ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika

Supersymetrie, Lieovské superalgebry, Maninovy supertrojice

Supersymmetries, Lie superalgebras, Manin supertriples

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Autor práce: **Jan Vysoký**
Vedoucí práce: **prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.**
Akademický rok: **2008/2009**

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu práce, prof. RNDr Ladislavu Hlavatému, DrSc., za trpělivost a úsilí, které mně a této práci věnoval.

Dále mé bezvýhradně skvělé rodině, bez jejíž podpory a zázemí by práce nikdy nevznikla.

Název práce: **Supersymetrie, Lieovské superalgebry, Maninovy supertrojice**
Autor: Jan Vysoký

Obor: Matematické inženýrství
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská,
České vysoké učení technické v Praze.

Abstrakt:

Lieovské superalgebry jsou zajímavým zobecněním ve fyzice hojně užívaných Lieovských algeber. Jako matematická teorie tvoří základ teorie supersymetrií. Drinfeldův double je geometrickou strukturou (Lieovou grupou) důležitou pro konstrukci tzv. dualizovatelných sigma modelů. V této práci hledáme způsob, jak tyto dva matematické pojmy sjednotit. Výsledkem je definice Drinfeldova superdoublu, Maninovy supertrojice a jejich klasifikace v nízkých dimenzích. V práci jsou podrobně diskutovány všechny problémy, které během tohoto procesu vznikly.

Klíčová slova: Lieovská superalgebra, Drinfeldův superdouble, Maninova supertrojice, klasifikace

Title: **Supersymmetries, Lie superalgebras, Manin supertriples**
Author: Jan Vysoký

Abstract:

Lie superalgebras are an interesting generalisation of Lie algebras. This mathematical theory is essential in the theory of supersymmetries. Drinfeld double is a geometric structure (Lie group) important in the construction of so called dual sigma models. In this work we look for a way to unify these two terms. The result is a definition of Drinfeld superdouble, Manin supertriple and their classification in low dimensions. All the problems we found during this process are discussed carefully.

Keywords: Lie superalgebra, Drinfeld superdouble, Manin supertriple, classification

Obsah

Kapitola 1

Úvod

V moderní fyzice hraje velmi důležitou roli studium symetrií, například invariance fyzikálních zákonů vůči otočením, lorentzovským boostům ap. V sedmdesátých letech dvacátého století byl nalezen zajímavý způsob, jak takové symetrie netriviálním způsobem rozšířit na tzv. supersymetrie. Vznikla rozsáhlá teorie, často zkracovaná na SuSy, jejíž předpovědi jsou zajímavé především pro částicovou fyziku, ale i pro kvantovou teorii pole nebo teorii strun.

Matematickým stavebním kamenem supersymetrií jsou Lieovské superalgebry, zajímavé a podivuhodné výsledky skýtající zobecnění teorie Lieovských algeber. Definice pojmu Lieovská superalgebra, popis základních vlastností a jejich úplná klasifikace v nízkých dimenzích (konkrétně do dimenze tři) jsou náplní druhé kapitoly.

Ve třetí kapitole seznámíme čtenáře s geometrickým objektem (Lieovou grupou) nazývaným Drinfeldův double. Tato matematická struktura se stala terčem zájmu v okamžiku, kdy se ukázalo, že lze s jeho pomocí zkonstruovat tzv. dualizovatelné sigma modely, část matematické teorie související s teorií strun. Podstatnou částí Drinfeldova doublu je jeho algebraická struktura (je to Lieova grupa), ve které hrají významnou roli speciální trojice Lieovských algeber, tzv. Maninovy trojice.

Vyvrcholením této práce bude čtvrtá kapitola, obsahující postupnou cestu za definicí nové matematické struktury, kterou nazveme Drinfeldův superdouble. Zatím nevyřešeným problémem je definice supervariety a tím pádem Lieovské supergrupy. Obloukem se proto těmto pojmům vyhneme a pokusíme se nalézt způsob, jak zobecnit algebraickou strukturu Drinfeldova doublu. Jejím základem již nebude obyčejná Lieovská algebra, ale právě Lieovská superalgebra. Maninova supertrojice poté bude speciální trojice Lieovských superalgeber.

Na závěr čtvrté kapitoly klasifikujeme některé jednoduché speciální případy Drinfeldových superdoublů, resp. Maninových supertrojic, v nízkých dimenzích.

Kapitola 2

Lieovské superalgebry

2.1 Základní pojmy

Definice 2.1.1. Řekneme, že vektorový prostor V nad tělesem T je $\mathbb{Z}_2$ - gradovaný, lze-li psát jako direktní součet prostorů nad tělesem T v podobě:

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_2} V_i$$

V tedy můžeme psát jako $V = V_0 \oplus V_1$. Vektorový prostor s takovou strukturou budeme nazývat **supervektorový prostor**.

Vektory, které leží ve V_0 nebo V_1 nazýváme homogenní. Parita nenulového *homogenního* vektoru $x \in V$, označovaná $|x|$, je v závislosti na tom, zda x patří do V_0 nebo V_1:

$$|x| = \begin{cases} 0 & x \in V_0 \\ 1 & x \in V_1 \end{cases}$$

Vektory s paritou 0 nazýváme sudé, vektory s paritou 1 liché. Obdobně budeme prostory V_0, resp. V_1 nazývat sudá, resp. lichá část supervektorového prostoru V.

Definice 2.1.2. Supervektorový prostor V nad tělesem T vybavený bilineární operací násobení $[\cdot, \cdot] : V \times V \to V$ nazveme **Lieovskou superalgebrou** nad tělesem T, jestliže operace násobení splňuje podmínky:

1. $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$.
2. $(\forall x, y \in V)$ $([x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x])$.
3. $(\forall x, y, z \in V)$ $((-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|z||y|}[z, [x, y]] + (-1)^{|y||x|}[y, [z, x]] = 0)$.

Druhá podmínka se nazývá *superantikomutativita*, rovnost v třetí podmínce se nazývá *super-Jacobiho identita*.

Vzhledem k tomu, že se v definici vyskytuje parita vektoru, týkají se poslední dvě podmínky pouze homogenních vektorů. V souvislosti s fyzikální aplikací Lieovských superalgeber budeme o sudých prvcích mluvit jako o **bosonech** a o lichých jako o **fermionech**. Obdobně nazveme V_0 bosonová část a V_1 fermionová část.

Poznámka 2.1.3. Vzhledem k bilinearitě zobrazení $[\cdot,\cdot]$ můžeme a vždy budeme vlastnosti Lieovských superalgeber popisovat pouze pro homogenní vektory supervektorového prostoru V. Linearita poté zajistí platnost i pro libovolné nehomogenní vektory z V.

Definice 2.1.4. Bilineární operaci násobení $[\cdot,\cdot]$ z 2.1.2 nazýváme **lieovská superzávorka**. Pojem lieovská superzávorka budeme často zkráceně nazývat **komutátor**, respektive **antikomutátor**, viz příklad 2.1.7.

Poznámka 2.1.5. Druhá vlastnost násobení v 2.1.2 říká, že pro kombinaci fermion-fermion je lieovská superzávorka symetrická, v ostatních případech antisymetrická. Pro $V_1 = \{\theta\}$ splývá pojem Lieovská superalgebra s obyčejnou Lieovskou algebrou.

Definice 2.1.6. Nechť V je supervektorový prostor. $V = V_0 \oplus V_1$. Potom **stupněm prostoru** V nazýváme uspořádanou dvojici $g(V) = (m,n)$, kde $m = \dim V_0$ a $n = \dim V_1$.

Nechť $\mathcal{S}$ je Lieovská superalgebra definovaná na supervektorovém prostoru V. Potom **stupněm superalgebry** $\mathcal{S}$ nazýváme stupeň prostoru V. **Dimenzí** superalgebry $\mathcal{S}$ nazýváme dimenzi prostoru V.

Příklad 2.1.7. Nechť V je supervektorový prostor a $g(V) = (m,n)$. Vektory z V zapisujeme v nějaké bázi pomocí jejich souřadnic jako vektory z $T^{(m+n),1}$. Zvolíme-li si bázi tvořenou homogenními vektory tak, že prvních m bazických vektorů jsou bosony, pak pro sudý vektor příšluší prvních m složek jeho souřadnicím, zbylých n je nulových, pro lichý obráceně. To umožní definovat operátory na V pomocí blokových matic z $T^{(m+n),(m+n)}$. Bloky v maticích jsou rozloženy jako:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} m & n \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right) & \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \end{array}$$

Prostor takovýchto matic můžeme rozložit na sudou a lichou část. Sudými zobrazeními nazveme matice blokově diagonální, lichými matice blokově mimo-diagonální. Je evidentní, že sudá zobrazení zachovávají paritu homogenních prvků, lichá zobrazení ji prohodí.

Na tomto (teď již supervektorovém) prostoru matic můžeme definovat součin $[\cdot,\cdot]$ pomocí obyčejného maticového komutátoru ve všech případech až na případ dvou lichých zobrazení, kde použijeme antikomutátor. Díky asociativitě maticového násobení se snadno ověří, že takto definované násobení splňuje všechny tři podmínky v 2.1.2 a zavádí na $T^{(m+n),(m+n)}$ strukturu Lieovské superalgebry.

Bázi bosonové (sudé) části Lieovské superalgebry budeme označovat jako $\{b_i\}_{i=1}^{dimV_0}$ nebo zkráceně b_i. Obdobně bázi fermionové (liché) jako $\{f_\alpha\}_{\alpha=1}^{dimV_1}$ nebo f_α. Jak je vidět, indexy probíhající přirozená čísla do dimenze bosonové části budeme značit latinkou, zatímco v případě fermionového indexu písmeny řeckými.

Vzhledem k bilinearitě stačí pro úplný popis Lieovské superalgebry definovat hodnoty součinu pro vektory báze. Výsledné vektory opět budou kombinací bazických vektorů a celou Lieovskou superalgebru tak můžeme popsat pouze pomocí jejich souřadnic v dané bázi. Taková čísla se nazývají **strukturní koeficienty**.

Z bilinearity lieovské superzávorky a definice báze je vidět, že splní-li super-Jacobiho identitu všechny kombinace bazických vektorů, splní ji i každý vektor. Při zkoumání Lieovských superalgeber se tak zcela stačí zaměřit na bazické vektory a strukturní koeficienty, které určí vztahy mezi nimi.

Při výše zmíněném označení bazických vektorů tedy budeme celou superalgebru popisovat pomocí strukturních koeficientů definovaných jako:

$$[b_i, b_j] = {\beta_{ij}}^k b_k$$

$$[b_i, f_\alpha] = {\sigma_{i\alpha}}^\nu f_\nu$$

$$[f_\alpha, f_\beta] = {\varphi_{\alpha\beta}}^k b_k$$

Při sčítání přes k nebo ν budeme vždy používat Einsteinova sumačního pravidla.

Poznámka 2.1.8. Je zřejmé, že vzhledem k antisymetrii v obou argumentech bude vždy ${\beta_{ii}}^k = 0$. Toto však rozhodně neplatí ani pro koeficienty ${\sigma_{i\alpha}}^\nu$ ani pro ${\varphi_{\alpha\alpha}}^k$!

Příklad 2.1.9. Jedna z nejjednodušších Lieovských superalgeber je definována na prostoru $V = \{b_1\}_{lin} \oplus \{f_1\}_{lin}$ pomocí strukturních koeficientů ${\sigma_{11}}^1 = 1$, ${\varphi_{11}}^1 = 0$. Vzhledem k poznámce 2.1.8 nebudeme nikdy vypisovat vztahy ani koeficienty, které jsou triviálně nulové z důvodu antisymetrie.

Definice 2.1.10. Mějme Lieovskou superalgebru $\mathcal{S}$ definovanou na prostoru V, nechť $[\cdot,\cdot]$ je její Lieovská superzávorka. $N, M \subseteq V$ libovolné neprázdné podmnožiny V.

1. Symbolem $[M, N]$ označíme množinu $span(\{[x, y] \mid x \in M, y \in N\})$.

2. **Podsuperalgebrou** superalgebry $\mathcal{S}$ budeme nazývat každý podprostor $M \Subset V$ takový, že $[M, M] \subseteq M$.

3. **Ideálem** superalgebry $\mathcal{S}$ budeme nazývat každý podprostor $M \Subset V$ takový, že $[M, V] \subseteq M$.

4. **Centrem** superalgebry $\mathcal{S}$ budeme nazývat největší ideál M takový, že $[M, V] = 0$.

Poznámka 2.1.11. Podprostor je tedy podsuperalgebrou, je-li spolu s na sebe zúženým součinem $[\cdot,\cdot]$ Lieovskou superalgebrou. Každý ideál a tedy i centrum jsou podsuperalgebrou.

Definice 2.1.12. Řekneme, že superalgebra $\mathcal{S}$ na vektorovém prostoru V je **Abelovská**, jestliže $[V,V]=0$

Definice 2.1.13. Nechť $\mathcal{S}$ je Lieovská superalgebra na prostoru V a $[\cdot,\cdot]$ její lieovská superzávorka. Definujeme rekurentně posloupnost podprostorů jako $S^{(n)}=[S^{(n-1)},S^{(n-1)}]$, kde $S^{(0)}=V$. Řekneme, že superalgebra $\mathcal{S}$ je **řešitelná**, existuje-li $k\in\mathbb{N}$ takové, že $S^{(k)}=0$.

Definice 2.1.14. Nechť $\mathcal{S}$ je Lieovská superalgebra na prostoru V a $[\cdot,\cdot]$ její lieovská superzávorka. Definujeme rekurentně posloupnost podprostorů jako $S_{(n)}=[V,S_{(n-1)}]$, kde $S_{(0)}=V$. Řekneme, že superalgebra $\mathcal{S}$ je **nilpotentní**, existuje-li $k\in\mathbb{N}$ takové, že $S_{(k)}=0$.

Poznámka 2.1.15. Každá nilpotentní algebra je řešitelná. Naopak tomu pochopitelně není.

Příklad 2.1.16. Lieovská superalgebra z příkladu 2.1.9 je řešitelná, protože $S^{(1)}=[V,V]=span(f_1)$ a $S^{(2)}=[S^{(1)},S^{(1)}]=0$. Na druhou stranu není nilpotentní, protože $S_{(1)}=span(f_1)$, $S_{(2)}=[V,S_{(1)}]=span(f_1)$.

2.2 Klasifikace Lieovských superalgeber

2.2.1 Úvod

Řekli jsme si, že pro plné určení Lieovské superalgebry stačí definovat hodnoty součinu bazických vektorů, respektive strukturních koeficientů. Z toho ale vyplývá nutnost výběru nějaké konkrétní báze, ve které strukturní koeficienty určíme.

Poznámka 2.2.1. Ačkoliv jsme definovali Lieovskou superalgebru jako strukturu nad libovolným tělesem T, budeme ve zbytku této kapitoly uvažovat $T=\mathbb{C}$.

Příklad 2.2.2. Nechť $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ jsou dvě libovolné superalgebry na prostoru $V=V_0\oplus V_1$. Nechť $[\cdot,\cdot]_1$ a $[\cdot,\cdot]_2$ jejich lieovské superzávorky. Může se stát, že existuje lineární bijekce $\mathbf{P}:V\to V$ taková, že pro pevně zvolenou bázi $\mathcal{E}=\{e_1,\ldots,e_n\}\subset V$ platí $\mathbf{P}[e_i,e_j]_1=[\mathbf{P}e_i,\mathbf{P}e_j]_2$, které navíc zachovává paritu homogenního vektoru. Tedy boson zobrazí na boson a fermion na fermion.

$\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ potom můžeme považovat za jednu a tutéž superalgebru ve dvou různých bázích $\mathcal{E}=\{e_1,\ldots,e_n\}$ a $\mathcal{E}'=\{\mathbf{P}e_1,\ldots,\mathbf{P}e_n\}$.

Definice 2.2.3. Nechť $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ jsou dvě libovolné Lieovské superalgebry definované na prostorech $V^{(1)} = V_0^{(1)} \oplus V_1^{(1)}$ a $V^{(2)} = V_0^{(2)} \oplus V_1^{(2)}$. Nechť $[\cdot,\cdot]_1$ a $[\cdot,\cdot]_2$ jsou jejich lieovské superzávorky. Řekneme, že superalgebry $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ jsou **izomorfní**, když existuje lineární bijekce $\mathbf{P} : V_1 \to V_2$ taková, že:

$$(\forall x, y \in V^{(1)})(\mathbf{P}[x, y]_1 = [\mathbf{P}x, \mathbf{P}y]_2) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{P}(V_i^{(1)}) = V_i^{(2)} \tag{2.2}$$

Poznámka 2.2.4. Výše definovaný izomorfismus zavádí ekvivalenci na množině všech Lieovských superalgeber definovaných na supervektorovém prostoru stejného stupně. Každou třídu izomorfních Lieovských superalgeber tak můžeme a budeme v souladu s příkladem 2.2.2 považovat za jednu a tutéž superalgebru zadanou v různých bázích jednoho supervektorového prostoru V.

Při zkoumání zda jsou dvě různé superalgebry stejného stupně izomorfní stačí tedy hledat bazickou transformaci $\mathbf{P}$, která splní podmínky (2.1) a (2.2). Ve skutečnosti tak zvlášť hledáme bazické transformace v bosonové a fermionové části prostoru V, které splní podmínku (2.1). Bude-li $g(V) = (m, n)$, hledáme bazické transformace V v maticovém tvaru:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{P}_1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{P}_2 \end{array}\right) \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \end{array}$$

Klasifikací Lieovských superalgeber stupně (m, n) nazveme nalezení všech tříd ekvivalence podle izomorfismu zavedeného definicí 2.2.3 na množině všech Lieovských superalgeber stupně (m, n).

Dle poznámky 2.2.4 můžeme klasifikaci považovat za nalezení všech Lieovských superalgeber na prostoru V stupně $g(V) = (m, n)$, které na sebe nelze převést žádnou bazickou transformací $\mathbf{P}$ ve smyslu (2.1) a (2.2).

2.2.2 Metoda klasifikace

V této práci se nebudeme zabývat klasifikací obyčejných Lieovských algeber. Obyčejné Lieovské algebry $g(V) = (n, 0)$ jsou v nízkých dimenzích plně klasifikovány až po $n = 6$. Obecně známá a všeobecně využívaná je například Bianchiho klasifikace pro Lieovské algebry dimenze 3, která je rozděluje do jedenácti vzájemně neizomorfních tříd.

Snadno nahlédneme, že opačný případ $g(V) = (0, n)$ pro každé n umožní konstrukci jedné jediné Lieovské superalgebry, a to Abelovské. Bosonová část obsahuje pouze nulový vektor, všechny antikomutátory tak musí zobrazovat právě na něj.

My se budeme zabývat klasifikací superalgeber do dimenze 3, které obsahují alespoň nějaké bosony i fermiony (tedy $g(V) = (m, n)$, $m, n \neq 0$, $m+n \leq 3$). Vlastnosti antikomutátoru výrazně omezí výčet všech možností a k cíli vede přímočarý postup. Při klasifikaci budeme vycházet z poznámky 2.2.4. Cílem tak bude najít všechny Lieovské superalgebry, které na sebe nelze převádět změnou bosonové a fermionové báze. Základním kamenem tohoto postupu budou strukturní koeficienty a jejich omezení super-Jacobiho identitami, do kterých dosadíme všechny možné kombinace bazických vektorů.

Postup pro každý stupeň prostoru V bude následující:

1. Zapíšeme obecně lieovské superzávorky pro všechny kombinace bazických vektorů, a to za pomocí strukturních koeficientů.
2. Tyto strukturní koeficienty omezíme pomocí super-Jacobiho identit.
3. Zapíšeme obecně transformaci bosonů a fermionů a následně i transformaci všech lieovských superzávorek.
4. Projdeme všechny možnosti, které mohou pro strukturní koeficienty nastat, a následně se pokusíme nalézt bazickou transformaci tak, aby v nové bázi měly superzávorky co nejjednodušší tvar. Tím zjistíme, které superalgebry na sebe nelze převést bazickou transformací.

Poznámka 2.2.5. V následujícím textu dodržujeme následující konvence:

1. Jednotlivé třídy neizomorfních superalgeber budeme označovat tučnými římskými číslicemi se stupněm prostoru v indexu. Například $\mathbf{IV}_{(1,2)}$.
2. Bázi prostoru V, $g(V) = (m, n)$, budeme označovat $\{b_i\}_{i=1}^m$, $\{f_\alpha\}_{\alpha=1}^n$.
3. Bazické vektory v nové bázi budeme označovat $\{b'_i\}_{i=1}^m$, $\{f'_\alpha\}_{\alpha=1}^n$.
4. Triviálně nulové komutátory $[b_i, b_i] = 0$ nebudeme nikde vypisovat.

2.2.3 Příklad klasifikace

V příštích kapitolách budeme využívat výsledků klasifikace pro Lieovské superalgebry dimenze menší nebo rovné třem. Jejich nalezení je podrobně popsáno v dodatku A.

Postup klasifikování Lieovských superalgeber si předvedeme pouze na jednoduchém příkladu stupně $(1, 1)$. Obecný tvar superzávorek jest:

$$[b_1, f_1] = cf_1$$

$$[f_1, f_1] = db_1$$

$$c, d \in \mathbb{C}$$

Ze super-Jacobiho identit dostaneme jediné omezení:

$$cd = 0$$

Libovolná transformace bazických vektorů má tvar:

$$b'_1 = k_1 b_1$$

$$f'_1 = k_2 f_1$$

$$k_1, k_2 \in \mathbb{C}, k_1 \neq 0, k_2 \neq 0.$$

Superzávorky v nové bázi mají tvar:

$$[b'_1, f'_1] = [k_1 b_1, k_2 f_1] = k_1 k_2 [b_1, f_1] = k_1 k_2 c f_1 = k_1 c f'_1$$

$$[f'_1, f'_1] = \cdots = (k_2^2 / k_1) d b'_1$$

Vzhledem k omezení výše mohou nastat tři případy:

1. $c = 0 \wedge d = 0$

   Tato superalgebra je Abelovská. Bude jí i v jakékoliv jiné bázi. Označme ji $\mathbf{I}_{(1,1)}$.

2. $c \neq 0 \wedge d = 0$

   Zvolíme $k_1 = \frac{1}{c}$, $k_2 = 1$. V nové bázi má superalgebra tvar:

   $$[b'_1, f'_1] = f'_1$$

   $$[f'_1, f'_1] = 0$$

   Tuto superalgebru označíme jako $\mathbf{II}_{(1,1)}$.

3. $c = 0 \wedge d \neq 0$

   Zvolíme $k_1 = \frac{1}{d}$, $k_2 = 1$. V nové bázi má superalgebra tvar:

   $$[b'_1, f'_1] = 0$$

   $$[f'_1, f'_1] = b'_1$$

   Tuto superalgebru označíme jako $\mathbf{III}_{(1,1)}$.

Na první pohled je zřejmé, že žádné ze superalgeber $\mathbf{I}_{(1,1)}$, $\mathbf{II}_{(1,1)}$ a $\mathbf{III}_{(1,1)}$ mezi sebou nelze žádným způsobem převádět. Proto jejich výčtem považujeme superalgebry stupně $(1,1)$ za klasifikované.

2.2.4 Přehled Lieovských superalgeber do dimenze 3

Do přehledu nezařazujeme stupně $g(n, 0)$ ani $g(0, n)$. Pokuď nebude řečeno jinak, bude $\gamma \in \mathbb{C}$.

