (2.62) zachovají při Poisson-Lie T-pluralitě s přihlížejícími proměnnými. Odvodíme proto transformační vztah pro lepící matici, podobně jako to bylo provedeno v [5].

Připomeňme, že $\mathcal{R}$ je podle (2.54) smíšený tenzor druhého řádu a jako takový se chová při transformaci souřadnic na varietě. Uvádět závislost $\mathcal{R}$ na souřadnicích je někdy poněkud zavádějící. Proto budeme raději uvádět souřadnice, ve kterých $\mathcal{R}$ působí, a to buď dolním indexem, nebo hranatými závorkami.

$\mathcal{R}$ nejprve převedeme do souřadnic, které máme zavedeny na $N \times G$. $\mathcal{R}$ se při tom transformuje jako

$$
\mathcal{R}^{\kappa}_{\iota}[\Phi] = \frac{\partial \Psi^{\nu}}{\partial \Phi^{\iota}}\mathcal{R}^{\mu}_{\nu}[\Psi]\frac{\partial \Phi^{\kappa}}{\partial \Psi^{\mu}}
$$

$$
\mathcal{R}_{\Phi} = J(\Phi)^{-T}\cdot\mathcal{R}_{\Psi}\cdot J(\Phi)^{T} \tag{2.63}
$$

kde $J(\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial\Psi}$ je Jacobiho matice transformace souřadnic $\Psi \to \Phi$.

(2.54) v blokovém tvaru vypadá jako

$$
\left(\begin{array}{cc} \partial_{-}y^{\mu}, & \partial_{-}\phi^{i} \end{array}\right)|_{\sigma=0,\pi} = \left(\begin{array}{cc} \partial_{+}y^{\nu}, & \partial_{+}\phi^{j} \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} \mathcal{R}^{\mu}_{\nu} & \mathcal{R}^{i}_{\nu} \\ \mathcal{R}^{\mu}_{j} & \mathcal{R}^{i}_{j} \end{array}\right)|_{\sigma=0,\pi} \tag{2.64}
$$

Nyní můžeme zapsat $\mathcal{R}$ jako operátor $R$ působící na algebře pravoinvariantních polí. Z dřívějška máme $\rho^{a}_{\pm}(g) = \partial_{\pm}\phi^{i}e^{a}_{i}(g)$, takže (2.64) zapíšeme jako

$$
\left(\begin{array}{cc} \partial_{-}y^{\mu}, & \rho^{a}_{-}(g) \end{array}\right)|_{\sigma=0,\pi} = \left(\begin{array}{cc} \partial_{+}y^{\nu}, & \rho^{b}_{+}(g) \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} R^{\mu}_{\nu} & R^{a}_{\nu} \\ R^{\mu}_{b} & R^{a}_{b} \end{array}\right)|_{\sigma=0,\pi} \tag{2.65}
$$

kde

$$\begin{pmatrix} R^{\mu}_{\nu} & R^{a}_{\nu} \\ R^{\mu}_{b} & R^{a}_{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & e(g) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{R}^{\mu}_{\nu} & \mathcal{R}^{i}_{\nu} \\ \mathcal{R}^{\mu}_{j} & \mathcal{R}^{i}_{j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & e(g) \end{pmatrix} \tag{2.66}$$

Podle dřívějších zkušeností očekáváme, že $R^a_b$ se bude transformovat tak, jak to již známe bez přihlížejících proměnných. Následující postup lze uplatnit všeobecně pro libovolnou lepící matici.

Budeme hledat způsob, jakým se při Poisson-Lie T-pluralitě transformují pole $\begin{pmatrix} \partial_\pm y^\mu, & \rho^a_\pm(g) \end{pmatrix}$. Rozepišme proto element $(\partial_+ y, p^+, \partial_+ l l^{-1})$ jako

$$(\partial_+ y, p^+, \partial_+ l l^{-1}) = \left( \begin{pmatrix} \partial_+ y^\mu, & \rho^a_+(g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_\mu \\ T_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p^+_\nu, & \tilde{\rho}_{b+}(\tilde{g}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{Y}^\nu \\ Ad_g \tilde{T}^b \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_+ y^\mu, & \rho^a_+(g) \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} Y_\mu \\ T_a \end{pmatrix} - F(y,g)^T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & a(g) \end{pmatrix}^{-T} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{Y}^\nu \\ b^T(g) T_b + a^T(g) \tilde{T}^b \end{pmatrix} \right)$$

kde jsme nejprve $l \in D$ rozložili jako $l = g\tilde{g}$, poté použili (2.35) a rozepsali působení $Ad_g$. Když teď použijeme (2.34), dostaneme

$$(\partial_+ y, p^+, \partial_+ l l^{-1}) = \begin{pmatrix} \partial_+ y^\mu, & \rho^a_+(g) \end{pmatrix} \cdot F(y,g)^T \cdot \left( E(y,e)^{-T} \begin{pmatrix} Y_\mu \\ T_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{Y}^\nu \\ \tilde{T}^b \end{pmatrix} \right) \tag{2.67}$$

Pro element $(\partial_+ y, p^+, \partial_+ l l^{-1})$ lze také použít rozklad $l = \hat{h}\bar{h}$ a dostat tak podobné vyjádření, kde ovšem figurují bazické vektory $\hat{U}, \bar{U}$ a matice $\hat{E}, \hat{F}$. Dosazením z (2.40) do (2.67) a porovnáním koeficientů u bazických vektorů v těchto různých rozkladech dostaneme kýžený vztah pro transformaci $\begin{pmatrix} \partial_+ y^\mu, & \rho^a_+(g) \end{pmatrix}$.

$$(\partial_+ \hat{y}^\mu, \hat{\rho}^a_+(\hat{h})) = (\partial_+ y^\nu, \rho^b_+(g)) \cdot F(y,g)^T \left( \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} - E(y,e)^{-T} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \right) \hat{F}(y,\hat{h})^{-T} \tag{2.68}$$

Celý postup lze zopakovat pro $(\partial_- y, p^-, \partial_- l l^{-1})$ a dostat tak

$$(\partial_- \hat{y}^\mu, \hat{\rho}^a_-(\hat{h})) = (\partial_- y^\nu, \rho^b_-(g)) \cdot F(y,g) \left( \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} + E(y,e)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \right) \hat{F}(y,\hat{h})^{-1} \tag{2.69}$$

Máme už připraveno vše, co potřebujeme pro transformaci $R$. Pro T-plurální model má platit vztah analogický (2.65).

