ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Řešitelné Lieovy algebry s daným nilradikálem

Solvable Lie algebras with given nilradical

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Dalibor Karásek

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika
Vedoucí práce: **Ing. Libor Šnobl, Ph.D.**
Rok: **2009**

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze, dne 7. 7. 2009 Dalibor Karásek

. . . .

Poděkování

Rád bych tímto poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce, panu Ing. Liborovi Šnoblovi, Ph.D, za rady, připomínky a obětavé přepočítání mých výsledků. Dále bych rád poděkoval mým přátelům, díky kterým jsem se tento školní rok nezbláznil pod náporem školních povinností. V neposlední řadě děkuji těm, kteří si moji práci přečtou a přispějí konstruktivními připomínkami.

Název práce: **Řešitelné Lieovy algebry s daným nilradikálem**
Autor: Dalibor Karásek

Obor: Matematické inženýrství
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Libor Šnobl, Ph.D.
Katedra fyziky
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Abstrakt:

Hledáme všechny řešitelné algebry, jejichž nilradikálem je zadaná n–rozměrná nilpotentní Lieova algebra $\mathfrak{n}$ s daným $(n-2)$–rozměrným abelovským ideálem. Zjišťujeme, že dimenze řešitelného rozšíření $\mathfrak{n}$ může být maximálně $n+2$. Pomocí metody charakteristik nalezneme zobecněné Casimirovy invarianty $\mathfrak{n}$ i jejích řešitelných rozšíření.

Klíčová slova: Lieovy algebry, nilradikál, řešitelné rozšíření, Casimirovy invarianty

Title: **Solvable Lie algebras with given nilradical**
Author: Dalibor Karásek

Abstract:

We construct all solvable algebras whose nilradical is the given n–dimensional nilpotent algebra $\mathfrak{n}$ with $(n-2)$–dimensional abelian ideal. We find that the dimension of any solvable extension of $\mathfrak{n}$ cannot be greater than $n+2$. We construct generalized Casimir invariants of $\mathfrak{n}$ and its solvable extensions using the method of characteristics.

Keywords: Lie algebras, nilradical, solvable extension, Casimir invariants

Obsah

Úvod

Když roku 1873 studoval Marius Sophus Lie symetrie diferenciálních rovnic, nikoho by nenapadlo, co tím začal. Objevil, že každé diferenciální rovnici lze přiřadit matematická struktura, která je nyní pojmenovaná po něm – Lieova grupa.

Pomocí této grupy lze za jistých podmínek snížit řád diferenciální rovnice až o její dimenzi. Odtud vlastně pochází pojem „řešitelná“ Lieova algebra.

Záhy se ovšem ukázalo, že aplikace Lieových grup nesouvisí jenom s řešením diferenciálních rovnic. Symetrie jsou totiž pro fyziky velmi důležitý nástroj. Pokud fyzik tvoří nějakou teorii, konstruuje jí tak, aby byla invariantní vůči nějaké grupě transformací, například vůči Galileovým transformacím (klasická mechanika), Lorentzovým transformacím (elektromagnetismus) atd.

Většina těchto grup jsou grupy Lieovy, to jest zároveň jsou diferencovatelnou varietou. Studovat grupy je obtížný úkol, ale naštěstí je s každou Lieovou grupou kanonicky spojena Lieova algebra, jež odpovídá tzv. „infinitezimálním“ transformacím, a algebra jako lineární prostor se součinem je struktura, se kterou se zachází mnohem lépe.

Lieovy algebry se nemusí objevovat jenom v souvislosti s grupou. Jako příklad uveďme prostor funkcí nad fázovým prostorem v Hamiltonově formalismu s Poissonovou závorkou nebo prostor lineárních operátorů s komutátorem.

Přestože se Lieovy algebry zkoumají již více než sto let, nepatří k oblastem, které by se daly učit hned zpočátku studia. Je tomu tak kvůli neobvyklosti násobení v algebře, které není komutativní, ani asociativní (až na abelovský případ) a proto je zacházení s ním neintuitivní.

Další problém s Lieovými algebrami je, že se velmi obtížně klasifikují. S rostoucí dimenzí narůstá rychle počet neizomorfních tříd. Přestože se nalezly způsoby jak zjednodušit tento problém, úplná klasifikace zatím není nalezena a leckdo věří, že ani nalezena být nemůže.

Tato práce přispívá k tomuto donquijotskému boji klasifikováním posloupnosti jisté skupiny algeber a nalezením užitečných struktur v nich. Přičemž, ač to možná nevypadá, nepoužívá hrubou sílu, ale ulehčuje si práci využitím vlastností Lieových algeber.

Kapitola 1

Teorie

1.1 Základní značení

Definice 1.1.1. Symbol $:=$ (respektive $=:$) budeme používat, když budeme definovat nové značení, přičemž na levé (respektive pravé) straně bude nově definovaný objekt a na pravé (respektive levé) straně známý výraz.

Definice 1.1.2. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Symbolem $\hat{n}$ budeme značit tuto množinu:
$\hat{n} := \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\} \Leftrightarrow \{1, \ldots, n\}$

Definice 1.1.3. Nechť V je algebra. Fakt, že množina W je podalgebrou V, budeme značit $W \subset\subset V$.

Definice 1.1.4. Nechť V je vektorový prostor. Jeho **nulový vektor** budeme značit θ.

1.2 Lieovy grupy a jejich algebry

Předpokládáme, že čtenář je obeznámen s konstrukcí Lieovy algebry k Lieově grupě. Viz třeba [3].

1.2.1 Lineární operátory Lieových algeber

Budeme se zabývat převážně automorfismy a derivacemi, proto pro jistotu připomeneme definici automorfismu a zevrubně rozeberu derivace.

Definice 1.2.1. Nechť Φ je lineární operátor na Lieově algebře $\mathfrak{g}$.

$$\Phi \text{ je } \textbf{automorfismus} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} 1.\ \Phi \text{ je bijekce} \\ 2.\ \forall x, y \in \mathfrak{g} : \Phi[x, y] = [\Phi x, \Phi y] \end{array}$$

Definice 1.2.2. Nechť D je lineární operátor na Lieově algebře $\mathfrak{g}$.

$$D \text{ je } \textbf{derivace} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x, y \in \mathfrak{g} : D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$$

Definice 1.2.3. Mějme Lieovu algebru $\mathfrak{g}$. Množinu všech automorfismů $\mathfrak{g}$ budeme značit $Aut(\mathfrak{g})$, množinu všech jejích derivací $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$.

Poznámka 1.2.4. $Aut(\mathfrak{g})$ se skládáním operátorů má strukturu Lieovy grupy. Její Lieovou algebrou je právě $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$.

Význačným podprostorem v $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ jsou takzvané vnitřní derivace.

Definice 1.2.5. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra a $x \in \mathfrak{g}$. **Adjungovaný** (přidružený) operátor ad_x je lineární zobrazení

$$ad_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : ad_x(y) := [x, y] \ .$$

Poznámka 1.2.6. Z Jacobiho identity okamžitě plyne, že ad_x je derivace. A nejen to.

Zobrazení $ad_{\bullet} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ je homomorfismus Lieových algeber (v $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ je $[\cdot, \cdot]$ komutátor zobrazení).

A tedy $ad(\mathfrak{g}) \subset\subset \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ a dokonce je to ideál[1].

Definice 1.2.7. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra a D je její derivace.

$$D \text{ je } \textbf{vnitřní derivace} \overset{def}{\iff} \exists x \in \mathfrak{g}, D = ad_x$$
$$D \text{ je } \textbf{vnější derivace} \overset{def}{\iff} D \text{ není vnitřní derivace}$$

1.2.2 Struktury v Lieových algebrách

Definice 1.2.8. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra nad T, $A, B \subseteq \mathfrak{g}$ a $\alpha \in T$.

Pak zavádíme **komutant** A **s** B jako množinu:

$$[A, B] := \text{span}\{[a, b] | a \in A, b \in B\}$$

Definice 1.2.9. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra. **Centrum** $\mathfrak{g}$ je tato množina:

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} | \forall y \in \mathfrak{g}, [x, y] = \theta\}$$

Definice 1.2.10. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra a $\mathfrak{h} \subset\subset \mathfrak{g}$.

$$\mathfrak{h} \text{ je } \textbf{invariantní} \text{ podalgebra} \overset{def}{\iff} \forall \Phi, \Phi \text{ je automorfismem } \mathfrak{g}, \text{ platí } \Phi(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h} \ .$$

V každé Lieově algebře existují kanonické posloupnosti ideálů, takzvané **charakteristické série**.

Definice 1.2.11. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra.

1. Derivovaná série: $\mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{g}^{(k)}$
   $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}, \quad \forall k \in \mathbb{N} : \mathfrak{g}^{(k)} := [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$

[1] $[ad_x, D] = -ad_{Dx} \qquad x \in \mathfrak{g}, D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$

2. Dolní centrální série: $\mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{g}^k$
   $\mathfrak{g}^1 := \mathfrak{g}, \quad \forall k > 1 : \mathfrak{g}^k := [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}]$

3. Horní centrální série: $\mathfrak{z}_1 \subseteq \mathfrak{z}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{z}_k$
   $\mathfrak{z}_1 := \mathfrak{C}(\mathfrak{g}), \quad \forall k > 1 : \quad \mathfrak{z}_k := \{x \in \mathfrak{g} | \forall y \in \mathfrak{g}, [x, y] \in \mathfrak{z}_{k-1}\}$

Věta 1.2.12. Charakteristické série Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ jsou posloupnosti invariantních ideálů.

Důkaz. Dokážu dvě silnější tvrzení:
Lemma 1. Komutant dvou ideálů je opět ideál.

Důkaz Lemmatu 1. Nechť $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ jsou dva ideály. $\mathfrak{c} := [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$. Buď $y \in \mathfrak{g}$ a $x \in \mathfrak{c}$, což je ekvivalentní s $x = \sum_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$, kde $a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b}$.

$$[x, y] = \Big[\sum_{i=1}^{k} [a_i, b_i]\, , y \Big] = \sum_{i=1}^{k} \big[[a_i, b_i]\, , y \big] = \sum_{i=1}^{k} \Big(\big[a_i, [b_i, y]\big] - \big[b_i, [a_i, y]\big] \Big) =$$

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ jsou ideály, takže $[a_i, y] = \tilde{a}_i \in \mathfrak{a}$ a podobně $[b_i, y] = \tilde{b}_i \in \mathfrak{b}$, a tedy

$$= \sum_{i=1}^{k} ([a_i, \tilde{b}_i] - [b_i, \tilde{a}_i]) \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{c}\ .$$

Z toho plyne $[\mathfrak{c}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{c}$, což znamená, že $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ je ideál. □

Lemma 2. Komutant dvou invariantních ideálů je invariantní ideál.

Důkaz Lemmatu 2. Nechť Φ je automorfismus algebry $\mathfrak{g}$, $x \in \mathfrak{c} := [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$.

$$\Phi x = \Phi \sum_{i=1}^{k} [a_i, b_i] = \sum_{i=1}^{k} \Phi [a_i, b_i] = \sum_{i=1}^{k} [\Phi a_i, \Phi b_i] = \sum_{i=1}^{k} [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]\ ,$$

kde $\tilde{a}_i \in \mathfrak{a}, \tilde{b}_i \in \mathfrak{b}$, z čehož plyne, že $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ je invariantní podalgebra a dle předchozího lemmatu je to i ideál. □

Aplikací tohoto lemmatu na derivovanou a dolní centrální sérii dostaneme přesně požadované tvrzení. To, že horní centrální série je posloupnost ideálů plyne téměř okamžitě z její definice. Pomocí matematické indukce ještě dokážeme, že se jedná o invariantní ideály:

$k = 1$

$$x \in \mathfrak{z}_1, y \in \mathfrak{g} : [\Phi x, y] = [\Phi x, \Phi \Phi^{-1} y] = \Phi [x, \Phi^{-1} y] = \Phi \theta = \theta \in \mathfrak{z}_1$$

$k \to k + 1$

$$x \in \mathfrak{z}_{k+1}, y \in \mathfrak{g} : [\Phi x, y] = [\Phi x, \Phi \Phi^{-1} y] = \Phi [x, \Phi^{-1} y]$$

$[x, \Phi^{-1} y] \in \mathfrak{z}_k$, což plyne z definice $\mathfrak{z}_{k+1}$. Nyní využijeme indukční předpoklad a dostaneme, že $\Phi [x, \Phi^{-1} y] \in \mathfrak{z}_k$, což jsme přesně chtěli dokázat.

$\square$

Definice 1.2.13. Lieova algebra je **řešitelná** (respektive **nilpotentní**), pokud její derivovaná (respektive dolní centrální) série je od jistého členu posloupnost nulových podalgeber.

Poznámka 1.2.14. Nilpotentní algebra je zároveň řešitelná, naopak to neplatí.

Poznámka 1.2.15. Jelikož charakteristické série nezávisí na volbě báze, mohou nám pomoci při klasifikaci algebry tím, že se podíváme na dimenze členů série. Okamžitě vidíme, zda se jedná o nilpotetní/řešitelnou algebru a leckdy rozeznáme dvě neizomorfní algebry, protože budou mít různé posloupnosti dimenzí.

Poznámka 1.2.16. Posloupnost dimenzí derivované, respektive dolní centrální, respektive horní centrální série budeme značit DS, respektive CS, respektive US. Tyto posloupnosti jsou sice nekonečné, ale od jistého členu jsou konstantní. Tímto členem budeme výčet ukončovat.