Lieovská superalgebra	${\sigma_{11}}^1$	${\varphi_{11}}^1$
$\mathbf{I}_{(1,1)}$	0	0
$\mathbf{II}_{(1,1)}$	1	0
$\mathbf{III}_{(1,1)}$	0	1

Tabulka 2.1: Přehled Lieovských superalgeber stupně $(1, 1)$

Superalgebry, v nichž vystupuje parametr γ, jsou neizomorfní pro jeho hodnoty $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Lieovská superalgebra	${\beta_{12}}^1$	${\beta_{12}}^2$	${\sigma_{11}}^1$	${\sigma_{21}}^1$	${\varphi_{11}}^1$	${\varphi_{11}}^2$
$\mathbf{I}_{(2,1)}$	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{II}_{(2,1)}$	0	0	1	0	0	0
$\mathbf{III}^{(\gamma)}_{(2,1)}$	0	1	γ	0	0	0
$\mathbf{IV}_{(2,1)}$	0	0	0	0	1	0
$\mathbf{V}_{(2,1)}$	0	2	1	0	0	1

Tabulka 2.2: Přehled Lieovských superalgeber stupně $(2, 1)$

Lieovská superalgebra	${\sigma_{11}}^1$	${\sigma_{11}}^2$	${\sigma_{12}}^1$	${\sigma_{12}}^2$	${\varphi_{11}}^1$	${\varphi_{12}}^1$	${\varphi_{22}}^1$
$\mathbf{I}_{(1,2)}$	0	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{II}_{(1,2)}$	0	0	0	0	1	0	1
$\mathbf{III}_{(1,2)}$	0	0	0	0	0	1	0
$\mathbf{IV}_{(1,2)}$	0	0	0	0	1	0	0
$\mathbf{V}_{(1,2)}$	0	1	0	0	0	0	0
$\mathbf{VI}^{(\gamma)}_{(1,2)}$	1	0	0	$\gamma,\ \lvert\gamma\rvert \leq 1$	0	0	0
$\mathbf{VII}_{(1,2)}$	1	1	0	1	0	0	0
$\mathbf{VIII}^{(\gamma)\mathbb{R}}_{(1,2)}$	$\gamma \geq 0$	1	-1	γ	0	0	0

Tabulka 2.3: Přehled Lieovských superalgeber stupně $(1, 2)$

Pro $T = \mathbb{C}$ jsou $\mathbf{II}_{(1,2)}$ a $\mathbf{III}_{(1,2)}$ izomorfní, pro $T = \mathbb{R}$ nikoliv.
Pro $T = \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$ jsou $\mathbf{VI}^{(\gamma)}_{(1,2)}$ a $\mathbf{VI}^{(\gamma^*)}_{(1,2)}$ izomorfní.
Pro $T = \mathbb{C}$ patří superalgebra $\mathbf{VIII}^{(\gamma)\mathbb{R}}_{(1,2)}$ do jedné z tříd $\mathbf{V}_{(1,2)}$ - $\mathbf{VII}_{(1,2)}$.

Kapitola 3

Drinfeldův double

3.1 Definice

Definice 3.1.1. Nechť V je reálný vektorový prostor vybavený bilineární formou $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to V$. $A \Subset V$ podprostor. Řekneme, že A je **izotropní** vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle$, když $\langle A, A \rangle = 0$. Řekneme, že A je **maximálně izotropní** vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle$, je-li maximálním prvkem inkluzí uspořádané množiny všech izotropních podprostorů.

Definice 3.1.2. Nechť D je souvislá Lieova grupa, $\mathcal{D}$ je její Lieovská algebra. $\mathcal{D}$ je vybavená bilineární formou $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, která splňuje následující vlastnosti:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je nedegenerovaná a symetrická.
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je ad-invariantní, tj. $(\forall x, y, z \in \mathcal{D})(\langle [z, x], y \rangle + \langle x, [z, y] \rangle = 0)$.

Potom D nazveme **Drinfeldův double**, existuje-li dvojice podalgeber $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ takových, že:

1. $\mathcal{D}$ jako vektorový prostor je direktním součtem $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$.
2. Podalgebry $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ jsou jako podprostory maximálně izotropní vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Uspořádaná trojice algeber $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ se nazývá **Maninova trojice**.

Poznámka 3.1.3. $\mathcal{D}$ je Lieovská algebra Lieovy grupy a je tedy vždy reálná.

Tvrzení 3.1.4. *Nechť D je Drinfeldův double, $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ jeho libovolná Maninova trojice. Potom:*

1. $\dim \mathcal{G} = \dim \tilde{\mathcal{G}}$.
2. $\dim \mathcal{D}$ *je v konečněrozměrném případě sudá.*

Důkaz. 1. (a) $\dim D < +\infty$.

Označme $\dim \mathcal{G} = m$, $\dim \tilde{\mathcal{G}} = n$. Využijeme toho, že pro $\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}$ jako vektorové prostory platí $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \tilde{\mathcal{G}}$. Potom můžeme zvolit libovolnou bázi v $\mathcal{G}$ a libovolnou bázi v $\tilde{\mathcal{G}}$ a jejich sjednocením získat bázi $\mathcal{D}$, ve které bude mít díky maximální izotropii matice bilineární formy blokový tvar:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} m & n \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline B & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \end{array}$$

Tato matice musí být regulární, protože forma je nedegenerovaná. Z toho a z nulovosti diagonálních bloků plyne, že všechny řádky i sloupce matic A a B musí být lineárně nezávislé. To však nastane pouze pro případ A i B čtvercových. Odtud $m = n$.

(b) $\dim D = +\infty$. Je jasné, že alespoň jeden z podprostorů $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ musí mít nekonečnou dimenzi. Předpokládejme pro spor, že podprostor $\mathcal{G}$ má konečnou dimenzi n a podprostor $\tilde{\mathcal{G}}$ nekonečnou. V $\tilde{\mathcal{G}}$ potom můžeme vybrat libovolný soubor $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ lineárně nezávislých vektorů. Definujeme $W = span(e_1, \dots, e_{n+1})$. W je $(n+1)$-rozměrný podprostor $\tilde{\mathcal{G}}$.

Ptejme se, zda existuje $w \in W$ takové, že $\langle g, w \rangle = 0$ pro libovolné $g \in \mathcal{G}$. Označme $\{g_j\}_{j=1}^{n}$ bázi $\mathcal{G}$.

Hledejme koeficienty α^i, takové, že $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha^i \langle g_j, e_i \rangle = 0$ pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$. To je ovšem soustava n lineárních rovnic pro $n+1$ neznámých α^i s nulovou pravou stranou, která má vždy netriviální řešení. Jelikož soubor $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ je LN, je $w = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha^i e_i \neq 0$. a $\forall g \in \mathcal{G}$ platí $\langle g, w \rangle = 0$.

Zvolíme-li libovolné $x \in V$, můžeme ho rozložit jako $x = g + \tilde{g}$, $g \in \mathcal{G}$, $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{G}}$. Potom platí:

$$\langle x, w \rangle = \langle g + \tilde{g}, w \rangle \overset{izot.}{=} \langle g, w \rangle = 0$$

Nalezli jsme tedy $0 \neq w \in V$ takové, že $\forall x \in V \ \langle x, w \rangle = 0$. To je spor s nedegenerovaností formy.

2. Triviální důsledek první části tvrzení.

□

Poznámka 3.1.5. Důkaz pro nekonečnou dimenzi D by se dal použít přímo i pro konečněrozměrný případ, protože jde pouze o důkladné rozepsání maticových úvah. Z praktických důvodů je však vhodné uvést i první postup, který nám poslouží zejména v podobném tvrzení pro Drinfeldovy superdoubly.

Povšimněme si, že v důkazu tvrzení se neuplatní žádná z vlastností formy využívající strukturu Lieovské algebry $\mathcal{D}$, a dokonce ani symetrie formy. Toto pozorování bude hrát důležitou roli pro vlastnosti Drinfeldova superdoublu.

3.2 Klasifikace Drinfeldových doublů

3.2.1 Úvod

Definice 3.2.1. Nechť D_1 a D_2 jsou Drinfeldovy doubly. $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ jsou jejich Lieovské algebry a $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ bilineární formy. Řekneme, že D_1,D_2 jsou **izomorfní Drinfeldovy doubly**, jestliže existuje zobrazení $\mathbf{P}$: $\mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ takové, že:

1. $\mathbf{P}$ je izomorfismus Lieovských algeber $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$ (ve smyslu definice 2.2.3).
2. $(\forall x, y \in \mathcal{D}_1)(\langle x, y\rangle_1 = \langle \mathbf{P}x, \mathbf{P}y\rangle_2)$.

Definice 3.2.2. Řekneme, že $(\mathcal{D}_1, \mathcal{G}_1, \tilde{\mathcal{G}}_1)$, $(\mathcal{D}_2, \mathcal{G}_2, \tilde{\mathcal{G}}_2)$ jsou **izomorfní Maninovy trojice**, existuje-li izomorfismus $\mathbf{P}$ jejich Drinfeldových doublů ve smyslu 3.2.1, který navíc splňuje:

1. $\mathbf{P}(\mathcal{G}_1) = \mathcal{G}_2$.
2. $\mathbf{P}(\tilde{\mathcal{G}}_1) = \tilde{\mathcal{G}}_2$.

Poznámka 3.2.3. Je vidět, že izomorfismus Maninových trojic je výrazně silnější podmínka, než izomorfismus Drinfeldových doublů. Každé dvě izomorfní Maninovy trojice přísluší Drinfeldovým doublům, které jsou izomorfní. Ukáže se, že naopak to neplatí a existují příklady neizomorfních Maninových trojic, jejichž Drinfeldovy doubly jsou izomorfní.

Z přidaných podmínek je vidět, že požadujeme, aby byly $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$, resp. $\tilde{\mathcal{G}}_1$ a $\tilde{\mathcal{G}}_2$ jako Lieovské algebry izomorfní. Ukáže se, že stačí ověřit tyto dva požadavky a zjistit, zda zobrazení zachovává formu (druhá podmínka v definici 3.2.1). Izomorfismus Lieovských algeber $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$ poté plyne z ad-invariance bilineární formy.

Podobně jako v případě Lieovských superalgeber můžeme předpokládat, že jsou všechny Drinfeldovy doubly (lépe řečeno jejich Lieovské algebry) definovány na společném vektorovém prostoru stejné dimenze a považovat hledání izomorfismu za hledání bazické transformace, splňující výše popsané podmínky. V případě izomorfismu Drinfeldových doublů hledáme transformaci celé báze vektorového prostoru, zachovávající tvar formy, v případě izomorfismu Maninových trojic transformace omezené v definici 3.2.2.

Definice 3.2.4. Klasifikací Drinfeldových doublů dimenze n nazveme nalezení všech tříd ekvivalence podle izomorfismu definovaného v 3.2.1 na množině všech Drinfeldových doublů dimenze n.

Definice 3.2.5. Klasifikací Maninových trojic dimenze n nazveme nalezení všech tříd ekvivalence podle izomorfismu definovaného v 3.2.2 na množině všech Maninových trojic příslušejícím Drinfeldovým doublům dimenze n.

3.2.2 Metoda klasifikace Maninových trojic

V celé této práci budeme vycházet z metody klasifikace popsané v [3]. Výhoda této metody spočívá především v tom, že umožní zcela klasifikovat Drinfeldovy doubly, včetně explicitního tvaru bilineární formy a všech příslušných Maninových trojic. Základním stavebním kamenem je možnost převést bilineární formu jakéhokoliv Drinfeldova doublu vhodnou volbou báze na jistý kanonický tvar.

Předpokládejme, že máme pevně danou bilineární, symetrickou, ad-invariantní a nedegenerovanou formu na libovolném vektorovém prostoru dimenze $2n$ (viz tvrzení 3.1.4). Předpokládejme, že máme rozklad na dvě podalgebry $\mathcal{G}$,$\tilde{\mathcal{G}}$ dimenze n. Z nedegenerovanosti formy a snadné maticové úvahy plyne, že můžeme k libovolné dané bázi[1] $\{e_i\}_{i=1}^n$ v $\mathcal{G}$ zvolit bázi $\{\tilde{e}^i\}_{i=1}^n$ v $\tilde{\mathcal{G}}$, takovou, že je splněna podmínka:

$$\langle e_i, \tilde{e}^j \rangle = \delta_i^j \tag{3.1}$$

Toto je několikrát zmíněný kanonický tvar formy, na kterém klasifikace stojí. Dále jsme předpokládali znalost rozkladu na podalgebry. Ve zvolených bázích mají jejich komutátory tvar:

$$[e_i, e_j] = {c_{ij}}^k e_k, \;\; [\tilde{e}^i, \tilde{e}^j] = \tilde{c}^{ij}_{\ \ k} \tilde{e}^k$$

Zbývající komutátory Lieovské superalgebry $\mathcal{D}$ mají tvar:

$$[e_i, \tilde{e}^j] = {\alpha_i}^{jk} e_k + {\alpha_i}^j{}_k \tilde{e}^k$$

Od formy vyžadujeme ad-invarianci a od podalgeber maximální izotropii vůči ní. Proto platí následující:

$$0 = \langle [e_i, e_j], \tilde{e}^k \rangle + \langle e_j, [e_i, \tilde{e}^k] \rangle = \langle {c_{ij}}^l e_l, \tilde{e}^k \rangle + \langle e_j, {\alpha_i}^k{}_m \tilde{e}^m \rangle =$$

$$= {c_{ij}}^l \delta_l^k + {\alpha_i}^k{}_m \delta_j^m = {c_{ij}}^k + {\alpha_i}^k{}_j$$

A odtud tedy:

$${\alpha_i}^j{}_k = {c_{ki}}^j \tag{3.2}$$

Obdobně bychom ukázali, že platí:

$${\alpha_i}^{jk} = \tilde{c}^{jk}_{\ \ i} \tag{3.3}$$

Všechny strukturní koeficienty Lieovské algebry $\mathcal{D}$ jsou tedy plně určeny strukturními koeficienty podalgeber $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$. Odtud plyne tvrzení v druhé část poznámky 3.2.3.

Dosud jsme předpokládali, že Lieovské algebry $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ lze zvolit libovolné. Ukázali jsme ale, že tato volba jednoznačně určuje strukturní koeficienty Lieovské algebry $\mathcal{D}$. Tyto strukturní koeficienty ovšem musí splňovat Jacobiho identity. Ve skutečnosti tak získáme i omezení na strukturní koeficienty ${c_{ij}}^k$ a $\tilde{c}^{ij}_{\ \ k}$.

[1] Zde se výrazně odchylujeme od značení zavedeného v [3]. Důvodem je kompatibilita s označením zavedeným v první kapitole. Důvod označení druhé z bazí $\tilde{e}^i$ s indexem nahoře je poněkuď hlubší, viz. [4], my jej však zavádíme z čistě praktických důvodů

Zde se nám naskýtají dvě možnosti. Můžeme nejprve omezit výběr podalgeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ pomocí Jacobiho identit a poté hledat neizomorfní Maninovy trojice, nebo naopak nejprve nalézt neizomorfní kandidáty na Maninovy trojice, o kterých dodatečně ověříme, že jsou vskutku rozkladem Lieovské algebry na dvě podalgebry společně s formou, o které předpokládáme všechny její vlastnosti. My se v příkladu pro nízkou dimenzi vydáme druhou z cest, narozdíl od autorů [3] a [4].

Z definice 3.2.2 musí být podalgebry $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ izomorfní, stejně jako $\tilde{\mathcal{G}}_1$ a $\tilde{\mathcal{G}}_2$. To ale znamená, že v podalgebrách první trojice musí jít zvolit takové báze, že jejich strukturní koeficienty budou stejné jako strukturní koeficienty podalgeber v druhé z nich. Jestliže má jít navíc o izomorfismus Drinfeldových doublů, musí mít v těchto bázích forma stejný tvar.

Máme-li o dvou Maninových trojicích prohlásit, že jsou izomorfní, zvolíme v obou trojicích báze podalgeber tak, aby měly jejich formy kanonický tvar. To snadno uděláme tak, že si k libovolné bázi první (nejlépe tak, aby byly strukturní koeficienty co nejjednodušší) podalgebry najdeme (duální) bázi v druhé podalgebře. V podalgebrách druhé trojice pak musí jít transformovat báze tak, že strukturní koeficienty budou stejné s těmi v podalgebrách první trojice, a navíc tato transformace zachová kanonický tvar formy.

Pokud se toto podaří, musí už být obě Maninovy trojice izomorfní, protože mezi takto nalezenými bázemi nutně existuje nějaká lineární transformace, která už určitě splní požadavky na izomorfismus Maninových trojic.

Naopak, pokud takový postup selže, Maninovy trojice izomorfní být nemůžou. Jestliže nelze vůbec zvolit báze tak, aby se rovnaly strukturní koeficenty, znamená to, že podalgebry obou trojic nejsou izomorfní a tedy nemůžou ani trojice. Pokud se to sice zdaří, ale žádná taková transformace neumí zachovávat kanonický tvar formy, znamená to, že jsou sice izomorfní algebry $\mathcal{D}_1$,$\mathcal{D}_2$ a dokonce i jejich podalgebry, ale izomorfismus nerespektuje druhou část definice 3.2.1.

Hledejme nyní transformace $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ báze podalgeber e_i, resp. $\tilde{e}^i$ takové, že zachovají kanonický tvar formy (3.1). Pro nové báze e'_i a $\tilde{e}'^i$ platí transformační vztahy:

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)\mathbf{A},\ (\tilde{e}'^1, \ldots, \tilde{e}'^n) = (\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^n)\mathbf{B}$$

Dvojici transformací jednotlivých bází můžeme napsat jako transformaci báze v celé algebře $\mathcal{D}$ maticově jako:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

Forma má v kanonickém tvaru maticový tvar:

$$\mathbf{F}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Zachování kanonického tvaru formy vyjadřuje vztah:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{F}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} \mathbf{C} = \mathbf{F}_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$$

Po roznásobení dostaneme podmínky: $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{1},\ \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \mathbf{1}$, které splníme jedině tak, že položíme $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-T}$. Odteď budeme označovat transformaci $\mathbf{A}$ jako $\mathbf{P}$. Bazická transformace zachovávající kanonický tvar formy bude mít po uvážení výše zmíněného tvar[2]:

$$e_i' = \mathbf{P}_i^j e_j,\ \tilde{e}'^i = (P^{-1})_j^i \tilde{e}^j \tag{3.4}$$

Je snadno vidět, že existuje-li pro daný Drinfeldův double D Maninova trojice $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$, existuje i trojice $(\mathcal{D}, \tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{G})$, kterou získáme transformací $\mathcal{G} \leftrightarrow \tilde{\mathcal{G}}$ v podobě $e_i \leftrightarrow \tilde{e}^i$. Snadno se ověří, že taková transformace zachovává kanonický tvar formy a je izomorfismem Lieovských algeber $\mathcal{D}$. Dvojice Maninových trojic, které lze získat takovouto záměnou, budeme nazývat *duální*. Je jasné, že pro rozklad na dvě podalgebry, které jsou jako Lieovské algebry izomorfní, jsou duální Maninovy trojice izomorfní, a naopak pro dvě neizomorfní podalgebry $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ nikoliv.

Je tedy vidět, že pro některé z Drinfeldových doublů existují dvě různé, vzájemně neizomorfní trojice. Ukáže se ale dokonce, že pro některé Drinfeldovy doubly existují i více než dvě neizomorfní Maninovy trojice.

3.2.3 Klasifikace 4-rozměrných Maninových trojic

Výše popsaný postup si předvedeme na nejjednodušší netriviální dimenzi Drinfeldova doublu. Ukázali jsme, že dimenze musí být sudá. V dvojrozměrném případě existuje pouze jediný rozklad na dvě Abelovské podalgebry (jiné jednorozměrné neexistují). Proto se zaměříme hned na dimenzi čtyři. Obě podalgebry budou dvourozměrné Lieovské algebry. Ty existují pouze dvě:

1. Abelovská $\mathbf{I}_{(2,0)}$: $[e_1, e_2] = 0$.
2. Řešitelná $\mathbf{II}_{(2,0)}$: $[e_1, e_2] = ae_1 + be_2$, $a \neq 0 \vee b \neq 0$.

Pro podalgebry $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ máme tedy vždy na výběr ze dvou možností. Bázi první z podalgeber zvolíme tak, aby měla algebra co nejjednodušší tvar. Bázi druhé podalgebry zvolíme tak, aby byla splněna podmínka (3.1).

$\mathcal{G}$ Abelovská $\tilde{\mathcal{G}}$ Abelovská

Komutátory obou podalgeber budou mít tvar:

$$[e_1, e_2] = 0,\ [\tilde{e}^1, \tilde{e}^2] = 0$$

Pomocí vztahů (3.2) a (3.3) dopočteme zbývající strukturní koeficienty a dostaneme Abelovskou algebru $\mathcal{D}$. Jacobiho identity budou splněny triviálně a nalezli jsme tedy Maninovu trojici, kterou označme jako $(\mathbf{I} \mid \mathbf{I}_{(2,0)}, \mathbf{I}_{(2,0)})$.

[2]Tyto vztahy nápadně připomínají transformaci duální báze při změně původní báze. Další náznak toho, proč značíme tak, jak značíme.

$\mathcal{G}$ Řešitelná $\tilde{\mathcal{G}}$ Abelovská

Komutátory obou podalgeber budou mít tvar:

$$[e_1, e_2] = e_2,\ [\tilde{e}^1, \tilde{e}^2] = 0$$

Pomocí vztahů (3.2) a (3.3) dopočteme zbývající strukturní koeficienty (budeme vypisovat pouze nenulové, ty, které explicitně nevypíšeme, považujeme automaticky za nulové):

$$[e_1, \tilde{e}^2] = -\tilde{e}^2,\ [e_2, \tilde{e}^2] = \tilde{e}^1$$

Musíme ověřit, že takto definovaná struktura je Lieovská algebra, tj. ověřit Jacobiho identity. Po chvilce počítání se ukáže, že tomu tak je. Tuto Maninovu trojici označíme jako $(\mathbf{II} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{I}_{(2,0)})$.

$\mathcal{G}$ Řešitelná $\tilde{\mathcal{G}}$ Řešitelná

Komutátory obou podalgeber budou mít tvar (druhou již nemůžeme zjednodušit):

$$[e_1, e_2] = e_2,\ [\tilde{e}^1, \tilde{e}^2] = a\tilde{e}^1 + b\tilde{e}^2,\ a \neq 0 \vee b \neq 0$$

Zkoumejme, jak se transformují komutátory při transformaci $\mathbf{P}$ zachovávající kanonický tvar formy, tedy vyhovující (3.4). Prvky transformační matice označíme jako:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix}$$

Potom se komutátory při změně báze (3.4) transformují jako:

$$[e'_1, e'_2] = p_1^1 e'_2 - p_2^1 e'_1$$

$$[\tilde{e}'^1, \tilde{e}'^2] = \frac{1}{\det \mathbf{P}}((ap_1^1 + bp_1^2)\tilde{e}'^1 + (ap_2^1 + bp_2^2)\tilde{e}'^2)$$

1. $a \neq 0 \wedge b = 0$ Chceme zachovat jednoduchý tvar první z algeber. Jedna z třídy takových transformací má tvar:

   $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

   Nové komutátory mají tvar:

   $$[e'_1, e'_2] = e'_2,\ [\tilde{e}'^1, \tilde{e}'^2] = \tilde{e}'^1$$

   Dopočteme zbývající strukturní koeficienty:

   $$[e'_1, \tilde{e}'^1] = e'_2,\ [e'_1, \tilde{e}'^2] = -e'_1 - \tilde{e}'^2,\ [e'_2, \tilde{e}'^2] = \tilde{e}'^1$$

   Ověření Jacobiho identit pro tyto strukturní koeficienty ukáže, že jde o Lieovskou algebru. Tuto Maninovu trojici označme jako $(\mathbf{III} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{II}_{(2,0)})$.

2. $a = 0 \wedge b \neq 0$ Chceme-li zachovat jednoduchý tvar první z algeber, musíme zvolit transformaci (spíše netransformaci):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Komutátory zůstanou v nezměněném tvaru:

$$[e'_1, e'_2] = e'_2,\ [\tilde{e}'^1, \tilde{e}'^2] = b\tilde{e}'^2,\ b \neq 0$$

Dopočteme zbývající strukturní koeficienty:

$$[e'_1, \tilde{e}'^2] = -\tilde{e}'^2,\ [e'_2, \tilde{e}'^1] = be'_2,\ [e'_2, \tilde{e}'^2] = -be'_1 + \tilde{e}'^1$$

Spočtením Jacobiho identit pro tyto koeficienty ověříme, že jde o Lieovskou algebru. Tuto Maninovu trojici označme jako $(\mathbf{IV} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{II}_{(2,0)})$.

3. $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ Zvolíme:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a/b & a \end{pmatrix}$$

Dosazením zjistíme, že jde o izomorfismus s Maninovou trojicí $(\mathbf{IV} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{II}_{(2,0)})$.

Tímto máme klasifikaci čtyřrozměrných Maninových trojic kompletní. Nalezli jsme celkem 5 vzájemně neizomorfních Maninových trojic. Z toho dvě jsou k sobě navzájem duální (explicitně jsme nevypisovali trojici duální k $(\mathbf{II} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{I}_{(2,0)})$). Neizomorfní duální Maninovy trojice ztotožníme, protože klasifikace obou případů zvlášť nepřinese nic objevného. Dohromady tedy ve výčtu neizomorfních Maninových trojic uvádíme čtyři reprezentanty označené **I** až **IV**.

3.2.4 Metoda klasifikace Drinfeldových doublů

Chceme-li klasifikovat Drinfeldovy doubly pro danou dimenzi, vyjdeme z toho, že již máme plně klasifikovány jejich Maninovy trojice. Úloha se nám poté zjednodušuje na hledání izomorismů Lieovských algeber zachovávajících kanonický tvar formy, které mezi sebou transformují nalezené reprezentanty tříd ekvivalence Maninových trojic.

Základním kamenem tohoto postupu je zkoumání invariantů bazických transformací Lieovských algeber. Mezi nimi například vlastnosti definované nezávisle na bázi, některé z nich popsané v kapitole o Lieovských superalgebrách. Izomorfní Lieovské algebry musí mít tyto vlastnosti shodné. Jejich zkoumáním tak můžeme snadno vyloučit některé neizomorfní případy, aniž bychom explicitně dokazovali, že žádný jejich izomorfismus neexistuje. Výhodné je tak studovat dimenzi komutantů celé algebry a jejich vlastnosti jakožto Lieovských algeber, existence a vlastnosti podalgeber, ideálů ap.