$$\begin{pmatrix} \partial_- \hat{y}^\mu, & \hat{\rho}^a_-(\hat{h}) \end{pmatrix} |_{\sigma=0,\pi} = \begin{pmatrix} \partial_+ \hat{y}^\nu, & \hat{\rho}^b_+(\hat{h}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{R}^\mu_\nu & \hat{R}^a_\nu \\ \hat{R}^\mu_b & \hat{R}^a_b \end{pmatrix} |_{\sigma=0,\pi} \tag{2.70}$$

Po dosazení (2.68, 2.69) do (2.70) a drobné úpravě získáme pro transformaci matice $R$ při Poisson-Lie T-pluralitě vztah

$$\hat{R} = \hat{F}(y,\hat{h})^T \cdot M_-^{-1} \cdot F(y,g)^{-T} \cdot R \cdot F(y,g) \cdot M_+ \cdot \hat{F}(y,\hat{h})^{-1} \tag{2.71}$$

kde

$$M_- = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} - E(y,e)^{-T} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

$$M_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} + E(y,e)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

Lepící matici $\hat{\mathcal{R}}$ získáme z $\hat{R}$ podle (2.66) jako

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{R}}_\nu^\mu & \hat{\mathcal{R}}_\nu^i \\ \hat{\mathcal{R}}_j^\mu & \hat{\mathcal{R}}_j^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \hat{e}(\hat{h}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{R}_\nu^\mu & \hat{R}_\nu^a \\ \hat{R}_b^\mu & \hat{R}_b^a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \hat{e}(\hat{h}) \end{pmatrix}^{-1} \tag{2.72}$$

Pro projektory $\mathfrak{Q}, \mathfrak{N}$ transformaci sice nemáme, nicméně stejně jako jsou určeny v souřadnicovém vyjádření z (2.62), je možno je spočítat ze stejných vztahů když známe $\hat{\mathcal{R}}, \hat{\mathcal{F}}$.

Tím jsme dokončili teoretickou přípravu. V další kapitole se podíváme na konkrétní příklad a prozkoumáme, jak vypadají transformované matice $\hat{\mathcal{R}}$ a zda se zachovávají podmínky (2.62).

# Kapitola 3

# Příklad pro jednu přihlížející proměnnou

V následující kapitole demonstrujeme Poisson-Lie T-pluralitu modelů s přihlížejícími proměnnými na konkrétních příkladech. Konkrétně se zaměříme na modely rozebrané v [3]. To by nám mělo poskytnout dostatečný prostor pro demonstraci výsledků prezentovaných v předchozí kapitole, přestože matice $E(y, g)$ definující $\sigma$-model bude zvolena jako diagonální a nedosáhneme tedy úplné obecnosti.

Terminologie použitá v [3] se liší od naší. Kde [3] používá $g$, my máme $g^{-1}$ a naopak. Při rozepisování prvků jednotlivých grup jako součinu jednoparametrických podgrup proto změníme parametrizace. Modely zkonstruované v [3] pak dostaneme snadno transformací souřadnic.

## 3.1 Konstrukce sigma modelů

### 3.1.1 Model na doublu $(5|1)$

Náš počáteční model, na němž budeme definovat D-brány, konstruovat k němu modely plurální a následně zkoumat transformované D-brány, bude zkonstruován na grupě $G$ označené jako Bianchi 5, rozkladu Drinfeldova doublu $(5|1)$. Čísla zde značí, do které třídy patří algebra příslušná grupě v Bianchiho klasifikaci. $G$ je třídimenzionální a zavedeme na ní souřadnice $\phi^i$, Drinfeldův double má dimenzi 6. Přihlížející proměnná bude jedna a budeme ji značit $t$. $t$ bude reprezentovat souřadnicový čas.

Komutační relace bazických vektorů algeber (2.13) jsou

$$\begin{array}{cccc} [T_1,T_2]=-T_2 & [T_2,T_3] & = & 0 & [T_3,T_1]=T_3 \\ [\tilde{T}^1,\tilde{T}^2]=0 & [\tilde{T}^2,\tilde{T}^3] & = & 0 & [\tilde{T}^3,\tilde{T}^1]=0 \\ [T_1,\tilde{T}^1]=0 & [T_2,\tilde{T}^1] & = & 0 & [T_3,\tilde{T}^1]=0 \\ [T_1,\tilde{T}^2]=\tilde{T}^2 & [T_2,\tilde{T}^2] & = & -\tilde{T}^1 & [T_3,\tilde{T}^2]=0 \\ [T_1,\tilde{T}^3]=\tilde{T}^3 & [T_2,\tilde{T}^3] & = & 0 & [T_3,\tilde{T}^3]=-\tilde{T}^1 \end{array} \tag{3.1}$$

Při rozkladu prvku doublu $l \in D$ do Maninovy trojice (5|1) zvolíme pro zápis pomocí jednoparametrických podgrup standardní parametrizaci

$$l = e^{\phi^1 T_1} e^{\phi^2 T_2} e^{\phi^3 T_3} e^{\tilde{g}_1 \tilde{T}^1} e^{\tilde{g}_2 \tilde{T}^2} e^{\tilde{g}_3 \tilde{T}^3} \tag{3.2}$$

V této parametrizaci budou mít matice $e_i^a(g)$ komponent pravoinvariantní Maurer-Cartanovy formy tvar

$$e(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\phi^1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\phi^1} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Komutační relace určují submatice adjungované reprezentace grupy $G$

$$a(g) = \begin{pmatrix} 1 & -\phi^2 & -\phi^3 \\ 0 & e^{\phi^1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\phi^1} \end{pmatrix} \qquad b(g) = 0 \tag{3.4}$$

Matici $E(t,e)$, z níž budeme konstruovat $\sigma$-model, zvolíme diagonální a závislou na přihlížející proměnné $t$

$$E(t,e) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} = F(t,g) \tag{3.5}$$

přičemž rovnost $F(t,g) = E(t,e)$ plyne z (2.34) a toho, že $b(g) = 0$. Dosazením do (2.6) dostaneme $\mathcal{F}$, jež zadává model na $N \times G$

$$\mathcal{F}(t,\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 e^{-2\phi^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 e^{-2\phi^1} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$\mathcal{F}(t,\phi)$ je symetrická a tudíž rovna metrice $\mathcal{G}(t,\phi)$. Navíc Riemannův tenzor spočtený z této metriky je nulový. Metrika je tedy plochá a umíme najít souřadnice, v nichž přejde na Minkowského metriku. Díky tomu dokážeme dokonce vyřešit pohybové rovnice tohoto modelu.