Definice 1.2.17. Každá Lieova algebra $\mathfrak{g}$ má jednoznačně určeny tyto dva ideály:

- **radikál** $\mathfrak{R} \overset{def}{\iff}$ největší (ve smyslu inkluze) řešitelný ideál
- **nilradikál** $\mathfrak{NR} \overset{def}{\iff}$ největší (ve smyslu inkluze) nilpotentní ideál

Věta 1.2.18. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra.

$$\mathfrak{g} \text{ je řešitelná} \Leftrightarrow \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{NR}$$

Důkaz. Implikace $\Leftarrow$ je triviální, důkaz opačné implikace složitější[2]. $\square$

Definice 1.2.19. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra a $\mathfrak{h} \subset\subset \mathfrak{g}$ (její podalgebra). Definujeme **centralizér** $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}} := \{x \in \mathfrak{g} | \forall y \in \mathfrak{h}, [x, y] = \theta\}$$

Věta 1.2.20. Centralizér invariantního ideálu je opět invariantní ideál.

Důkaz. Dokážeme, že $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}$ je ideál: Vezmeme si $x \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}, y \in \mathfrak{g}, z \in \mathfrak{h}$.

$$\big[\, [x, y]\,, z\big] = \big[x, [y, z]\,\big] + \big[y, [z, x]\,\big] = \theta + \theta = \theta \ ,$$

neboť $[z, y] = \tilde{z} \in \mathfrak{h}$ ($\mathfrak{h}$ ideál) a $[x, \tilde{z}] = [x, z] = \theta$ (z definice centralizéru)

$$\Longrightarrow [x, y] \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}} \ .$$

Dokážeme, že jde o invariantní ideál. Buď Φ automorfismus, $x \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}, z \in \mathfrak{h}$.

$$[\Phi x, z] = [\Phi x, \Phi\Phi^{-1} z] = \Phi[x, \Phi^{-1} z] = \Phi[x, \tilde{z}] = \Phi\theta = \theta \ ,$$

kde jsme využili, že $\tilde{z} \in \mathfrak{h}$, protože $\mathfrak{h}$ je invariantní. $\square$

[2] Tento okraj je příliš malý, než aby se sem vešel.

Kapitola 2

Klasifikace Lieových algeber s daným nilradikálem

2.1 Klasifikace Lieových algeber

Záměrem této práce je přispět ke klasifikaci konečněrozměrných Lieových algeber. Následující věta nám hodně ulehčí práci.

Věta 2.1.1. Pro každou konečněrozměrnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ existuje rozklad

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \dotplus \mathfrak{s} \ ,$$

kde $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}$ je největší řešitelný ideál tj. radikál a $\mathfrak{s}$ je $\{\theta\}$ nebo poloprostá algebra (to jest nemá nenulový abelovský ideál). $\dotplus$ značí, že se jedná o direktní součet podprostorů.

Důkaz. Viz třeba [5]. □

Díky této větě stačí klasifikovat jen poloprosté algebry, což je provedeno v [4], a řešitelné algebry, což se ukazuje být mnohem tvrdším oříškem.

Vzhledem k obrovskému nárůstu neizomorfních algeber se ukazuje přístup „hrubou silou“ pro vyšší dimenze značně neefektivní a to navzdory tomu, že lze tuto metodu vylepšit. Díky existenci $\mathfrak{NR}$ stačí totiž klasifikovat nilpotentní algebry a pak zkoumat jejich řešitelná rozšíření.

V této práci je zvolen jiný přístup, byť se v něm zmiňovaná metoda používá. Mezi nilpotentními algebrami různé dimenze lze totiž leckdy nalézt podobné rysy, a tak je seřadit do posloupností. Pak nalezneme všechna řešitelná rozšíření, pro něž jsou dané Lieovy algebry nilradikály. Tento postup byl již aplikován například na Heisenbergovy algebry [12], abelovské algebry [8, 7] a další. Naše práce navazuje na články [9, 10], které vyšetřují posloupnost algeber, jež mají jednorozměrné centrum a mají vysoký stupeň nilpotence (co nejdelší dolní centrální sérii).

2.2 Postup klasifikace

Naše práce začíná tím, že máme zadanou nilpotentní algebru $\mathfrak{n}$. To jest, že v nějaké bázi $(e_1, \dots, e_n)$ známe strukturní koeficienty $N^l{}_{ij}$ dané vztahem

$$[e_i, e_j] = N^k{}_{ij} e_k = (N_i)^k{}_j e_k \ . \tag{2.1}$$

(Tam, kde to bude jen trochu možné, budeme používat Einsteinovo sumační pravidlo.) Tuto algebru chceme rozšířit tím, že k ní přidáme vektory $(f_1, \dots, f_p)$ a vytvoříme tak algebru

$$\mathfrak{s} = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p\} \ . \tag{2.2}$$

Protože $\mathfrak{n}$ má být nilradikál $\mathfrak{s}$, musí platit (viz věta 1.2.18), že

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{n} \ ,$$

a tedy strukturní koeficienty algebry $\mathfrak{s}$ mají tento tvar:

$$[f_a, e_i] = (A_a)^k{}_i e_k, \quad a \in \hat{p}, i \in \hat{n} \tag{2.3}$$

$$[f_a, f_b] = \gamma^j{}_{ab} e_j, \quad a, b \in \hat{p} \tag{2.4}$$

Strukturní koeficienty musí splňovat Jacobiho identitu. Ověřování Jacobiho identit lze převést na jiný, praktičtěji lépe využitelný fakt.

Věta 2.2.1. Mějme algebru $\mathfrak{s}$ (2.2) se strukturními koeficienty z (2.1, 2.3, 2.4). $a, b \in \hat{p}, i, j \in \hat{n}$.

Jacobiho identita pro (f_a, e_i, e_j) platí $\iff$ A_a je derivace ($(A_a)^k{}_i$ je matice derivace).

Jacobiho identita pro (f_a, f_b, e_i) platí $\iff$ $\gamma^j{}_{ab}$ splňují lineární rovnici, jejíž pravou stranu tvoří prvky $[A_a, A_b]$.

Důkaz. Odvodíme podmínku pro to, aby $D^i{}_j$ byla matice derivace.

$$\begin{aligned} D[e_i, e_j] &= [De_i, e_j] + [e_i, De_j] \\ D^l{}_k N^k{}_{ij} e_l &= [D^k{}_i e_k, e_j] + [e_i, D^k{}_j e_k] \\ D^l{}_k N^k{}_{ij} &= D^k{}_i N^l{}_{kj} + D^k{}_j N^l{}_{ik} \end{aligned}$$

$$D^l{}_k N^k{}_{ij} + D^k{}_i N^l{}_{jk} + D^k{}_j N^l{}_{ki} = 0$$

A teď upravíme Jacobiho identitu pro (f_a, e_i, e_j):

$$\begin{aligned} [f_a, [e_i, e_j]] + [e_i, [e_j, f_a]] + [e_j, [f_a, e_i]] &= \theta \\ [f_a, N^k{}_{ij} e_k] + (A_a)^k{}_j [e_k, e_i] + (A_a)^k{}_i [e_j, e_k] &= \theta \\ (A_a)^l{}_k N^k{}_{ij} + (A_a)^k{}_j N^l{}_{ki} + (A_a)^k{}_i N^l{}_{jk} &= 0 \end{aligned}$$

Je vidět, že splnění Jacobiho identity je ekvivalentní s tím, že A_a je derivace.

Nyní přepíšeme Jacobiho identitu pro (f_a, f_b, e_i):

$$\begin{aligned}
[f_a,[f_b,e_i]]+[f_b,[e_i,f_a]]+[e_i,[f_a,f_b]] &= \theta \\
(A_b)^j{}_i[f_a,e_j]-(A_a)^j{}_i[f_b,e_j]+\gamma^j{}_{ab}[e_i,e_j] &= \theta \\
(A_b)^j{}_i(A_a)^k{}_j-(A_a)^j{}_i(A_b)^k{}_j+\gamma^j{}_{ab}N^k{}_{ij} &= 0 \\
\gamma^j{}_{ab}N^k{}_{ji} &= [A_a,A_b]^k{}_i
\end{aligned}$$

Když zafixujeme a, b máme vlastně n^2 lineárních rovnic pro $\gamma^j{}_{ab}$, kde na pravé straně vystupuje komutátor derivací A_a, A_b. □

Nyní tedy stačí vzít derivaci D a přiřadit ji f_a takto: $D =: A_a$. Tím jsme nadefinovali komutační relace f_a s $e_1, \ldots, e_n$ v rovnici (2.3) tak, že Jacobiho identita je splněna. Po aplikování tohoto postupu pro všechny f_a máme splněnou jednu sadu rovnic. Poznamenejme ještě, že $ad_{f_a}|_{\mathfrak{n}} = A_a$.

Je důležité, aby A_a byla vnější derivace $\mathfrak{n}$, protože jinak by $\mathfrak{n}$ nebyl nilradikál $\mathfrak{s}$ (existoval by $x \in \mathfrak{n}, ad_x = A_a$ a $\mathfrak{n} \oplus \operatorname{span}\{f_a\}$ by byl nilpotentní ideál větší než $\mathfrak{n}$, protože vektor $x - f_a$ by komutoval se vším).

Druhá sada se značně zjednoduší, přejdeme-li k přidruženým derivacím. Zmiňovaná lineární rovnice přejde na tvar

$$ad_{[f_a,f_b]} = [A_a, A_b] = [ad_{f_a}, ad_{f_b}] \ .$$

$[f_a, f_b]$ musí být z $\mathfrak{n}$, jinak by $\mathfrak{s}$ nebyla řešitelná. Z toho plyne, že $[A_a, A_b]$ musí být vnitřní derivace, a tudíž $[A_a, A_b] \in ad_{\mathfrak{n}}$.

Nadefinujeme tedy $[f_a, f_b]$, tak, že najdeme ad-vzor $[A_a, A_b]$.

Zobrazení $ad_{\bullet}$ není prosté, protože nilpotentní algebra má nenulové centrum, a tudíž se zde může vyskytnout volnost o vektory z $\mathfrak{C}(\mathfrak{n})$.

Věta 2.2.2. Řešitelnou algebru $\mathfrak{s}$ vytvoříme přidáním p vektorů, jejichž komutační relace definujeme přidružením p vnějších derivacích, které jsou lineárně nil-nezávislé (to jest jediná lineární kombinace vytvořující nilpotentní derivaci je ta triviální – tím se zajistí, že $\mathfrak{n}$ bude stále nilradikál $\mathfrak{s}$).

Další omezení na tvar derivací dostaneme z toho, že jejich vzájemné komutátory musí být z $ad_{\mathfrak{n}} = \operatorname{span}\{ad_{e_1}, \ldots, ad_{e_n}\}$.

Vzájemné komutační relace pak definujeme pomocí ad-vzoru komutátoru přidružených derivací. Výsledný tvar komutačních relací můžeme ještě upravit pomocí takových změn báze v
$\mathfrak{C}(n) \dotplus \operatorname{span}\{f_a, \ldots, f_p\}$, které změní pouze komutační relace mezi $f_a, \ldots, f_p$.

Různé soubory derivací mohou odpovídat izomorfním algebrám. Proto zavádíme následující ekvivalenci.

Definice 2.2.3. Ekvivalence souborů vnějších derivací $(D_1, \ldots, D_p)$ je generována těmito transformacemi:

1. Přičtení libovolné vnitřní derivace k D_i.

2. Změna báze v $\mathfrak{n}$, která zachová komutační relace
$\Leftrightarrow$
$\forall i \in \hat{p},\ \tilde{D}_i := \Phi D_i \Phi^{-1}$, kde Φ je libovolný automorfismus $\mathfrak{n}$.

3. Výběr jiného lineárně nezávislého souboru v $\mathrm{span}\{D_1, \dots, D_p\}$.

Postup klasifikace bude tedy následující:

Klasifikujeme soubory vnějších derivací pro $p = 1$. Pro vyšší p vytvoříme lineárně nil-nezávislý soubor délky p a první derivaci převedeme pomocí transformací v 2.2.3 na co nejjednodušší (ideálně diagonální) tvar. Tím jsme do nějakého tvaru převedli i ostatní derivace. Pak napočítáme vzájemné komutátory a jelikož komutátory musí být vnitřní derivace, omezíme tím tvar $D_2, \dots, D_p$. Pak uděláme ad-vzory komutátorů a pokusíme se pomocí změny báze v $\mathfrak{C}(n) \dotplus \mathrm{span}\{f_a, \dots, f_p\}$ zjednodušit výsledné komutační relace.

2.3 Zadání nilradikálu $\mathfrak{n}$

Nenulové Lieovy závorky pro $\dim \mathfrak{n} = n \geq 5$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n} &= \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\} \\
[x_{n-1}, x_n] &= x_2 \\
[x_2, x_n] &= x_1 \\
[x_3, x_{n-1}] &= x_1 \\
[x_k, x_{n-1}] &= x_{k-1} \qquad 4 \leq k \leq n-2
\end{aligned}$$

Je to nilpotentní algebra s $n-2$ rozměrným abelovským ideálem.