Velice důležitým invariantem automorfismů algebry, tedy i izomorfismu ve smyslu změny báze, je Killingova forma. Její definice a podrobný popis je k nalezení v [2]. Pro nás je důležitý jenom fakt, že tato bilineární a ad-invariantní forma je symetrická, má proto smysl bavit se o její signatuře. Signatura symetrické bilineární formy je její kanonická vlastnost, nezávisí tedy od výberu báze. Izomorfní Lieovské algebry (třeba v případě Drinfeldových doublů) musí mít nutně stejnou signaturu Killingovy formy.

3.2.5 Klasifikace Drinfeldových doublů dimenze 4

Nalezli jsme 5 neizomorfních Maninových trojic. Řekli jsme, že duální Maninovy trojice jsou z definice izomorfní Lieovské algebry, a po krátkém prozkoumání zjistíme, že tato transformace zachovává formu - a je tedy izomorfismem Drinfeldových doublů.

Dále můžeme ihned prohlásit, že Maninova trojice tvořená $\mathcal{D}$ Abelovskou není izomorfní zbývajícím třem. Abelovská algebra totiž nemůže být izomorfní jakékoliv neabelovské algebře. Pro zbývající tři začněme s nalezením signatury Killingovy formy. Výsledek je zapsán v tabulce:

Maninova trojice	signatura Killingovy formy
$(\mathbf{II} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{I}_{(2,0)})$	$(1,0)$
$(\mathbf{III} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{II}_{(2,0)})$	$(1,0)$
$(\mathbf{IV} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{II}_{(2,0)})$	$(3,1)$

Je tedy jasné, že jediná zbývající možnost je případ dvou Maninových trojic se signaturou $(1,0)$. Výzkum ostatních vlastností nedá žádný důvod pro to, aby byly obě algebry neizomorfní. Poté přijde nejnáročnější část, tedy samotný pokus o nalezení izomorfismu. Hledáme změnu báze, která převede komutátory v $(\mathbf{II} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{I}_{(2,0)})$ na tvar $(\mathbf{III} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{II}_{(2,0)})$. V tomto případě se to za pomoci počítače podařilo a výsledná transformace báze čtyřrozměrné Lieovské algebry (všimněme si, že není blokově diagonální) má tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tímto jsme do posledního puntíku klasifikovali čtyřrozměrné Drinfeldovy doubly. Nalezli jsme tři třídy ekvivalence, jimž přísluší pět neizomorfních Maninových trojic. Řekli jsme, že ztotožníme rozklady duální Maninovy trojice (byť nemusí být izomorfní). Proto se v celkovém výčtu objeví Maninovy trojice pouze čtyři. Výsledek zaneseme do tabulky. Zavedeme označení podobné tomu použitému při klasifikaci Lieovských superalgeber.

Drinfeldův double	příslušné Maninovy trojice
$D\mathbf{I}_{(4,0)}$	$(\mathbf{I} \mid \mathbf{I}_{(2,0)}, \mathbf{I}_{(2,0)})$
$D\mathbf{II}_{(4,0)}$	$(\mathbf{II} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{I}_{(2,0)}$ $(\mathbf{III} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{II}_{(2,0)})$
$D\mathbf{III}_{(4,0)}$	$(\mathbf{IV} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{II}_{(2,0)})$

Kapitola 4

Drinfeldův superdouble

4.1 Úvod

Tato kapitola by měla být vyvrcholením této práce. Jak již bylo řečeno v úvodu, jejím cílem by mělo být zobecnit známý pojem Drinfeldův double, resp. Maninova trojice, pro teorii Lieovských superalgeber.

Drinfeldův double byl definovaný jako souvislá Lieova grupa, jejíž Lieovská algebra měla jisté vlastnosti spjaté především se symetrickou bilineární formou na ní definovanou. Vzhledem k mnoha problémům s tím spojeným nebude naší snahou zobecnit Drinfeldův double na úrovni Lieovy grupy, ale pouze na úrovni její Lieovské algebry. Hlavním a jediným cílem bude tedy nalézt způsob, jak rozložit Lieovskou superalgebru na maximálně izotropní podsuperalgebry vzhledem k nějaké bilineární formě.

V první části se pokusíme prozkoumat možnosti zobecnění všech známých pojmů (především bilineární formy) tak, abychom jasně vytyčili cestu k definici Drinfeldova superdoublu, resp. Maninovy supertrojice. Potom bude následovat klasifikace jednoduchých případů Drinfeldových superdoublů a Maninových supertrojic v nízkých dimenzích.

4.2 Putování za definicí

Mějme konečněrozměrnou reálnou Lieovskou superalgebru $\mathcal{S}$ vybavenou bilineární formou $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$. V případě Drinfeldova doublu jsme od ní požadovali, aby byla nedegenerovaná, symetrická a ad-invariantní. Z těchto vlastností prozatím požadujme jedinou, a to nedegenerovanost.

Od začátku chceme, aby byl Drinfeldův superdouble přímým zobecněním Drinfeldova doublu. Požadujeme proto, abychom pro superalgebru $\mathcal{S}$, jejíž fermionová část bude nulová, dostali známou strukturu Drinfeldova doublu.

Přímý prostor ke zobecnění nám v tomto případě nabízí jen zbývající dvě vlastnosti formy, tedy chování při záměně argumentů a respektování algebraické struktury svého definičního oboru, v případě Drinfeldova doublu nazývané ad-invariance.

Novinkou na supervektorovém prostoru je dvojí druh vektorů, který v něm žije (nebude-li řečeno jinak, mluvíme pouze o homogenních prvcích). Toho můžeme využít při definování nových vlastností formy následujícím způsobem:

1. Zobecnění symetrie: $(\forall x, y \in \mathcal{S})(\langle x, y\rangle = P(|x|, |y|)\langle y, x\rangle)$.
2. Zobecnění ad-invariance: $(\forall x, y, z \in \mathcal{S})(\langle [x, y], z\rangle + Q(|x|, |y|, |z|)\langle y, [x, z]\rangle = 0)$.

$P : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}$ jsou prozatím libovolné funkce, od kterých vyžadujeme pouze:

1. $P(|x|, |y|) \neq 0$, $Q(|x|, |y|, |z|) \neq 0$.
2. $P(0, 0) = Q(0, 0, 0) = 1$ (pro bosony musí odpovídat Drinfeldovu doublu).
3. $P(0, 1)P(1, 0) = P(1, 1)^2 = 1$ (po dvojím prohození chci dostat to samé).

Naším úkolem bude především zjistit, jakých hodnot mají tyto funkce nabývat pro všechny kombinace 0 a 1. Nutno hned na úvod podotknout, že žádný z nalezených výsledků není podmínkou neotřesitelně nutnou. Jediným negativním výsledkem užití jiných hodnot funkcí P a Q je silné omezení netriviálních možností rozkladů na dvě podsuperalgebry.

Nakonec označme $G_z : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, definované jako:

$$G_z(x, y) := \langle [z, x], y\rangle + Q(|z|, |x|, |y|)\langle x, [z, y]\rangle$$

Zobecněnou podmínku ad-invariance tak můžeme psát jednodušeji:

$$(\forall x, y, z \in \mathcal{S})(G_z(x, y) = 0) \tag{4.1}$$

$\mathcal{S}$ nazveme **Drinfeldův superdouble**, existuje-li dvojice podsuperalgeber $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ takových, že:

1. $\mathcal{S}$ jako supervektorový prostor je direktním součtem $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$.
2. Podsuperalgebry $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ jsou jako podprostory maximálně izotropní vzhledem k $\langle \cdot, \cdot\rangle$.

Uspořádanou trojici superalgeber $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ nazveme **Maninova supertrojice**.

Základním kamenem celé práce s Drinfeldovými doubly byla možnost zvolit báze v obou podalgebrách tak, aby měla daná bilineární forma kanonický tvar. Ukazuje se, že tuto vymoženost Drinfeldův superdouble obecně neumožňuje a důvod je prostý: Při změně báze jsme omezeni na transformace zachovávající paritu vektorů. Těch je samozřejmě mnohem méně, než v případě libovolných bazických transformací, a až na několik speciálních případů, kterými se přirozeně budeme nejvíce zabývat, převod na kanonický tvar neumožní.

Prvním důležitým poznatkem je, že se dle poznámky 3.1.5 nezmění tvrzení o rovnosti dimenzí podsuperalgeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$. Jediné, co bylo potřeba k jeho důkazu byla nedegenerovanost a maximální izotropie, kterou jsme zachovali.

$\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ jsou supervektorové prostory. Označme $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$, $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_0 \oplus \tilde{\mathcal{G}}_1$. $g(\mathcal{G}) = (m, n)$, $g(\tilde{\mathcal{G}}) = (\tilde{m}, \tilde{n})$. Víme tedy, že $m + n = \tilde{m} + \tilde{n}$.

4.2.1 B-F ortogonalita

Jedním z případů, ve kterých umíme pomocí bazických transformací zvolit k libovolné bázi první podsuperalgebry bázi té druhé tak, aby měla forma (nějaký, ne nutně stejný, jako u Drinfeldova doublu) kanonický tvar, je Drinfeldův superdouble, ve kterém navíc požadujeme:

$$\langle \mathcal{G}_0, \tilde{\mathcal{G}}_1 \rangle = \langle \mathcal{G}_1, \tilde{\mathcal{G}}_0 \rangle = 0$$

Takové Drinfeldovy superdoubly budeme nazývat **B-F ortogonální**.

Jejich zajímavou vlastností, která je předurčuje k bližšímu zkoumání, je fakt, že bosonová část tohoto typu superdoublu tvoří vždy (pro jakoukoliv dimenzi) Drinfeldův double. Bosonovou částí myslíme sudou část superalgebry $\mathcal{S}$, která je direktním součtem sudých částí podsuperalgeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$, společně se zúžením formy.

Podobně jako v případě dimenze celých podsuperalgeber se dá v tomto případě dokázat, že $m = \tilde{m}$ a $n = \tilde{n}$.

Bosonové báze v $\mathcal{G}$, resp. $\tilde{\mathcal{G}}$ označíme $\{b_i\}_{i=1}^m$, resp. $\{\tilde{b}^i\}_{i=1}^m$. Fermionové báze $\{f_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, resp. $\{\tilde{f}^\alpha\}_{\alpha=1}^n$.

Dále se dá snadno (maticovou úvahou) dokázat, že k libovolné bázi $\{b_i, f_\alpha\}$ podsuperalgebry $\mathcal{G}$ existuje právě jedna báze $\{\tilde{b}^i, \tilde{f}^\alpha\}$ taková, že bilineární forma má tvar (hodnoty pro opačné pořadí argumentů jsou násobeny funkcemi P a Q a ostatní kombinace jsou nula):

$$\langle b_i, \tilde{b}^j \rangle = \delta_i^j \tag{4.2}$$

$$\langle f_\alpha, \tilde{f}^\beta \rangle = \delta_\alpha^\beta \tag{4.3}$$

To nám umožní pro libovolnou dimenzi nalézt vyjádření všech ostatních koeficientů superalgebry $\mathcal{S}$ pomocí strukturních koeficentů podsuperalgeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$. Učiníme tak stejným způsobem jako při odvození (3.2) a (3.3). Dostaneme tak soustavu rovnic, ve které budou vystupovat strukturní koeficenty superalgebry $\mathcal{S}$, včetně koeficientů podalgeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ a samozřejmě i hodnoty funkcí P a Q. Pro bližší prozkoumání této soustavy rovnic si zavedeme několikero nového označení. Jako první definujeme strukturní konstanty podalgeber vztahy:

$$\mathcal{G}: \ [b_i, b_j] = \beta_{ij}{}^k b_k, \ [b_i, f_\alpha] = \sigma_{i\alpha}{}^\beta f_\beta, \ [f_\alpha, f_\beta] = \varphi_{\alpha\beta}{}^k b_k$$

$$\tilde{\mathcal{G}}: \ [\tilde{b}^i, \tilde{b}^j] = \tilde{\beta}^{ij}{}_k \tilde{b}^k, \ [\tilde{b}^i, \tilde{f}^\alpha] = \tilde{\sigma}^{i\alpha}{}_\beta \tilde{f}^\beta, \ [\tilde{f}^\alpha, \tilde{f}^\beta] = \tilde{\varphi}^{\alpha\beta}{}_k \tilde{b}^k$$

Takovéto strukturní koeficienty[1] budeme v textu nazývat "malé". A potom pro zbývající koeficienty algebry $\mathcal{S}$ v této bázi:

$$
\begin{aligned}
[b_i, \tilde{b}^j] &= B_i{}^{jk} b_k + B_i{}^j{}_k \tilde{b}^k \\
[b_i, \tilde{f}^\alpha] &= S_i{}^{\alpha\beta} f_\beta + S_i{}^\alpha{}_\beta \tilde{f}^\beta \\
[f_\alpha, \tilde{b}^j] &= Z_\alpha{}^{j\beta} f_\beta + Z_\alpha{}^j{}_\beta \tilde{f}^\beta \\
[f_\alpha, \tilde{f}^\beta] &= F_\alpha{}^{\beta k} b_k + F_\alpha{}^\beta{}_k \tilde{b}^k
\end{aligned}
$$

V textu budeme tyto konstanty nazývat "velké".

Dosadíme-li do podmínky (4.1) zobecněné ad-invariance pro B-F ortogonální Drinfeldův superdouble, dostaneme tři druhy rovnic:

1. Pokud dosadíme libovovolný bazický vektor $z \in \mathcal{G}$ nebo $\tilde{\mathcal{G}}$, x bazický z $\mathcal{G}$ a y bazický z $\tilde{\mathcal{G}}$, dostaneme z podmínky $G_z(x, y) = 0$ vyjádření velkých koeficentů pomocí malých. Povšimněme si, že pokud dosadíme do G_z vektory x, y v opačném pořadí, tj. zkoumáme podmínku $G_z(y, x) = 0$, dostaneme vždy rovnici pro stejné koeficienty, které jsou spolu pouze jinak vztaženy pomocí funkčních hodnot P a Q. Uveďme si příklad na nejjednodušším případu, který se vyskytne i v případě obyčejného Drinfeldova doublu:

$$
\begin{aligned}
0 = G_{b_i}(b_j, \tilde{b}^k) = \langle [b_i, b_j], \tilde{b}^k \rangle + Q(0,0,0) \langle b_j, [b_i, \tilde{b}^k] \rangle = \cdots = \\
= \beta_{ij}{}^k + Q(0,0,0) B_i{}^k{}_j
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

   Dosadíme-li v opačném pořadí, dostaneme:

$$
\begin{aligned}
0 = G_{b_i}(\tilde{b}^k, b_j) = \langle [b_i, \tilde{b}^k], b_j \rangle + Q(0,0,0) \langle \tilde{b}^k, [b_i, b_j] \rangle = \cdots = \\
= P(0,0) B_i{}^k{}_j + P(0,0) Q(0,0,0) \beta_{ij}{}^k
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

   V tomto případě můžeme $P(0,0)$ v druhé rovnici vykrátit a díky tomu, že $Q(0,0,0) = 1$, jsou obě rovnice navzájem ekvivalentní. Všimněme si, že kdyby tyto dvě podmínky byly navzájem v rozporu, nezbylo by nám nic jiného, než požadovat $B_i{}^k{}_j = \beta_{ij}{}^k = 0$.

   Odtud plyne první omezení na funkční hodnoty P a Q. Chceme je volit tak, aby při prohození argumentů x, y v podmínce $G_z(x, y) = 0$ byly obě rovnice ekvivalentní.

2. Při volbě z bazického z $\tilde{\mathcal{G}}$ a x, y bazických z $\mathcal{G}$ a stejné parity, resp. to samé při prohození úlohy $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$, dostaneme rovnici vyžadující jisté chování velkých koeficientů při prohození některých indexů. Toto chování zdědí velké koeficienty od malých

[1] Na první pohled je značení poněkud nepřehledné. Dalo by se například používat kompaktní značení pomocí jednoho písmenka a různých indexů. Po několikerých pokusech takové značení používat se ale ukázalo, že nutnost přemýšlet, k čemu které indexy patří, vedla ke zbytečným chybám v zápisu. Po chvilce používání čtenář uzná, že je dobré vědět, s jakým strukturním koeficentem v tu chvíli pracuje - zde jednoduše β jako "bosonová", σ jako "smíchaná" a φ jako "fermionová". Podobně velká písmenka vždycky představují koeficienty "velké" superalgebry $\mathcal{S}$, které jsou plně určeny strukturními koeficenty podsuperalgeber.

koeficientů, jimiž jsou jednoznačně určeny. Je dobré uvést opět na příkladu, který pro obyčejný Drinfeldův double krásně funguje:

$$0 = G_{\tilde{b}^i}(b_j, b_k) = \langle[\tilde{b}^i, b_j], b_k\rangle + \langle b_j, [\tilde{b}^i, b_k]\rangle = \cdots = -P(0,0){B_j}^i{}_k - {B_k}^i{}_j$$

Ze vztahů (4.4) a (4.5) vidíme, že (dokonce bez ohledu na hodnoty funkcí P a Q) platí ${B_j}^i{}_k = -{B_k}^i{}_j$. Díky tomu, že $P(0,0) = 1$, je tudíž splněna i tato rovnice. Pokuď by však tato rovnice splněna nebyla, nezbylo by nám nic jiného, než požadovat nulovost těchto velkých koeficientů a v důsledku toho i malých koeficentů, jimiž jsou určeny.

Volíme tedy funkční hodnoty P a Q tak, aby toto nenastalo.

3. Při volbě z bazického z $\tilde{\mathcal{G}}$ a x, y bazických z $\mathcal{G}$ a různé parity, resp. to samé při prohození úlohy $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$, dostaneme vztah mezi různými druhy velkých koeficientů. Podobně jako u prvního typu rovnic, dostaneme při prohození argumentů v podmínce $G_z(x, y) = 0$ rovnici, ve které vystupují stejné struktucní koeficienty, vztažené jinak pomocí funkčních hodnot P a Q.

   Nejlepší je opět předvést si tento případ na příkladu. Tentokrát nemůžeme volit bazické tak, aby se jednalo o případ z obyčejného Drinfeldova doublu.

$$0 = G_{\tilde{f}^\alpha}(f_\beta, b_k) = \langle[\tilde{f}^\alpha, f_\beta], b_k\rangle + Q(1,1,0)\langle f_\beta, [\tilde{f}^\alpha, b_k]\rangle = \cdots =$$
$$= P(0,0){F_\beta}^\alpha{}_k - Q(1,1,0){S_k}^\alpha{}_\beta$$

   Dosadíme-li v opačném pořadí, dostaneme:

$$0 = G_{\tilde{f}^\alpha}(b_k, f_\beta) = \langle[\tilde{f}^\alpha, b_k], f_\beta\rangle + Q(1,0,1)\langle b_k, [\tilde{f}^\alpha, f_\beta]\rangle = \cdots =$$
$$= -P(1,1){S_k}^\alpha{}_\beta P(0,0) + Q(1,0,1){F_\beta}^\alpha{}_k$$

   Od těchto dvou rovnic opět nechceme, aby byly ve vzájemném rozporu, protože pak by nutně muselo být ${F_\beta}^\alpha{}_k = {S_k}^\alpha{}_\beta = 0$. A v důsledku toho by musely být nulové i malé strukurní koeficienty, kterými jsou tyto velké určeny. Z příkladu dostáváme pro hodnoty P a Q rovnici:

$$Q(1,1,0)Q(1,0,1) = P(0,0)^2 P(1,1)$$

   Dále si uvědomme, že jak konstanty F, tak S jsou již určeny jednoznačně malými strukturními koeficienty. Potom jsou nějakým způsobem vztaženy navzájem, viz poslední příklad. Nebylo by od věci, aby byly vztaženy bez sporu se vztahem každé z nich k malým koeficientům.

   Dostáváme tak další omezení na hodnoty P a Q. Chceme aby rovnice dávající do vztahu dva různé druhy velkých koeficientů byly po záměně argumentů x, y ekvivalentní. Dále požadujeme, aby rovnice určující tyto vzájemné vztahy nebyly v rozporu s rovnicemi určujícími jejich vztah s malými koeficienty.

Dřív, než budeme rozebírat nalezenou soustavu rovnic, podívejme se, co by se stalo, kdybychom se nepokoušeli o jakékoliv zobecnění a ponechali formu symetrickou a ad-invariantní.

Tato volba odpovídá hodnotám $P \equiv 1$, $Q \equiv 1$. Po dosazení všech kombinací bazických vektorů do podmínky $G_z(x,y) = 0$ dostaneme podmínky na malé strukturní koeficienty v podobě ${\sigma_{i\alpha}}^{\beta} = {\tilde{\sigma}^{i\alpha}}_{\beta} = {\varphi_{\alpha\beta}}^{k} = {\tilde{\varphi}^{\alpha\beta}}_{k} = 0$.

Tato omezení malých strukturních koeficientů nám říkají, že rozklad superalgebry $\mathcal{S}$ na dvě podsuperalgebry $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$, splňující všechny podmínky (včetně B-F ortogonality) vůči symetrické ad-invariantní bilineární formě, je možný pouze v případě, jsou-li obě tyto podsuperalgebry direktním součtem (jako superalgebry) bosonové části s abelovskou fermionovou částí. Výsledná algebra $\mathcal{S}$ je ve výsledku (všechny velké strukturní koeficienty jsou rovněž nulové) direktním součtem $2m$-rozměrné obyčejné Lieovské algebry a $2n$-rozměrné antikomutativní superalgebry.

Takový výsledek je zajisté neuspokojivý, protože ani jiné speciální volby rozkladu (například B-B ortogonální, viz. dále) nedávají lepší výsledky. To by měla být hlavní motivace k pokusu zobecnit nějakým způsobem vlastnosti formy.

Pro B-F ortogonální Drinfeldův superdouble v rovnicích vystupují pouze hodnoty $P(0,0)$ a $P(1,1)$. Dalším krokem byla volba pro superalgebry poměrně přirozené vlastnosti býti pro dva fermiony s opačným znaménkem, než v ostatních případech. Jinými slovy požadovat od formy antisymetrii pro dva fermionové argumenty. V ostatních případech ponechat formu symetrickou. Ad-invarianci i tentokrát necháme ad-invariancí.

V řeči našich funkcí P a Q to znamená volbu $P(1,1) = -1$, $Q \equiv 1$. Zbývající dvě funkční hodnoty $P(1,0)$ a $P(0,1)$ v rovnicích pro B-F ortogonální superdouble vůbec nevystupují.

Po dosazení se ukázalo, že problém zůstává stejný, jako při ponechání symetrie formy. Rozklad byl možný jedině pro stejně omezenou superalgebru $\mathcal{S}$, jako v předchozím případě.

Chceme-li pro B-F ortogonální Drinfeldův superdouble možnost nalézt i rozklady, kde si v superalgebrách zahrají svou roli nějaké fermiony, musíme hledat způsob, jak zobecnit pojem ad-invariance, tzn. hledat hodnoty funkce Q různé od volby $Q \equiv 1$.

Jak jsme popsali výše, vede pro B-F ortogonální Drinfeldův superdouble dosazení všech možných kombinací bazických vektorů podalgeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ do zoběcněné podmínky ad-invariance $G_z(x,y) = 0$ na tři druhy rovnic pro velké strukturní koeficienty algebry $\mathcal{S}$. První druh je jednoznačně vztáhne k malým strukturním koeficientům, druhý vyžádá jejich speciální vlastnosti při záměně některých indexů a třetí popíše požadované vztahy mezi nimi.

Pro všechny z nich jsme na příkladech popsali problémy, které vzniknou a ukázali, že jdou vyřešit volbou hodnot P a Q. Tento požadavek vede (v B-F ortogonálním případě) na soustavu rovnic pro $P(1,1)$, $Q(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ a $Q(0,1,1)$. Tuto soustavu i podrobný rozpis rovnic z podmínky $G_z(x,y) = 0$ pro B-F ortogonální Drinfeldův superdouble nalezne čtenář v dodatku B, konkrétně v částech B.1.2, resp. B.1.1.

Označíme:

$$a := Q(0,1,1),\ b := Q(1,1,0),\ c := Q(1,0,1),\ d := P(1,1)$$

Výsledná soustava rovnic má čtyři řešení:

a	b	c	d
-1	1	1	1
1	1	-1	-1
-1	-1	-1	1
1	-1	1	-1

Všimněme si, že počáteční požadavek $P(1,1)^2 = 1$ je splněn pro každé řešení, ačkoliv jsme ho do soustavy nepřidali.