### 3.1.2 Model na doublu $(6_0|1)$

Přejdeme teď k rozkladu doublu $(6_0|1)$. $\sigma$-model konstruujeme na grupě $\hat{H}$ označené jako Bianchi $6_0$. Na $\hat{H}$ zavedeme souřadnice $\chi^i$.

Transformace bazických vektorů při přechodu od rozkladu doublu $(5|1)$ k $(6_0|1)$ je podle (2.38) realizována maticí

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Komutační relace bazických vektorů algeber jsou

$$\begin{array}{rrcll} [\hat{U}_1, \hat{U}_2] = 0 & [\hat{U}_2, \hat{U}_3] & = & \hat{U}_1 & [\hat{U}_3, \hat{U}_1] = -\hat{U}_2 \\ [\bar{U}^1, \bar{U}^2] = 0 & [\bar{U}^2, \bar{U}^3] & = & 0 & [\bar{U}^3, \bar{U}^1] = 0 \\ [\hat{U}_1, \bar{U}^1] = 0 & [\hat{U}_2, \bar{U}^1] & = & -\bar{U}^3 & [\hat{U}_3, \bar{U}^1] = \bar{U}^2 \\ [\hat{U}_1, \bar{U}^2] = -\bar{U}^3 & [\hat{U}_2, \bar{U}^2] & = & 0 & [\hat{U}_3, \bar{U}^2] = \bar{U}^1 \\ [\hat{U}_1, \bar{U}^3] = 0 & [\hat{U}_2, \bar{U}^3] & = & 0 & [\hat{U}_3, \bar{U}^3] = 0 \end{array} \tag{3.8}$$

Při rozkladu prvku doublu $l \in D$ do Maninovy trojice $(6_0|1)$ zvolíme pro zápis pomocí jednoparametrických podgrup nestandardní parametrizaci

$$l = e^{\chi^3 \hat{U}_3} e^{\chi^2 \hat{U}_2} e^{\chi^1 \hat{U}_1} e^{\bar{h}_3 \bar{U}^3} e^{\bar{h}_2 \bar{U}^2} e^{\bar{h}_1 \bar{U}^1} \tag{3.9}$$

V této parametrizaci budou mít matice $\hat{e}_i^a(\hat{h})$ komponent pravoinvariantní Maurer-Cartanovy formy tvar

$$\hat{e}(\hat{h}) = \begin{pmatrix} \cosh(\chi^3) & -\sinh(\chi^3) & 0 \\ -\sinh(\chi^3) & \cosh(\chi^3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Komutační relace určují submatice adjungované reprezentace grupy $\hat{H}$

$$\hat{a}(\hat{h}) = \begin{pmatrix} \cosh(\chi^3) & \sinh(\chi^3) & 0 \\ \sinh(\chi^3) & \cosh(\chi^3) & 0 \\ -\chi^2 & -\chi^1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{b}(\hat{h}) = 0 \tag{3.11}$$

Matici $\hat{E}(t, e)$, z níž budeme konstruovat $\sigma$-model, získáme z (2.41)

$$\hat{E}(t, e) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} + \frac{t^2}{4} & \frac{1}{t^2} - \frac{t^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} - \frac{t^2}{4} & \frac{1}{t^2} + \frac{t^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} = \hat{F}(t, \hat{h}) \tag{3.12}$$

přičemž rovnost $\hat{F}(t,\hat{h}) = \hat{E}(t,e)$ opět plyne z (2.34) a toho, že $\hat{b}(\hat{h}) = 0$. Dosazením do (2.6) dostaneme $\hat{\mathcal{F}}$, jež zadává model na $N \times \hat{H}$

$$\hat{\mathcal{F}}(t,\chi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{-2\chi^3}}{t^2} + \frac{t^2 e^{2\chi^3}}{4} & \frac{e^{-2\chi^3}}{t^2} - \frac{t^2 e^{2\chi^3}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-2\chi^3}}{t^2} - \frac{t^2 e^{2\chi^3}}{4} & \frac{e^{-2\chi^3}}{t^2} + \frac{t^2 e^{2\chi^3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

$\hat{\mathcal{F}}(t,\chi)$ je symetrická, a tudíž rovna metrice $\hat{\mathcal{G}}(t,\chi)$. Riemannův tenzor spočtený z této metriky už ale není nulový a metrika není plochá.

Transformace souřadnic provázející přechod mezi $g\tilde{g} = l = \hat{h}\bar{h}$, kterou jsme popsali v (2.48), zní

$$\begin{aligned} \phi^1 &= -\chi^3 \\ \phi^2 &= \frac{1}{2}(\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \\ \phi^3 &= \frac{1}{2}(\chi^2 - \chi^1) \\ \tilde{g}_1 &= -\bar{h}_3 - \frac{1}{2}(\chi^1 + \chi^2)(\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \\ \tilde{g}_2 &= \chi^1 + \chi^2 \\ \tilde{g}_3 &= \bar{h}_2 - \bar{h}_1 \end{aligned} \tag{3.14}$$

### 3.1.3 Model na doublu $(5|2i)$

Třetí rozklad doublu který použijeme je $(5|2i)$. $\sigma$-model opět konstruujeme na grupě $G$ označené jako Bianchi 5. Na $G$ zavedeme souřadnice $\varphi^i$.

Transformace bazických vektorů při přechodu od rozkladu doublu $(5|1)$ k $(5|2i)$ je podle (2.38) realizována maticí

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Komutační relace bazických vektorů algeber jsou

$$
\begin{array}{rcrcl}
[\hat{V}_1, \hat{V}_2] = -\hat{V}_2 & \quad [\hat{V}_2, \hat{V}_3] & = & 0 & \quad [\hat{V}_3, \hat{V}_1] = \hat{V}_3 \\
[\bar{V}^1, \bar{V}^2] = 0 & \quad [\bar{V}^2, \bar{V}^3] & = & \bar{V}^1 & \quad [\bar{V}^3, \bar{V}^1] = 0 \\
[\hat{V}_1, \bar{V}^1] = 0 & \quad [\hat{V}_2, \bar{V}^1] & = & 0 & \quad [\hat{V}_3, \bar{V}^1] = 0 \\
[\hat{V}_1, \bar{V}^2] = \hat{V}_3 + \bar{V}^2 & \quad [\hat{V}_2, \bar{V}^2] & = & -\bar{V}^1 & \quad [\hat{V}_3, \bar{V}^2] = 0 \\
[\hat{V}_1, \bar{V}^3] = -\hat{V}_2 + \bar{V}^3 & \quad [\hat{V}_2, \bar{V}^3] & = & 0 & \quad [\hat{V}_3, \bar{V}^3] = -\bar{V}^1
\end{array}
\tag{3.16}
$$