Kapitola 3

Nilradikál dimenze 5

3.1 Vlastnosti $\mathfrak{n}$

3.1.1 Komutační relace

Bazické vektory si přeznačíme z x_i na e_i. Nenulové Lieovy závorky pro $\mathfrak{n} = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_5\}$:

$$\begin{aligned}[][e_4, e_5] &= e_2 \\ [e_2, e_5] &= e_1 \\ [e_3, e_4] &= e_1\end{aligned} \tag{3.1}$$

3.1.2 Charakteristické série a jejich centralizéry

Derivovaná série

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^{(0)} &= \mathfrak{n} & \mathfrak{n}_{\mathfrak{n}} &= \mathrm{span}\{e_1\} = \mathfrak{C}(\mathfrak{n}) \\ \mathfrak{n}^{(1)} &= \mathrm{span}\{e_1, e_2\} & {\mathfrak{n}^{(1)}}_{\mathfrak{n}} &= \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \\ \mathfrak{n}^{(2)} &= \{\theta\} & {\mathfrak{n}^{(2)}}_{\mathfrak{n}} &= \mathfrak{n} \end{aligned}$$

$DS = [5, 2, 0]$

Dolní centrální série

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^{1} &= \mathfrak{n} & \mathfrak{n}_{\mathfrak{n}} &= \mathrm{span}\{e_1\} = \mathfrak{C}(\mathfrak{n}) \\ \mathfrak{n}^{2} &= \mathfrak{n}^{(1)} = \mathrm{span}\{e_1, e_2\} & {\mathfrak{n}^{2}}_{\mathfrak{n}} &= {\mathfrak{n}^{(1)}}_{\mathfrak{n}} \\ \mathfrak{n}^{3} &= \mathrm{span}\{e_1\} & {\mathfrak{n}^{3}}_{\mathfrak{n}} &= \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}^{4} &= \{\theta\} & {\mathfrak{n}^{4}}_{\mathfrak{n}} &= \mathfrak{n} \end{aligned}$$

$CS = [5, 2, 1, 0]$

Horní centrální série

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{C}(\mathfrak{n}) = \operatorname{span}\{e_1\} \qquad \mathfrak{z}_{1\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$$
$$\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{a} = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\} \qquad \mathfrak{z}_{2\mathfrak{n}} = \mathfrak{a}$$
$$\mathfrak{z}_3 = \mathfrak{n} \qquad \mathfrak{n}_\mathfrak{n} = \mathfrak{z}_1$$

$US = [1, 3, 5]$

Máme tedy tuto rostoucí posloupnost invariantních ideálů:

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{n}) \subseteq \mathfrak{n}^2 \subseteq \mathfrak{z}_2 \subseteq \mathfrak{n}^2{}_\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}$$

$$\operatorname{span}\{e_1\} \subseteq \operatorname{span}\{e_1, e_2\} \subseteq \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subseteq \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \tag{3.2}$$

3.2 Automorfismy $\mathfrak{n}$

Abychom zjistili povolené transformace souborů vnějších derivací, musíme nejprve zjistit, jak vypadá obecný automorfismus $\mathfrak{n}$.

3.2.1 Vyšetření pomocí invariantních ideálů

Máme-li automorfismus Φ a libovolný invariantní ideál $\mathfrak{h}$, musí $\Phi|_\mathfrak{h}$ být automorfismus $\mathfrak{h}$. Proto pro každý bazický vektor e_i najdeme nejmenší invariantní ideál $\mathfrak{h}_i$, pro který platí $e_i \in \mathfrak{h}_i$. Potom víme, že

$$\Phi e_i = \Phi|_{\mathfrak{h}_i} e_i \in \mathfrak{h}_i \ . \tag{3.3}$$

Aplikujeme-li tento poznatek na naši posloupnost (3.2), zjistíme, že matice automorfismu v bázi $(e_1, \ldots, e_5)$ musí být horní trojúhelníková.

3.2.2 Diagonální automorfismy

Jelikož jde každá horní trojúhelníková matice rozložit na součin diagonální matice a matice s jedničkami na diagonále, stačí nám vyšetřit tyto dva případy zvlášť.

Věta 3.2.1. Matice diagonálního automorfismu vypadá:

$$^\epsilon\Phi^\epsilon = \begin{pmatrix} \tau^2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

Důkaz. Vlastnost automorfismu lze využít k definici $\Phi e_1, \Phi e_2$ pomocí $\Phi e_4, \Phi e_5$.
Nechť $\Phi e_5 = \tau e_5$ a $\Phi e_4 = \omega e_4$.

$$\begin{aligned}\Phi e_2 &= \Phi[e_4, e_5] = [\Phi e_4, \Phi e_5] = \tau\omega[e_4, e_5] = \tau\omega e_2\\ \Phi e_1 &= \Phi[e_2, e_5] = [\Phi e_2, \Phi e_5] = \tau^2\omega[e_2, e_5] = \tau^2\omega e_1\end{aligned}$$

Φe_3 dopočítáme ze zbylé relace.

$$\Phi e_1 = \Phi[e_3, e_4] = [\Phi e_3, \Phi e_4] = \alpha\omega[e_3, e_4] \Rightarrow \tau^2\omega = \alpha\omega \Rightarrow \Phi e_3 = \tau^2 e_3 \ .$$

□

3.2.3 Nediagonální automorfismy

Zbývá vyšetřit horní trojúhelníkové matice s jedničkami na diagonále.
Díky tvaru matice jsou splněny relace

$$\begin{aligned}[\Phi e_i, \Phi e_j] &= \theta \quad i, j \in \hat{3}\\ [\Phi e_1, \Phi e_4] = [\Phi e_1, \Phi e_5] &= \theta\\ [\Phi e_2, \Phi e_4] &= \theta\\ \Phi e_1 = [\Phi e_2, \Phi e_5] = [\Phi e_3, \Phi e_4] &= e_1 \ .\end{aligned}$$

Zbývají nám tedy dvě relace, z nichž jednu využijeme na definici

$$\Phi e_2 := [\Phi e_4, \Phi e_5]$$

a druhá nám omezí tvar automorfismu:

$$\theta = [\Phi e_3, \Phi e_5] = {\Phi^2}_3[e_2, e_5] + {\Phi^4}_5[e_3, e_4] = ({\Phi^2}_3 + {\Phi^4}_5)e_1 \Longrightarrow {\Phi^2}_3 = -{\Phi^4}_5$$

A tedy můžeme nyní vyslovit následující větu:

Věta 3.2.2. Matice automorfismu s jedničkami na diagonále vypadá takto:

$$\Phi^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_2 + \beta_3\alpha_4 - \alpha_3 & \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1\\ 0 & 1 & -\alpha_4 & \beta_2 & \alpha_2\\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 & \alpha_3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Derivace $\mathfrak{n}$

3.3.1 Obecná derivace

Pro zjištění obecného tvaru derivace využijeme fakt, že $\mathfrak{D}(\mathfrak{n})$ je Lieova algebra grupy $Aut(\mathfrak{n})$. Automorfismy máme parametrizované tak, že zadaný automorfismus jednoznačně rozložíme na součin diagonální matice a horní trojúhelníkové matice (v tomto pořadí) a jako souřadnice pak použijeme

$$(\tau, \omega, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1)\ .$$

Obecnou derivaci zjistíme rozvinutím v okolí jednotky. To jest dosadíme do souřadnic

$$(1+\alpha, 1+\beta, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, c_1)\ ,$$

od výsledku odečteme identickou matici, kde je to potřeba, rozvineme do řady a zanedbáme vyšší než lineární členy.

Věta 3.3.1. Matice obecné derivace D v bázi $(e_1, \ldots, e_5)$ vypadá takto:

$$D^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & b_2-a_3 & c_1 & b_1 & a_1 \\ 0 & \alpha+\beta & -a_4 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & 2\alpha & b_3 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

3.3.2 Vnitřní derivace

Prostým vypočítáním zjistíme, že:

$$ad_{e_2} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad ad_{e_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$
$$ad_{e_4} = \begin{pmatrix} 0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad ad_{e_5} = \begin{pmatrix} 0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Vnější derivace

Matici vnější derivace vytvoříme tak, od obecné derivace odečteme vhodný násobek vnitřní derivace. Dle definice 2.2.3 je to ekvivalentní úprava.

Je více možností, jak zvolit tvar reprezentantů tříd ekvivalence vnějších derivací, my zvolíme jeden z nich.

Věta 3.3.2. Matice vnější derivace D v bázi $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_5)$ vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & -a_3 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & -a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha & b_3 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Nyní klasifikujeme derivaci vzhledem k transformacím pomocí automorfismů a přičítání vnitřních derivací.

Poznámka 3.3.3. Matice a proměnné vzniklé po transformaci budeme značit tildou. Pokud se objeví nenuly v pravém horním rohu, odečteme vnitřní derivaci, abychom dostali opět reprezentanta ve tvaru (3.4).

1. $\alpha \neq 0 \wedge \frac{\beta}{\alpha} \notin \{0, 1, 2\}$

$$\tilde{D} := \frac{D}{\alpha} = \begin{pmatrix} 2+\tilde{\beta} & -\tilde{a}_3 & \tilde{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\tilde{\beta} & -\tilde{a}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \tilde{b}_3 & \tilde{a}_3 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta} & \tilde{a}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odstraníme a_3 (a_4 se nezmění):

$$\tilde{D} := \Phi^{-1} D \Phi = \begin{pmatrix} 2+\beta & 0 & \tilde{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\beta & -a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & -a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtransformujeme a_4 (případné vyskytnuvší se a_3 odtransformujeme jako v předchozím kroku, aniž bychom narušili nulovost a_4):

$$\tilde{D} := \Phi^{-1} D \Phi = \begin{pmatrix} 2+\beta & 0 & \tilde{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \tilde{b}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a_4}{\beta-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{a_4}{\beta-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtransformujeme b_3, aniž bychom narušili ostatní členy.

$$\tilde{D} := \Phi^{-1} D \Phi = \begin{pmatrix} 2+\beta & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b_3}{\beta-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtransformujeme c_1, aniž bychom narušili ostatní členy.

$$\tilde{D} := \Phi^{-1} D \Phi = \begin{pmatrix} 2+\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-c_1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 0$

   Nepovede se nám odtransformovat c_1. Ovšem pomocí diagonálního automorfismu ji můžeme naškálovat na 1, pokud už není nula.

$$\tilde{D} := \Phi^{-1} D \Phi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}.$$

3. $\alpha \neq 0 \wedge \frac{\beta}{\alpha} = 1$

   Nepovede se nám odtransformovat a_4. Ovšem pomocí diagonálního automorfismu ji můžeme naškálovat na 1, pokud už není nula.

$$\tilde{D} := \Phi^{-1} D \Phi = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} a_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

4. $\alpha \neq 0 \wedge \frac{\beta}{\alpha} = 2$

   Nepovede se nám odtransformovat b_3. Ovšem pomocí diagonálního automorfismu ji můžeme naškálovat na 1, pokud už není nula.

$$\tilde{D} := \Phi^{-1} D \Phi = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. $\alpha = 0 \Rightarrow \beta \neq 0$

   Můžeme tedy opět vydělit derivaci β a přeměnit si ji na derivaci, kde $\beta = 1$.

   Nepovede se nám odtransformovat a_3. Ovšem pomocí diagonálního automorfismu ji můžeme naškálovat na 1, pokud už není nula.

$$\tilde{D} := \Phi^{-1} D \Phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} a_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

3.4 Řešitelné rozšíření $\mathfrak{s}$

3.4.1 Rozšíření o 1 vektor ($\dim \mathfrak{s} = 6$)

Rozšíření vytvoříme přidáním vektoru f_1, jehož komutační relace nadefinujeme přidružením vnější derivace.

Věta 3.4.1. Existuje 5 typů řešitelné algebry $\mathfrak{s}$, $\dim \mathfrak{s} = 6$ s nilradikálem $\mathfrak{n}$, který má komutační relace (3.1):

1. A_1 v (2.3) je diagonální

$$\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= (2\alpha + \beta)e_1 \\
[f_1, e_2] &= (\alpha + \beta)e_2 \\
[f_1, e_3] &= 2\alpha e_3 \\
[f_1, e_4] &= \beta e_4 \\
[f_1, e_5] &= \alpha e_5
\end{aligned}$$

Navzájem neizomorfní algebry tohoto typu jsou:

$\mathfrak{s}_{5+1,1}(\beta)$: $\alpha = 1, \beta \notin \{-2, 0\}$

$$DS = [6, 5, 2, 0] \quad CS = [6, 5] \quad US = [0]$$

$\mathfrak{s}_{5+1,2}$: $\alpha = 1, \beta = 0$

$$DS = [6, 4, 1, 0] \quad CS = [6, 4] \quad US = [0]$$

$\mathfrak{s}_{5+1,3}$: $\alpha = 1, \beta = -2$

$$DS = [6, 5, 2, 0] \quad CS = [6, 5] \quad US = [1]$$

$\mathfrak{s}_{5+1,4}$: $\alpha = 0, \beta = 1$

$$DS = [6, 3, 0] \quad CS = [6, 3] \quad US = [0]$$

2. A_1 v (2.3) není diagonální. Její diagonála je určena $\alpha = 1, \beta = 0$.

$\mathfrak{s}_{5+1,5}$:

$$\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= 2e_1 \\
[f_1, e_2] &= e_2 \\
[f_1, e_3] &= 2e_3 \\
[f_1, e_4] &= \theta \\
[f_1, e_5] &= e_5 + e_2
\end{aligned}$$

$$DS = [6, 4, 1, 0] \quad CS = [6, 4] \quad US = [0]$$

3. A_1 v (2.3) není diagonální. Její diagonála je určena $\alpha = 1, \beta = 1$.

   $\mathfrak{s}_{5+1,6}$:

$$\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= 3e_1 \\
[f_1, e_2] &= 2e_2 \\
[f_1, e_3] &= 2e_3 - e_2 \\
[f_1, e_4] &= e_4 \\
[f_1, e_5] &= e_5 + e_4
\end{aligned}$$

$$DS = [6, 5, 2, 0] \quad CS = [6, 5] \quad US = [0]$$

4. A_1 v (2.3) není diagonální. Její diagonála je určena $\alpha = 1, \beta = 2$.

   $\mathfrak{s}_{5+1,7}$:

$$\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= 4e_1 \\
[f_1, e_2] &= 3e_2 \\
[f_1, e_3] &= 2e_3 \\
[f_1, e_4] &= 2e_4 + e_3 \\
[f_1, e_5] &= e_5
\end{aligned}$$

$$DS = [6, 5, 2, 0] \quad CS = [6, 5] \quad US = [0]$$

5. A_1 v (2.3) není diagonální. Její diagonála je určena $\alpha = 0, \beta = 1$.

   $\mathfrak{s}_{5+1,8}$:

$$\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= e_1 \\
[f_1, e_2] &= e_2 \\
[f_1, e_3] &= \theta \\
[f_1, e_4] &= e_4 + e_2 \\
[f_1, e_5] &= e_3
\end{aligned}$$

$$DS = [6, 4, 1, 0] \quad CS = [6, 4, 3] \quad US = [0]$$

3.4.2 Rozšíření o 2 vektory ($\dim \mathfrak{s} = 7$)

Více vektorů přidat nemůžeme, protože pak by přidávaný soubor vnějších derivací nebyl lineárně nil-nezávislý (existovala by netriviální lineární kombinace, jejíž výsledek by byla nilpotentní matice).