V této fázi neexistuje žádný důvod, proč preferovat jednu ze čtyř možností. V žádném z případů nedojde k omezení malých strukturních koeficientů, jediné omezení na jejich volbu vyplývají ze super-Jacobiho identit. Tedy přesně stejně jako v případě obyčejného Drinfeldova doublu.

4.2.2 B-B ortogonalita

Jak vidno, k určení funkčních hodnot P a Q nestačí prozkoumat nejjednodušší případ B-F ortogonálních Drinfeldových superdoublů. Dalším speciálním případem, kdy umíme převést formu na (nějaký) kanonický tvar, je požadování vlastnosti:

$$\langle \mathcal{G}_0, \tilde{\mathcal{G}}_0 \rangle = \langle \mathcal{G}_1, \tilde{\mathcal{G}}_1 \rangle = 0$$

Takové Drinfeldovy superdoubly budeme nazývat **B-B ortogonální**.

Narozdíl od B-F ortogonálního Drinfeldova superdoublu bosonová část (ve smyslu popsaném na začátku části 4.2.1) nikdy netvoří obyčejný Drinfeldův double. Zúžení formy na sudou část je totiž nulové zobrazení. Pro dimenzi podsuperalgeber se dá v tomto případě dokázat, že $m = \tilde{n}$ a $n = \tilde{m}$.

Bosonové báze v $\mathcal{G}$, resp. $\tilde{\mathcal{G}}$ označíme $\{b_i\}_{i=1}^m$, resp. $\{\tilde{b}^\alpha\}_{\alpha=1}^n$. Fermionové báze $\{f_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, resp. $\{\tilde{f}^i\}_{i=1}^m$.

Lze snadno nahlédnout, že v tomto případě k libovolné bázi $\{b_i, f_\alpha\}$ podsuperalgebry $\mathcal{G}$ existuje právě jedna báze $\{\tilde{b}^\alpha, \tilde{f}^i\}$ taková, že bilineární forma má tvar (hodnoty pro opačné pořadí argumentů jsou násobeny funkcemi P a Q a ostatní kombinace jsou nula):

$$\langle b_i, \tilde{f}^j \rangle = \delta_i^j \tag{4.6}$$

$$\langle f_\alpha, \tilde{b}^\beta \rangle = \delta_\alpha^\beta \tag{4.7}$$

Zavedeme značení strukturních koeficientů velice podobné B-F ortogonálnímu případu. Pouze pozměníme značení indexů, které probíhají v B-B ortogonálním případě jiné dimenze (latinská písmena probíhají $\{1,\ldots,m\}$, řecká $\{1,\ldots,n\}$). Malé koeficienty:

$$\mathcal{G}: \ [b_i,b_j]=\beta_{ij}{}^k b_k,\ [b_i,f_\alpha]=\sigma_{i\alpha}{}^\beta f_\beta,\ [f_\alpha,f_\beta]=\varphi_{\alpha\beta}{}^k b_k$$

$$\tilde{\mathcal{G}}: \ [\tilde{b}^\alpha,\tilde{b}^\beta]=\tilde{\beta}^{\alpha\beta}{}_\nu \tilde{b}^\nu,\ [\tilde{b}^\alpha,\tilde{f}^i]=\tilde{\sigma}^{\alpha i}{}_k \tilde{f}^k,\ [\tilde{f}^i,\tilde{f}^j]=\tilde{\varphi}^{ij}{}_\alpha \tilde{b}^\alpha$$

Velké koeficienty:

$$[b_i,\tilde{b}^\alpha]=B_i{}^{\alpha k} b_k + B_i{}^\alpha{}_\beta \tilde{b}^\beta$$

$$[b_i,\tilde{f}^j]=S_i{}^{j\beta} f_\beta + S_i{}^j{}_k \tilde{f}^k$$

$$[f_\alpha,\tilde{b}^\beta]=Z_\alpha{}^{\beta\nu} f_\nu + Z_\alpha{}^\beta{}_k \tilde{f}^k$$

$$[f_\alpha,\tilde{f}^j]=F_\alpha{}^{jk} b_k + F_\alpha{}^j{}_\beta \tilde{b}^\beta$$

Teď stačí opět dosadit všelijaké kombinace bazických vektorů do podmínky $G_z(x,y)=0$.

Dostaneme naprosto shodné druhy rovnic, jako B-F ortogonálním případě. V těchto rovnicích chceme volit funkční hodnoty P a Q tak, aby nedocházelo k popsaným problémům. Tento požadavek vede na soustavu rovnic pro hodnoty P a Q, v B-B ortogonálním případě na soustavu pro $P(1,0)$, $P(0,1)$, $Q(1,0,0)$, $Q(0,1,0)$, $Q(0,0,1)$ a $Q(1,1,1)$. Podrobný rozpis všech rovnic a výsledná soustava je k nalezení v dodatku B, konkrétně v částech B.2.1, resp. B.2.2.

Označíme:

$$e:=Q(0,0,1),\ f:=Q(1,0,0),\ g:=Q(0,1,0)$$

$$h:=Q(1,1,1),\ i:=P(1,0),\ j:=P(0,1)$$

Z této soustavy dostaneme dvouparametrickou množinu řešení (oba parametry jsou nenulové):

e	f	g	h	i	j
$1/\gamma$	$1/\beta$	γ	$-\beta$	$1/\beta$	β

Požadavek $P(0,1)P(1,0)=1$ je splněn pro každé řešení.

Jak vidno, opět není důvod zvolit nějaké z řešení jako to správné. V tomhle případě se dokonce obecně nejedná o ± 1, ale o libovolná reálná čísla. Potřebujeme tedy nějaké další kritérium, podle kterého hodnoty funkcí P a Q volit.

4.2.3 Zobecněná symetrie G_z

V případě obyčejného Drinfeldova doublu má funkce G_z tvar:

$$G_z(x,y)=\langle [z,x],y\rangle + \langle x,[z,y]\rangle = \langle ad_z x,y\rangle + \langle x, ad_z y\rangle$$

Díky symetrii formy platí:

$$(\forall x, y, z \in \mathcal{D})(G_z(x,y) = G_z(y,x))$$

Můžeme se na to ovšem podívat i z pohledu Lieových grup. Ad-invariance tak, jak jsme ji zavedli v kapitole o Drinfeldově doublu, je ekvivalentní skutečné invarianci formy vůči jistému automorfismu Lieovské algebry $\mathcal{D}$:

$$(\forall x, y, z \in \mathcal{D})(\langle x, y\rangle = \langle Ad_{e^{tz}}x, Ad_{e^{tz}}y\rangle)$$

V tento okamžik je důležité jen to, že $Ad_{e^{tz}}$ automorfně zobrazuje z $\mathcal{D}$ do $\mathcal{D}$. Mnohem více je podstatné, že díky symetrii formy je celá identita symetrická v x a y.

Předpokládejme, že nějaká podobná rovnost musí být ekvivalentní zobecnění ad-invariance, o které se pokoušíme. V tento okamžik bychom potřebovali definovanou Lieovu supergrupu. Jelikož nic takového nemáme, musíme naivně předpokládat, že zobecnění automorfismu Ad_g zachovává paritu vektorů. Jestliže budou mít prvky ze supergrupy paritu, která se bude chovat při násobení dvou prvků $\mathbb{Z}_2$ - aditivně, exponenciela bude zachovávat paritu vektoru ze superalgebry a Ad_g definujeme stejně, jako v teorii Lieových grup, vskutku tomu tak bude [2]. Podmínka zobecněné ad-invariance $G_z(x,y) = 0$ by tedy při záměně argumentů x, y měla respektovat vlastnosti formy. Je tedy rozumné od funkce G_z požadovat následující:

$$(\forall x, y, z \in \mathcal{S})(G_z(x,y) = P(|x|,|y|)G_z(y,x)) \tag{4.8}$$

Ve skutečnosti jde o zesílení podmínky, která se již vyskytla ve výše popsaných soustavách - tedy bezespornost podmínky $G_z(x,y) = 0$ s podmínkou $G_z(y,x) = 0$. Je jasné, že žádné rozpory při platnosti podmínky (4.8) záměnou x a y nenastanou.

Dále je dobré si uvědomit, že tato podmínka zajistí bezespornost $G_z(x,y) = 0$ a $G_z(y,x) = 0$ pro libovolný Drinfeldův superdouble, tedy mnohem širší třídu, než prozkoumané B-F a B-B ortogonální.

Tuto podmínku můžeme vyjádřit pomocí soustavy rovnic pro hodnoty P a Q. Odpovídající soustavu nalezene čtenář v dodatku B, konkrétně v části B.3.

4.2.4 Supersymetrie a super-ad-invariance

Vezměme nyní rovnice pro hodnoty P a Q nalezenou v části 4.2.1 (dodatek B, část B.1.2), přidejme k nim rovnice nalezené v 4.2.2 (dodatek B, část B.2.2) a na závěr přimíchejme rovnice plynoucí z požadavku zobecněné symetrie (4.8) (dodatek B, část B.3). Dostaneme soustavu rovnic (dodatek B, část B.4) pro všechny neznámé hodnoty funkcí P a Q, která má dvě různá řešení.

Druhé z řešení, které je k nalezení v části dodatku B.4, zavrhneme z několika důvodů. Zaprvé vyžaduje od formy antisymetrii i pro záměnu kombinace boson - fermion. Intuitivně tušíme, že tuto vlastnost by forma měla mít pouze pro kombinaci fermion - fermion. Druhak

[2] Toto je spíše mávání rukama a spousta “kdybychom tak měli supergrupu” úvah

dostáváme pro zobecněnou ad-invarianci změnu znaménka u druhého členu pro nahodilé kombinace bosonů a fermionů, zatímco v prvním řešení je chování funkce Q pro různé parity vektorů jasně popsatelné a ve shodě se supermatematickou intuicí.

V tomto místě tedy prohlašujeme druhé nalezené řešení za shodu algebraických náhod a zaměříme se na první řešení.

Pro funkční hodnoty P dostáváme výsledek:

$$\begin{aligned} P(0,0) &= 1 \\ P(1,0) &= 1 \\ P(0,1) &= 1 \\ P(1,1) &= -1 \end{aligned}$$

Je vidět, že se při volbě těchto hodnot P forma chová tak, jak jsme předpokládali při jednom z naivních pokusů o její zobecnění. Je symetrická ve všech případech až na jeden, a to pro fermion v obou argumentech, kdy je antisymetrická. Funkčním předpisem můžeme P zapsat jako:

$$P(|x|,|y|) = (-1)^{|x||y|}$$

Zobecněná symetrie formy lze poté zapsat jako:

$$(\forall x, y \in \mathcal{S})(\langle x, y\rangle = (-1)^{|x||y|}\langle y, x\rangle)$$

Takovou vlastnost formy budeme nazývat **supersymetrie**.

Pro funkční hodnoty Q dostáváme:

$$\begin{aligned} Q(0,0,0) &= 1 \\ Q(1,0,0) &= 1 \\ Q(0,1,0) &= 1 \\ Q(0,0,1) &= 1 \\ Q(1,1,0) &= -1 \\ Q(0,1,1) &= 1 \\ Q(1,0,1) &= 1 \\ Q(1,1,1) &= -1 \end{aligned}$$

Funkci Q lze opět zapsat funkčním předpisem:

$$Q(|x|,|y|,|z|) = Q(|x|,|y|) = (-1)^{|x||y|}$$

Podmínku zobecněné ad-invariance $G_z(x,y) = 0$ můžeme poté zapsat jako:

$$(\forall x, y, z \in \mathcal{S})(\langle [z,x], y\rangle + (-1)^{|z||x|}\langle x, [z,y]\rangle = 0)$$

Tuto vlastnost formy budeme nazývat **super-ad-invariance**.

Nyní se můžeme ptát, jsou-li požadavky, které jsme tímto na funkce P a Q nakladli, jediné možné. Hodnoty jsme volili tak, aby rozklad na B-F ortogonální a B-B ortognální

Drinfeldovy superdoubly nevyžadoval omezení (nulovost) některých z malých koeficentů. Ukázali jsme, že taková volba existuje, ačkoliv zdaleka není jednoznačná. Z hlubších důvodů jsme poté požadovali jistou formu symetrie zobecněné podmínky ad-invariance, a jako důsledek tím zajistili bezespornost této podmínky při prohození dvou jejích argumentů.

V nízké dimenzi (čtyři) lze podrobně prozkoumat i komplikovanější struktury, než B-F a B-B ortogonální Drinfeldův superdouble. Můžeme například chtít, aby $g(\mathcal{G}) = (1,1)$ a $g(\tilde{\mathcal{G}}) = (2,0)$. I v tomto případě lze převést formu na jistý kanonický tvar.

Po bližším prozkoumání podmínek zobecněné ad-invariance se však ukazuje, že neexistuje žádný netriviální rozklad na podalgebery těchto stupňů a to bez ohledu na volbu hodnot funkcí P a Q. Nedostaneme žádné rovnice nezávislé na již vyřešené soustavě.

V tuto chvíli je třeba rozhodnout, jak Drinfeldův superdouble skutečně definovat. Všechny indicie směřují k požadavku supersymetrie formy, který je rovněž nejpřirozenější možnou volbou. Pokud chceme dostat netriviální výsledky, musíme odpovídajícím způsobem zobecnit i ad-invarianci. Snažili jsme se ukázat, že nejvhodnější volbou je něco, co budeme odteď nazývat super-ad-invariance, spočívající v prohození jednoho znaménka v obyčejné ad-invarianci v závislosti na paritě vstupujících vektorů.

4.3 Definice

Definice 4.3.1. Nechť $\mathcal{S}$ je reálná Lieovská superalgebra. $\mathcal{S}$ je vybavená bilineární formou $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, která splňuje následující vlastnosti:

1. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je nedegenerovaná.
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je supersymetrická, tj. $(\forall x, y \in \mathcal{S})(\langle x, y\rangle = (-1)^{|x||y|}\langle y, x\rangle)$.
3. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je super-ad-invariantní, tj. $(\forall x, y, z \in \mathcal{S})(\langle [z, x], y\rangle + (-1)^{|z||x|}\langle x, [z, y]\rangle = 0)$.

Potom S nazveme **Drinfeldův superdouble**, existuje-li dvojice podsuperalgeber $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ takových, že:

1. $\mathcal{S}$ jako supervektorový prostor je direktním součtem $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$.
2. Podsuperalgebry $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ jsou jako podprostory maximálně izotropní vzhledem k $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Uspořádaná trojice algeber $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ se nazývá **Maninova supertrojice**.

Tvrzení 4.3.2. *Nechť $\mathcal{S}$ je Drinfeldův superdouble, $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ jeho libovolná Maninova supertrojice. Potom:*

1. $\dim \mathcal{G} = \dim \tilde{\mathcal{G}}$.

2. $\dim \mathcal{S}$ *je v konečněrozměrném případě sudá.*

Důkaz. Viz. poznámka 3.1.5. $\square$

Definice 4.3.3. Drinfeldův superdouble $\mathcal{S}$ nazveme **B-F ortogonální**, mají-li všechny jeho rozklady na podsuperalgebry $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ vlastnost $\langle \mathcal{G}_0, \tilde{\mathcal{G}}_1 \rangle = \langle \mathcal{G}_1, \tilde{\mathcal{G}}_0 \rangle = 0$, kde argumenty opatřené indexy jsou příslušné bosonové a fermionové části.

Maninovu trojici $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ nazveme **B-F ortogonální**, je-li Drinfeldův superdouble $\mathcal{S}$ B-F ortogonální.

Poznámka 4.3.4. Do této třídy Drinfeldových superdoublů patří i obyčejný Drinfeldův double. Liché části podsuperalgeber jeho rozkladu obsahují pouze nulový vektor a požadavek v definici B-F ortogonality je splněn triviálně.

Definice 4.3.5. Drinfeldův superdouble $\mathcal{S}$ nazveme **B-B ortogonální**, mají-li všechny jeho rozklady na podsuperalgebry $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ vlastnost $\langle \mathcal{G}_0, \tilde{\mathcal{G}}_0 \rangle = \langle \mathcal{G}_1, \tilde{\mathcal{G}}_1 \rangle = 0$, kde argumenty opatřené indexy jsou příslušné bosonové a fermionové části.

Maninovu trojici $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ nazveme **B-B ortogonální**, je-li Drinfeldův superdouble $\mathcal{S}$ B-B ortogonální.

Tvrzení 4.3.6. *Vlastnost B-F a B-B ortogonality nezávisí na výběru báze superalgebry $\mathcal{S}$. B-F a B-B ortogonální Drinfeldovy superdoubly jsou tedy nutně navzájem neizomorfní.*

Důkaz. Tvrzení ukážeme pro B-F ortogonalitu, B-B ortogonální případ lze ukázat analogicky. Nechť $\{b_i, f_\alpha\}$ je báze $\mathcal{G}$ a $\{\tilde{b}^i, \tilde{f}^\alpha\}$ báze $\tilde{\mathcal{G}}$ taková, že je v ní splněna B-F ortogonalita, tzn. pro všechny hodnoty i a α platí:

$$\langle b_i, \tilde{f}^\alpha \rangle = 0, \ \langle f_\alpha, \tilde{b}^i \rangle = 0 \tag{4.9}$$

Zvolme libovolnou bazickou transformaci (musí zachovávat paritu vektoru):

$$\begin{aligned} b'_i &= \mathbf{P}_i^j b_j + \tilde{\mathbf{P}}_{ij} \tilde{b}^j \\ f'_\alpha &= \mathbf{Q}_\alpha^\beta f_\beta + \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\beta} \tilde{f}^\beta \\ \tilde{b}'^i &= \mathbf{R}_j^i \tilde{b}^j + \tilde{\mathbf{R}}^{ij} b_j \\ \tilde{f}'^\alpha &= \mathbf{S}_\beta^\alpha \tilde{f}^\beta + \tilde{\mathbf{S}}^{\alpha\beta} f_\beta \end{aligned}$$

Spočtěme hodnotu formy na nové bazické vektory:

$$\langle b'_i, \tilde{f}'^\alpha \rangle = \langle \mathbf{P}_i^j b_j + \tilde{\mathbf{P}}_{ij} \tilde{b}^j, \mathbf{S}_\beta^\alpha \tilde{f}^\beta + \tilde{\mathbf{S}}^{\alpha\beta} f_\beta \rangle$$

Nyní stačí využít bilinearity formy, roztrhnout výraz na čtyři části a uvědomit si, že členy se dvěma vektory ze stejné algebry jsou nulové z důvodu izotropie a ostatní díky (4.9).

Celý výraz je tedy roven nule, tj. $\langle b'_i, \tilde{f}'^\alpha \rangle = 0$. Úplně stejným způspobem lze ukázat i $\langle f'_\alpha, \tilde{b}'^i \rangle = 0$.

B-F ortogonalita (analogicky B-B ortogonalita) je tedy splněna i v nové (libovolné) bázi. $\square$

Poznámka 4.3.7. Až tvrzení 4.3.6 nás tedy opravňuje hovořit o B-F a B-B ortogonalitě jako o obecné vlastnosti Drinfeldových superdoublů.

4.4 Klasifikace Drinfeldových superdoublů

4.4.1 Úvod

Hlavním cílem této části bude nalézt způsob klasifikace speciálních případů Drinfeldových superdoublů, v této práci nazývaných jako B-F a B-B ortogonální, v nízkých dimenzích. Za tímto účelem si ukážeme obecný postup jejich klasifikace, který je díky možnosti převádět formu na kanonický tvar naprosto analogický tomu, co umíme pro Drinfeldův double. Díky novým vlastnostem formy se objeví několik zvláštností, které důkladně rozebereme. Poté již nic nebude bránit jejich úplné klasifikaci pro dimenzi čtyři.

Jelikož opět chceme ztotožnit Drinfeldovy superdoubly totožných vlastností, definujeme si na množině Drinfeldových superdoublů stejného stupně ekvivalenci umožňující zjednodušení problému nalezení všech možností na hledání různých tříd ekvivalence.

Definice 4.4.1. Nechť $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ jsou Drinfeldovy superdoubly a $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ jejich bilineární formy. Řekneme, že $\mathcal{S}_1$,$\mathcal{S}_2$ jsou **izomorfní Drinfeldovy superdoubly**, jestliže existuje zobrazení $\mathbf{P}$: $\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ takové, že:

1. $\mathbf{P}$ je izomorfismus Lieovských superalgeber $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ (ve smyslu definice 2.2.3).
2. $(\forall x, y \in \mathcal{S}_1)(\langle x, y\rangle_1 = \langle \mathbf{P}x, \mathbf{P}y\rangle_2)$.

Definice 4.4.2. Řekneme, že $(\mathcal{S}_1, \mathcal{G}_1, \tilde{\mathcal{G}}_1)$, $(\mathcal{S}_2, \mathcal{G}_2, \tilde{\mathcal{G}}_2)$ jsou **izomorfní Maninovy supertrojice**, existuje-li izomorfismus $\mathbf{P}$ jejich Drinfeldových superdoublů ve smyslu 4.4.1, který navíc splňuje:

1. $\mathbf{P}(\mathcal{G}_1) = \mathcal{G}_2$.
2. $\mathbf{P}(\tilde{\mathcal{G}}_1) = \tilde{\mathcal{G}}_2$.

Definice 4.4.3. Klasifikací Drinfeldových superdoublů dimenze n nazveme nalezení všech tříd ekvivalence podle izomorfismu definovaného v 4.4.1 na množině všech Drinfeldových superdoublů dimenze n.

Definice 4.4.4. Klasifikací Maninových supertrojic dimenze n nazveme nalezení všech tříd ekvivalence podle izomorfismu definovaného v 4.4.2 na množině všech Maninových supertrojic příslušejícím Drinfeldovým superdoublům dimenze n.

4.4.2 Metoda klasifikace Maninových supertrojic

Nyní si v co největší obecnosti popíšeme metodu hledání neizomorfních Maninových supertrojic. Princip je velice podobný tomu z části 3.2.2. Popíšeme si proto pouze odlišnosti které vzniknou při zobecnění tohoto postupu na Drinfeldův superdouble. Technické detaily navíc uvedeme až u jednotlivých speciálních případů (již jsme předeslali, že úplná klasifikace nebude ani v nízkých dimenzích snadná).

Opět budeme předpokládat, že máme Drinfeldův superdouble (případně s nějakou speciální vlastností) dané dimenze. Nově musíme předpokládat nejen dimenzi, ale i stupeň superalgebry $\mathcal{S}$. S tím se váže předpoklad existence formy správných vlastností a rozkladu na obě podsuperalgebry.

Ukážeme, že pro danou bázi podalgebry $\mathcal{G}$ existuje jednoznačně určená báze v podalgebře $\tilde{\mathcal{G}}$ taková, že v ní bude forma mít (nějaký) kanonický tvar. Rozdíl (a zdroj problémů) oproti obyčejným algebrám bude omezení bazických transformací na ty, které zachovávají paritu vektorů. Toto budeme moct učinit pouze v několika speciálních případech, kterými se budeme zabývat.

Poté využijeme super-ad-invariance formy a ukážeme, že strukturní koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$ jsou jednoznačně určeny strukturními koeficienty obou podsuperalgeber rozkladu.

Dalším krokem, který bude naprosto analogický tomu v části 3.2.2 bude nalezení (opět pro každý případ zvlášť) bazických transformací v obou podsuperalgebrách, které zachovají kanonický tvar formy.

Poslední a nejdůležitější část bude nalezení všech rozkladů na dvě podsuperalgebry, které na sebe takovými transformacemi nelze převést. Zdůvodnění toho, proč nejsou takové Maninovy supertrojice izomorfní je stejný, jako pro Maninovy trojice, a tedy popsaný v příslušné části této práce.

B-F ortogonální Maninovy supertrojice

Použijeme značení shodné s tím, které bylo použito v části 4.2.1. Pro stupně podsuperalgeber rozkladu B-F ortogonálního Drinfeldova superdoublu platí $g(\mathcal{G}) = g(\tilde{\mathcal{G}})$. Označme $g(\mathcal{G}) = (m, n)$.