Při rozkladu prvku doublu $l \in D$ do Maninovy trojice $(5|2i)$ zvolíme pro zápis pomocí jednoparametrických podgrup standardní parametrizaci

$$
l = e^{\varphi^1 \hat{V}_1} e^{\varphi^2 \hat{V}_2} e^{\varphi^3 \hat{V}_3} e^{\check{g}_1 \bar{V}^1} e^{\check{g}_2 \bar{V}^2} e^{\check{g}_3 \bar{V}^3} \tag{3.17}
$$

V této parametrizaci budou mít matice $\hat{e}_i^a(g)$ komponent pravoinvariantní Maurer-Cartanovy formy stejný tvar jako (3.3)

$$
\hat{e}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\varphi^1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\varphi^1} \end{pmatrix} \tag{3.18}
$$

Podobně tomu bude i u submatic adjungované reprezentace grupy $G$, jen $\hat{b}(g)$ už nebude nulové

$$
\hat{a}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi^2 & -\varphi^3 \\ 0 & e^{\varphi^1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\varphi^1} \end{pmatrix} \qquad \hat{b}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sinh(\varphi^1) \\ 0 & \sinh(\varphi^1) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}
$$

Matici $\hat{E}(t,e)$, z níž budeme konstruovat $\sigma$-model, získáme z (2.41)

$$
\hat{E}(t,e) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4t^2}{1+4t^4} & -\frac{2}{1+4t^4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{1+4t^4} & \frac{4t^2}{1+4t^4} \end{pmatrix} \tag{3.20}
$$

Z (2.34) a předchozích výsledků dostaneme

$$
\hat{F}(t,g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4t^2}{e^{-4\varphi^1}+4t^4} & -\frac{2e^{2\varphi^1}}{1+4t^4 e^{4\varphi^1}} \\ 0 & 0 & \frac{2e^{2\varphi^1}}{1+4t^4 e^{4\varphi^1}} & \frac{4t^2}{e^{-4\varphi^1}+4t^4} \end{pmatrix} \tag{3.21}
$$

Dosazením do (2.6) dostaneme $\hat{\mathcal{F}}$, jež zadává model na $N \times G$

$$\hat{\mathcal{F}}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4t^2 e^{2\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} & -\frac{2}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} & \frac{4t^2 e^{2\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

$\hat{\mathcal{F}}(t,\varphi)$ tentokrát už není symetrická a máme nenulové pole $\mathcal{B}(t,\varphi)$. Metrika

$$\hat{\mathcal{G}}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4t^2 e^{2\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4t^2 e^{2\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

není plochá, protože Riemannův tenzor spočtený z této metriky není nulový.

Transformace souřadnic provázející přechod mezi $g\tilde{g} = l = g\check{g}$, kterou jsme popsali v (2.48), zní

$$\begin{aligned} \phi^1 &= -\varphi^1 \\ \phi^2 &= \check{g}_2 \\ \phi^3 &= \check{g}_3 \\ \tilde{g}_1 &= -\check{g}_1 + \varphi^2\check{g}_2 + \varphi^3\check{g}_3 - \frac{\check{g}_2\check{g}_3}{2} \\ \tilde{g}_2 &= \varphi^2 + \frac{\check{g}_3}{2} \\ \tilde{g}_3 &= \varphi^3 - \frac{\check{g}_2}{2} \end{aligned} \tag{3.24}$$

## 3.2 Transformace diagonálních lepících matic

V následujím textu se pokusíme prozkoumat transformace D-brán při Poisson-Lie T-pluralitě. Začneme vždy s lepící maticí $\mathcal{R}$ popisující D-bránu na cílové varietě modelu Bianchi 5 v rozkladu Drinfeldova doublu (5|1). Pro první pokusy můžeme brát D-brány, jejichž lepící matice jsou v souřadnicích $t, \phi^i$ diagonální. $t, \phi^i$ jsou tedy souřadnice adaptované na D-bránu. Jedná se samozřejmě o nejjednodušší případy a později se pokusíme najít obecnější příklad.

### 3.2.1 D*3*-brána

D*3*-brána v našem případě znamená, že na všechny souřadnice řešení modelu na $N \times G$ v rozkladu (5|1) jsou kladeny podmínky volných konců a konce struny se volně pohybují v prostoru ("spacefilling brane"). Lepící matice v adaptovaných souřadnicích má tvar matice jednotkového operátoru a stejně tak je tomu podle (2.66) i po převedení na operátor na algebře $R$.

$$\mathcal{R}_{t,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R \tag{3.25}$$

Díky symertii $\mathcal{F}(t,\phi)$ jsou podmínky (2.62) splněny triviálně pro $\mathcal{Q} = 0, \mathcal{N} = \mathbf{1}$.

Z (2.71, 2.72) zjistíme, že po transformaci do rozkladu doublu $(6_0|1)$ dostane lepící matice v souřadnicích $t, \chi$ zavedených na $N \times \hat{H}$ tvar

$$\hat{\mathcal{R}}_{t,\chi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

$\hat{\mathcal{R}}_{t,\chi}$ má vlastní číslo $-1$ násobnosti 1. Má tedy jeden Dirichletův směr a jedná se o D$\mathit{2}$-bránu. Pro tuto lepící matici najdeme

$$\hat{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathcal{N}} = \mathbf{1} - \hat{\mathcal{Q}} \tag{3.27}$$

takže podmínky (2.62) jsou splněny.

Na druhou stranu, přetransformujeme-li (3.25) do modelu na $N \times G$ v rozkladu doublu $(5|2i)$, dostaneme

$$\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-4t^4e^{4\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} & -\frac{4t^2e^{2\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} \\ 0 & 0 & \frac{4t^2e^{2\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} & \frac{1-4t^4e^{4\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

$\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi}$ nemá vlastní číslo $-1$ a jedná se proto o D$\mathit{3}$-bránu. Odtud a také z toho, že to (2.58, 2.59) nedovolí, nemůže být matice $\hat{\mathcal{Q}}$ nenulová. Pro $\hat{\mathcal{N}} = \mathbf{1}$ ovšem není splněno (2.57). Zde tedy vidíme, že přestože jsme začali s dobře definovanou D-bránou, dokonce s tou nejjednodušší možnou, Poisson-Lie T-pluralita nezachovala okrajové podmínky (2.57). Ostatní rovnosti z (2.62) však platí.