Soubor derivací (D_1, D_2) si pomocí jejich lineární kombinace pozměníme tak, aby D_1 měla na diagonále parametry $\alpha_1 = 1, \beta_1 = -1$ a D_2 měla $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 1$.

Z předchozích výpočtů víme, že D_1 lze pomocí změny báze v $\mathfrak{n}$ zdiagonalizovat. Učiníme tak. Nyní máme tyto dvě matice:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -a_3 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jejich komutátor

$$[D_1, D_2] = \begin{pmatrix} 1 & -a_3 & -1c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_3 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovšem musí být vnitřní derivace:

$$[D_1, D_2] = \begin{pmatrix} 0 & \nu & -\mu & \lambda & \kappa \\ 0 & 0 & 0 & \nu & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Je tedy vidět, že všechny koeficienty (a_3, a_4, b_3, c_1) musí být nula a tedy i D_2 je diagonální. Provedeme už jen drobnou kosmetickou úpravu a přejdeme k lineární kombinaci, kde je vždy α, nebo β rovno nule.

Máme rovnici pro $ad_{[f_1,f_2]}$ a uděláme ad-vzor.

$$ad_{[f_1,f_2]} = [ad_{f_1}, ad_{f_2}] = 0$$
$$[f_1, f_2] = \gamma e_1$$

Pomocí transformace $\tilde{f}_1 = f_1, \tilde{f}_2 = f_2 - \gamma e_1$ dostaneme, aniž bychom něco narušili, relaci:

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = \theta$$

Nyní už můžeme vyslovit větu:

Věta 3.4.2. Existuje právě jedna řešitelná algebra $\mathfrak{s}_7$, $\dim \mathfrak{s} = 7$ s nilradikálem $\mathfrak{n}$, který má komutační relace (3.1). V bázi $(e_1, \ldots, e_5, f_1, f_2)$ mají vektory f_1, f_2 komutační relace:

$$
\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= 2e_1 & \qquad [f_2, e_1] &= e_1 \\
[f_1, e_2] &= e_2 & \qquad [f_2, e_2] &= e_2 \\
[f_1, e_3] &= 2e_3 & \qquad [f_2, e_3] &= \theta \\
[f_1, e_4] &= \theta & \qquad [f_2, e_4] &= e_4 \\
[f_1, e_5] &= e_5 & \qquad [f_2, e_5] &= \theta \\
[f_1, f_2] &= \theta
\end{aligned}
$$

Dimenze charakteristických sérií:

$$DS = [7, 5, 2, 0] \qquad CS = [7, 5] \qquad US = [0]$$

Kapitola 4

Nilradikál dimenze 6

4.1 Vlastnosti $\mathfrak{n}$

4.1.1 Komutační relace

Nenulové Lieovy závorky pro $\mathfrak{n} = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_6\}$:

$$
\begin{aligned}
[x_5, x_6] &= x_2 \\
[x_2, x_6] &= x_1 \\
[x_4, x_5] &= x_3 \\
[x_3, x_5] &= x_1
\end{aligned}
$$

Ukazuje se, že je výhodnější přejít k bázi $(e_1, \ldots, e_6)$:

$$e_1 := -x_1,\ e_2 := -x_3,\ e_3 := -x_2,\ e_4 := -x_4,\ e_5 := x_6,\ e_6 := x_5\ .$$

Komutační relace v této bázi vypadají takto:

$$
\begin{aligned}
[e_5, e_6] &= e_3 \\
[e_3, e_5] &= e_1 \\
[e_4, e_6] &= e_2 \\
[e_2, e_6] &= e_1
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

4.1.2 Charakteristické série a jejich centralizéry

Derivovaná série

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{n}^{(0)} &= \mathfrak{n} & \mathfrak{n}_{\mathfrak{n}} &= \mathrm{span}\{e_1\} = \mathfrak{C}(\mathfrak{n}) \\
\mathfrak{n}^{(1)} &= \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\} & {\mathfrak{n}^{(1)}}_{\mathfrak{n}} &= \mathfrak{a} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \\
\mathfrak{n}^{(2)} &= \{\theta\} & {\mathfrak{n}^{(2)}}_{\mathfrak{n}} &= \mathfrak{n}
\end{aligned}
$$

$DS = [6, 3, 0]$

Dolní centrální série

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^1 &= \mathfrak{n} & \mathfrak{n}_\mathfrak{n} &= \operatorname{span}\{e_1\} = \mathfrak{C}(\mathfrak{n}) \\ \mathfrak{n}^2 &= \mathfrak{n}^{(1)} = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\} & \mathfrak{n}^2{}_\mathfrak{n} &= \mathfrak{n}^{(1)}{}_\mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}^3 &= \operatorname{span}\{e_1\} & \mathfrak{n}^3{}_\mathfrak{n} &= \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}^4 &= \{\theta\} & \mathfrak{n}^4{}_\mathfrak{n} &= \mathfrak{n} \end{aligned}$$

$$CS = [6, 3, 1, 0]$$

Horní centrální série

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= \mathfrak{C}(\mathfrak{n}) = \operatorname{span}\{e_1\} & \mathfrak{z}_{1\mathfrak{n}} &= \mathfrak{n} \\ \mathfrak{z}_2 &= \mathfrak{n}^2 & \mathfrak{z}_{2\mathfrak{n}} &= \mathfrak{a} \\ \mathfrak{z}_3 &= \mathfrak{n} & \mathfrak{n}_\mathfrak{n} &= \mathfrak{z}_1 \end{aligned}$$

$$US = [1, 3, 6]$$

Tvrzení 4.1.1. $\operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ je invariantní ideál.

Důkaz. Ideál to je zjevně. Nechť Φ je automorfismus.

$$\Phi e_1 = \Phi|_{\mathfrak{z}_1} e_1 \in \mathfrak{z}_1 \subseteq \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$$

Dále využijeme, že $e_4 \in \mathfrak{a}$, což je invariantní ideál.

$$\Phi e_2 = \Phi[e_4, e_6] = [\Phi e_4, \Phi e_6] = (\Phi^2{}_4 \Phi^6{}_6 + \Phi^3{}_4 \Phi^5{}_6) e_1 + (\Phi^4{}_4 \Phi^6{}_6) e_2 \in \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$$

□

Máme tedy další invariantní ideál, který si označme $\mathfrak{k}$. Podle věty 1.2.20 získáme další invariantní ideály tím, že najdeme centralizér a pak centralizér centralizéru:

$$\mathfrak{k}^2 := \mathfrak{k}_\mathfrak{n} = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \quad \mathfrak{k}^3 := \mathfrak{k}^2{}_\mathfrak{n} = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_4\}$$

Máme tedy tuto rostoucí posloupnost invariantních ideálů

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{n}) \subseteq \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{n}_2 \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{k}^2 \subseteq \mathfrak{n}$$

a jako bonus jsme našli invariantní ideál $\mathfrak{k}^3$, který do této posloupnosti nepatří a ještě více nám omezí tvar automorfismu.

4.2 Automorfismy $\mathfrak{n}$

Aplikujeme stejný postup jako v sekci 3.2.

4.2.1 Vyšetření pomocí invariantních ideálů

Pro každý vektor e_i najdeme nejmenší invariantní ideál $\mathfrak{h}_i$, který e_i obsahuje:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_1 &= \mathfrak{C}(n) = \mathrm{span}\{e_1\}\\
\mathfrak{h}_2 &= \mathfrak{k} = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}\\
\mathfrak{h}_3 &= \mathfrak{n}^2 = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}\\
!\mathfrak{h}_4 &= \mathfrak{k}^3 = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_4\}\\
\mathfrak{h}_5 &= \mathfrak{k}^2 = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}
\end{aligned}$$

Matice automorfismu Φ v bázi $(e_1, \ldots, e_6)$ musí být tedy horní trojúhelníková a ${\Phi^3}_4 = 0$.

4.2.2 Diagonální automorfismy

Jelikož jde každá horní trojúhelníková matice rozložit na součin diagonální matice a matice s jedničkami na diagonále, stačí nám vyšetřit tyto dva případy zvlášť.

Věta 4.2.1. Matice diagonálního automorfismu vypadá:

$$\Phi^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}
\tau^2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \tau^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \tau\omega & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{\tau^2}{\omega} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega
\end{pmatrix}$$

Důkaz. Vlastnost automorfismu lze využít k definici $\Phi e_1, \Phi e_2, \Phi e_3$ pomocí Φe_4, Φe_5 a Φe_6.
Nechť $\Phi e_4 = \vartheta e_4$ $\Phi e_5 = \tau e_5$ a $\Phi e_6 = \omega e_6$. Rovnice, které musí být splněny:

$$\begin{aligned}
\Phi e_3 &:= \Phi[e_5, e_6] = [\Phi e_5, \Phi e_6] = \omega\tau[e_5, e_6] = \tau\omega e_3\\
\Phi e_1 &:= \Phi[e_3, e_5] = [\Phi e_3, \Phi e_5] = \tau^2\omega[e_3, e_5] = \tau^2\omega e_1\\
\Phi e_2 &:= \Phi[e_4, e_6] = [\Phi e_4, \Phi e_6] = \vartheta\omega[e_4, e_6] = \vartheta\omega e_3\\
\Phi e_1 &= \Phi[e_2, e_6] = [\Phi e_2, \Phi e_6] = \vartheta\omega^2[e_3, e_5] = \vartheta\omega^2 e_1
\end{aligned}$$

Z druhé a čtvrté řádky je vidět, že $\vartheta = \frac{\tau^2}{\omega}$. □

4.2.3 Nediagonální automorfismy

Zbývá vyšetřit horní trojúhelníkové matice s jedničkami na diagonále a nulou v třetím řádku ve čtvrtém sloupci.

Díky tvaru matice jsou splněny relace:

$$
\begin{aligned}
[\Phi e_i, \Phi e_j] &= \theta \quad i,j \in \hat{4} \\
[\Phi e_1, \Phi e_5] = [\Phi e_1, \Phi e_6] &= \theta \\
[\Phi e_2, \Phi e_5] &= \theta \\
\Phi e_1 = [\Phi e_2, \Phi e_6] = [\Phi e_3, \Phi e_5] &= e_1 \\
[\Phi e_4, \Phi e_5] &= \theta
\end{aligned}
$$

Zbývají nám tři relace, z nichž dvě využijeme na definici

$$
\begin{aligned}
\Phi e_3 &:= [\Phi e_5, \Phi e_6] \\
\Phi e_2 &:= [\Phi e_4, \Phi e_6]
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

a třetí nám omezí tvar automorfismu:

$$\theta = [\Phi e_3, \Phi e_6] = {\Phi^2}_3[e_2, e_6] + {\Phi^5}_6[e_3, e_5] = ({\Phi^2}_3 + {\Phi^5}_6)e_1 \quad \Longrightarrow -{\Phi^5}_6 = {\Phi^2}_3 \overset{(4.2)}{=} {\Phi^4}_5$$

A tedy můžeme nyní vyslovit následující větu:

Věta 4.2.2. Matice automorfismu s jedničkami na diagonále vypadá takto:

$$\Phi^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 & \beta_2 - \alpha_3 + \beta_3\alpha_5 & \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_5 & \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta_3 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha_5 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3 Derivace $\mathfrak{n}$

4.3.1 Obecná derivace

Opět použijeme toho, že $\mathfrak{D}(\mathfrak{n})$ je Lieova algebra grupy $Aut(\mathfrak{n})$. Postup je stejný jako předchozím případě. (Viz věta 3.3.1)

Věta 4.3.1. Matice obecné derivace D v bázi $(e_1, \ldots, e_6)$ vypadá takto:

$$D^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & c_2 & b_2 - a_3 & c_1 & b_1 & a_1 \\ 0 & 2\beta & -a_5 & c_2 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & \alpha + \beta & 0 & b_3 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta - \alpha & -a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

4.3.2 Vnitřní derivace

Prostým vypočítáním zjistíme, že:

$$ad_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad ad_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ad_{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad ad_{e_5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ad_{e_6} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3.3 Vnější derivace

Věta 4.3.2. Matice obecného reprezentanta třídy ekvivalence vnější derivace D v bázi $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_6)$ vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & -a_5 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \beta & 0 & b_3 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta - \alpha & -a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Nyní klasifikujeme derivace vzhledem k transformacím pomocí automorfismů a přičítání vnitřních derivací.