Důležitou specifikou B-F ortogonálních Drinfeldových doublů je možnost převést jejich bilineární formu volbou báze v podsuperalgebře $\tilde{\mathcal{G}}$ na kanonický tvar:

$$\langle b_i, \tilde{b}^j \rangle = \delta_i^j \tag{4.10}$$

$$\langle f_\alpha, \tilde{f}^\beta \rangle = \delta_\alpha^\beta \tag{4.11}$$

Ostatní hodnoty dostaneme ze supersymetrie formy, izotropie podsuperalgeber a vlastnosti B-F ortogonality, protože platí:

$$\langle b_i, \tilde{f}^\alpha \rangle = 0$$

$$\langle f_\alpha, \tilde{b}^i \rangle = 0$$

Zvolíme tedy k libovolné bázi $\{b_i, f_\alpha\}$ v $\mathcal{G}$ bázi $\{\tilde{b}^i, \tilde{f}^\alpha\}$ v $\tilde{\mathcal{G}}$ tak, aby forma měla kanonický tvar. Z podmínky super-ad-invariance poté dostaneme naprosto stejným postupem (a nebudeme jej zde proto opakovat) vztahy mezi velkými a malými strukturními koeficienty. V této bázi můžeme strukturní koeficienty B-F ortogonálního superdoublu napsat jako:

$$[b_i, b_j] = \beta_{ij}{}^k b_k,\ [b_i, f_\alpha] = \sigma_{i\alpha}{}^\beta f_\beta,\ [f_\alpha, f_\beta] = \varphi_{\alpha\beta}{}^k b_k$$

$$[\tilde{b}^i, \tilde{b}^j] = \tilde{\beta}^{ij}_{\ k}\tilde{b}^k,\ [\tilde{b}^i, \tilde{f}^\alpha] = \tilde{\sigma}^{i\alpha}{}_\beta \tilde{f}^\beta,\ [\tilde{f}^\alpha, \tilde{f}^\beta] = \tilde{\varphi}^{\alpha\beta}_{\ \ k}\tilde{b}^k$$

$$[b_i, \tilde{b}^j] = \tilde{\beta}^{jk}_{\ \ i} b_k - \beta_{ik}{}^j \tilde{b}^k$$

$$[b_i, \tilde{f}^\alpha] = \tilde{\varphi}^{\alpha\beta}_{\ \ i} f_\beta - \sigma_{i\beta}{}^\alpha \tilde{f}^\beta$$

$$[f_\alpha, \tilde{b}^i] = \tilde{\sigma}^{i\beta}{}_\alpha f_\beta + \varphi_{\alpha\beta}{}^i \tilde{f}^\beta$$

$$[f_\alpha, \tilde{f}^\beta] = -\tilde{\sigma}^{k\beta}{}_\alpha b_k + \sigma_{k\alpha}{}^\beta \tilde{b}^k$$

Ve shodě s metodou v části 3.2.2 nyní hledejme transformace bází v obou podalgebrách, které zachovají kanonický tvar formy, tj. tak, aby podmínky (4.10) a (4.11) platily i v nové bázi. Označme hledané transformace bází podalgeber $\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}$ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ (zvlášť bereme transformaci bosonové a fermionové části). Pro bazické vektory platí transformační vztahy (čárkujeme nové báze):

$$(b_1', \ldots, b_m') = (b_1, \ldots, b_m)\mathbf{A},\ (f_1', \ldots, f_n') = (f_1, \ldots, f_n)\mathbf{B}$$

$$(\tilde{b}'^1, \ldots, \tilde{b}'^m) = (\tilde{b}^1, \ldots, \tilde{b}^m)\mathbf{C},\ (\tilde{f}'^1, \ldots, \tilde{f}'^n) = (\tilde{f}^1, \ldots, \tilde{f}^n)\mathbf{D}$$

Tyto transformace můžeme napsat jako transformaci báze v celé superalgebře $\mathcal{S}$ maticově jako:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

Forma má v kanonickém tvaru maticový (blokově) tvar:

$$\mathbf{F}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zachování kanonického tvaru formy vyjadřuje vztah:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{F}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} \mathbf{P} = \mathbf{F}_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$$

Po roznásobení dostaneme podmínky:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{C} = \mathbf{C}^T\mathbf{A} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{B}^T\mathbf{D} = \mathbf{D}^T\mathbf{B} = \mathbf{1}$$

Ty splníme jedině tak, že položíme $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-T}$, $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-T}$. Z toho důvodu přeznačíme transformační matice jako $\mathbf{A} = \mathbf{P}$, $\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-T}$, $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{P}}$ a $\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{P}}^{-T}$.

Bazická transformace zachovávající kanonický tvar formy bude mít po uvážení výše zmíněného tvar:

$$b'_i = \mathbf{P}_i^k b_k,\ \tilde{b}'^i = (\mathbf{P}^{-1})^i_k \tilde{b}^k \tag{4.12}$$

$$f'_\alpha = \tilde{\mathbf{P}}^\beta_\alpha f_\beta,\ \tilde{f}'^\alpha = (\tilde{\mathbf{P}}^{-1})^\alpha_\beta \tilde{f}^\beta \tag{4.13}$$

B-B ortogonální Maninovy supertrojice

Použijeme značení shodné s tím, které bylo použito v části 4.2.2. Označíme opět $(m,n) := g(\mathcal{G})$, Z předchozího víme, že $g(\tilde{\mathcal{G}}) = (n,m)$.

I zde umíme volbou báze v podsuperalgebře $\tilde{\mathcal{G}}$ převést formu na kanonický tvar:

$$\langle b_i, \tilde{f}^j \rangle = \delta_i^j \tag{4.14}$$

$$\langle f_\alpha, \tilde{b}^\beta \rangle = \delta_\alpha^\beta \tag{4.15}$$

Ostatní hodnoty dostaneme ze supersymetrie formy, izotropie podsuperalgeber a vlastnosti B-B ortogonality, protože platí:

$$\langle b_i, \tilde{b}^\alpha \rangle = 0$$
$$\langle f_\alpha, \tilde{f}^i \rangle = 0$$

Zvolíme tedy k libovolné bázi $\{b_i, f_\alpha\}$ v $\mathcal{G}$ bázi $\{\tilde{b}^\alpha, \tilde{f}^i\}$ v $\tilde{\mathcal{G}}$ tak, aby forma měla kanonický tvar. Z důvodu super-ad-invariance můžeme strukturní koeficienty B-B ortogonálního superdoublu napsat jako:

$$[b_i, b_j] = \beta_{ij}{}^k b_k,\ [b_i, f_\alpha] = \sigma_{i\alpha}{}^\beta f_\beta,\ [f_\alpha, f_\beta] = \varphi_{\alpha\beta}{}^k b_k$$
$$[\tilde{b}^\alpha, \tilde{b}^\beta] = \tilde{\beta}^{\alpha\beta}{}_\nu \tilde{b}^\nu,\ [\tilde{b}^\alpha, \tilde{f}^i] = \tilde{\sigma}^{\alpha i}{}_k \tilde{f}^k,\ [\tilde{f}^i, \tilde{f}^j] = \tilde{\varphi}^{ij}{}_\alpha \tilde{b}^\alpha$$
$$[b_i, \tilde{b}^\alpha] = \tilde{\sigma}^{\alpha k}{}_i b_k - \sigma_{i\beta}{}^\alpha \tilde{b}^\beta$$
$$[b_i, \tilde{f}^j] = -\tilde{\sigma}^{\alpha j}{}_i f_\alpha - \beta_{ik}{}^j \tilde{f}^k$$
$$[f_\alpha, \tilde{b}^\beta] = \tilde{\beta}^{\beta\nu}{}_\alpha f_\nu + \sigma_{k\alpha}{}^\beta \tilde{f}^k$$
$$[f_\alpha, \tilde{f}^i] = \tilde{\varphi}^{ik}{}_\alpha b_k + \varphi_{\alpha\beta}{}^i \tilde{b}^\beta$$

Analogicky jako pro B-F ortogonální Drinfeldovy superdoubly bychom odvodili, že transformace bází zachovávající kanonický tvar formy (4.14), (4.15) mají pro B-B ortogonální Drinfeldovy superdoubly tvar:

$$b'_i = \mathbf{P}_i^k b_k,\ \tilde{b}'^\alpha = (\tilde{\mathbf{P}}^{-1})^\alpha_\beta \tilde{b}^\beta \tag{4.16}$$

$$f'_\alpha = \tilde{\mathbf{P}}^\beta_\alpha f_\beta,\ \tilde{f}'^i = (\mathbf{P}^{-1})^i_k \tilde{f}^k \tag{4.17}$$

Definice 4.4.5. Nechť $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ je Maninova supertrojice. $g(\mathcal{G}) = g(\tilde{\mathcal{G}}) = (m, n)$.

Nechť $\{b_i, f_\alpha\}$ je báze $\mathcal{G}$ a $\{\tilde{b}^i, \tilde{f}^\alpha\}$ je báze $\tilde{\mathcal{G}}$ taková, že v nich má forma kanonický tvar. (Ať už jde o B-F ortogonální a podmínky (4.10),(4.11) nebo o B-B ortogonální a podmínky (4.14),(4.15).)

Lieovské superzávorky podsuperalgeber zapíšeme pomocí strukturních koeficientů:

$$[b_i, b_j] = \beta_{ij}{}^k b_k,\ [b_i, f_\alpha] = \sigma_{i\alpha}{}^\beta f_\beta,\ [f_\alpha, f_\beta] = \varphi_{\alpha\beta}{}^k b_k$$

$$[\tilde{b}^i, \tilde{b}^j] = \tilde{\beta}^{ij}_{\ \ k} \tilde{b}^k,\ [\tilde{b}^i, \tilde{f}^\alpha] = \tilde{\sigma}^{i\alpha}{}_\beta \tilde{f}^\beta,\ [\tilde{f}^\alpha, \tilde{f}^\beta] = \tilde{\varphi}^{\alpha\beta}_{\ \ k} \tilde{b}^k$$

Potom Maninovu supertrojici $(\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}})$ nazveme duální k supertrojici $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$, právě když existuje $\{k_i, l_\alpha\}$ báze $\mathcal{H}$ a $\{\tilde{k}^i, \tilde{l}^\alpha\}$ báze $\tilde{\mathcal{H}}$ taková, že jsou splněny následující dvě podmínky:

1. Bilineární forma má v těchto bázích kanonický tvar.
2. Pro strukturní koeficienty podalgeber $\mathcal{H}$ a $\tilde{\mathcal{H}}$ platí:

$$[k_i, k_j] = \tilde{\beta}^{ij}_{\ \ k} k_k,\ [k_i, l_\alpha] = \tilde{\sigma}^{i\alpha}{}_\beta l_\beta,\ [l_\alpha, l_\beta] = \tilde{\varphi}^{\alpha\beta}_{\ \ k} k_k$$

$$[\tilde{k}^i, \tilde{k}^j] = \beta_{ij}{}^k \tilde{k}^k,\ [\tilde{k}^i, \tilde{l}^\alpha] = \sigma_{i\alpha}{}^\beta \tilde{l}^\beta,\ [\tilde{l}^\alpha, \tilde{l}^\beta] = \varphi_{\alpha\beta}{}^k \tilde{k}^k$$

Jde tedy o supertrojici, kterou získáme prohozením strukturních konstant u obou podsuperalgeber. Chceme však, aby byla forma takové supertrojice v kanonickém tvaru.

Vyvstává otázka, zda je pro danou Maninovu supertrojici její duální supertrojice příslušná stejnému Drinfeldovu superdoublu. V B-F ortogonálním případě je hledaným izomorfismem například transformace $b'_i = \tilde{b}^i, f'_\alpha = \tilde{f}^\alpha, \tilde{b}'^i = b_i, \tilde{f}'^\alpha = -f_\alpha$. Pro B-B ortogonální si vystačíme s transformací známou z obyčejného Drinfeldova doublu, tedy $b'_i = \tilde{b}^i, f'_\alpha = \tilde{f}^\alpha, \tilde{b}'^i = b_i, \tilde{f}'^\alpha = f_\alpha$.

4.4.3 Metoda klasifikace Drinfeldových superdoublů

Při klasifikaci Drinfeldových superdoublů se postup nezmění oproti klasifkaci Drinfeldových doublů. Pro každý stupeň superalgebry $\mathcal{S}$ vezmeme již zklasifikované třídy neizomorfních Maninových supertrojic a budeme zkoumat, zda nejsou izomorfní ve smyslu Drinfeldových superdoublů.

Jak jsme ukázali v tvrzení 4.3.6, je vlastnost B-F a B-B ortogonality na bázi nezávislá vlastnost. Vzhledem k tomu, že hledání izomorfismů Lieovských superalgeber můžeme ztotožnit s hledáním speciálních bazických transormací, nemůžou být z definice 4.4.1 izomofní dva superadoubly, z nichž jeden je B-F ortogonální a druhý B-B ortogonální. Z toho důvodu můžeme klasifikovat tyto dvě třídy superdoublů zvlášť.

Jaké nástroje použít ke klasifikaci Drinfeldových superdoublů? Samozřejmě se nabízí stejné možnosti, jako v případě obyčejných Lieovských superalgeber. Lieovské superalgebry obou zkoumaných Drinfeldových superdoublů musí být izomorfní - musí mít tedy naprosto shodné algebraické vlastnosti, jako jsou řešitelnost, nilpotentost, dimenze (resp. stupeň) komutantů celé algebry a v neposlední řadě též signaturu Killingovy formy, kterou pro jistotu definujeme přímo jako $K(x, y) = tr[[x, [y, .]]$.

Tato forma je symetrická a má proto smysl hovořit o její signatuře, která se navíc musí při změně báze zachovávat. Killingovy formy dvou izomorfních Lieovských superalgeber tak nutně musí mít stejnou signaturu.

4.5 Klasifikace 4-rozměrných Maninových supertrojic

V následující části klasifikujeme úplně B-F ortogonální a B-B ortogonální Maninovy supertrojice. Jiné exotičtější formy Drinfeldova superdoublu sice existují, ale v klasifikaci se jim vyhneme. Bude jim věnována pouze malá část na konci kapitoly.

Máme hned několik možností, co se stupně Drinfeldova superdoublu jako Lieovské superalgebry týče. Případ $g(\mathcal{S}) = (4, 0)$ jsme plně vyřešili v části 3.2. Případ $g(\mathcal{S}) = (0, 4)$ je triviální a nebudeme jej proto rozebírat.

Pro B-F a B-B ortogonální Drinfeldovy superdoubly musí být dimenze bosonové i fermionové části $\mathcal{S}$ sudá (jiné Drinfeldovy superdoubly zatím neuvažujeme) a zbývá nám tedy jediná možnost $g(\mathcal{S}) = (2, 2)$. Pro B-F ortogonální máme nyní jedinou možnost stupně obou podsuperalgeber $g(\mathcal{G}) = g(\tilde{\mathcal{G}}) = (1, 1)$, pro B-B ortogonální možnosti tři.

Zde se však objeví pozoruhodný problém. Je jím případ, kdy je lichá část algebry $\mathcal{G}$ nulová, zatímco u algebry $\tilde{\mathcal{G}}$ totéž platí pro část sudou. To nastane například pro B-B ortogonální $(2, 0) - (0, 2)$ rozklad. Pro obyčejný vektorový prostor je báze uspořádaná n-tice vektorů a existuje bazická transformace, která toto uspořádání mění (vyjádřitelná v dvourozměrném prostoru například maticí σ_1).

V případě supervektorového prostoru však máme báze dvě - bosonovou a fermionovou. Při změně báze celého supervektorového prostoru zakazujeme lineární transformace, které by nezachovaly paritu vektoru - nemůžeme tedy bazickou transformací měnit vzájemné pořadí sudého a lichého generátoru. Proto nemá smysl mluvit o uspořádání bázických vektorů celého supervektorového prostoru, ale vždy pouze zvlášť o uspořádání bosonové báze, resp. fermionové báze.

V ten okamžik ale narazíme na problém s rozlišením rozkladu $(2, 0) - (0, 2)$ a $(0, 2) - (2, 0)$. Tyto Drinfeldovy superdoubly se liší pouze vzájemným pořadím bazických vektorů z obou podsuperalgeber, které však dle výše zmíněného není nijak definováno. Pokud je teorie vybudovaná správně, neměl by v tomto okamžiku nastat žádný rozpor. Klasifikací případu $(2, 0) - (0, 2)$ musíme dostat identické výsledky, jako klasifikací rozkladu $(0, 2) - (2, 0)$. Ukazuje se, že pro čtyřrozměrný Drinfeldův superdouble tomu tak vskutku je (stačí se podívat, jakým způsobem jdou zapsat velké strukturní koeficienty pomocí malých). Proto budeme klasifikovat pouze jeden směr - a to $(2, 0) - (0, 2)$.

4.5.1 B-F ortogonální $(1,1)-(1,1)$ rozklad

Obě podsuperalgebry budou dvourozměrné Lieovské superalgebry. Ty existují celkem 3:

1. Abelovská $\mathbf{I}_{(1,1)}$: $[b_1, f_1] = 0$, $[f_1, f_1] = 0$.
2. Řešitelná $\mathbf{II}_{(1,1)}$: $[b_1, f_1] = cf_1$, $c \neq 0$, $[f_1, f_1] = 0$.
3. Nilpotentní $\mathbf{III}_{(1,1)}$: $[b_1, f_1] = 0$ $[f_1, f_1] = db_1$, $d \neq 0$.

Pro podalgebry $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ máme tedy vždy na výběr ze tří možností. Bázi první z podalgeber zvolíme tak, aby měla algebra co nejjednodušší tvar. Bázi druhé podalgebry zvolíme tak, aby byly splněny podmínky (4.10) a (4.11).

Stejně jako v případě obyčejného Drinfeldova doublu nebudeme zvlášť klasifikovat duální Maninovy supertrojice. Víme, že ke každé supertrojici, kde mají obě podsuperalgebry stejný stupeň, taková supertrojice existuje. Pro $\mathcal{G}$ izomorfní $\tilde{\mathcal{G}}$ je duální Maninova supertrojice izomorfní (ve smyslu definice 4.4.2), v opačném případě nikoliv (přísluší ale stejnému Drinfeldovu superdoublu).

$\mathcal{G}$ Abelovská $\tilde{\mathcal{G}}$ Abelovská

Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = 0,\ [f_1, f_1] = 0$$
$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = 0$$

Zbývající koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$ budou přirozeně všechny nula. Dostáváme tedy Abelovskou superalgebru. Tuto Maninovu supertrojici označme jako $(\mathbf{I} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{I}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$.

$\mathcal{G}$ Řešitelná $\tilde{\mathcal{G}}$ Abelovská

Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = f_1,\ [f_1, f_1] = 0$$
$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = 0$$

Do jednoduššího tvaru již zřejmě nejde strukturní koeficienty převést. Dopočteme zbývající strukturní koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$ a dostaneme:

$$[b_1, \tilde{f}^1] = -\tilde{f}^1,\ [f_1, \tilde{f}^1] = \tilde{b}^1$$

Ověření super-Jacobiho identit ukáže, že taková struktura je skutečně superalgebrou[3]. Tuto Maninovu supertrojici označme jako $(\mathbf{II} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{II}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$.

[3]Toto ověřování nelze brát ani ve čtyřrozměrném případě na lehkou váhu. Díky přítomnosti antikomutátorů totiž dostáváme i pro nízké dimenze velké množství netriviálních podmínek.

$\mathcal{G}$ Nilpotentní $\tilde{\mathcal{G}}$ Abelovská

Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = 0,\ [f_1, f_1] = b_1$$

$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = 0$$

Opět máme strukturní koeficenty v nejjednodušším tvaru. Dopočteme zbývající strukturní koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$ a dostaneme:

$$[f_1, \tilde{b}^1] = \tilde{f}^1$$

Jacobiho superidentity jsou i v tomto případě splněny. Tuto Maninovu supertrojici označme jako (**III** | B-F | $\mathbf{III}_{(1,1)}$, $\mathbf{I}_{(1,1)}$).

$\mathcal{G}$ Řešitelná $\tilde{\mathcal{G}}$ Řešitelná

Zvolíme bázi v $\mathcal{G}$ tak, aby měla co nejjednodušší tvar. V superalgebře $\tilde{\mathcal{G}}$ najdeme bázi tak, aby byly splněny podmínky (4.10) a (4.11). Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = f_1,\ [f_1, f_1] = 0$$

$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = c\tilde{f}^1,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ c \neq 0$$

Transformace bází vyhovující (4.12) a (4.13) mají tvar:

$$b_1' = pb_1,\ \tilde{b}'^1 = \frac{1}{p}\tilde{b}^1,\ f_1' = \tilde{p}f_1,\ \tilde{f}'^1 = \frac{1}{\tilde{p}}\tilde{f}^1,\ p, \tilde{p} \neq 0 \tag{4.18}$$

Komutátory v nové bázi mají tvar:

$$[b_1', f_1'] = pf_1',\ [f_1', f_1'] = 0$$

$$[\tilde{b}'^1, \tilde{f}'^1] = \frac{1}{p}c\tilde{f}'^1,\ [\tilde{f}'^1, \tilde{f}'^1] = 0$$

Chceme zvolit transformaci tak, aby se zachoval jednoduchý tvar strukturních koeficientů první z podsuperalgeber. Musíme tedy nutně zvolit $p = 1$ a jelikož na $\tilde{p}$ transformace vůbec nezáleží, dostáváme pro jeho libovolnou nenulovou hodnotu strukturní koeficenty ve tvaru:

$$[b_1', f_1'] = f_1',\ [f_1', f_1'] = 0$$

$$[\tilde{b}'^1, \tilde{f}'^1] = c\tilde{f}'^1,\ [\tilde{f}'^1, \tilde{f}'^1] = 0$$

Dopočteme-li zbývající strukturní koeficenty, dostaneme:

$$[b_1', \tilde{f}'^1] = -\tilde{f}'^1,\ [f_1', \tilde{b}'^1] = cf_1',\ [f_1', \tilde{f}'^1] = -cb_1' + \tilde{b}'^1$$

Ověření super-Jacobiho identit ale ukázalo, že nejde o superalgebru.

$\mathcal{G}$ Řešitelná $\tilde{\mathcal{G}}$ Nilpotentní

Zvolíme bázi v $\mathcal{G}$ tak, aby měla co nejjednodušší tvar. V superalgebře $\tilde{\mathcal{G}}$ najdeme bázi tak, aby byly splněny podmínky (4.10) a (4.11). Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = f_1,\ [f_1, f_1] = 0$$
$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = c\tilde{b}^1,\ c \neq 0$$

Použitím transformačních vztahů (4.18) dostaneme:

$$[b'_1, f'_1] = pf'_1,\ [f'_1, f'_1] = 0$$
$$[\tilde{b}'^1, \tilde{f}'^1] = 0,\ [\tilde{f}'^1, \tilde{f}'^1] = \frac{p}{\tilde{p}^2} c\tilde{b}'^1$$

Chceme zvolit transformaci tak, aby se zachoval jednoduchý tvar strukturních koeficientů první z podsuperalgeber. Musíme tedy nutně zvolit $p = 1$. Volbou $\tilde{p} = \sqrt{c}$ pro $c > 0$ nebo $\tilde{p} = \sqrt{-c}$ pro $c < 0$ dostaneme dva rozdílné případy. Komutátory v takto zvolené bázi mají tvar:

$$[b'_1, f'_1] = f'_1,\ [f'_1, f'_1] = 0$$
$$[\tilde{b}'^1, \tilde{f}'^1] = 0,\ [\tilde{f}'^1, \tilde{f}'^1] = \pm\tilde{b}'^1$$

Dopočteme-li zbývající strukturní koeficenty, dostaneme:

$$[b'_1, \tilde{f}'^1] = \pm f'_1 - \tilde{f}'^1,\ [f'_1, \tilde{f}'^1] = \tilde{b}'^1$$

Ověření super-Jacobiho identit ukázalo, že jde v obou případech o superalgebru. Tyto dvě Maninovy supertrojice označme ($\mathbf{IV}^{\pm}$ | B-F | $\mathbf{II}_{(1,1)}$, $\mathbf{III}_{(1,1)}$).

$\mathcal{G}$ Nilpotentní $\tilde{\mathcal{G}}$ Nilpotentní

Zvolíme bázi v $\mathcal{G}$ tak, aby měla co nejjednodušší tvar. V superalgebře $\tilde{\mathcal{G}}$ najdeme bázi tak, aby byly splněny podmínky (4.10) a (4.11). Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = 0,\ [f_1, f_1] = b_1$$
$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = c\tilde{b}^1,\ c \neq 0$$

Použitím transformačních vztahů (4.18) dostaneme:

$$[b'_1, f'_1] = 0,\ [f'_1, f'_1] = \frac{\tilde{p}^2}{p} b'_1$$
$$[\tilde{b}'^1, \tilde{f}'^1] = 0,\ [\tilde{f}'^1, \tilde{f}'^1] = \frac{p}{\tilde{p}^2} c\tilde{b}'^1$$

Chceme-li zachovat jednoduchý tvar strukturních koeficientů první podsuperalgebry, nemůžeme již tvar nijak zjednodušit. Dostáváme tedy:

$$[b'_1, f'_1] = 0,\ [f'_1, f'_1] = b'_1$$

$$[\tilde{b}'^1, \tilde{f}'^1] = 0,\ [\tilde{f}'^1, \tilde{f}'^1] = c\tilde{b}'^1,\ c \neq 0$$

Dopočteme-li zbývající strukturní koeficenty, dostaneme:

$$[b'_1, \tilde{f}'^1] = cf'_1,\ [f'_1, \tilde{b}'^1] = \tilde{f}'^1$$

Ověření super-Jacobiho identit ale ukáže, že takováto struktura není superalgebrou. Rozklad na dvě nilpotentní podsuperalgebry tedy neexistuje.