V tomto velice jednoduchém příkladě jsme se setkali se situací, kdy se v transformované lepící matici vyskytne přihlížející proměnná. Bohužel, náš příklad byl příliš jednoduchý a přítomnost $t$ neměla na D-bránu žádný zásadní vliv. Další příklady pro konstantní diagonální lepící matice jsou vcelku podobné. Uvedeme je ve stručnosti a spíše pro úplnost.

### 3.2.2 D*2*-brána

Lepící matici pro D*2*-bránu na $N \times G$ zvolíme ve tvaru

$$\mathcal{R}_{t,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

takže D*2*-brána je v souřadnicích $t, \phi$ rovina o konstantní souřadnici $\phi^3$, po níž se konec struny může volně pohybovat. Snadno najdeme $\mathcal{Q}, \mathcal{N}$ tak, že $\mathcal{R}_{t,\phi}$ splní podmínky (2.62).

Po transformaci do rozkladů doublu $(6_0|1)$ a $(5|2i)$ dostaneme

$$\hat{\mathcal{R}}_{t,\chi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

$\hat{\mathcal{R}}_{t,\chi}$ má vlastní číslo $-1$ násobnosti 2 a jedná se o D*1*-bránu, přímku o konstantních souřadnicích $\chi^1, \chi^2$. Násobnost vlastního čísla $-1$ pro $\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi}$ je 1 a jedná se o D*2*-bránu, jež je rovinou o konstantní souřadnici $\varphi^2$. Pro obě transformované lepící matice zůstanou v platnosti podmínky (2.62).

### 3.2.3 D*1*-brána

Lepící matici D*1*-brány na $N \times G$ zvolíme ve tvaru

$$\mathcal{R}_{t,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

a D*1*-brána je pro tuto volbu přímka o konstantních souřadnicích $\phi^2, \phi^3$. Najdeme $\mathcal{Q}, \mathcal{N}$ tak, že $\mathcal{R}_{t,\phi}$ splní podmínky (2.62).

Po transformaci do rozkladů doublu $(6_0|1)$ a $(5|2i)$ dostaneme

$$\hat{\mathcal{R}}_{t,\chi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+4t^4e^{4\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} & \frac{4t^2e^{2\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} \\ 0 & 0 & -\frac{4t^2e^{2\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} & \frac{-1+4t^4e^{4\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

$\hat{\mathcal{R}}_{t,\chi}$ má vlastní číslo $-1$ násobnosti 1 a jedná se o D*2*-bránu. $\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi}$ nemá pro $t \neq 0$ vlastní číslo $-1$. Možnost, že $t = 0$ ale můžeme ze všech našich úvah vyloučit, neboť všechny metriky na varietách $\sigma$-modelů jsou pro $t = 0$ degenerované. $\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi}$ tedy zadává D*3*-bránu. Pro $\hat{\mathcal{R}}_{t,\chi}$ najdeme $\hat{\mathcal{Q}}, \hat{\mathcal{N}}$ tak, že (2.62) je splněno. Pro $\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi}$ je sice $\hat{\mathcal{Q}} = 0$, ale okrajové podmínky (2.57) jsou splněny i pro $\hat{\mathcal{N}} = \mathbf{1}$, takže (2.62) je splněno triviálně.

### 3.2.4 D*0*-brána

Nakonec pro D*0*-bránu na $N \times G$ zvolíme lepící matici ve tvaru

$$\mathcal{R}_{t,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

D*0*-brána je bod, neboť jsme zafixovali všechny tři prostorové souřadnice $\phi^1, \phi^1, \phi^3$. K $\mathcal{R}_{t,\phi}$ lze najít $\mathcal{Q}, \mathcal{N}$ tak, že podmínky (2.62) jsou splněny.

Po transformaci do rozkladů doublu $(6_0|1)$ a $(5|2i)$ dostaneme

$$\hat{\mathcal{R}}_{t,\chi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+4t^4e^{4\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} & \frac{4t^2e^{2\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} \\ 0 & 0 & -\frac{4t^2e^{2\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} & \frac{-1+4t^4e^{4\varphi^1}}{1+4t^4e^{4\varphi^1}} \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

$\hat{\mathcal{R}}_{t,\chi}$ má vlastní číslo $-1$ násobnosti 2, takže jsme transformací získali D*1*-bránu. Při vyloučení $t = 0$ má pro $\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi}$ vlastní číslo $-1$ násobnost 1 a $\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi}$ tedy zadává D*2*-bránu jako plochu o fixní souřadnici $\varphi^1$. Pro obě transformované lepící matice zůstanou v platnosti podmínky (2.62).

Shrneme-li výše uvedené čtyři případy, můžeme říct, že role přihlížející proměnné byla zatím velmi malá. $t$ se v transformovaných lepících maticích sice vyskytla, nicméně jedinou možnost, kdy by měla vliv na D-bránu, tedy $t = 0$, jsme vyloučili. Studované lepící matice byly triviální. V další části se pokusíme najít nějaký zajímavější příklad. Jak uvidíme, není to vůbec lehké.

## 3.3 Lepící matice závislé na přihlížející proměnné

Zajímavé věci se jistě budou dít při transformaci takových lepících matic, které budou již od počátku záviset na přihlížející proměnné. Speciálně pak takové, které nejsou blokově diagonální a míchají grupové a přihlížející proměnné. Jak ale najít takovou $\mathcal{R}$, aby na původním modelu splnila (2.62)?

Na první pohled by se zdálo, že takovou lepící matici bude snadné najít. Podmínku konformní symetrie (2.60) můžeme snadno maticemi vielbeinů převést na podmínku pro operátor $R$.

$$R \cdot (F(y,g) + F(y,g)^T) \cdot R^T = (F(y,g) + F(y,g)^T) \tag{3.35}$$

$F$ známe z (3.5) a je zřejmé, že $R$ bychom měli hledat ve tvaru matic grupy O(1,3), jen některé složky budou přeškálované $t$. Budeme tedy brát $R$ v tomto tvaru, k němu hledat $\mathcal{R}$ a testovat splnění podmínek (2.62).