Poznámka 4.3.3. Matice a proměnné vzniklé po transformaci budeme opět značit tildou. Každá matice derivace, jež zde uvedeme bude symbolizovat třídu ekvivalence reprezentovanou maticí ve tvaru (4.3).

1. $\alpha \neq 0 \wedge \frac{\beta}{\alpha} \notin \{0,1\}$

$$\tilde{D} := \frac{D}{\alpha} = \begin{pmatrix} 1+2\tilde{\beta} & 0 & 0 & \tilde{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\tilde{\beta} & -\tilde{a}_5 & 0 & \tilde{a}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\tilde{\beta} & 0 & \tilde{b}_3 & \tilde{a}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\tilde{\beta}-1 & -\tilde{a}_5 & \tilde{a}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta} & \tilde{a}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odstraníme a_5 (zde je potřeba, aby $\beta \neq 1$).

$$\tilde{D} := \Phi^{-1} D \Phi =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2\beta & 0 & 0 & \tilde{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & 0 & 0 & \tilde{a}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\beta & 0 & \tilde{b}_3 & \tilde{a}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta-1 & 0 & \tilde{a}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a_5}{\beta-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a_5}{\beta-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{a_5}{\beta-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odstraníme a_4 (a_5 zůstane zachována; opět potřebujeme, aby $\beta \neq 1$), a zároveň odtransformujeme b_3.

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1+2\beta & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\beta & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-a_4}{2\beta-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odstraníme c_1:

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1+2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\beta & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{c_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A nakonec odtransformujeme a_3 (zde potřebujeme, aby $\beta \neq 0$).

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1+2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{a_3}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{a_3}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 0$

   a_3 nejde odtransformovat, ale povede se nám ho škálováním nastavit na 1, pokud už není nula.

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} a_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\alpha \neq 0 \wedge \frac{\beta}{\alpha} = 1$

   Nepovede se nám odtransformovat a_4, ani a_5. Pokud $a_5 \neq 0$ použijeme škálování, abychom a_5 změnili na 1. Pokud $a_5 = 0$ a $a_4 \neq 0$ začnou se výsledky lišit podle toho, nad jakým jsme tělesem. Nad $\mathbb{C}$ nemáme problém a a_4 naškálujeme na 1. Nad $\mathbb{R}$ nemůžeme pomocí škálování změnit znaménko, takže $\tilde{a}_4 = \pm 1$.

$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \tilde{a}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} a_5^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{D}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1_{\mathbb{C}} / \pm 1_{\mathbb{R}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \bar{a}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   kde $\bar{a} = \sqrt{a_4}$ nad $\mathbb{C}$ a $\bar{a} = \sqrt{|a_4|}$ nad $\mathbb{R}$.

4. $\alpha = 0$

   $\Rightarrow \beta \neq 0$ Můžeme tedy opět vydělit derivaci β a přeměnit si ji na derivaci, kde $\beta = 1$.

   V tomto případě se nám nepovede odstranit c_1 a b_3. Ukazuje se, že je názornější zvolit jiného reprezentanta třídy ekvivalence:

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 2 & c_2 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $c_2 = -b_3$.

Pokud $c_2 \neq 0$ povede se nám ho naškálovat na 1. Pokud $c_2 = 0$ a $c_1 \neq 0$ liší se výsledky opět v závislosti na tělese, nad kterým se pohybujeme. Nad $\mathbb{C}$ není problém naškálovat D tak, aby $c_1 = 1$, ale $\mathbb{R}$ nám, stejně jako v předchozím případě, neumožní změnit znaménko.

$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \tilde{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1_{\mathbb{C}}/\pm 1_{\mathbb{R}} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{c}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c} \end{pmatrix},$$

kde $\bar{c} = \sqrt{c_1}$ nad $\mathbb{C}$ a $\bar{c} = \sqrt{|c_1|}$ nad $\mathbb{R}$.

4.4 Řešitelné rozšíření $\mathfrak{s}$

4.4.1 Rozšíření o 1 vektor ($\dim \mathfrak{s} = 7$)

Rozšíření vytvoříme přidáním vektoru f_1, jehož komutační relace nadefinujeme přidružením vnější derivace.

Věta 4.4.1. Existuje 5 typů řešitelných algeber $\mathfrak{s}$, $\dim \mathfrak{s} = 6$ s nilradikálem $\mathfrak{n}$, který má komutační relace (4.1)

1. A_1 v (2.3) je diagonální.

$$\begin{aligned} [f_1, e_1] &= (\alpha + 2\beta)e_1 \\ [f_1, e_2] &= 2\beta e_2 \\ [f_1, e_3] &= (\alpha + \beta)e_3 \\ [f_1, e_4] &= (2\beta - \alpha)e_4 \\ [f_1, e_5] &= \beta e_5 \\ [f_1, e_6] &= \alpha e_6 \end{aligned}$$

Navzájem neizomorfní algebry tohoto typu jsou:

$\mathfrak{s}_{6+1,1}(\beta)$**:** $\alpha = 1, \beta \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$

$$DS = [7,6,3,0] \quad CS = [7,6] \quad US = [0]$$

$\mathfrak{s}_{6+1,2}$**:** $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2}$

$$DS = [7,6,3,0] \quad CS = [7,6] \quad US = [1]$$

$\mathfrak{s}_{6+1,3a}$**:** $\alpha = 1, \beta = 0$

$$DS = [7,5,2,0] \quad CS = [7,5] \quad US = [0]$$

$$\mathfrak{s}^{(2)}_{6+1,3a} = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$$

$\mathfrak{s}_{6+1,3b}$**:** $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$

$$DS = [7,5,2,0] \quad CS = [7,5] \quad US = [0]$$

$$\mathfrak{s}^{(2)}_{6+1,3b} = \mathrm{span}\{e_1, e_3\}$$

$\mathfrak{s}_{6+1,4}$**:** $\alpha = 0, \beta = 1$

$$DS = [7,5,1,0] \quad CS = [7,5] \quad US = [0]$$

2. A_1 v (2.3) není diagonální. Její diagonála je určena $\alpha = 1, \beta = 0$.

$\mathfrak{s}_{6+1,5}$**:**

$$\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= e_1 \\
[f_1, e_2] &= \theta \\
[f_1, e_3] &= e_3 \\
[f_1, e_4] &= -e_4 \\
[f_1, e_5] &= e_2 \\
[f_1, e_6] &= e_6 + e_3
\end{aligned}$$

$$DS = [7,5,2,0] \quad CS = [7,5] \quad US = [0]$$

3. A_1 v (2.3) není diagonální. Její diagonála je určena $\alpha = 1, \beta = 1$.

$\mathfrak{s}_{6+1,6}$**:**

$$\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= 3e_1 \\
[f_1, e_2] &= 2e_2 \\
[f_1, e_3] &= 2e_3 - e_2 \\
[f_1, e_4] &= e_4 \\
[f_1, e_5] &= e_5 - e_4 \\
[f_1, e_6] &= e_6 + e_5
\end{aligned}$$

$$DS = [7,6,3,0] \quad CS = [7,6] \quad US = [0]$$

$\mathfrak{s}_{6+1,7}(\epsilon)$**:**

$$
\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= 3e_1 \\
[f_1, e_2] &= 2e_2 \\
[f_1, e_3] &= 2e_3 \\
[f_1, e_4] &= e_4 \\
[f_1, e_5] &= e_5 \\
[f_1, e_6] &= e_6 + \epsilon e_4
\end{aligned}
$$

$$
\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{nad } \mathbb{C} \\ \pm 1 & \text{nad } \mathbb{R} \end{cases}
$$

$$
DS = [7, 6, 3, 0] \quad CS = [7, 6] \quad US = [0]
$$

$\mathfrak{s}_{6+1,9}(\epsilon)$**:**

$$
\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= 3e_1 \\
[f_1, e_2] &= 2e_2 \\
[f_1, e_3] &= 2e_3 - e_2 \\
[f_1, e_4] &= e_4 \\
[f_1, e_5] &= e_5 - e_4 \\
[f_1, e_6] &= e_6 + e_5 + \epsilon e_4
\end{aligned}
$$

$$
\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{nad } \mathbb{C} \\ \pm 1 & \text{nad } \mathbb{R} \end{cases}
$$

$$
DS = [7, 6, 3, 0] \quad CS = [7, 6] \quad US = [0]
$$

4. A_1 v (2.3) není diagonální. Její diagonála je určena $\alpha = 0, \beta = 1$.

$\mathfrak{s}_{6+1,8}(a_1, a_2)$**:**

$$
\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= 2e_1 \\
[f_1, e_2] &= 2e_2 + a_1 e_1 \\
[f_1, e_3] &= e_3 \\
[f_1, e_4] &= 2e_4 + a_1 e_2 + a_2 e_1 \\
[f_1, e_5] &= e_5 \\
[f_1, e_6] &= \theta
\end{aligned}
$$

kde $a_1 \in \{0, 1\}$ a když $a_1 = 0$ tak

$$
a_2 = \begin{cases} 1 & \text{nad } \mathbb{C} \\ \pm 1 & \text{nad } \mathbb{R} \end{cases}
$$

$$
DS = [7, 5, 1, 0] \quad CS = [7, 5] \quad US = [0]
$$

4.4.2 Rozšíření o 2 vektory ($\dim \mathfrak{s} = 8$)

Více vektorů přidat nemůžeme, protože pak by přidávaný soubor vnějších derivací nebyl lineárně nil-nezávislý (existovala by netriviální lineární kombinace, jejíž výsledek by byla nilpotentní matice).

Soubor derivací (D_1, D_2) si pomocí jejich lineární kombinace pozměníme tak, aby D_1 měla na diagonále parametry $\alpha_1 = 1, \beta_1 = -1$ a D_2 měla $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 1$.

Z předchozích výpočtů víme, že D_1 lze pomocí změny báze v $\mathfrak{n}$ zdiagonalizovat. Učiníme tak. Nyní máme tyto dvě matice:

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -a_5 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jejich komutátor

$$[D_1, D_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_5 & 0 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1b_3 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_5 & -4a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovšem musí být vnitřní derivace:

$$[D_1, D_2] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 & -\nu & \lambda & \kappa \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & \nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je tedy vidět, že všechny koeficienty $(a_3, a_4, a_5, b_3, c_1)$ musí být nula a tedy i D_2 je diagonální. Provedeme už jen drobnou kosmetickou úpravu a přejdeme k lineární kombinaci, kde je vždy α, nebo β rovno nule.

Máme rovnici pro $ad_{[f_1,f_2]}$ a uděláme ad-vzor.

$$\begin{aligned} ad_{[f_1,f_2]} = [ad_{f_1}, ad_{f_2}] = 0 \\ [f_1, f_2] = \gamma e_1 \end{aligned}$$

Pomocí transformace $\tilde{f}_1 = f_1, \tilde{f}_2 = f_2 - \gamma e_1$ dostaneme, aniž bychom něco narušili, relaci:

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = \theta$$

Nyní už můžeme vyslovit větu:

Věta 4.4.2. Existuje právě jedna řešitelná algebra $\mathfrak{s}_8$, $\dim \mathfrak{s} = 8$ s nilradikálem $\mathfrak{n}$, který má komutační relace (4.1). V bázi $(e_1, \ldots, e_6, f_1, f_2)$ mají vektory f_1, f_2 komutační relace:

$$
\begin{aligned}
&[f_1, e_1] = e_1 && [f_2, e_1] = 2e_1 \\
&[f_1, e_2] = \theta && [f_2, e_2] = 2e_2 \\
&[f_1, e_3] = e_3 && [f_2, e_3] = e_3 \\
&[f_1, e_4] = -e_4 && [f_2, e_4] = 2e_4 \\
&[f_1, e_5] = \theta && [f_2, e_5] = e_5 \\
&[f_1, e_6] = e_6 && [f_2, e_6] = \theta \\
&[f_1, f_2] = \theta &&
\end{aligned}
$$

Dimenze charakteristických sérií:

$$DS = [8, 6, 3, 0] \qquad CS = [8, 6] \qquad US = [0]$$

Kapitola 5

Nilradikál obecné dimenze

5.1 Vlastnosti $\mathfrak{n}$

5.1.1 Komutační relace

Nenulové Lieovy závorky pro $\mathfrak{n} = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\}$:

$$
\begin{aligned}
[x_{n-1}, x_n] &= x_2 \\
[x_2, x_n] &= x_1 \\
[x_k, x_{n-1}] &= x_{k-1} \qquad 4 \leq k \leq n-2 \\
[x_3, x_{n-1}] &= x_1
\end{aligned}
$$

Ukazuje se, že je výhodnější přejít k bázi $(e_1, \dots, e_n)$:

$$e_1 := -x_1,\ e_2 := -x_3,\ e_3 := -x_2,\ e_k := -x_k,\ e_{n-1} := x_n,\ e_n := x_{n-1} \qquad (4 \leq k \leq n-2)$$

Komutační relace v této bázi vypadají takto:

$$
\begin{aligned}
[e_n, e_{n-1}] &= e_3 \\
[e_k, e_n] &= e_{k-1} \qquad 5 \leq k \leq n-2 \\
[e_4, e_n] &= e_2 \\
[e_2, e_n] &= e_1 \\
[e_3, e_{n-1}] &= e_1
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