4.5.2 B-B ortogonální $(1,1)-(1,1)$ rozklad

$\mathcal{G}$ Abelovská $\tilde{\mathcal{G}}$ Abelovská

Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = 0,\ [f_1, f_1] = 0$$
$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = 0$$

Zbývající koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$ budou přirozeně všechny nula. Dostáváme tedy Abelovskou superalgebru. Tuto Maninovu supertrojici označme jako $(\mathbf{I} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{I}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$.

$\mathcal{G}$ Řešitelná $\tilde{\mathcal{G}}$ Abelovská

Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = f_1,\ [f_1, f_1] = 0$$
$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = 0$$

Do jednoduššího tvaru již zřejmě nejde strukturní koeficienty převést. Dopočteme zbývající strukturní koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$ a dostaneme:

$$[b_1, \tilde{b}^1] = -\tilde{b}^1,\ [f_1, \tilde{b}^1] = \tilde{f}^1$$

Ověření super-Jacobiho identit ukáže, že taková struktura je skutečně superalgebrou. Tuto Maninovu supertrojici označme jako $(\mathbf{II} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{II}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$.

$\mathcal{G}$ Nilpotentní $\tilde{\mathcal{G}}$ Abelovská

Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = 0,\ [f_1, f_1] = b_1$$
$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = 0$$

Opět máme strukturní koeficenty v nejjednodušším tvaru. Dopočteme zbývající strukturní koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$ a dostaneme:

$$[f_1, \tilde{f}^1] = \tilde{b}^1$$

Jacobiho superidentity jsou i v tomto případě splněny. Tuto Maninovu supertrojici označme jako $(\mathbf{III} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{III}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$.

$\mathcal{G}$ Řešitelná $\tilde{\mathcal{G}}$ Řešitelná

Zvolíme bázi v $\mathcal{G}$ tak, aby měla co nejjednodušší tvar. V superalgebře $\tilde{\mathcal{G}}$ najdeme bázi tak, aby byly splněny podmínky (4.14) a (4.15). Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = f_1,\ [f_1, f_1] = 0$$

$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = c\tilde{f}^1,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ c \neq 0$$

Transformace bází vyhovující (4.16) a (4.17) mají tvar:

$$b'_1 = pb_1,\ \tilde{b}'^1 = \frac{1}{\tilde{p}}\tilde{b}^1,\ f'_1 = \tilde{p}f_1,\ \tilde{f}'^1 = \frac{1}{p}\tilde{f}^1,\ p, \tilde{p} \neq 0 \tag{4.19}$$

Komutátory v nové bázi mají tvar:

$$[b'_1, f'_1] = pf'_1,\ [f'_1, f'_1] = 0$$

$$[\tilde{b}'^1, \tilde{f}'^1] = \frac{1}{\tilde{p}}c\tilde{f}'^1,\ [\tilde{f}'^1, \tilde{f}'^1] = 0$$

Chceme zvolit transformaci tak, aby se zachoval jednoduchý tvar strukturních koeficientů první z podsuperalgeber. Musíme tedy nutně zvolit $p = 1$. Položíme $\tilde{p} = c$ a dostaneme strukturní koeficenty ve tvaru:

$$[b'_1, f'_1] = f'_1,\ [f'_1, f'_1] = 0$$

$$[\tilde{b}'^1, \tilde{f}'^1] = \tilde{f}'^1,\ [\tilde{f}'^1, \tilde{f}'^1] = 0$$

Dopočteme-li zbývající strukturní koeficenty, dostaneme:

$$[b'_1, \tilde{b}'^1] = b'_1 - \tilde{b}'^1,\ [b'_1, \tilde{f}'^1] = -f'_1,\ [f'_1, \tilde{b}'^1] = \tilde{f}'^1$$

Ověření super-Jacobiho identit ukázalo, že jde o superalgebru. Tuto Maninovu supertrojici označme ($\mathbf{IV}$ | B-B | $\mathbf{II}_{(1,1)}$, $\mathbf{II}_{(1,1)}$).

$\mathcal{G}$ Řešitelná $\tilde{\mathcal{G}}$ Nilpotentní

Zvolíme bázi v $\mathcal{G}$ tak, aby měla co nejjednodušší tvar. V superalgebře $\tilde{\mathcal{G}}$ najdeme bázi tak, aby byly splněny podmínky (4.14) a (4.15). Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = f_1,\ [f_1, f_1] = 0$$

$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = c\tilde{b}^1,\ c \neq 0$$

Použitím transformačních vztahů (4.19) dostaneme:

$$[b'_1, f'_1] = pf'_1,\ [f'_1, f'_1] = 0$$

$$[\tilde{b}'^1, \tilde{f}'^1] = 0,\ [\tilde{f}'^1, \tilde{f}'^1] = \frac{\tilde{p}}{p^2}c\tilde{b}'^1$$

Chceme zvolit transformaci tak, aby se zachoval jednoduchý tvar strukturních koeficientů první z podsuperalgeber. Musíme tedy nutně zvolit $p = 1$. Volbou $\tilde{p} = \frac{1}{c}$ dostaneme v takto zvolené bázi:

$$[b'_1, f'_1] = f'_1,\ [f'_1, f'_1] = 0$$
$$[\tilde{b}'^1, \tilde{f}'^1] = 0,\ [\tilde{f}'^1, \tilde{f}'^1] = \tilde{b}'^1$$

Dopočteme-li zbývající strukturní koeficenty, dostaneme:

$$[b'_1, \tilde{b}'^1] = -\tilde{b}'^1,\ [f'_1, \tilde{b}'^1] = \tilde{f}'^1,\ [f'_1, \tilde{f}'^1] = b'_1$$

Ověření super-Jacobiho identit ale ukáže, že takováto struktura není superalgebrou.

$\mathcal{G}$ Nilpotentní $\tilde{\mathcal{G}}$ Nilpotentní

Zvolíme bázi v $\mathcal{G}$ tak, aby měla co nejjednodušší tvar. V superalgebře $\tilde{\mathcal{G}}$ najdeme bázi tak, aby byly splněny podmínky (4.14) a (4.15). Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = 0,\ [f_1, f_1] = b_1$$
$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = c\tilde{b}^1,\ c \neq 0$$

Použitím transformačních vztahů (4.19) dostaneme:

$$[b'_1, f'_1] = 0,\ [f'_1, f'_1] = \frac{\tilde{p}^2}{p} b'_1$$
$$[\tilde{b}'^1, \tilde{f}'^1] = 0,\ [\tilde{f}'^1, \tilde{f}'^1] = \frac{\tilde{p}}{p^2} c\tilde{b}'^1$$

Stačí zvolit $p = c^{2/3}$, $\tilde{p} = c^{1/3}$ a dostaneme:

$$[b'_1, f'_1] = 0,\ [f'_1, f'_1] = b'_1$$
$$[\tilde{b}'^1, \tilde{f}'^1] = 0,\ [\tilde{f}'^1, \tilde{f}'^1] = \tilde{b}'^1$$

Dopočteme-li zbývající strukturní koeficenty, dostaneme:

$$[f'_1, \tilde{f}'^1] = b'_1 + \tilde{b}'^1$$

Ověření super-Jacobiho identit ukáže, že jde o superalgebru. Tuto Maninovu supertrojici označme $(\mathbf{V} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{III}_{(1,1)}, \mathbf{III}_{(1,1)})$.

4.5.3 B-B ortogonální $(2,0) - (0,2)$ rozklad

První podsuperalgebra bude obyčejná dvourozměrná Lieovská algebra. Ty existují dvě:

1. Abelovská $\mathbf{I}_{(2,0)}$: $[b_1, b_2] = 0$.
2. Řešitelná $\mathbf{II}_{(2,0)}$: $[b_1, b_2] = b_2$.

Druhá podsuperalgebra bude vzhledem ke svému stupni $(0,2)$ vždycky Abelovská (označíme $\mathbf{I}_{(0,2)}$).

$\mathcal{G}$ Abelovská $\tilde{\mathcal{G}}$ Abelovská

Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, b_2] = 0$$

$$[\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^2] = 0, [\tilde{f}^2, \tilde{f}^2] = 0$$

Zbývající koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$ budou přirozeně všechny nula. Dostáváme tedy Abelovskou superalgebru. Tuto Maninovu supertrojici označme jako ($\mathbf{I}$ | B-B | $\mathbf{I}_{(2,0)}$, $\mathbf{I}_{(0,2)}$).

$\mathcal{G}$ Řešitelná $\tilde{\mathcal{G}}$ Abelovská

Lieovské superzávorky obou podalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, b_2] = b_2,$$

$$[\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^2] = 0, [\tilde{f}^2, \tilde{f}^2] = 0$$

Do jednoduššího tvaru již zřejmě nejde strukturní koeficienty převést. Dopočteme zbývající strukturní koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$ a dostaneme:

$$[b_1, \tilde{f}^2] = -\tilde{f}^2$$

Ověření super-Jacobiho identit ukáže, že taková struktura je skutečně superalgebrou. Tuto Maninovu supertrojici označme jako ($\mathbf{II}$ | B-B | $\mathbf{II}_{(2,0)}$, $\mathbf{I}_{(0,2)}$).

4.6 Klasifikace 4-rozměrných Drinfeldových superdoublů

S využitím předchozí části nás nyní čeká nelehký úkol prozkoumat, zda některé z nalezených neizomorfních tříd Maninových supertrojic nejsou izomorfní ve smyslu Drinfeldových superdoublů, což lze interpretovat i jako tvrzení, že Drinfeldův supedouble s danou bilineární, nedegenerovanou, supersymetrickou a super-ad-invariantní formou lze rozložit na dvě podsuperalgebry několika způsoby.

V průběhu klasifikace Maninových supertrojic jsme ukázali, že pro všechny nalezené Maninovy supertrojice (pro $(1,1)-(1,1)$ rozklad, kde má tento pojem smysl) přísluší i jejich duální Maninova supertrojice stejnému Drinfeldovu superdoublu. Pokuď jsou $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ neizomorfní Lieovské algebry, není žádná taková Maninova supertrojice izomorfní ve smyslu (4.4.2) ke své duální.

Stejně jako v případě Drinfeldových doublů ale každou Maninovu supertrojici a se svou duální supertrojicí ztotožníme.

Přesto ukážeme, že stejně jako u čtyřrozměrných Drinfeldových doublů existuje víc neizomorfních Maninových supertrojic jednoho Drinfeldova superdoublu. Existuje dokonce takový, kterému přísluší šest neizomorfních Maninových supertrojic, po ztotožnění s duálními tři.

4.6.1 B-F ortogonální $(1,1)-(1,1)$ rozklad

Jako vždycky můžeme z diskuze o vzájemné izomorfii vyloučit Abelovskou Maninovu supertrojici $(\mathbf{I} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{I}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$. Taková totiž rozhodně nemůže být izomorfní jakékoliv z neabelovských Lieovských superalgeber

Zbývají nám čtyři třídy Maninových supertrojic. Jednou ze základních vlastností superalgeber je řešitelnost, resp. nilpotentnost. Výsledek zkoumání dopadnul následovně:

$(\mathbf{II} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{II}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$	řešitelná
$(\mathbf{III} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{III}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$	nilpotentní
$(\mathbf{IV}^{\pm} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{II}_{(1,1)}, \mathbf{III}_{(1,1)})$	řešitelná

Do samostatné třídy ekvivalence Drinfeldových superdoublů nám tedy vypadla supertrojice $(\mathbf{III} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{III}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$.

Zbývající tři třídy Maninových supertrojic jsou obě nilpotentní, mají v centru jednorozměrný podprostor generovaný $\tilde{b}^1$, a signatura jejich Killingových forem je rovněž ve všech případech stejná, a to $(1,0)$. V tento okamžik se tedy stávají jasnými adepty na příslušníky jediné třídy Drinfeldových superdoublů.

Hledané bazické transformace se vskutku podařilo najít:

$$\mathbf{II} \to \mathbf{IV}^{+} : b_1' = -b_1,\ f_1' = -\tilde{f}^1,\ \tilde{b}'^1 = -\tilde{b}^1,\ \tilde{f}'^1 = f_1 - \frac{1}{2}\tilde{f}^1$$

$$\mathbf{II} \to \mathbf{IV}^{-} : b_1' = -b_1,\ f_1' = -\tilde{f}^1,\ \tilde{b}'^1 = -\tilde{b}^1,\ \tilde{f}'^1 = f_1 + \frac{1}{2}\tilde{f}^1$$

Nalezením takové transformace (zachovává kanonický tvar formy) jsme ukázali, že Maninovy supertrojice $(\mathbf{II} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{II}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$ a $(\mathbf{IV}^{\pm} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{II}_{(1,1)}, \mathbf{III}_{(1,1)})$ přísluší jednomu Drinfeldovu superdoublu, přestože jsou jako Maninovy supertrojice neizomorfní. Když si uvědomíme, že k těmto třem existují ještě jejich tři duální supertrojice (které k nim, ani k sobě navzájem, nejsou izomorfní), dostáváme pro jeden Drinfeldův superdouble šest různých rozkladů na Maninovy supertrojice.

Výsledek klasifikace čtyřrozměrných B-F ortogonálních Drinfeldových superdoublů zaneseme do tabulky (duální Maninovy supertrojice nevypisujeme):

Drinfeldův superdouble	příslušné Maninovy supertrojice
$SD_{B-F}\mathbf{I}_{(2,2)}$	$(\mathbf{I} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{I}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$
$SD_{B-F}\mathbf{II}_{(2,2)}$	$(\mathbf{III} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{III}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$
$SD_{B-F}\mathbf{III}_{(2,2)}$	$(\mathbf{II} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{II}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$ $(\mathbf{IV}^{\pm} \mid \text{B-F} \mid \mathbf{II}_{(1,1)}, \mathbf{III}_{(1,1)})$

4.6.2 B-B ortogonální $(1,1)/(2,0) - (1,1)/(0,2)$ rozklad

Dá se ukázat, že existuje změna báze transformující kanonický tvar formy příslušející rozkladu $(1,1) - (1,1)$ na kanonický tvar příslušející $(2,0) - (0,2)$. Proto musíme klasifikovat oba podpřípady čtyřrozměrného B-B ortogonálního Drinfeldova superdoublu současně.

Na začátek můžeme prohlásit Abelovské Maninovy supertrojice $(\mathbf{I} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{I}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$ a $(\mathbf{I} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{I}_{(2,0)}, \mathbf{I}_{(0,2)})$ za izomorfní, protože transformace kanonických tvarů jejich forem existuje. Že jde o izomorfismus Abelovských Lieovských superalgeber je zřejmé. Zároveň nemůžou být tyto supertrojice izomorfní žádné z ostatních supertrojic, protože jejich superalgebry nejsou Abelovské.

Zbývá nám pět tříd B-B ortogonálních Maninových supertrojic. Výsledek zkoumání řešitelnosti/nilpotentnosti superalgeber dopadnul následovně:

$(\mathbf{II} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{II}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$	řešitelná
$(\mathbf{III} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{III}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$	nilpotentní
$(\mathbf{IV} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{II}_{(1,1)}, \mathbf{II}_{(1,1)})$	řešitelná
$(\mathbf{V} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{III}_{(1,1)}, \mathbf{III}_{(1,1)})$	nilpotentní
$(\mathbf{II} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{I}_{(0,2)})$	řešitelná

Dalším zajímavou informací je stupeň komutantu všech účastných algeber. Mezi řešitelnými se vymyká komutant superalgebry příslušné supertrojici $(\mathbf{II} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{I}_{(0,2)})$, který má stupeň $(1,1)$, narozdíl od ostatních v této skupince, jejichž komutanty mají stupeň $(1,2)$. Tato supertrojice tedy není jako Drinfeldův double izomorfní zbývajícím dvěma.

U nilpotentních vypadají stupně komutantů i komutantů komutantů stejně.

Další možností, jak od sebe jednotlivé superalgebry rozlišit, je Killingova forma. Bohužel u obou řešitelných vychází její signatura jako $(1,0)$ a u obou nilpotentních je Killingova forma nulová.

Poslední možnost je prověřit ručně, zda jsou příslušné superalgebry izomorfní (případně dokonce tak, že se zachová kanonický tvar forem).

Nejprve se ukazuje, že obě nilpotentní superalgebry příslušné Maninovým supertrojicím $(\mathbf{III} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{III}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$ a $(\mathbf{V} \mid \text{B-B} \mid \mathbf{III}_{(1,1)}, \mathbf{III}_{(1,1)})$ nejsou izomorfní. Obě Maninovy supertrojice tak nemůžou příslušet stejnému Drinfeldovu superdoublu.

Podíváme-li se na poslední dvojici supertrojic, ukáže se po delším počítání, že přísluší stejnému Drinfeldovu superdoublu. Hledaná bazická transformace (vskutku zachovává kanonický tvar formy) je:

$$\mathbf{II} \to \mathbf{IV} : b_1' = b_1 + \tilde{b}^1, \; f_1' = -f_1 + \tilde{f}^1, \; \tilde{b}'^1 = b_1, \; \tilde{f}'^1 = f_1$$

Výsledek klasifikace čtyřrozměrných B-B ortogonálních Drinfeldových superdoublů zaneseme do tabulky (duální Maninovy supertrojice nevypisujeme):

Drinfeldův superdouble	příslušné Maninovy supertrojice
$SD_{B-B}\mathbf{I}_{(2,2)}$	$(\mathbf{I}$ | B-B | $\mathbf{I}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$ $(\mathbf{I}$ | B-B | $\mathbf{I}_{(2,0)}, \mathbf{I}_{(0,2)})$
$SD_{B-B}\mathbf{II}_{(2,2)}$	$(\mathbf{II}$ | B-B | $\mathbf{II}_{(2,0)}, \mathbf{I}_{(0,2)})$
$SD_{B-B}\mathbf{III}_{(2,2)}$	$(\mathbf{III}$ | B-B | $\mathbf{III}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$
$SD_{B-B}\mathbf{IV}_{(2,2)}$	$(\mathbf{V}$ | B-B | $\mathbf{III}_{(1,1)}, \mathbf{III}_{(1,1)})$
$SD_{B-B}\mathbf{V}_{(2,2)}$	$(\mathbf{II}$ | B-B | $\mathbf{II}_{(1,1)}, \mathbf{I}_{(1,1)})$ $(\mathbf{IV}$ | B-B | $\mathbf{II}_{(1,1)}, \mathbf{II}_{(1,1)})$

4.7 Exotické formy Drinfeldova superdoublu

V průběhu celé práce jsme zatím mluvili jen o nejjednodušších případech Drinfeldových superdoublů. Ukazuje se totiž, že existují i mnohem složitější případy, než krásně uchopitelný a klasifikovatelný B-F ortogonální nebo B-B ortogonální případ.

Víme, že vždycky musí platit rovnost dimenzí obou podsuperalgeber. Není ale žádný důvod nepřipustit jakékoliv kombinace jejich stupňů. Celkový počet možností tedy zřejmě výrazně narůstá s dimenzí Drinfeldova superdoublu. Jen pro dimenzi 4 máme dohromady devět možností.

Dále rozhodně nelze pokaždé převést formu do (žádného) kanonického tvaru. Tím se velice znesnadňuje úloha klasifikace takových Drinfeldových superdoublů.

Jako demonstraci potíží, které pro neortogonální Drinfeldovy superdoubly nastanou, si uvedeme klasifikaci čtyřrozměrných Maninovych supertrojic, jejichž rozklad splňuje $g(\mathcal{G}) = g(\tilde{\mathcal{G}}) = (1,1)$ a následující:

$$\langle \mathcal{G}_1, \tilde{\mathcal{G}}_0 \rangle = 0, \ \langle \mathcal{G}_0, \tilde{\mathcal{G}}_1 \rangle \neq 0 \tag{4.20}$$

Upozorněme na fakt, že tato vlastnost závisí na volbě báze v superalgebře $\mathcal{S}$. Nejde tedy o vlastnost Drinfeldova superdoublu. Ukazuje se, že ale nezávisí na volbě báze v obou podalgebrách - množina Maninových supertrojic s touto vlastností je tedy sjednocením tříd ekvivalence podle izomorfismu 4.4.2. Dále žádná z nich nebude izomorfní žádné z B-F nebo B-B ortogonálních Maninových supertrojic. O B-F a B-B ortogonalitě jsme totiž dokázali, že na výběru báze nezávisí.

Důvod, proč lze při této volbě stupňů a vlastností Maninovy supertrojice klasifikovat nahlédneme snadno z matice formy:

$$\mathbf{F}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ a & 0 & 0 & 0 \\ c & -b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jelikož je forma nedegenerovaná, musí být $a, b, c \neq 0$. Dá se snadno ukázat, že umíme najít k libovolné bázi $\mathcal{G}$ bázi $\tilde{\mathcal{G}}$ takovou, že má forma tvar:

$$\mathbf{F}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \gamma \neq 0$$

V takové bázi ze super-ad-invariance spočteme, že superalgebra $\mathcal{S}$ musí mít tvar:

$$[\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = \tilde{\varphi}^{11}{}_1\tilde{b}^1, \ [b_1, \tilde{f}^1] = \gamma\tilde{\varphi}^{11}{}_1 f_1 \tag{4.21}$$

Vidíme, že v tomto případě jsou přípustné strukturní koeficenty podsuperalgeber velmi omezené.

Klasifikace všech neizomorfních Maninových supertrojic tohoto druhu je velice jednoduchá.

Parametr γ v "kanonickém" tvaru formy může být jakékoliv nenulové reálné číslo. Obecná transformace bází obou podalgeber, která převádí kanonický tvar s parametrem γ_1 na tvar s parametrem γ_2 je:

$$b_1' = \frac{1}{k}b_1, \ f_1' = \frac{1}{k}f_1, \ \tilde{b}'^1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}k\tilde{b}^1, \ \tilde{f}'^1 = k\tilde{f}^1, \ k \neq 0$$

Postup klasifikace je zřejmý. Nejprve najdeme všechny neizomorfní Maninovy supertrojice pro pevný parametr γ a poté se pokusíme nalézt transformaci mezi nalezenými třídami pro různé hodnoty γ.

Z (4.21) vidíme, že máme pouze dvě možnosti. První z algeber musí být vždycky Abelovská, jako $\tilde{\mathcal{G}}$ můžeme zvolit Abelovskou superalgebru $\mathbf{I}_{(1,1)}$ nebo nilpotentní superalgebru, označovanou jako $\mathbf{III}_{(1,1)}$.

$\mathcal{G}$ Abelovská $\tilde{\mathcal{G}}$ Abelovská

Všechny strukturní koeficenty obou podsuperalgeber budou nula a odtud samozřejmě i koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$.

Ukázali jsme, že existuje transformace převádějící mezi sebou kanonické tvary formy pro různé hodnoty parametru. V čistě Abelovském případě nemusíme hledět na strukturní koeficenty, můžeme použít libovolnou z takových transformací.

Je samozřejmě rozumné vybrat si jako nový parametr $\gamma_2 = 1$.

$\mathcal{G}$ Abelovská $\tilde{\mathcal{G}}$ Nilpotentní

Když říkáme, že umíme k libovolné bázi $\mathcal{G}$ najít bázi $\tilde{\mathcal{G}}$ převádějící formu do kanonického tvaru, můžeme semozřejmě pořadí těchto kroků obrátit a nic se nezmění. Toho využijeme v tomto případě, kdy zvolíme jednoduchý tvar podsuperalgebry $\tilde{\mathcal{G}}$ a k ní najdeme bázi $\mathcal{G}$.

Strukturní koeficienty obou podsuperalgeber budou mít tvar:

$$[b_1, f_1] = 0,\ [f_1, f_1] = 0$$

$$[\tilde{b}^1, \tilde{f}^1] = 0,\ [\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = \tilde{b}^1$$

Dopočteme zbývající strukturní koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$ a dostaneme:

$$[b_1, \tilde{f}^1] = \gamma f_1$$

Můžeme se ptát, zda existuje izomorfismus takovýchto Maninových trojic pro různé hodnoty parametru γ. Ukazuje se, že ano a hledaná bazická transformace má tvar:

$$b_1' = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\tilde{b}^1,\ f_1' = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}f_1,\ \tilde{b}'^1 = \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}\tilde{b}^1,\ \tilde{f}'^1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\tilde{f}^1$$

Všechny tyto Maninovy supertrojice jsou tedy navzájem izomorfní bez ohledu na hodnotu parametru γ, speciálně jsou tedy izomorfní i supertrojici s $\gamma = 1$.

Ukázali jsme, že existují pouze dvě neizomorfní třídy Maninových supertrojic, splňující podmínku (4.20). U obou reprezentantů má forma tvar:

$$\mathbf{F}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

První Maninova supertrojice je Abelovská, Lieovské superzávorky té druhé mají tvar:

$$[\tilde{f}^1, \tilde{f}^1] = \tilde{b}^1,\ [b_1, \tilde{f}^1] = f_1$$

Dále od poklidných vod B-F a B-B ortogonality se pouštět nebudeme. Evidentně by se ještě poměrně bez problémů daly klasifikovat Maninovy supertrojice, kde bychom pomíchali sudé a liché části v podmínce (4.20). Na kanonický tvar se dají obecně převést i formy pro Maninovy supertrojice, kde $g(\mathcal{G}) = (m, n)$ a $g(\tilde{\mathcal{G}}) = (m+n, 0)$, případně $g(\tilde{\mathcal{G}}) = (0, m+n)$.