K $\mathcal{R}$ dokážeme z (2.58, 2.59) vždy najít matice $\mathcal{Q}, \mathcal{N}$. Ne vždy se ale povede splnit okrajové podmínky (2.57). Ty jsou splněny například pro následující matice ve tvaru podobném rotaci kolem osy x a boostu podél y

$$\mathcal{R}_{rot_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(f(t,\phi)) & \sin(f(t,\phi)) \\ 0 & 0 & \sin(f(t,\phi)) & -\cos(f(t,\phi)) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_{boost_y} = \begin{pmatrix} \cosh(g(t,\phi)) & 0 & \frac{e^{\phi^1}\sinh(g(t,\phi))}{t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -te^{-\phi^1}\sinh(g(t,\phi)) & 0 & -\cosh(g(t,\phi)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde $f, g$ jsou libovolné funkce proměnných $t, \phi$. Všechny podmínky byly dosud čistě algebraické a funkcí $f, g$ se nedotkly. Do hry ale vstupuje poslední podmínka, kterou jsme ještě neuvážili, totiž diferenciální podmínka pro matici $\mathcal{N}$, která zajišťuje, že D-brána je dobře definovanou varietou. V $\mathcal{N}$ se $f, g$ vyskytují také a (2.61) je významně omezí. Zjistíme totiž, že $f$ může být funkcí pouze proměnných $\phi^2, \phi^3$, zatímco $g \equiv 0$. $\mathcal{R}_{boost_y}$ tedy přejde na konstantní diagonální lepící matici, které jsme již studovali. Studovat $\mathcal{R}_{rot_x}$ pro $f = f(\phi^2, \phi^3)$ nám nejspíš neposkytne žádnou novou informaci o roli přihlížející proměnné při pluralitě okrajových podmínek. Navíc, jak dále demonstrujeme, závislost na těchto proměnných je pro nás nežádoucí.

Můžeme jistě vzít za $R$ jiné elementy O(1,3) a zkoumat, co se bude dít. Při všech pokusech, které jsem prováděl jak s čistými rotacemi či boosty, tak s jejich skládáním, jsem však vždy dospěl ke stejnému výsledku jako v předchozích dvou příkladech. Buď se nepovede splnit okrajové podmínky, nebo diferenciální podmínka pro $\mathcal{N}$ zredukuje příklad na konstantní matici.

Další postup by už měl být sofistikovanější než uvedené pokusy. Začneme opět konformní podmínkou (2.60). Tu sice nedokážeme nijak elegantně v obecnosti vyřešit, zmínili jsme už ale, že metrika $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ je plochá a lze tedy najít souřadnice $\xi$, v nichž jsou její složky konstantní. Ploché souřadnice budou takové, že Christoffelovy symboly spočtené z metriky v souřadnicích $\xi$ budou nulové. To nám z transformačních vztahů $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ dává diferenciální rovnice pro $\xi$

$$\frac{\partial^2 \xi^\kappa}{\partial\Phi^\nu \partial\Phi^\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{\partial\xi^\kappa}{\partial\Phi^\mu} \tag{3.36}$$

kde $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ počítáme z (3.6). V obecném řešení (3.36) se vyskytuje několik integračních konstant, jež pak určují výsledný tvar konstantní metriky. Pro naše potřeby zvolíme tyto konstanty a tedy i transformaci souřadnic jako

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= te^{\phi^1} + (\phi^2)^2 te^{-\phi^1} + (\phi^3)^2 te^{-\phi^1} \\
\xi^2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\phi^2 te^{-\phi^1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^3 te^{-\phi^1} \\
\xi^3 &= -\frac{1}{2} te^{-\phi^1} \\
\xi^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^2 te^{-\phi^1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^3 te^{-\phi^1}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Metriku $\mathcal{G}$ máme v souřadnicích $\xi$ jako

$$\mathcal{G}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

a lepící matici $\mathcal{R}_\xi$ budeme hledat ve tvaru

$$\mathcal{R}_\xi = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

kde $\mathcal{R}_1$ je blok $3 \times 3$. Důvod pro tuto volbu $\xi$ a $\mathcal{R}_\xi$ spočívá v tom, že konformní podmínku (2.60) dokážeme nyní na počítači vyřešit obecně. $\mathcal{R}_\xi$ bude obsahovat několik volných parametrů a funkcí a je možno nyní testovat podmínky (2.62) přímo v souřadnicích $\xi$, a tím $\mathcal{R}_\xi$ dále omezovat. Dostaneme tak poměrně širokou třídu lepících matic, jež splňují všechny podmínky kladené na D-bránu v souřadnicích $\xi$, a tím pádem i v souřadnicích $t, \phi$. $\mathcal{R}_\xi$ dokonce mohou obsahovat libovolné funkce proměnných $\xi$.

Problém ale nastává právě v okamžiku, kdy takto získané lepící matice převedeme zpět do souřadnic $t, \phi$. Podle (3.37) se totiž v $\mathcal{R}_{t,\phi}$ vždy objeví souřadnice $\phi^2, \phi^3$. Závislosti na těchto proměnných se nezbavíme ani při přechodu k matici $R$, jež je pro nás počátečním vstupem pro vztah pro pluralitní transformaci (2.71). V důsledku toho, že přechod od $R$ k $\hat{R}$ realizovaný (2.71) je provázen transformací souřadnic (3.14), resp. (3.24), budou výsledné $\hat{\mathcal{R}}$ záviset nejen na proměnných $t, \chi$, resp. $t, \varphi$, jež máme zavedeny na $N \times \hat{H}$ a $N \times G$, ale i na proměnných $\bar{h}$ a $\breve{g}$ duálních grup. To je ovšem nežádoucí. Není důvod, proč by duální grupy měly jakkoliv promlouvat do okrajových podmínek na $G, \hat{H}$. Bohužel, jak už ze studia modelů bez přihlížejících proměnných víme, stavá se to, ačkoliv pro to ještě nebylo poskytnuto zdůvodnění ani návod, jak tomu zabránit. Transformované lepící matice z uvedených důvodů nedefinují dobré D-brány a pro jejich složitost je nebudu uvádět. Lze však poznamenat, že (2.62) budou splněny až na okrajové podmínky (2.57).