5.1.2 Charakteristické série a jejich centralizéry

Derivovaná série

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{n}^{(0)} &= \mathfrak{n} & \mathfrak{n}_{\mathfrak{n}} &= \mathrm{span}\{e_1\} = \mathfrak{C}(\mathfrak{n}) \\
\mathfrak{n}^{(1)} &= \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_{n-3}\} & {\mathfrak{n}^{(1)}}_{\mathfrak{n}} &= \mathfrak{a} = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_{n-2}\} \\
\mathfrak{n}^{(2)} &= \{\theta\} & {\mathfrak{n}^{(2)}}_{\mathfrak{n}} &= \mathfrak{n}
\end{aligned}
$$

$$DS = [n, n-3, 0]$$

Dolní centrální série

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^1 &= \mathfrak{n} & \mathfrak{n}_\mathfrak{n} &= \mathfrak{C}(\mathfrak{n}) \\ \mathfrak{n}^2 &= \mathfrak{n}^{(1)} & {\mathfrak{n}^2}_\mathfrak{n} &= {\mathfrak{n}^{(1)}}_\mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}^3 &= \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_4, \dots, e_{n-4}\} & {\mathfrak{n}^3}_\mathfrak{n} &= \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\} \\ \mathfrak{n}^k &= \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_4, \dots, e_{n-1-k}\} & {\mathfrak{n}^k}_\mathfrak{n} &= {\mathfrak{n}^3}_\mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}^{n-5} &= \operatorname{span}\{e_1, e_2\} & {\mathfrak{n}^{n-5}}_\mathfrak{n} &= {\mathfrak{n}^3}_\mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}^{n-4} &= \mathfrak{C}(\mathfrak{n}) & {\mathfrak{n}^{n-5}}_\mathfrak{n} &= \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}^{n-3} &= \{\theta\} & {\mathfrak{n}^{n-4}}_\mathfrak{n} &= \mathfrak{n} \end{aligned}$$

$$CS = [n, n-3, n-5, n-6, \dots, 2, 1, 0]$$

Horní centrální série

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= \mathfrak{C}(\mathfrak{n}) = \operatorname{span}\{e_1\} & \mathfrak{z}_{1\mathfrak{n}} &= \mathfrak{n} \\ \mathfrak{z}_2 &= \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\} & \mathfrak{z}_{2\mathfrak{n}} &= \mathfrak{a} \\ \mathfrak{z}_3 &= \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_4, e_{n-1}\} & \mathfrak{z}_{3\mathfrak{n}} &= \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_4, \dots, e_{n-2}\} \\ \mathfrak{z}_k &= \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{k+1}, e_{n-1}\} & \mathfrak{z}_{k\mathfrak{n}} &= \mathfrak{z}_{3\mathfrak{n}} \\ \mathfrak{z}_{n-4} &= \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n-3}, e_{n-1}\} & \mathfrak{z}_{n-4\mathfrak{n}} &= \mathfrak{z}_{3\mathfrak{n}} \\ \mathfrak{z}_{n-3} &= \mathfrak{n} & \mathfrak{z}_{n-3\mathfrak{n}} &= \mathfrak{z}_1 \end{aligned}$$

$$US = [1, 3, 5, 6, \dots, n-2, n]$$

5.2 Automorfismy $\mathfrak{n}$

5.2.1 Vyšetření pomocí invariantních ideálů

Pro každý vektor e_i najdeme nejmenší invariantní ideál $\mathfrak{h}_i$, který e_i obsahuje:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_1 &= \mathfrak{C}(n) = \operatorname{span}\{e_1\} \\ \mathfrak{h}_2 &= \mathfrak{n}^{n-5} = \operatorname{span}\{e_1, e_2\} \\ \mathfrak{h}_3 &= \mathfrak{z}^2 = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\} \\ \mathfrak{h}_k &= \mathfrak{n}^{n-2-k} = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_4, \dots, e_k\} \\ \mathfrak{h}_{n-3} &= \mathfrak{n}^2 \cap \mathfrak{z}_{3\mathfrak{n}} = e_1, e_2, e_4, \dots, e_{n-3} \\ \mathfrak{h}_{n-2} &= \mathfrak{z}_{3\mathfrak{n}} = e_1, e_2, e_4, \dots, e_{n-2} \\ \mathfrak{h}_{n-1} &= \mathfrak{z}_3 = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_{n-1}\} \end{aligned}$$

Z toho plyne, že matice automorfismu ϕ v bázi $\mathcal{E} := (e_1, \dots, e_n)$ musí být horní trojúhelníková a navíc musí platit

$$\begin{aligned} {\Phi^k}_{n-1} &= 0 \qquad 5 \le k \le n-2 \\ {\Phi^3}_l &= 0 \qquad 4 \le l \le n-2\ . \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.2.2 Diagonální automorfismy

Jelikož jde každá horní trojúhelníková matice rozložit na součin diagonální matice a matice s jedničkami na diagonále, stačí nám vyšetřit tyto dva případy zvlášť.

Věta 5.2.1. Diagonální automorfismus je v tomto tvaru:

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_n &= \tau e_n \\
\tilde{e}_{n-1} &= \omega e_{n-1} \\
\tilde{e}_k &= \omega^2 \tau^{3-k} e_k \qquad 4 \leq k \leq n-2 \\
\tilde{e}_3 &= \omega \tau e_3 \\
\tilde{e}_2 &= \omega^2 e_2 \\
\tilde{e}_1 &= \omega^2 \tau e_1
\end{aligned}$$

Důkaz. Definiční vlastnost automorfismu využijeme pro definici $\Phi e_1, \ldots, \Phi e_{n-3}$ pomocí Φe_{n-2}, Φe_{n-1} a Φe_n.

$$\begin{aligned}
\Phi e_n &:= \tau e_n \\
\Phi e_{n-1} &:= \omega e_{n-1} \\
\Phi e_{n-2} &:= \lambda e_{n-2} \\
\Phi e_{k-1} &:= [\Phi e_k, \Phi e_n] \qquad 5 \leq k \leq n-2 \\
\Phi e_3 &:= [\Phi e_{n-1}, \Phi e_n] \\
\Phi e_2 &:= [\Phi e_4, \Phi e_n] \\
\Phi e_1 &:= [\Phi e_2, \Phi e_n]
\end{aligned}$$

Zbývá nám jedna rovnice, pomocí které určíme λ:

$$\begin{aligned}
\Phi e_1 &= [\Phi e_2, \Phi e_n] = [[\Phi e_4, \Phi e_n], \Phi e_n] = (-ad_{\Phi e_n})^{n-4} \Phi e_{n-2} = \lambda \tau^{n-4} e_1 \\
\Phi e_1 &= [\Phi e_3, \Phi e_{n-1}] = [[\Phi e_{n-1}, \Phi e_n], \Phi e_{n-1}] = \omega^2 \tau e_1 \\
&\Rightarrow \lambda \tau^{n-4} = \omega^2 \tau \Rightarrow \lambda = \omega^2 \tau^{5-n}
\end{aligned}$$

□

5.2.3 Nediagonální automorfismy

Zbývá vyšetřit horní trojúhelníkové matice s jedničkou na diagonále, splňující podmínky (5.2).

Věta 5.2.2. Automorfismus Φ je plně určen třemi vektory $\tilde{e}_n$, $\tilde{e}_{n-1}$, $\tilde{e}_{n-2}$:

$$\begin{aligned}
\Phi e_n &:= \tilde{e}_n = e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i e_i \\
\Phi e_{n-1} &:= \tilde{e}_{n-1} = e_{n-1} + \sum_{i=1}^{3} \psi_i e_i - \varphi_{n-1} e_4 \\
\Phi e_{n-2} &:= \tilde{e}_{n-2} = e_{n-2} + \sum_{i=4}^{n-3} \xi_i e_i + \xi_2 e_2 + \xi_1 e_1 \ ,
\end{aligned}$$

kde φ_i, ψ_j, ξ_k jsou čísla z tělesa.

Důkaz. Stejně jako ve větě 5.2.1 využijeme definiční vlastnost automorfismu na definování Φ pomocí působení na e_n, e_{n-1} a e_{n-2}. Díky tvaru matice jsou splněny všechny relace až na jednu:

$$\begin{aligned}
\theta &= [\Phi e_3, \Phi e_n] = \big[[\Phi e_{n-1}, \Phi e_n], \Phi e_n\big] \\
\theta &= \Big[[e_{n-1} + \sum_{i=1}^{4} \psi_i e_i, e_n + \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j e_j], \Phi e_n\Big] \\
\theta &= \Big[[e_{n-1}, e_n] + \psi_2[e_2, e_n] + \psi_4[e_4, e_n] + \psi_3\varphi_{n-1}[e_3, e_{n-1}] + \varphi_3[e_{n-1}, e_3], \Phi e_n\Big] \\
\theta &= [e_3 + \psi_2 e_1 + \psi_4 e_2 + \psi_3\varphi_{n-1} e_1 - \varphi_3 e_1, \Phi e_n] = [e_3 + \psi_4 e_2, \Phi e_n] \\
\theta &= \psi_4[e_2, e_n] + \varphi_{n-1}[e_3, e_{n-1}] = (\psi_4 + \varphi_{n-1}) e_1 \\
&\Rightarrow \psi_4 = -\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

□

5.3 Derivace $\mathfrak{n}$

5.3.1 Obecná derivace

Opět aplikujeme postup použitý ve větě 3.3.1. Zároveň využijeme definiční vlastnost derivace, díky které nám (stejně jako u automorfismů) stačí uvažovat působení derivace D na vektory e_{n-2}, e_{n-1} a e_n a zbytek už je jednoznačně určen.

Věta 5.3.1. Obecná derivace je jednoznačně určena třemi vektory v tomto tvaru:

$$\begin{aligned} De_n &= \alpha e_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i \\ De_{n-1} &= \beta e_{n-1} + \sum_{i=1}^{3} b_i e_i - a_{n-1} e_4 \\ De_{n-2} &= [(5-n)\alpha + 2\beta] e_{n-2} + \sum_{i=4}^{n-3} c_i e_i + c_2 e_2 + c_1 e_1 \ , \end{aligned}$$

kde a_i, b_j, c_k jsou čísla z tělesa.

5.3.2 Vnitřní derivace

Uvedeme zde seznam nenulových čísel (a_i, b_j, c_k) pro každou vnitřní derivaci:

$$\begin{aligned} ad_{e_2} &: \quad a_1 = 1 \\ ad_{e_3} &: \quad b_1 = 1 \\ ad_{e_4} &: \quad a_2 = 1 \\ ad_{e_k} &: \quad a_{k-1} = 1 \qquad 5 \le k \le n-2 \\ ad_{e_{n-1}} &: \quad a_3 = 1 \\ ad_{e_n} &: \quad b_3 = -1, c_{n-3} = -1 \end{aligned}$$

5.3.3 Vnější derivace

Věta 5.3.2. Obecný reprezentant třídy ekvivalence vnější derivace je určen svým působením na vektory e_n, e_{n-1} a e_{n-2}:

$$\begin{aligned} De_n &= \alpha e_n + a_{n-1} e_{n-1} + a_{n-2} e_{n-2} \\ De_{n-1} &= \beta e_{n-1} - a_{n-1} e_4 + b_2 e_2 \\ De_{n-2} &= [(5-n)\alpha + 2\beta] e_{n-2} + \sum_{i=4}^{n-3} c_i e_i + c_2 e_2 + c_1 e_1 \ , \end{aligned}$$

kde a_i, b_j, c_k jsou čísla z tělesa.

Nyní klasifikujeme derivaci vzhledem k transformacím pomocí automorfismů a přičítání vnitřních derivací.

Poznámka 5.3.3. Derivace a proměnné vzniklé po transformaci budeme opět značit tildou. Derivace, jež zde uvedeme budou symbolizovat třídy ekvivalence reprezentované derivací z předchozí věty.

Dále zřejmě při transformaci stačí zjistit jen působení derivace na $\tilde{e}_n$, $\tilde{e}_{n-1}$ a $\tilde{e}_{n-2}$.

1. $\alpha \neq 0$

Vydělíme derivaci α.

Tvrzení 5.3.4. Proměnné $c_1, c_2, c_4, \ldots, c_{n-3}$ jdou odtransformovat.

Důkaz. Postupně odtransformujeme $c_{n-3}, \ldots, c_4$, přičemž nově vytvořené nuly další transformace nenaruší. (Jde vlastně o důkaz neúplnou matematickou indukcí)

Automorfismus pro k-tý krok bude vypadat takto:

$$\begin{aligned}\tilde{e}_n &= e_n \\ \tilde{e}_{n-1} &= e_{n-1} \\ \tilde{e}_{n-2} &= e_{n-2} - \frac{c_{n-2-k}}{k} e_{n-2-k} \quad k \in \widehat{n-6}\end{aligned}$$

- $k = 1$

$$D\tilde{e}_n = De_n, \qquad D\tilde{e}_{n-1} = De_{n-1} \ ,$$

protože případné nově vzniklé nenuly odstraníme odečtením vnitřní derivace.

$$\begin{aligned}D\tilde{e}_{n-2} &= De_{n-2} - c_{n-3}De_{n-3} \\ &= [(5-n) + 2\beta]e_{n-2} + c_{n-3}e_{n-3} - c_{n-3}[(6-n) + 2\beta]e_{n-3} + \ldots \\ &= [(5-n) + 2\beta]\tilde{e}_{n-2} + c_{n-3}e_{n-3} - c_{n-3}[(6-n) - (5-n)]e_{n-3} + \ldots \\ &= [(5-n) + 2\beta]\tilde{e}_{n-2} + \sum_{i=4}^{n-4} \tilde{c}_i e_i + \tilde{c}_2 e_2 + \tilde{c}_1 e_1\end{aligned}$$

Členy, které pro nás nejsou momentálně důležité jsou zahrnuty v „...“.