Na několika jednoduchých příkladech se ukázalo, že počet netriviálních Maninových supertrojic tohoto typu je buď velice omezený, nebo dokonce nulový. Například neexistuje netriviální (není Abelovská) Maninova supertrojice, jejíž rozklad je stupně $(1,1) - (2,0)$. To však může být způsobeno nízkou dimenzí, kde máme málo nenulových strukturních koeficientů v obou podsuperalgebrách.

Vidíme ale, že nemožnost převést formy na kanonický tvar, respektive zmenšení třídy přípustných izomorfismů Maninových supertrojic, přináší už pro nízké dimenze spoustu problémů s jejich klasifikací.

Kapitola 5

Závěr

5.1 Čeho se dosáhnout podařilo

V první kapitole jsme seznámili čtenáře se základními pojmy z teorie superalgeber. Úspěšně jsme klasifikovali Lieovské superalgebry do dimenze tři s netriviální fermionovou částí, srovnání s [6] ukazuje, že správně.

Definovali jsme matematickou strukturu, nazýváme ji Drinfeldův superdouble, která vypadá jako rozumné zobecnění již poměrně dobře prozkoumaného pojmu Drinfeldův double (jsou například plně klasifikovány pro dimenzi 6, viz [5]). Ukázalo se, že je třeba za účelem získání netriviálních výsledků nějakým způsobem zobecnit vlastnosti formy. Provedli jsme proto sérii úvah v části 4.2, která nás dovedla k definici supersymetrie a super-ad-invariance.

Pro dvě třídy Drinfeldových superdoublů, B-F a B-B ortogonální, se podařilo snadno aplikovat metodu klasifikace Maninových trojic z [4] a plně tak klasifikovat čtyřrozměrné Maninovy supertrojice těchto typů.

Při znalosti Maninových supertrojic nebylo těžké klasifikovat i čtyřrozměrné B-F a B-B ortogonální Drinfeldovy superdoubly. Za povšimnutí stojí Drinfeldův superdouble $SD_{B-F}\mathbf{III}_{(2,2)}$, ke kterému existuje celkem šest neizomorfních Maninových supertrojic.

Na závěr jsme ukázali i jeden z typů Maninových supertrojic, který není B-F ani B-B ortogonální. Naznačili jsme těžkosti, které při klasifikaci takových Maninových supertrojic nastanou.

5.2 Čeho se dosáhnout nepodařilo

Na největší problém jsme narazili při snaze Drinfeldův superdouble definovat. Nalezené soustavy rovnic nejsou neotřesitelným argumentem. Jejich nesplňení vyústí jen v omezení množiny přípustných rozkladů. Neexistuje tedy jednoznačný důvod pro zavedení nových vlastností formy tak, jak jsme je zavedli, zvlášť když celé soustavě rovnic vyhovují dvě řešení. Při definici Drinfeldova superdoublu jsme se tedy ve výsledku rozhodli především intuitivně a ve shodě s naší představou o typických vlastnostech superalgeber.

Dále se ani pro pouhé čtyři dimenze nepodařilo nalézt postup, jak všechny Drinfeldovy superdoubly klasifikovat. Obecný postup jsme nalezli jen pro B-F a B-B ortogonální Drinfeldovy superdoubly. Jakékoliv složitější struktury už vyžadují speciální postup, ve vyšší dimenzi pravděpodobně žádný ani nalézt nepůjde. Mluvíme tedy samozřejmě o zobecnění metody klasifikace v [4].

5.3 Kudy se vydat dál?

Celou dobu jsme se úspěšně vyhýbali pojmům Lieova supergrupa a supervarieta. Existuje několik přístupů snažících se tyto pojmy nějakým způsobem zavést. Všechny z nich se ale zatím potýkají s porodními bolestmi. Nejvyšší metou je tedy jednoho dne nalézt k Lieovským superalgebrám odpovídající geometrickou strukturu.

Ukazuje se ale, že se to možná neobejde bez zobecnění pojmu Lieovská superalgebra. Problémem je těleso Lieovské superalgebry jako vektorového prostoru. Jsou jím reálná nebo komplexní čísla a na tomto prostoru není žádným způsobem zavedena gradace. Nicméně existuje zatím nepříliš probádaná možnost zavést do Lieovské superalgebry jakési “supertěleso”, nazývané někdy prostě “superčísla”, na kterých je definovaná sudá a lichá část, podobně jako u supervektorového prostoru. Nemůžeme a nebudeme se zde pouštět do hlubší diskuze.

Důležité je to, že poté by bilineární forma Drinfeldova superdoublu zobrazovala právě do těchto superčísel a její přirozenou vlastností by mělo být zachovávání parity vektoru stejným způsobem, jak to činí Lieovská superzávorka.

Pokud připustíme existenci nějaké takové možnosti, můžeme reálná čísla interpretovat jako jako superčísla s triviální lichou částí. Z požadavku zachovávání parity pak ale můžeme B-F ortogonální Drinfeldovy superdoubly definovat jako jedinou přípustnou možnost rozkladu. Forma musí dvojici boson - fermion přiřadit “liché” číslo. V této části superčísel (nyní reálných čísel) je ale pouze 0. To odpovídá našemu požadavku kolmosti sudé na lichou část podsuperalgeber $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$.

Snaha o takové rozšíření Lieovské superalebry, resp. bilineární formy nestojí zatím na pevných matematických základech. Do jisté míry se ale dá na základě předpokládaných vlastností takového rozšíření pracovat s některými pojmy - například zkoumat chování bilineární formy na dvou lichých prvcích. Ukazuje se, že v takových argumentech by forma měla být antisymetrická, ve shodě s tím, co jsme nalezli v této práci.

Dokonce se dá jistým způsobem ukázat, že ad-invariance se musí zobecnit přesně takovým způsobem, který tady nazýváme super-ad-invariance. Tyto pozoruhodné výsledky jsou zajímavé především tím, že jsme je odvodili za velikého přispění B-B ortogonálního Drinfeldova superdoublu, který podle o něco výše se vyskytujícího odstavce považujeme za nepřípustný.

Největším cílem do budoucna je tedy pokusit se všechny tyto směry prozkoumat a pokud možno sjednotit. Hlavně tedy s nějakou geometrickou strukturou, kterážto je pro aplikaci Drinfeldova supedoublu pro fyziku nejdůležitější.

Dodatek A

Podrobná klasifikace Lieovských superalgeber do dimenze 3

Tento dodatek je věnován odvození tabulek 2.1, 2.2 a 2.3 v části 2.2.4.

V následujícím klasifikujeme pouze Lieovské algebry, které mají netriviální bosonovou i fermionovou část. Čistě fermionové superalgebry mohou být pouze Abelovské, čistě bosonové jsou klasifikovány na mnoha jiných místech, než je tato práce. Úplná klasifikace v nízkých dimenzích je známa až pro obyčejné Lieovské algebry dimenze 6.

g(V)=(1,1)

Obecný tvar superzávorek jest:

$$[b_1, f_1] = cf_1$$
$$[f_1, f_1] = db_1$$
$$c, d \in \mathbb{C}$$

Ze super-Jacobiho identit dostaneme jediné omezení:

$$cd = 0$$

Libovolná transformace bazických vektorů má tvar:

$$b_1' = k_1 b_1$$
$$f_1' = k_2 f_1$$
$$k_1, k_2 \in \mathbb{C}, k_1 \neq 0, k_2 \neq 0.$$

Superzávorky v nové bázi mají tvar:

$$[b_1', f_1'] = [k_1 b_1, k_2 f_1] = k_1 k_2 [b_1, f_1] = k_1 k_2 c f_1 = k_1 c f_1'$$
$$[f_1', f_1'] = \cdots = (k_2^2/k_1) d b_1'$$

Vzhledem k omezení výše mohou nastat tři případy:

1. $c = 0 \wedge d = 0$

   Tato superalgebra je Abelovská. Bude jí i v jakékoliv jiné bázi. Označme ji $\mathbf{I}_{(1,1)}$.

2. $c \neq 0 \wedge d = 0$

   Zvolíme $k_1 = \frac{1}{c}$, $k_2 = 1$. V nové bázi má superalgebra tvar:

$$[b'_1, f'_1] = f'_1$$

$$[f'_1, f'_1] = 0$$

   Tuto superalgebru označíme jako $\mathbf{II}_{(1,1)}$.

3. $c = 0 \wedge d \neq 0$

   Zvolíme $k_1 = \frac{1}{d}$, $k_2 = 1$. V nové bázi má superalgebra tvar:

$$[b'_1, f'_1] = 0$$

$$[f'_1, f'_1] = b'_1$$

   Tuto superalgebru označíme jako $\mathbf{III}_{(1,1)}$.

Na první pohled je zřejmé, že žádné ze superalgeber $\mathbf{I}_{(1,1)}$, $\mathbf{II}_{(1,1)}$ a $\mathbf{III}_{(1,1)}$ mezi sebou nelze žádným způsobem převádět. Proto jejich výčtem považujeme superalgebry stupně $(1,1)$ za klasifikované.

g(V)=(2,1)

Obecný tvar superzávorek jest:

$$[b_1, b_2] = cb_1 + db_2$$

$$[f_1, f_1] = eb_1 + gb_1$$

$$[b_1, f_1] = af_1$$

$$[b_2, f_1] = bf_1$$

$$a, b, c, d, e, g \in \mathbb{C}$$

Ze super-Jacobiho identit dostaneme omezení:

$$ac + bd = 0$$

$$ae + bg = 0$$

$$g(c + 2b) = 0$$

$$g(d - 2a) = 0$$

$$e(c + 2b) = 0$$

$$e(d - 2a) = 0$$

Libovolná transformace bazických vektorů má tvar:

$$(b'_1, b'_2) = (b_1, b_2)\mathbf{P} = (b_1, b_2)\begin{pmatrix} p^1_1 & p^1_2 \\ p^2_1 & p^2_2 \end{pmatrix}$$

$$f'_1 = kf_1$$

$$k \in \mathbb{C}, \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{2,2}, k \neq 0, \det \mathbf{P} \neq 0$$

Superzávorky v nové bázi mají tvar:

$$[b'_1, b'_2] = (cp^2_2 - dp^1_2)b'_1 + (dp^1_1 - cp^2_1)b'_2$$

$$[f'_1, f'_1] = \frac{k^2}{\det \mathbf{P}}(ep^2_2 - gp^1_2)b'_1 + \frac{k^2}{\det \mathbf{P}}(gp^1_1 - ep^2_1)b'_2$$

$$[b'_1, f'_1] = (ap^1_1 + bp^2_1)f'_1$$

$$[b'_2, f'_1] = (ap^1_2 + bp^2_2)f'_1 \tag{A.1}$$

Postupně rozeberme všechny možnosti, které mohou nastat:

1. $a, b, c, d, e, g = 0$

   Tuto Abelovskou superalgebru označme jako $\mathbf{I}_{(2,1)}$.

2. $g = 0 \wedge e = 0$ a alespoň jeden ze zbývajících strukturních koeficientů nenulový.

   Z omezujících podmínek nebude triviálně splněna pouze:

$$ac + bd = 0$$

   Tato podmínka dovolí kombinace:

	a	b	c	d
(a)	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
(b)	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$
(c)	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$
(d)	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$
(e)	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$
(f)	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
(g)	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$
(h)	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$

   Význam symbolů je $\bullet$ - nenulový, $\circ$ - nulový.

(a) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k = 1$$

Nové superzávorky mají tvar:

$$[b_1', b_2'] = 0$$
$$[f_1', f_1'] = 0$$
$$[b_1', f_1'] = f_1'$$
$$[b_2', f_1'] = 0$$

Tuto superalgebru označíme jako $\mathbf{II}_{(2,1)}$.

(b) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/b & 0 \end{pmatrix}, k = 1$$

Dosazením zjistíme, že tato superalgebra je izomorfní $\mathbf{II}_{(2,1)}$.

(c) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1/b & a \end{pmatrix}, k = 1$$

Dosazením zjistíme, že tato superalgebra je izomorfní $\mathbf{II}_{(2,1)}$.

(d) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k = 1$$

Nové superzávorky mají tvar:

$$[b_1', b_2'] = b_2'$$
$$[f_1', f_1'] = 0$$
$$[b_1', f_1'] = \gamma f_1'$$
$$[b_2', f_1'] = 0$$
$$\gamma \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0$$

Pro dvě různé hodnoty parametru $\gamma \in \mathbb{C}$ jsou superalgebry tohoto tvaru vzájemně neizomorfní, což lze snadno nahlédnout například dosazením nových strukturních koeficientů do (A.1). Tuto jednoparametrickou množinu tříd ekvivalence označme $\mathbf{III}_{(2,1)}^{(\gamma)}$

(e) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/c & 0 \end{pmatrix}, k = 1$$

Dosazením zjistíme, že tato supergebra leží v jedné z tříd množiny $\mathbf{III}_{(2,1)}^{(\gamma)}$.

(f) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1/c \\ -b & 0 \end{pmatrix}, k = 1$$

Dosazením zjistíme, že tato supergebra leží v jedné z tříd množiny $\mathbf{III}^{(\gamma)}_{(2,1)}$.

(g) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/c & 0 \end{pmatrix}, k = 1$$

Nové superzávorky mají tvar:

$$[b'_1, b'_2] = b'_2$$

$$[f'_1, f'_1] = 0$$
$$[b'_1, f'_1] = 0$$
$$[b'_2, f'_1] = 0$$

Vidíme, že můžeme tuto třídu algeber zahrnout do $\mathbf{III}^{(\gamma)}_{(2,1)}$ pro $\gamma = 0$.

(h) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k = 1$$

Vidíme, že můžeme tuto třídu algeber zahrnout do $\mathbf{III}^{(\gamma)}_{(2,1)}$ pro $\gamma = 0$.

3. $g \neq 0 \wedge e \neq 0$

Z podmínek omezující strukturní koeficienty zůstanou:

$$ae + bg = 0$$

$$c = -2b$$
$$d = 2a$$

Tyto podmínky dovolí kombinace:

	a	b	c	d
(a)	∘	∘	∘	∘
(b)	•	•	•	•

(a) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix}, k = 1$$

Nové superzávorky mají tvar:

$$[b'_1, b'_2] = 0$$
$$[f'_1, f'_1] = b'_1$$

$$[b_1', f_1'] = 0$$
$$[b_2', f_1'] = 0$$

Tuto Lieovskou superalgebru označíme jako $\mathbf{IV}_{(2,1)}$.

(b) Pro $\frac{g}{a} > 0$ zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}, k = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

Nové superzávorky mají tvar:

$$[b_1', b_2'] = 2b_2'$$
$$[f_1', f_1'] = b_2'$$
$$[b_1', f_1'] = f_1'$$
$$[b_2', f_1'] = 0$$

Tuto Lieovskou superalgebru označíme jako $\mathbf{V}_{(2,1)}$.

Pro $\frac{g}{a} < 0$ zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}, k = \sqrt{\frac{-g}{a}}$$

Dosazením zjistíme, že tato superalgebra je izomorfní $\mathbf{V}_{(2,1)}$.

4. $g \neq 0 \wedge e = 0$

Z podmínek omezující strukturní koeficienty zůstanou:

$$b, c = 0$$
$$d = 2a$$

Tyto podmínky dovolí pouze kombinace:

	a	b	c	d
(a)	○	○	○	○
(b)	●	○	○	●

(a) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}, k = 1$$

Dosazením zjistíme, že tato superalgebra je izomorfní $\mathbf{IV}_{(2,1)}$.

(b) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, k = 1$$

Dosazením zjistíme, že tato superalgebra je izomorfní $\mathbf{V}_{(2,1)}$.

5. $g = 0 \wedge e \neq 0$

   Z podmínek omezující strukturní koeficienty zůstanou:

$$a, d = 0$$

$$c = -2b$$

   Tyto podmínky dovolí pouze kombinace:

	a	b	c	d
(a)	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
(b)	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$

   (a) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, k = 1$$

   Dosazením zjistíme, že tato superalgebra je izomorfní $\mathbf{IV}_{(2,1)}$.

   (b) Zvolíme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 1/b & 0 \end{pmatrix}, k = 1$$

   Dosazením zjistíme, že tato superalgebra je izomorfní $\mathbf{V}_{(2,1)}$.

Tímto výčtem jsme zcela jistě vyčerpali všechny přípustné možnosti. Rozepsáním použitých transformací je snadno k nahlédnutí, že všechny případy $\mathbf{I}_{(2,1)}$ až $\mathbf{V}_{(2,1)}$ jsou vzájemně neizomorfní. Tím tedy považujeme stupeň $(2,1)$ za klasifikovaný.

g(V)=(1,2)

Obecný tvar superzávorek jest:

$$[b_1, f_1] = af_1 + bf_2$$

$$[b_1, f_2] = \tilde{a}f_1 + \tilde{b}f_2$$

$$[f_1, f_1] = cb_1$$

$$[f_1, f_2] = db_1$$

$$[f_2, f_2] = eb_1$$

$$a, b, \tilde{a}, \tilde{b}, c, d, e \in \mathbb{C}$$

Ze super-Jacobiho identit dostaneme omezení:

$$ac + bd = 0$$

$$ad + be + \tilde{a}c + \tilde{b}d = 0$$

$$\tilde{a}d + \tilde{b}e = 0$$
$$ca = 0$$
$$cb = 0$$
$$\tilde{a}c + 2ad = 0$$
$$\tilde{b}c + 2bd = 0$$
$$ae + 2\tilde{a}d = 0$$
$$be + 2\tilde{b}d = 0$$
$$e\tilde{a} = 0$$
$$e\tilde{b} = 0$$

Libovolná transformace bazických vektorů má tvar:

$$(f_1', f_2') = (f_1, f_2)\mathbf{P} = (f_1, f_2)\begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix}$$
$$b_1' = kb_1$$
$$k \in \mathbb{C}, \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{2,2}, k \neq 0, \det \mathbf{P} \neq 0$$

Superzávorky v nové bázi mají tvar:

$$[b_1', f_1'] = \frac{k}{\det \mathbf{P}}(p_1^1 p_2^2 a + p_1^2 p_2^2 \tilde{a} - p_1^1 p_2^1 b - p_1^2 p_2^1 \tilde{b}) f_1' + \frac{k}{\det \mathbf{P}}(p_1^1 p_1^1 b + p_1^1 p_1^2 \tilde{b} - p_1^1 p_1^2 a - p_1^2 p_1^2 \tilde{a}) f_2'$$
$$[b_1', f_2'] = \frac{k}{\det \mathbf{P}}(p_2^1 p_2^2 a + p_2^2 p_2^2 \tilde{a} - p_2^1 p_2^1 b - p_2^2 p_2^1 \tilde{b}) f_1' + \frac{k}{\det \mathbf{P}}(p_1^1 p_2^1 b + p_1^1 p_2^2 \tilde{b} - p_2^1 p_1^2 a - p_2^2 p_1^2 \tilde{a}) f_2'$$
$$[f_1', f_1'] = \frac{1}{k}((p_1^1)^2 c + 2p_1^1 p_1^2 d + (p_1^2)^2 e) b_1'$$
$$[f_1', f_2'] = \frac{1}{k}((p_1^1 p_2^1 c + p_1^1 p_2^2 d + p_1^2 p_2^1 d + p_1^2 p_2^2 e) b_1'$$
$$[f_2', f_2'] = \frac{1}{k}((p_2^1)^2 c + 2p_2^1 p_2^2 d + (p_2^2)^2 e) b_1'$$

Postupně rozeberme všechny možnosti, které mohou nastat:

1. $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}, c, d, e = 0$

   Tuto Abelovskou superalgebru označíme jako $\mathbf{I}_{(1,2)}$.

2. $c \neq 0 \wedge e \neq 0$.

   Z omezujících podmínek dostaneme ihned:

   $$a, b, \tilde{a}, \tilde{b} = 0$$

   Žádná další omezení na strukturní koeficienty nejsou.

   Jediná volnost zbývá v konstantě d a tedy:

(a) $d=0$

Pro $e/c>0$ zvolme:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{e/c} \end{pmatrix}, k=c$$

Nové superzávorky mají tvar:

$$[b_1',f_1']=0$$
$$[b_1',f_2']=0$$
$$[f_1',f_1']=b_1'$$
$$[f_1',f_2']=0$$
$$[f_2',f_2']=b_1'$$

Tuto Lieovskou superalgebru označíme jako $\mathbf{II}_{(1,2)}$.

Pro $e/c<0$ zvolme:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-c/e} & -\sqrt{-c/e} \end{pmatrix}, k=2c$$

Nové superzávorky mají tvar:

$$[b_1',f_1']=0$$
$$[b_1',f_2']=0$$
$$[f_1',f_1']=0$$
$$[f_1',f_2']=b_1'$$
$$[f_2',f_2']=0$$

Tuto Lieovskou superalgebru označíme jako $\mathbf{III}_{(1,2)}$.

Zde je důležité rozlišit dva případy. Pro $T=\mathbb{C}$ jsou superalgebry $\mathbf{II}_{(1,2)}$ a $\mathbf{III}_{(1,2)}$ izomorfní. V transformaci $\mathbf{P}$ vedoucí na $\mathbf{II}_{(1,2)}$ by pro $e/c<0$ stačilo zvolit $p_2^2=\sqrt{ie/c}$ a dostali bychom i pro e/c záporné superalgebru $\mathbf{II}_{(1,2)}$. V případě $T=\mathbb{R}$ toto samozřejmě nelze a obě superalgebry jsou neizomorfní.

(b) $d\neq 0$

Zvolíme transformaci:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & -d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k=c$$

Nové superzávorky mají tvar:

$$[b_1',f_1']=0$$
$$[b_1',f_2']=0$$
$$[f_1',f_1']=b_1'$$
$$[f_1',f_2']=0$$

$$[f_2', f_2'] = (e - d^2/c)b_1'$$

Využijeme části za (a). Pro $e > d^2/c$ dostaneme $\mathbf{II}_{(1,2)}$, pro $e < d^2/c$ dostaneme $\mathbf{III}_{(1,2)}$. Novým neizomorfním případem je $e = d^2/c$, pro který bude $[f_2', f_2'] = 0$. Tuto algebru (neizomorfní ani jednomu z předchozích případů) označíme $\mathbf{IV}_{(1,2)}$.

3. $c \neq 0 \wedge e = 0$.

   Z ostatních omezujících podmínek okamžite plyne:

   $$a, b, \tilde{a}, \tilde{b} = 0$$

   Zbývá tedy vyřešit otázku konstanty d.

   (a) $d = 0$
   Zvolíme:
   $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k = c$$
   Dosazení ukáže, že $\mathbf{P}$ je izomorfismus s $\mathbf{IV}_{(1,2)}$.

   (b) $d \neq 0$
   Zvolíme:
   $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c/2d & c/d \end{pmatrix}, k = c$$
   Dosazení ukáže, že $\mathbf{P}$ je izomorfismus s $\mathbf{III}_{(1,2)}$.

4. $c = 0 \wedge e \neq 0$.

   Z ostatních omezujících podmínek okamžite plyne:

   $$a, b, \tilde{a}, \tilde{b} = 0$$

   Zbývá tedy vyřešit otázku konstanty d.

   (a) $d = 0$
   Zvolíme:
   $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, k = e$$
   Dosazení ukáže, že $\mathbf{P}$ je izomorfismus s $\mathbf{IV}_{(1,2)}$.

   (b) $d \neq 0$
   Zvolíme:
   $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} e/d & -e/2d \\ -0 & 1 \end{pmatrix}, k = e$$
   Dosazení ukáže, že $\mathbf{P}$ je izomorfismus s $\mathbf{III}_{(1,2)}$.

5. $c = 0 \wedge e = 0$, alespoň jedna z ostatních konstant nenulová.

   Z ostatních omezujících podmínek dostaneme:

$$ad = 0$$
$$bd = 0$$
$$\tilde{a}d = 0$$
$$\tilde{b}d = 0$$

   O dalším postupu tedy opět rozhoduje konstanta d.

   (a) $d \neq 0$
   V tom to případě $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} = 0$ Zvolíme:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, k = d$$

   Dosazení ukáže, že $\mathbf{P}$ je izomorfismus s $\mathbf{III}_{(1,2)}$.