Abychom se vyhnuli závislosti $\mathcal{R}_{t,\phi}$ na proměnných $\phi^2, \phi^3$, budeme postupovat analogicky jako v [5]. Prozkoumáním transformačního vztahu (2.71) dojdeme k závěru, že chceme-li, aby $\hat{R}$ závisela pro obě dvě pluralitní transformace pouze na patřičných proměnných správné grupy, nesmí být výraz $F(y,g)^{-T} \cdot R \cdot F(y,g)$ závislý na $\phi^2, \phi^3$. Závislost na $t, \phi^1$ podle (3.14, 3.24) dovolit můžeme. Označíme proto $C(t,\phi^1) := F(y,g)^{-T} \cdot R \cdot F(y,g)$ a pokusíme se najít takové $C(t,\phi^1)$, že když z něj zpět zrekonstruujeme $\mathcal{R}_{t,\phi}$, povede se splnit (2.62).

Začneme opět u konformní podmínky. Z (3.35) dostaneme pro $C(t,\phi^1)$

$$C(t,\phi^1) \cdot (F(y,g)^{-1} + F(y,g)^{-T}) \cdot C(t,\phi^1)^T = (F(y,g)^{-1} + F(y,g)^{-T}) \quad (3.40)$$

To pro $F(y,g)$ z (3.5) sice obecně vyřešit neumíme, snadno bychom to ale vyřešili, pokud bychom v (3.40) měli $F$ ve tvaru (3.38), označme ji jako $F_A$, a $C(t,\phi^1)$ hledali ve tvaru (3.39), označíme ji jako $C(t,\phi^1)_A$. Pak jsme schopni najít poměrně snadno obecné řešení. Několika jednoduchými úpravami zjistíme, že pokud by se přechod mezi $F(y,g)$ a $F(y,g)_A$ realizoval jako

$$F(y,g) = \tilde{J}^{-T} \cdot F(y,g)_A \cdot \tilde{J}^{-1} \quad (3.41)$$

pak transformace od $C(t,\phi^1)_A$ k $C(t,\phi^1)$ vypadá

$$C(t,\phi^1) = \tilde{J} \cdot C(t,\phi^1)_A \cdot \tilde{J}^{-1} \quad (3.42)$$

přičemž vhodná $\tilde{J}$ je

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} -\frac{j}{t} & 0 & \frac{t}{2j} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} & 0 & 0 \\ \frac{j}{t^2} & 0 & \frac{1}{2j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

kde $j \neq 0$ a jinak libovolné. Dlužno podotknout, že $\tilde{J}$ není Jakobiho maticí transformace souřadnic. V (3.41) přecházíme mezi formami, nikoli mezi tenzorovými poli.

Nalezená $C(t,\phi^1)_A$ převedeme podle (3.42) na $C(t,\phi^1)$ z nichž zrekonstruujeme $R$ a poté i $\mathcal{R}_{t,\phi}$. Nyní budeme testovat (2.62). Z poměrně široké škály příkladů, které jsme získali, pouze několik málo splní okrajové podmínky (2.57) a ještě méně jich projde (2.61). Ve skutečnosti se povedlo najít pouze jednu lepící matici $\mathcal{R}_{t,\phi}$, která projde sítem všech podmínek (2.62).

$$\mathcal{R}_{t,\phi} = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{4c(t,\phi^1)} - \frac{c(t,\phi^1)}{t^2} & 0 & -\frac{te^{\phi^1}}{4c(t,\phi^1)} + \frac{e^{\phi^1}c(t,\phi^1)}{t^3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{e^{-\phi^1}(t^4-4c(t,\phi^1)^2)}{4tc(t,\phi^1)} & 0 & \frac{t^2}{4c(t,\phi^1)} + \frac{c(t,\phi^1)}{t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

$c(t,\phi^1)$ je zde libovolná funkce proměnných $t,\phi^1$. $\mathcal{R}_{t,\phi}$ má vlastní číslo $-1$ násobnosti 3 a jedná se tedy o D*0*-bránu nezávisle na volbě funkce $c(t,\phi^1)$.

Můžeme vidět, že v $\mathcal{R}_{t,\phi}$ jsou zafixovány směry $\phi^1,\phi^3$, takže $\phi^1$ vystupuje v $\mathcal{R}_{t,\phi}$ spíše jako parametr a mění se pouze podle toho, kam bránu umístíme. To však nic neubírá na faktu, že se povedlo najít lepící matici, která závisí na přihlížející proměnné skrze libovolnou funkci a navíc má nenulové mimodiagonální bloky. Pro speciální volbu $c(t,\phi^1) = -\frac{t^2}{2}$ dostaneme konstantní diagonální D*0*-bránu, kterou jsme už studovali v předchozí části. Pokud zvolíme $c(t,\phi^1) = \frac{t^2}{2}$, bude $\mathcal{R}_{t,\phi}$ opět konstantní diagonální, ovšem Dirichletova podmínka bude uplatněna na časovou souřadnici $t$ místo na $\phi^2$. To nechceme, neboť bychom fixovali souřadnicový čas.

Lepící matice spojené s $\mathcal{R}_{t,\phi}$ pluralitou jsou

$$\hat{\mathcal{R}}_{t,\chi} = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{4c(t,-\chi^3)} - \frac{c(t,-\chi^3)}{t^2} & -\frac{e^{\chi^3}(t^4-4c(t,-\chi^3)^2)}{8tc(t,-\chi^3)} & -\frac{e^{\chi^3}(t^4-4c(t,-\chi^3)^2)}{8tc(t,-\chi^3)} & 0 \\ -\frac{e^{-\chi^3}(t^4-4c(t,-\chi^3)^2)}{4t^3c(t,-\chi^3)} & -\frac{(t^2+2c(t,-\chi^3))^2}{8t^2c(t,-\chi^3)} & -\frac{(t^2-2c(t,-\chi^3))^2}{8t^2c(t,-\chi^3)} & 0 \\ -\frac{e^{-\chi^3}(t^4-4c(t,-\chi^3)^2)}{4t^3c(t,-\chi^3)} & -\frac{(t^2-2c(t,-\chi^3))^2}{8t^2c(t,-\chi^3)} & -\frac{(t^2+2c(t,-\chi^3))^2}{8t^2c(t,-\chi^3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi} = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{4c} - \frac{c}{t^2} & 0 & e^{\varphi^1}\left(-\frac{t^3}{4c} + \frac{c}{t}\right) & \frac{1}{2}e^{-\varphi^1}\left(-\frac{t}{4c} + \frac{c}{t^3}\right) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{e^{3\varphi^1}t(t^4-4c^2)}{(1+4t^4e^{4\varphi^1})c} & 0 & -\frac{c+e^{\varphi^1}t^2(t^4+4c^2)}{(1+4t^4e^{4\varphi^1})c} & -\frac{e^{2\varphi^1}(t^2-2c)^2}{2(1+4t^4e^{4\varphi^1})c} \\ \frac{e^{\varphi^1}(t^4-4c^2)}{2t(1+4t^4e^{4\varphi^1})c} & 0 & \frac{e^{2\varphi^1}(t^2-2c)^2}{2(1+4t^4e^{4\varphi^1})c} & \frac{t^4+4c(4e^{4\varphi^1}t^6+c)}{4t^2(1+4t^4e^{4\varphi^1})c} \end{pmatrix}$$