- $k \to k+1 \qquad k \in \widehat{n-7}$

Převedeme derivaci na tvar, kde

$$De_{n-2} = [(5-n)\alpha + 2\beta]e_{n-2} + \sum_{i=4}^{n-3-k} c_i e_i + c_2 e_2 + c_1 e_1 \ ,$$

a aplikujeme automorfismus. Opět platí, že

$$D\tilde{e}_n = De_n, \qquad D\tilde{e}_{n-1} = De_{n-1}$$

$$\begin{aligned}D\tilde{e}_{n-2} =& De_{n-2} - \frac{c_{n-3-k}}{k+1} De_{n-3-k} \\ =& [(5-n) + 2\beta]e_{n-2} - \frac{c_{n-3-k}}{k+1}[(k+6-n) - (k+1) + 2\beta]e_{n-3-k} + \ldots \\ =& [(5-n) + 2\beta]\tilde{e}_{n-2} - \frac{c_{n-3-k}}{k+1}[k+1-(k+1)]e_{n-3-k} + \ldots \\ =& [(5-n) + 2\beta]\tilde{e}_{n-2} + \sum_{i=4}^{n-3-k-1} \tilde{c}_i e_i + \tilde{c}_2 e_2 + \tilde{c}_1 e_1 \ .\end{aligned}$$

Stejným způsobem se ukáže, že transformace

$$\begin{aligned}\tilde{e}_n &= e_n\\ \tilde{e}_{n-1} &= e_{n-1}\\ \tilde{e}_{n-2} &= e_{n-2} - \frac{c_2}{n-5}e_2 - \frac{c_1}{n-4}e_1\end{aligned}$$

nám odstraní c_2 a c_1. $\square$

Využitím předchozí věty získáme derivaci ve tvaru:

$$\begin{aligned}De_n &= \alpha e_n + a_{n-1}e_{n-1} + a_{n-2}e_{n-2}\\ De_{n-1} &= \beta e_{n-1} - a_{n-1}e_4 + b_2e_2\\ De_{n-2} &= [(5-n)\alpha + 2\beta]e_{n-2}\end{aligned}$$

(a) $\beta \notin \{0, 1, \frac{n-4}{2}\}$
Sérií tří automorfismů, jenž nemění De_{n-2} odstraníme zbylé proměnné mimo diagonálu.
Odstranění a_{n-1}:

$$\begin{aligned}\tilde{e}_n &= e_n - \frac{a_{n-1}}{1-\beta}e_{n-1}\\ \tilde{e}_{n-1} &= e_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{1-\beta}e_4\\ \tilde{e}_{n-2} &= e_{n-2}\end{aligned}$$

Odstranění a_{n-2}:

$$\begin{aligned}\tilde{e}_n &= e_n - \frac{a_{n-2}}{n-4-2\beta}e_{n-2}\\ \tilde{e}_{n-1} &= e_{n-1}\\ \tilde{e}_{n-2} &= e_{n-2}\end{aligned}$$

Odstranění b_2:

$$\begin{aligned}\tilde{e}_n &= e_n\\ \tilde{e}_{n-1} &= e_{n-1} - \frac{b_2}{\beta}e_2\\ \tilde{e}_{n-2} &= e_{n-2}\end{aligned}$$

(b) $\beta = 0$
Nejde odstranit b_2, ale pomocí škálování se nám ho povede změnit na 1.

$$\begin{aligned}\tilde{e}_n &= e_n\\ \tilde{e}_{n-1} &= b_2e_{n-1}\end{aligned}$$

(c) $\beta = 1$

Nejde odstranit a_{n-1}, ale pomocí škálování se nám ho povede změnit na 1.

$$\begin{aligned}\tilde{e}_n &= a_{n-1}e_n\\ \tilde{e}_{n-1} &= e_{n-1}\end{aligned}$$

(d) $\beta = \frac{n-4}{2}$

Nejde odstranit a_{n-2}. Zde se začínají výsledky lišit v závislosti na tělesu a dimenzi. Pokud je těleso $\mathbb{C}$ nebo je dimenze lichá, povede se nám a_{n-2} naškálovat na 1. V opačném případě se nám nepovede změnit znaménko.

$$\begin{aligned}\tilde{e}_n &= c^{\frac{1}{4-n}}e_n\\ \tilde{e}_{n-1} &= e_{n-1}\ ,\end{aligned}$$

kde $c = a_{n-2}$ pro $\mathbb{C}$ nebo lichou dimenzi a $c = |a_{n-2}|$ v ostatních případech.

2. $\alpha = 0 \Rightarrow \beta \neq 0$

Vydělíme derivaci β.

Povede se nám odstranit a_{n-1}, a_{n-2} a b_2 pomocí dvou automorfismů.

Odstranění a_{n-1} a a_{n-2}:

$$\begin{aligned}\tilde{e}_n &= e_n - a_{n-1}e_{n-1} - a_{n-2}e_{n-2}\\ \tilde{e}_{n-1} &= e_{n-1} + a_{n-1}e_4\\ \tilde{e}_{n-2} &= e_{n-2}\end{aligned}$$

Odstranění b_2:

$$\begin{aligned}\tilde{e}_n &= e_n\\ \tilde{e}_{n-1} &= e_{n-1} - b_2e_2\\ \tilde{e}_{n-2} &= e_{n-2}\end{aligned}$$

c_i se nám nepovede odstranit. Ještě se ho pokusíme naškálovat. Ukazuje se, že se nám povede naškálovat jeden koeficient. Pokud jsme nad $\mathbb{C}$ nebo se koeficient nachází na lichém místě v posloupnosti $\{c_{n-3}, c_{n-4}, \dots, c_4, c_2, c_1\}$, můžeme ho naškálovat na 1, v opačném případě se nám nepovede změnit znaménko.

5.4 Řešitelné rozšíření $\mathfrak{s}$

5.4.1 Rozšíření o 1 vektor $(\dim \mathfrak{s} = n+1)$

Rozšíření vytvoříme přidáním vektoru f_1, jehož komutační relace nadefinujeme přidružením vnější derivace.

Věta 5.4.1. Existuje 5 typů řešitelné algebry $\mathfrak{s}$, $\dim \mathfrak{s} = n+1$ s nilradikálem $\mathfrak{n}$, který má komutační relace (5.1):

1. A_1 v (2.3) je diagonální.

$$\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= (\alpha + 2\beta)e_1 \\
[f_1, e_2] &= 2\beta e_2 \\
[f_1, e_3] &= (\alpha + \beta)e_3 \\
[f_1, e_k] &= ((3-k)\alpha + 2\beta)e_k \qquad 4 \le k \le n-2 \\
[f_1, e_{n-1}] &= \beta e_{n-1} \\
[f_1, e_n] &= \alpha e_n
\end{aligned}$$

Navzájem neizomorfní algebry tohoto typu jsou:

$\mathfrak{s}_{n+1,1}(\beta)$: $\alpha = 1, \beta \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{n-5}{2}\}$

$$DS = [n+1, n, n-3, 0] \quad CS = [n+1, n] \quad US = [0]$$

$\mathfrak{s}_{n+1,2}$: $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2}$

$$DS = [n+1, n, n-3, 0] \quad CS = [n+1, n] \quad US = [1]$$

$\mathfrak{s}_{n+1,3a}$: $\alpha = 1, \beta = 0$

$$DS = [n, n-1, n-4, 0] \quad CS = [n+1, n-1] \quad US = [0]$$

$$e_{n-2} \in \mathfrak{s}^2_{n+1,3a}$$

$\mathfrak{s}_{n+1,3b}$: $\alpha = 1, \beta = \frac{n-5}{2}$

$$DS = [n, n-1, n-4, 0] \quad CS = [n+1, n-1] \quad US = [0]$$

$$e_{n-1} \in \mathfrak{s}^2_{n+1,3b}$$

$\mathfrak{s}_{n+1,4}$: $\alpha = 0, \beta = 1$

$$DS = [n+1, n-1, 1, 0] \quad CS = [n+1, n-1] \quad US = [0]$$

2. A_1 v (2.3) není diagonální. Její diagonála je určena $\alpha = 1, \beta = 0$.

$\mathfrak{s}_{n+1,5}$:

$$\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= e_1 \\
[f_1, e_2] &= \theta \\
[f_1, e_3] &= e_3 + e_1 \\
[f_1, e_k] &= (3-k)e_k \qquad 4 \le k \le n-2 \\
[f_1, e_{n-1}] &= e_2 \\
[f_1, e_n] &= e_n
\end{aligned}$$

$$DS = [n+1, n-1, n-4, 0] \quad CS = [n+1, n-1] \quad US = [0]$$

3. A_1 v (2.3) není diagonální. Její diagonála je určena $\alpha = 1, \beta = 1$.

   $\mathfrak{s}_{n+1,6}$**:**

$$\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= 3e_1 \\
[f_1, e_2] &= 2e_2 \\
[f_1, e_3] &= 2e_3 - e_2 \\
[f_1, e_k] &= (5-k)e_k \qquad 4 \le k \le n-2 \\
[f_1, e_{n-1}] &= e_{n-1} - e_4 \\
[f_1, e_n] &= e_n + e_{n-1}
\end{aligned}$$

$$DS = [n+1, n, n-3, 0] \quad CS = [n+1, n] \quad US = [0]$$

4. A_1 v (2.3) není diagonální. Její diagonála je určena $\alpha = 1, \beta = \frac{n-4}{2}$.

   $\mathfrak{s}_{n+1,7}(\epsilon)$**:**

$$\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= (n-3)e_1 \\
[f_1, e_2] &= (n-4)e_2 \\
[f_1, e_3] &= (1 + \frac{n-4}{2})e_3 \\
[f_1, e_k] &= (n-1-k)e_k \qquad 4 \le k \le n-2 \\
[f_1, e_{n-1}] &= \frac{n-4}{2}e_{n-1} \\
[f_1, e_n] &= e_n + \epsilon e_{n-2}
\end{aligned}$$

$$\epsilon = \begin{cases} \pm 1 & \text{nad } \mathbb{R} \wedge \dim \mathfrak{n} \text{ je sudá} \\ 1 & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

$$DS = [n+1, n, n-3, 0] \quad CS = [n+1, n] \quad US = [0]$$

5. A_1 v (2.3) není diagonální. Její diagonála je určena $\alpha = 0, \beta = 1$.

   $\mathfrak{s}_{n+1,8}(a_1, \ldots, a_{n-4})$**:**

$$\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= 2e_1 \\
[f_1, e_2] &= 2e_2 + a_1 e_1 \\
[f_1, e_3] &= e_3 \\
[f_1, e_k] &= 2e_k + \sum_{i=4}^{k-1} a_{k-i} e_i + a_{k-3} e_2 + a_{k-2} e_1 \qquad 4 \le k \le n-2 \\
[f_1, e_{n-1}] &= e_{n-1} \\
[f_1, e_n] &= \theta
\end{aligned}$$

   Kde a_i splňují tyto podmínky:

(a) $\exists i_0 \in \widehat{n-4}, a_{i_0} \neq 0$
(b) Nad $\mathbb{C}$ je první nenulové $a_i = 1$
(c) Nad $\mathbb{R}$ první $a_{2k-1} = 1$ nebo pokud jsou nulové všechny tak první $a_{2k} = \pm 1$

$$DS = [n+1, n-1, 1, 0] \quad CS = [n+1, n-1] \quad US = [0]$$

5.4.2 Rozšíření o 2 vektory ($\dim \mathfrak{s} = n+2$)

Stejně jako v předchozích případech nemůžeme přidat více vektorů, protože pak by přidávaný soubor vnějších derivací nebyl lineárně nil-nezávislý.

Soubor derivací (D_1, D_2) si pomocí jejich lineární kombinace pozměníme tak, aby D_1 měla na diagonále parametry $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -1$ a D_2 měla $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$.

Z předchozích výpočtů víme, že D_1 lze pomocí změny báze v $\mathfrak{n}$ zdiagonalizovat. Učiníme tak a zjistíme, co nám to udělalo s D_2.

Jelikož $[D_1, D_2]$ musí být vnitřní derivace, musí pro ni platit:

$$\tilde{b}_2 = \tilde{a}_{n-1} = \tilde{a}_{n-2} = \tilde{c}_i = 0 \quad (i \in \widehat{n-4}) \quad \wedge \quad \tilde{b}_3 = \tilde{c}_{n-3}$$

Spočítáme teď, co nám z těchto podmínek plyne. (Tildou značíme koeficienty komutátoru, bez tildy koeficienty D_2.)

$$\begin{aligned}
0 = \tilde{b}_2 &= b_2(-2-(-1)) = -b_2 \\
\tilde{b}_3 &= b_3(0-(-1)) = b_3 = 0 \\
&\Rightarrow \tilde{c}_{n-3} = \tilde{b}_3 = 0 \\
&\Rightarrow b_2 = 0 \\
0 = \tilde{c}_1 &= c_1(1-2+(n-5)+2) = c_1(n-4) \\
0 = \tilde{c}_2 &= c_2(-2+(n-5)+2) = c_2(n-5) \\
0 = \tilde{c}_k &= c_k(3-k-2+(n-5)+2) = c_k(n-2-k) \qquad 4 \leq k \leq n-3 \\
&\Rightarrow \forall i \in \widehat{n-3} \quad c_i = 0 \\
0 = \tilde{a}_{n-1} &= a_{n-1}(-1-1) = -2a_{n-1} \\
0 = \tilde{a}_{n-2} &= a_{n-2}(5-n-2-1) = (3-n)a_{n-2} \\
&\Rightarrow a_{n-1} = a_{n-2} = 0
\end{aligned}$$

Takže D_2 je také diagonální. Opět přejdeme k lineární kombinaci, kde je vždy buď α, nebo β rovno nule.