   (b) $d = 0$
   Na závěr si necháváme nejsložitější ze všech probíraných případů. Neexistují totiž žádné další omezující podmínky na konstanty $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$.Dle předpokladu je alespoň jedna je nenulová. Pro vyřešení tohoto problému zvolíme poněkuď jiný postup, než v předchozím.
   Označíme:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ \tilde{a} & \tilde{b} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

   Potom můžeme zapsat psát smíšené komutátory maticově jako

$$[b_1, \mathbf{f}] = \mathbf{Af}$$

   Přejdeme-li k nové fermionové bázi $\mathbf{f}' = \mathbf{Ff}$, můžeme napsat nové relace jako

$$[b_1, \mathbf{f}'] = [b_1, \mathbf{Ff}] = \mathbf{F}[b_1, \mathbf{f}] = \mathbf{FAf} = \mathbf{FAF}^{-1}\mathbf{Ff} = \mathbf{FAF}^{-1}\mathbf{f}' = \mathbf{A}'\mathbf{f}'$$

   Nyní je naším úkolem najít nejjednodušší vzájemně nepodobné tvary matice $\mathbf{A}' = \mathbf{FAF}^{-1}$. Vhodnou volbou matice $\mathbf{F}$ můžeme získat $\mathbf{A}'$ v Jordanově tvaru. Fermionová část tvoří v tomto případě Abelovskou podsuperalgebru. Žádná změna báze Abelovost neporuší a nemusíme se proto v tomto případě o fermionovou část starat. Mohou nastat (vzájemně se vylučující) možnosti (možnost nulové matice $\mathbf{A}$ jsme vyloučili):

   i. $\mathbf{A}$ má dvě různá vlastní čísla.

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

   Jedno z čísel může být nula, Pokud tato možnost nastane, umíme zvolit $\mathbf{F}$ tak, aby $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$.

ii. $\mathbf{A}$ má jedno nenulové vlastní číslo geometrické násobnosti 2.

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

iii. $\mathbf{A}$ má jedno nenulové vlastní číslo geometrické násobnosti 1.

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

iv. $\mathbf{A}$ má jedno nulové vlastní číslo geometrické násobnosti 1.

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S tímto tvarem strukturních koeficientů nebudeme dále nic dělat. Označme tuto superalgebru jako $\mathbf{V}_{(1,2)}$.

v. $\mathbf{A}$ nemá žádná reálná vlastní čísla.

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} b & p \\ -p & b \end{pmatrix}$$

$$b, p \in \mathbb{R}$$

Tento případ může nastat jen v případě $T = \mathbb{R}$. Pro komplexní těleso má každá matice vlastní čísla.

Nyní můžeme využít možnosti přeškálovat libovolně matici $\mathbf{A}'$. Škálujeme tak, abychom se zbavili co nejvíce parametrů v podobě vlastních čísel. Pro případy různé od již vyklasifikované superalgebry $\mathbf{V}_{(1,2)}$ dostáváme celkem pět možností:

i. Hodnost $\mathbf{A}$ je 1 a $\mathbf{A}$ má dvě různá vlastní čísla.

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii. Hodnost $\mathbf{A}$ je 2 a $\mathbf{A}$ má dvě různá vlastní čísla. Vydělíme matici $\mathbf{A}'$ tím, které je v absolutní hodnotě větší. Můžeme předpokládat, že bylo na prvním místě. Dostáváme tedy:

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

$$0 < |\gamma| \leq 1, \gamma \neq 1$$

Pro $T = \mathbb{R}$ jsou pro různé hodnoty parametru γ superalgebry neizomorfní. Pro $T = \mathbb{C}$ nastává problém pro $|\gamma| = 1 \wedge \gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Potom můžeme psát:

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Tato matice je podobná matici $diag\{e^{i\alpha}, 1\}$, kterou můžeme vynásobit $e^{-i\alpha}$ a dostaneme:

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Superalgebra, jejíž strukturní koeficenty jsou dány maticí (A.2), je tedy pro $|\gamma| = 1$ izomorfní superalgebře s komplexně sdruženým parametrem.

iii. **A** má jedno nenulové vlastní číslo geometrické násobnosti 2.

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iv. **A** má jedno nenulové vlastní číslo geometrické násobnosti 1.

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma \neq 0$$

Na takovouto matici můžeme použít znovu podobnostní transformaci a nalézt její Jordanovský tvar, čímž se zbavíme parametru γ. Výsledná matice má tvar:

$$\mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

v. **A** nemá žádná reálná vlastní čísla. Přeškálováním dostaneme výsledek:

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\gamma \in \mathbb{R}$$

Tento případ je důležité rozebírat jen v případě $T = \mathbb{R}$. Pro $T = \mathbb{C}$ je superalgebra izomorfní některému z předchozích případů.
Ptejme se opět, pro které parametry γ jsou takové algebry neizomorfní. Ukazuje se, že matice $\mathbf{A}''$ je podobná své transponované matici ($\mathbf{F} = \sigma_1$). Můžeme tedy celou matici vynásobit -1 a zjistíme, že superalgebry, jejichž parametry jsou vůči sobě opačné, jsou izomorfní.
Jako množinu tříd vzájemně neizomorfních algeber tak můžeme brát ty s parametrem $\lambda \geq 0$.

Jednoparametrickou množinu superalgeber se strukturními koeficienty popsanými maticí $\mathbf{A}''$ označíme pro případ i. až iii. jako $\mathbf{VI}_{(1,2)}^{(\gamma)}, \gamma \in \mathbb{C}$. Superalgebry ze iv. jako $\mathbf{VII}_{(1,2)}$. Pro $T = \mathbb{R}$ dostaneme z v. ještě ostatním neizomorfní množinu superalgeber, kterou označíme jako $\mathbf{VIII}_{(1,2)}^{(\gamma)\mathbb{R}}, \gamma > 0$.

Tímto jsme vyčerpali všechny přípustné možnosti a klasifikovali tak všechny třídy neizomorfních algeber stupně $(1, 2)$. Zajímavé je, že narozdíl od stupně $(2, 1)$ závisí počet neizomorfních tříd Lieovských superalgeber na volbě tělesa.

Dodatek B

Soustavy rovnic

V tomto dodatku vypíšeme přehledně všechny rovnice, které jsme použili v putování za definicí Drinfeldova superdoublu.

Připomeňme, že definujeme $G_z : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, jako:

$$G_z(x,y) := \langle [z,x], y \rangle + Q(|z|,|x|,|y|) \langle x, [z,y] \rangle.$$

B.1 B-F ortogonální Drinfeldův superdouble

Pro jistotu si ukažme znovu označení strukturních koeficientů:

$$\mathcal{G} : \ [b_i, b_j] = \beta_{ij}{}^k b_k, \ [b_i, f_\alpha] = \sigma_{i\alpha}{}^\beta f_\beta, \ [f_\alpha, f_\beta] = \varphi_{\alpha\beta}{}^k b_k$$

$$\tilde{\mathcal{G}} : \ [\tilde{b}^i, \tilde{b}^j] = \tilde{\beta}^{ij}_{\ k} \tilde{b}^k, \ [\tilde{b}^i, \tilde{f}^\alpha] = \tilde{\sigma}^{i\alpha}{}_\beta \tilde{f}^\beta, \ [\tilde{f}^\alpha, \tilde{f}^\beta] = \tilde{\varphi}^{\alpha\beta}_{\ \ k} \tilde{b}^k$$

$$[b_i, \tilde{b}^j] = B_i{}^{jk} b_k + B_i{}^j{}_k \tilde{b}^k$$

$$[b_i, \tilde{f}^\alpha] = S_i{}^{\alpha\beta} f_\beta + S_i{}^\alpha{}_\beta \tilde{f}^\beta$$

$$[f_\alpha, \tilde{b}^j] = Z_\alpha{}^{j\beta} f_\beta + Z_\alpha{}^j{}_\beta \tilde{f}^\beta$$

$$[f_\alpha, \tilde{f}^\beta] = F_\alpha{}^{\beta k} b_k + F_\alpha{}^\beta{}_k \tilde{b}^k$$

Strukturním koeficientům z podalgeber říkáme "malé", zbývajícím strukturním koeficientům superalgebry $\mathcal{S}$ "velké".

Nejprve napíšeme rovnice, které vyjdou přímo z podmínky $G_z(x,y) = 0$ po dosazení bazických vektorů. Celou soustavu rovnic si rozdělíme na tři části v souladu s částí 4.2.1. V názvech jednotlivých podsekcí se mluví o vždy o bazických vektorech.

B.1.1 Rovnice získané z podmínky $G_z(x,y)=0$

1) z z libovolné podalgebry, x a y každý z jiné podalgebry

Tato volba bazických vektorů nám dá rovnice vztahující navzájem malé a velké strukturní koeficenty.

$$B_i{}^{jk} = \tilde{\beta}^{jk}{}_i$$

$$B_i{}^j{}_k = -\beta_{ik}{}^j$$

$$S_i{}^{\alpha\beta} = Q(1,0,1)\tilde{\varphi}^{\alpha\beta}{}_i$$

$$\tilde{\varphi}^{\alpha\beta}{}_i - Q(1,1,0)P(1,1)S_i{}^{\alpha\beta} = 0$$

$$\sigma_{i\beta}{}^\alpha + Q(0,1,1)S_i{}^\alpha{}_\beta = 0$$

$$P(1,1)S_i{}^\alpha{}_\beta + Q(0,1,1)P(1,1)\sigma_{i\beta}{}^\alpha = 0$$

$$Z_\alpha{}^{i\beta} + Q(0,1,1)\tilde{\sigma}^{i\beta}{}_\alpha = 0$$

$$\tilde{\sigma}^{i\beta}{}_\alpha + Q(0,1,1)Z_\alpha{}^{i\beta} = 0$$

$$\varphi_{\alpha\beta}{}^i - Q(1,1,0)Z_\alpha{}^i{}_\beta = 0$$

$$Q(1,0,1)\varphi_{\alpha\beta}{}^i - P(1,1)Z_\alpha{}^i{}_\beta = 0$$

$$F_\alpha{}^{\beta k} - Q(1,1,0)\tilde{\sigma}^{k\beta}{}_\alpha = 0$$

$$\tilde{\sigma}^{k\beta}{}_\alpha P(1,1) - Q(1,0,1)F_\alpha{}^{\beta k} = 0$$

$$F_\alpha{}^\beta{}_k - Q(1,1,0)P(1,1)\sigma_{k\alpha}{}^\beta = 0$$

$$Q(1,0,1)F_\alpha{}^\beta{}_k - \sigma_{k\alpha}{}^\beta = 0$$

2) z z jedné podalgebry, x a y oba z druhé podalgebry a oba stejné parity

V tomto případě dostaneme rovnice, které určují chování velkých koeficientů při záměně některých indexů.

$$B_i{}^{jk} + B_i{}^{kj} = 0$$

$$B_i{}^j{}_k + B_k{}^j{}_i = 0$$

$$S_i{}^{\alpha\beta} + Q(0,1,1)P(1,1)S_i{}^{\beta\alpha} = 0$$

$$P(1,1)Z_\alpha{}^i{}_\beta + Q(0,1,1)Z_\beta{}^i{}_\alpha = 0$$

3) z z jedné podalgebry, x a y oba z druhé podalgebry a každý jiné parity

Dostaneme rovnice vztahující mezi sebou navzájem různé druhy velkých koeficientů.

$$Z_\alpha{}^{i\beta} - Q(1,0,1)F_\alpha{}^{\beta i} = 0$$

$$F_\alpha{}^{\beta i} - Q(1,1,0)P(1,1)Z_\alpha{}^{i\beta} = 0$$
$$S_i{}^\alpha{}_\beta P(1,1) - Q(1,0,1)F_\beta{}^\alpha{}_i = 0$$
$$F_\beta{}^\alpha{}_i - Q(1,1,0)S_i{}^\alpha{}_\beta = 0$$

B.1.2 Soustava rovnic pro hodnoty P a Q

Z důvodů popsaných v části 4.2.1 vyžadujeme od rovnic z B.1.1 vzájemnou bezespornost pro libovolné hodnoty malých strukturních koeficientů. Výsledkem je soustava pro některé z hodnot funkcí P a Q. Nalezené rovnice si pro přehlednost rozdělme do stejných tří části jako v B.1.1.

Rovnice získané z první části soustavy B.1.1

$$Q(1,0,1) = Q(1,1,0)P(1,1)$$
$$Q(0,1,1)^2 = 1$$
$$Q(1,1,0)Q(1,0,1) = P(1,1)$$
$$Q(1,1,0)Q(1,0,1)P(1,1) = 1$$

Rovnice získané z druhé části soustavy B.1.1

$$Q(0,1,1)P(1,1) = -1$$
$$Q(0,1,1) = -P(1,1)$$

Rovnice získané z třetí části soustavy B.1.1

$$Q(1,0,1)Q(1,1,0)P(1,1) = 0$$
$$Q(1,0,1)Q(1,1,0) = -P(0,1,1)$$
$$Q(1,0,1)Q(1,1,0) = P(1,1)$$
$$P(1,1)Q(0,1,1) = -1$$

B.2 B-B ortogonální Drinfeldův superdouble

Strukturní koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$ jsme označili jako:

$$\mathcal{G}: \; [b_i, b_j] = \beta_{ij}{}^k b_k, \; [b_i, f_\alpha] = \sigma_{i\alpha}{}^\beta f_\beta, \; [f_\alpha, f_\beta] = \varphi_{\alpha\beta}{}^k b_k$$

$$\tilde{\mathcal{G}}: \; [\tilde{b}^\alpha, \tilde{b}^\beta] = \tilde{\beta}^{\alpha\beta}_{\ \ \nu} \tilde{b}^\nu, \; [\tilde{b}^\alpha, \tilde{f}^i] = \tilde{\sigma}^{\alpha i}_{\ \ k} \tilde{f}^k, \; [\tilde{f}^i, \tilde{f}^j] = \tilde{\varphi}^{ij}_{\ \ \alpha} \tilde{b}^\alpha$$

$$[b_i, \tilde{b}^\alpha] = B_i{}^{\alpha k} b_k + B_i{}^\alpha{}_\beta \tilde{b}^\beta$$

$$[b_i, \tilde{f}^j] = S_i{}^{j\beta} f_\beta + S_i{}^j{}_k \tilde{f}^k$$

$$[f_\alpha, \tilde{b}^\beta] = Z_\alpha{}^{\beta\nu} f_\nu + Z_\alpha{}^\beta{}_k \tilde{f}^k$$

$$[f_\alpha, \tilde{f}^j] = F_\alpha{}^{jk} b_k + F_\alpha{}^j{}_\beta \tilde{b}^\beta$$

Nejprve napíšeme rovnice, které vyjdou přímo z podmínky $G_z(x, y) = 0$ po dosazení bazických vektorů.

B.2.1 Rovnice získané z podmínky $G_z(x, y) = 0$

1) z z libovolné podalgebry, x a y každý z jiné podalgebry

Tato volba bazických vektorů nám dá rovnice vztahující navzájem malé a velké strukturní koeficenty.

$$\tilde{\sigma}^{\alpha k}_{\ \ i} - Q(0,1,0) B_i{}^{\alpha k} = 0$$

$$-B_i{}^{\alpha k} + Q(0,0,1) \tilde{\sigma}^{\alpha k}_{\ \ i} = 0$$

$$B_i{}^\alpha{}_\beta + Q(0,0,1) \sigma_{i\beta}{}^\alpha = 0$$

$$\sigma_{i\beta}{}^\alpha + Q(0,1,0) B_i{}^\alpha{}_\beta = 0$$

$$S_i{}^{j\beta} + Q(1,0,1) \tilde{\sigma}^{\beta j}_{\ \ i} = 0$$

$$\tilde{\sigma}^{\beta j}_{\ \ i} P(1,0) + Q(1,0,0) P(0,1) S_i{}^{j\beta} = 0$$

$$S_i{}^j{}_k + Q(0,1,0) \beta_{ik}{}^j = 0$$

$$\beta_{ik}{}^j + Q(0,0,1) S_i{}^j{}_k = 0$$

$$Z_\alpha{}^{\beta\nu} + Q(0,1,0) \tilde{\beta}^{\beta\nu}_{\ \ \alpha} = 0$$

$$\tilde{\beta}^{\beta\nu}_{\ \ \alpha} + Q(0,0,1) Z_\alpha{}^{\beta\nu} = 0$$

$$\sigma_{k\alpha}{}^\beta + Q(1,0,0) Z_\alpha{}^\beta{}_k = 0$$

$$P(1,0) Z_\alpha{}^\beta{}_k + Q(1,0,0) P(0,1) \sigma_{k\alpha}{}^\beta = 0$$

$$F_\alpha{}^{jk} + Q(1,1,1) \tilde{\varphi}^{jk}_{\ \ \alpha} = 0$$

$$P(0,1) \tilde{\varphi}^{jk}_{\ \ \alpha} + Q(1,1,1) P(1,0) F_\alpha{}^{jk} = 0$$

$$\varphi_{\alpha\beta}{}^j + Q(1,1,1) F_\alpha{}^j{}_\beta = 0$$

$$P(0,1) F_\alpha{}^j{}_\beta + Q(1,1,1) P(1,0) \varphi_{\alpha\beta}{}^j = 0$$

2) z z jedné podalgebry, x a y oba z druhé podalgebry a oba stejné parity

V tomto případě dostaneme rovnice, které určují chování velkých koeficientů při záměně některých indexů.

$$Z_\alpha{}^{\beta\nu} + Q(1,0,0)P(0,1)Z_\alpha{}^{\nu\beta} = 0$$
$$F_\alpha{}^{jk} + Q(1,1,1)P(1,0)F_\alpha{}^{kj} = 0$$
$$P(1,0)S_i{}^j{}_k + Q(1,0,0)S_k{}^j{}_i = 0$$
$$P(0,1)F_\alpha{}^j{}_\beta + Q(1,1,1)F_\beta{}^j{}_\alpha = 0$$

3) z z jedné podalgebry, x a y oba z druhé podalgebry a každý jiné parity

Dostaneme rovnice vztahující mezi sebou navzájem různé druhy velkých koeficientů.

$$B_i{}^{\alpha k} + Q(0,0,1)P(0,1)S_i{}^{k\alpha} = 0$$
$$S_i{}^{k\alpha} + Q(0,1,0)P(1,0)B_i{}^{\alpha k} = 0$$
$$-P(0,1)B_k{}^\beta{}_\alpha + Q(0,0,1)Z_\alpha{}^\beta{}_k = 0$$
$$P(1,0)Z_\alpha{}^\beta{}_k - Q(0,1,0)B_k{}^\beta{}_\alpha = 0$$

B.2.2 Soustava rovnic pro hodnoty P a Q

Ze stejných důvodů opět vyžadujeme od rovnic z B.2.1 vzájemnou bezespornost pro libovolné hodnoty malých strukturních koeficientů. Výsledkem je soustava pro některé z hodnot funkcí P a Q. Nalezené rovnice si pro přehlednost rozdělme do stejných tří části jako v B.2.1.

Rovnice získané z první části soustavy B.2.1

$$Q(0,0,1)Q(0,1,0) = 1$$
$$P(0,1)Q(1,0,0)^2 = P(1,0)$$
$$P(1,0)Q(1,1,1)^2 = P(0,1)$$

Rovnice získané z druhé části soustavy B.2.1

$$Q(1,0,0)P(0,1) = 1$$
$$Q(1,1,1)P(1,0) = -1$$
$$Q(1,0,0) = P(1,0)$$
$$Q(1,1,1) = -P(0,1)$$

Rovnice získané z třetí části soustavy B.2.1

$$Q(0,0,1)Q(0,1,0)P(1,0)P(0,1) = 1$$
$$Q(0,0,1)P(0,1)Q(1,0,0)Q(0,1,0) = 1$$
$$P(0,1)P(1,0) = Q(0,0,1)Q(0,1,0)$$
$$Q(0,0,1)Q(1,0,0)Q(0,1,0) = P(1,0)$$

B.3 Zobecněná symetrie G_z

Z důvodů popsaných v části 4.2.3 vyžadujeme od funkce G_z vlastnost:

$$(\forall x, y, z \in \mathcal{S})(G_z(x,y) = P(|x|,|y|)G_z(y,x))$$

Dosadíme-li do této podmínky definici G_z, dostáváme:

$$LS \equiv \langle [z,x], y\rangle + Q(|z|,|x|,|y|)\langle x, [z,y]\rangle$$

$$PS \equiv P(|x|,|y|)\Big[\langle [z,y], x\rangle + Q(|z|,|y|,|x|)\langle y, [z,x]\rangle\Big] =$$

$$= P(|x|,|y|)Q(|z|,|y|,|x|)\Big[\langle y, [z,x]\rangle + \frac{1}{Q(|z|,|y|,|x|)}\langle [z,y], x\rangle\Big] =$$

$$= P(|x|,|y|)Q(|z|,|y|,|x|)\Big[P(|y|,|[z,x]|)\langle [z,x], y\rangle + \frac{P(|[z,y]|,|x|)}{Q(|z|,|y|,|x|)}\langle x, [z,y]\rangle\Big] =$$

$$= P(|x|,|y|)Q(|z|,|y|,|x|)P(|y|,|[z,x]|)\Big[\langle [z,x], y\rangle + \frac{P(|[z,y]|,|x|)}{Q(|z|,|y|,|x|)P(|y|,|[z,x]|)}\langle x, [z,y]\rangle\Big] =$$

Má-li se levá strana rovnat pravé pro libovolné $x, y, z \in \mathcal{S}$, dostáváme podmínky:

$$P(|y|,|[z,x]|)P(|x|,|y|)Q(|z|,|y|,|x|) = 1$$

$$P(|[z,y]|,|x|) = P(|y|,|[z,x]|)Q(|z|,|x|,|y|)Q(|z|,|y|,|x|)$$

Dosadíme-li nyní do těchto dvou podmínek všechny kombinace parit vektorů x, y, z, dostaneme soustavu rovnic:

$$P(1,0)P(0,1)Q(0,0,1) = 1$$
$$Q(0,1,0)Q(0,0,1) = 1$$
$$P(1,1)^2Q(0,1,1) = 1$$
$$Q(0,1,1)^2 = 1$$
$$Q(1,0,0)P(0,1) = 1$$
$$Q(1,0,0)^2P(0,1) = P(1,0)$$
$$P(1,0)Q(1,0,1) = 1$$

$$Q(1,1,0)Q(1,0,1) = P(1,1)$$
$$P(0,1)P(1,1)Q(1,1,0) = 1$$
$$Q(1,0,1)Q(1,1,0)P(1,1) = 1$$
$$P(1,1)Q(1,1,1)P(1,0) = 1$$
$$P(1,0)Q(1,1,1)^2 = P(0,1)$$

B.4 Výsledná soustava pro hodnoty P a Q

Nyní vezmeme rovnice pro hodnoty P a Q z částí B.1, B.2 a B.3 a dostaneme jednu velkou soustavu. Za účelem přehlednosti si zavedeme označení:

$$a := Q(0,1,1),\ b := Q(1,1,0)\ c := Q(1,0,1),\ d := P(1,1), e := Q(0,0,1)$$

$$f := Q(1,0,0),\ g := Q(0,1,0),\ h := Q(1,1,1),\ i := P(1,0),\ j := P(0,1)$$

Část soustavy nalezená v části B.1:

$$a^2 = 1,\ c = bd,\ bcd = 1,\ bc = -a,\ ad = -1,\ a = -d,\ bc = d$$

Část soustavy nalezená v B.2:

$$eg = 1,\ jf^2 = i,\ ih^2 = j,\ egij = 1,\ ejfg = 1,\ fj = 1$$

$$hi = -1,\ f = i,\ h = -j,\ ij = eg,\ i = efg$$

Část soustavy nalezená v B.3:

$$iej = 1,\ ge = 1,\ d^2a = 1,\ a^2 = 1,\ fj = 1,\ ih^2 = j$$

$$i = jf^2,\ ic = 1,\ d = bc,\ jdb = 1,\ cdb = 1,\ dhi = 1$$

Tato soustava má dvě řešení. První z nich jsme použili v definici Drinfeldova superdoublu.

1. řešení: $a = 1,\ b = -1,\ c = 1,\ d = -1,\ e = 1,\ f = 1,\ g = 1,\ h = -1,\ i = 1,\ j = 1$

2. řešení: $a = 1,\ b = 1,\ c = -1,\ d = -1,\ e = 1,\ f = -1,\ g = 1,\ h = 1,\ i = -1,\ j = -1$

Literatura

[1] Peter G. O. Freund: *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge University Press (1986)

[2] Asim O. Barut, Ryszard Rączka: *Theory of Group Representations and Applications*, PWN Warszava (1977)

[3] Ladislav Hlavatý, Libor Šnobl: *Classification of Poisson-Lie T-dual models with two-dimensional targets*, Mod.Phys.Lett. A17 (2002) 429-434

[4] Ladislav Hlavatý, Libor Šnobl: *Classification of 6-dimensional real Manin triples*, e-print math.QA/0202209

[5] Libor Šnobl, Ladislav Hlavatý: *Classification of 6-dimensional real Drinfeld doubles*, Int.J.Mod.Phys. A17 (2002) 4043-4068, math.QA/0202210.

[6] Nigel Backhouse: *Classification of four-dimensional Lie Superalgebras*, J.Math. Phys., Vol.19, No.11, (1978) 2400-2402