kde v $\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi}$ píšeme $c$ čistě proto, aby se výraz vešel na stránku. Patří tam samozřejmě $c(t,-\varphi^1)$. Funkce $c(t,-\chi^3), c(t,-\varphi^1)$ jsou stejné jako $c(t,\phi^1)$, jen bylo dosazeno za $\phi^1$ z (3.14), resp. (3.24).

Pro obecné $c(t, -\chi^3)$ má $\hat{\mathcal{R}}_{t,\chi}$ vlastní číslo $-1$ násobnosti 2 a zadává na $N \times \hat{H}$ D*1*-bránu. Speciální případ by nastal, pokud by $c(t, -\chi^3) = \frac{t^2}{2}$. Pak bychom totiž měli čtyři Dirichletovy směry, tedy D*(-1)*-bránu. To už jsme ale dříve zavrhli, neboť takovou volbou funkce $c$ fixujeme v původní i transformované lepící matici časovou souřadnici.

$\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi}$ má pro obecné $c(t, -\varphi^1)$ vlastní číslo $-1$ násobnosti 1 a zadává na $N \times G$ D*2*-bránu. Speciálním případem je opět pouze $c(t, -\varphi^1) = \frac{t^2}{2}$, kdy má $\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi}$ vlastní číslo $-1$ násobnosti 3. U obou transformovaných matic se závislost na proměnných $\chi^3, \varphi^1$ objevuje stejným způsobem, jako tomu bylo pro $\phi^1$ u $\mathcal{R}_{t,\phi}$. Příslušné směry jsou opět Dirichletovy.

Testováním podmínek (2.62) pro transformované lepící matice zjistíme, že konformní podmínka (2.60) je zachována. Matice Neumannova a Dirichletova projetoru jsou netriviální, ale konstatní, takže (2.61) je splněna. Jak $\hat{\mathcal{R}}_{t,\chi}$, tak $\hat{\mathcal{R}}_{t,\varphi}$ však splní okrajové podmínky (2.57) pouze pokud $c(t, -\chi^3) = c(t, -\varphi^1) = -\frac{t^2}{2}$. Tuto možnost jsme už prostudovali dříve jako D*0*-bránu zadanou konstantní diagonální lepící maticí. Kromě tohoto případu tedy Poisson-Lie T-pluralita opět nezachovala platnost okrajových podmínek.

# Kapitola 4

# Závěr

Na závěr konstatujme, že zadání práce se povedlo splnit. Dokázali jsme najít formule pro Poisson-Lie T-plurální transformaci $\sigma$-modelů s přihlížejícími proměnnými. Viděli jsme, že pokud grupa umožňující pluralitu nepůsobí na cílové varietě tranzitivně ale pouze volně, můžeme používat de facto stejné formule jako pro atomární dualitu. Jen je třeba všechny matice, s nimiž zacházíme, rozšířit správným způsobem o patřičné maticové bloky. Tyto formule dosud nebyly nikde publikovány. Bez přítomnosti přihlížejících proměnných se ale redukují na známe vztahy a pokud se místo plurality omezíme na dualitu, dostaneme ty formule, které již pro přihlížející proměnné zveřejněny byly. Při zkoumání podmínek pro D-brány jsme zjistili, že situace je shodná s modely, kde nerozlišujeme přihlížející a grupové proměnné. Transformační vztah pro lepící matici pak byl opět patřičným rozšířením vztahu platného bez přihlížejících proměnných.

V praktické části jsme zkoumali konkrétní příklady tří $\sigma$-modelů a transformace několika D-brán. Potýkali jsme se s poměrně složitými výpočty, ovšem největším problémem se ukázalo být hledání dobře definované netriviální lepící matice, na které bychom prozkoumali roli přihlížející proměnné. Bohužel se doposud povedlo nalézt pouze jednu. Během tohoto hledání bylo snad patrno, jak silné restrikce jsou na lepící matici kladeny. Museli jsme brát v úvahu nejen podmínky studované v teoretické části, ale i závislost na souřadnicích modelu. Přesto lze učinit několik závěrů ohledně transformace podmínek pro lepící matici. Viděli jsme, že podmínka konformní symetrie je splněna vždy. Ostatně její zachování při atomární pluralitě bylo v [5] prokázáno obecně. Po nalezení Dirichletových a Neumannových projektorů však musíme konstatovat, že okrajové podmínky $\sigma$-modelu nejsou po transformaci splněny. O transformaci diferenciální podmínky na matici $\mathcal{N}$ nemůžeme mnoho říci, neboť ve studovaných případech vycházela $\hat{\mathcal{N}}$ konstantní.

# Literatura

[1] C. Klimčík and P. Ševera, *Dual non–Abelian duality and the Drinfeld double*, Phys. Lett. B, 351:455–462, 1995 [hep-th/9502122]

[2] C. Klimčík, *Poisson–Lie T–duality*, Nucl. Phys B (Proc.Suppl.), 46:116–121, 1996 [hep-th/9509095]

[3] R. von Unge, *Poisson–Lie T–plurality*, J. High En. Phys. 02:07 (2002) 014, [hep-th/0205245]

[4] L. Hlavatý, J. Hýbl, M. Turek, *Classical solutions of sigma models in curved backgrounds by the Poisson-Lie T-plurality*, Int. J. Mod. Phys. A22 (2007) 1039-1052 [hep-th/0608069v1]

[5] C. Albertsson, L. Hlavatý, L. Šnobl, *On the Poisson-Lie T-plurality of boundary conditions*, J. Math. Phys. 49, 032301 (2008) [hep-th/0706.0820v2]

[6] V. Štěpán, *Struktura Drinfeldova doublu, konstrukce $\sigma$-modelů s přihlížejícími proměnnými*, Výzkumný úkol FJFI 2006