Zbývá nám určit $[f_1, f_2]$. Z teorie víme, že $[f_1, f_2] = \gamma e_1$. Po následující změně báze spolu budou f_1, f_2 komutovat a ostatní komutační relace se nezmění.

$$\tilde{f}_1 = f_1, \qquad \tilde{f}_2 = f_2 - \gamma e_1$$

Věta 5.4.2. Existuje právě jedna řešitelná algebra $\mathfrak{s}_{n+2}$, $\dim \mathfrak{s} = n + 2$ s nilradikálem $\mathfrak{n}$, který má komutační relace (4.1). V bázi $(e_1, \ldots, e_n, f_1, f_2)$ mají vektory f_1, f_2 komutační relace:

$$
\begin{aligned}
[f_1, e_1] &= e_1 & [f_2, e_1] &= 2e_1 & \\
[f_1, e_2] &= \theta & [f_2, e_2] &= 2e_2 & \\
[f_1, e_3] &= e_3 & [f_2, e_3] &= e_3 & \\
[f_1, e_k] &= (3-k)e_k & [f_2, e_k] &= 2e_k & \quad 4 \leq k \leq n-2 \\
[f_1, e_{n-1}] &= \theta & [f_2, e_{n-1}] &= e_{n-1} & \\
[f_1, e_n] &= e_n & [f_2, e_n] &= \theta & \\
[f_1, f_2] &= \theta & & &
\end{aligned}
$$

Dimenze charakteristických sérií:

$$DS = [n+2, n, n-3, 0] \qquad CS = [n+2, n] \qquad US = [0]$$

Kapitola 6

Casimirovy invarianty

6.1 Nahlédnutí do teorie

Casimirovy invarianty jsou význačné funkce na duálním prostoru k Lieově algebře. Zapisují se jako výrazy v bazických funkcionálech na duálu $\mathfrak{g}^*$, které díky reflexivitě ($\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$) ztotožňujeme s bazickými vektory $\mathfrak{g}$, a jsou řešením specifické diferenciální rovnice. Pro nilpotentní, poloprosté a některé další třídy algeber lze nalézt funkcionálně nezávislou bázi invariantů v polynomiálním tvaru [1, 2]. Více podrobností se o nich lze dovědět například v [11].

Definice 6.1.1. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra se strukturními koeficienty ${c^i}_{jk}$ ($[x_j, x_k] = {c^i}_{jk} x_i$, kde $(x_1, \ldots, x_n)$ je báze).

Definujme tyto diferenciální operátory:

$$\hat{X}_k := x_i {c^i}_{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} = x_i {c^i}_{kj} \partial_{x_j} \tag{6.1}$$

Každou funkci $I = I(x_1, \ldots, x_n)$, která řeší rovnici

$$\forall k \in \hat{n}, \quad \hat{X}_k I(x_1, \ldots, x_n) = 0 \ , \tag{6.2}$$

nazveme **invariant kopřidružené reprezentace**, neboli **zobecněný Casimirův invariant**. Je-li tato funkce polynom, nazveme ji (pravý) **Casimirův invariant**.

Pravé Casimirovy invarianty jsou význačné tím, že jednoznačně odpovídají prvkům z centra obalové algebry $\mathfrak{g}$, tzv. Casimirovým operátorům. Více viz [6]. Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme označovat slovem Casimirův invariant i případné zobecněné invarianty.

Věta 6.1.2. Pokud $f_1, \ldots, f_l$ řeší (6.2), pak libovolná funkce $F = F(f_1, \ldots, f_l)$ také řeší (6.2).

Důkaz.

$$\hat{X}_k F(f_1, \dots, f_l) = \sum_{i=1}^{l} \partial_{f_i} F \cdot \hat{X}_k f_i = \sum_{i=1}^{l} \partial_{f_i} F \cdot 0 = 0$$

□

Poznámka 6.1.3. Teorie řešení tohoto typu diferenciálních rovnic nám říká, že existuje konečně mnoho funkcionálně nezávislých řešení (6.2) a jakékoli další řešení lze vyjádřit jako jejich funkci.

Metoda, jak je najít je popsána v následující sekci.

6.2 Metoda charakteristik

Pokud to nebude potřeba zdůraznit, budeme používat zjednodušený zápis

$$f(\vec{x}) := f(x_1, \dots, x_n) \ .$$

Věta 6.2.1. Metoda charakteristik

Mějme diferenciální rovnici ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(\vec{x}) \partial_{x_i} f(\vec{x}) = 0 \ . \tag{6.3}$$

K této rovnici přidružíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \forall j \in \hat{n}, \quad & \dot{\alpha}_j(t) = u_j(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \\ & \alpha_j(0) = x_j \ . \end{aligned} \tag{6.4}$$

Zvolíme jednu funkci α_s a číslo c (bez újmy na obecnosti nechť $s = n$). Z rovnice

$$\alpha_n(t; x_1, \dots, x_n) = c \tag{6.5}$$

vyjádříme $t = t(x_1, \dots, x_n)$ a dosadíme do zbylých α_i.

Tím jsme získali $n - 1$ nezávislých invariantů

$$f_i(\vec{x}) := \alpha_i(t(\vec{x}))$$

a každé další řešení je funkcí závislou na $f_1, \dots, f_{n-1}$.

Tento postup samozřejmě může selhat, pokud nedokážeme vyřešit soustavu rovnic (6.4) nebo implicitní rovnici (6.5).

Nyní stačí říci jak postupovat, když máme soustavu takovýchto rovnic:

Vezmeme $\hat{X}_1$ a aplikujeme na něj postup ve větě 6.2.1 (dále jen metodu charakteristik). Tím dostaneme $n - 1$ invariantů $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$.

Vezmeme si $\hat{X}_2$. Pokud má platit

$$\hat{X}_1 I(\vec{x}) = 0 \qquad \hat{X}_2 I(\vec{x}) = 0 \ ,$$

musí být $I = I(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) =: I(\vec{\alpha})$.

Přistupme tedy k rovnici

$$0 = \hat{X}_2 I(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{X}_2 \alpha_i) \partial_{\alpha_i} I$$

Pokud se nám podaří vyjádřit $\hat{X}_2 \alpha_i$ jako $u_i(\vec{\alpha})$, dostaneme rovnici ve tvaru (6.3) a můžeme opět uplatnit metodu charakteristik.

Naštěstí operátory definované pomocí rovnice (6.1) jdou tak vyjádřit vždy.

Postup opakujeme pro $\hat{X}_k$.

6.3 Casimirovy invarianty $\mathfrak{n}$

Postup uvedený v sekci 6.2 je přímočarý, takže postup spíše naznačíme a pak napíšeme výsledek.

Věta 6.3.1. Casimirovy invarianty $\mathfrak{n}$, $\dim \mathfrak{n} = n$ jsou:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= e_1 \\ \xi_k &= \frac{(-1)^k k}{(k+1)!} e_2^{k+1} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{l!} e_1^{k-l} e_2^l e_{k+3-l} \qquad k \in \widehat{n-5} \end{aligned}$$

Důkaz. Pomocí diferenciálních operátorů $\hat{E}_2$, $\hat{E}_3$ a $\hat{E}_{n-1}$ získaných z rovnice (6.1) určíme, že $f = f(e_1, e_2, e_4, \ldots, e_{n-2})$. Zbyde nám pouze jeden netriviální operátor a to $\hat{E}_n$. Nyní použijeme metodu charakteristik a dostaneme výsledek, který už jenom upravíme vynásobením ξ_0. $\square$

6.4 Casimirovy invarianty řešitelných rozšíření

6.4.1 Casimirovy invarianty $\mathfrak{s}_{6,k}$ a $\mathfrak{s}_7$

Ručně vyřešíme a zjistíme, že jediné algebry, které mají nějaké invarianty, jsou:

$\mathfrak{s}_{6,3}$:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= e_1 \\ \chi_2 &= e_1^2 f_1 - e_1 e_2 e_5 + 2 e_1 e_2 e_4 - e_2^2 e_3 \end{aligned}$$

$\mathfrak{s}_7$:

$$\chi_1 = \frac{(f_1 - 2f_2) e_1^2 + 2 e_1 e_3 e_4 - e_1 e_2 e_5 - e_2^2 e_3}{e_1^2}$$

6.4.2 Casimirovy invarianty $\mathfrak{s}_{n+1,k}$

Pro $n \geq 6$ si sestavíme diferenciální operátory $\hat{E}_1, \ldots, \hat{E}_n, \hat{F}$. Až na algebru $\mathfrak{s}_{n+1,2}$ dokážeme odstranit pomocí $\hat{E}_1$ závislost invariantu na f, neboť

$$\hat{E}_1 = (\alpha + 2\beta) e_1 \partial_f \ .$$

Pro $\mathfrak{s}_{n+1,2}$ je $\hat{E}_1 = 0$. Vezmeme si operátor $(e_2 \cdot \hat{E}_2 - e_1 \cdot \hat{E}_4)$. Zřejmě pro něj musí platit, že

$$0 = (e_2 \cdot \hat{E}_2 - e_1 \cdot \hat{E}_4) I = (e_2^2 - 2 e_1 e_4) \partial_f I \ ,$$

takže I také nezávisí na f.

Nyní můžeme ze všech diferenciálních operátorů „odříznout“ člen s ∂_f, protože efektivně nijak nepůsobí. Tím nám prvních n operátorů přejde na tvar shodný s tvarem ze sekce 6.3. Odtud víme, že invarianty nezávisí na e_3, e_{n-1} a e_n. A invariant I musí být funkcí $\xi_0, \ldots, \xi_{n-5}$.

Zbývá nám vyřešit poslední rovnice

$$0 = \hat{F} I(\xi_0, \ldots, \xi_{n-5}) \ .$$

Díky tomu, že v I nevystupují e_3, e_{n-1} a e_n, nezávisí výsledek na komutačních relací $[f, e_3]$, $[f, e_{n-1}]$ a $[f, e_n]$. Tím se nám výsledky pro některé třídy $\mathfrak{s}_{n+1,k}$ spojí.

Další postup je celkem přímočarý. Podrobněji rozebereme pouze případ $\mathfrak{s}_{n+1,8}$, který není tak jednoduchý.

Věta 6.4.1. Řešitelná rozšíření typu $\mathfrak{s}_{n+1,k}$ mají $n-5$ funkcionálně nezávislých zobecněných Casimirových invariantů, které vyjádříme jako funkce invariantů $\mathfrak{n}$ uvedených ve větě 6.3.1.

1. $\mathfrak{s}_{n+1,1}(\beta)$, $\mathfrak{s}_{n+1,3a}$, $\mathfrak{s}_{n+1,3b}$, $\mathfrak{s}_{n+1,5}$, $\mathfrak{s}_{n+1,6}$, $\mathfrak{s}_{n+1,7}(\epsilon)$ a $\mathfrak{s}_{6+1,9}$

$$\chi_k = \frac{\xi_k}{\xi_0^{(1+k)\frac{2\beta}{1+2\beta}}}, \qquad k \in \widehat{n-5}$$

   Pro $\mathfrak{s}_{n+1,3a}$ a $\mathfrak{s}_{n+1,5}$ je $\beta = 0$, pro $\mathfrak{s}_{n+1,3b}$ je $\beta = \frac{n-5}{2}$, pro $\mathfrak{s}_{n+1,6}$ a $\mathfrak{s}_{6+1,9}$ je $\beta = 1$ a nakonec pro $\mathfrak{s}_{n+1,7}(\epsilon)$ je $\beta = \frac{n-4}{2}$.

2. $\mathfrak{s}_{n+1,2}$

$$\chi_0 = \xi_0$$
$$\chi_k = \frac{\xi_k^2}{\xi_1^{k+1}}, \qquad 2 \leq k \leq n-6$$

3. $\mathfrak{s}_{n+1,4}$

$$\chi_k = \frac{\xi_k}{\xi_0^{k+1}}, \qquad k \in \widehat{n-5}$$

4. $\mathfrak{s}_{n+1,8}(a_1,\ldots,a_{n-4})$

$$\chi_k = \sum_{q=0}^{[\frac{k+1}{2}]}(-1)^q\frac{(\ln\xi_0)^q}{2^q q!}\Big(\sum_{i_1+\ldots+i_q=k+1} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_q} + \sum_{j+i_1+\ldots+i_q=k+1} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_q}\frac{\xi_{j-1}}{\xi_0^j}\Big)$$
$$k \in \widehat{n-5}$$

Jaký je tedy postup u $\mathfrak{s}_{n+1,8}(a_1,\ldots,a_{n-4})$? Aby se nám lépe psaly výrazy zavedeme si značení

$$x_2 := e_1,\ x_3 := e_2,\ x_k := e_k \qquad k \geq 4\ .$$

$\hat{F}$ v tomto značení má tvar

$$\hat{F} = 2\sum_{i=2}^{n-2} x_i\partial_{x_i} + \sum_{l=3}^{n-2}\sum_{i=2}^{l-1} a_{l-i}x_i\partial_{x_l}\ ,$$

jenž si upravíme

$$\hat{F} = 2\sum_{i=2}^{n-2} x_i\partial_{x_i} + \sum_{i=1}^{n-4} a_i \sum_{j=2+i}^{n-3} x_{j-i}\partial_{x_j}\ ,$$

abychom mohli napsat $\hat{F}$ jako lineární kombinaci operátorů

$$\hat{D} := \sum_{i=2}^{n-2} x_i\partial_{x_i}$$
$$\hat{A}_i := \sum_{j=2+i}^{n-3} x_{j-i}\partial_{x_j} \qquad i \in \widehat{n-3}\ .$$

Teď vypočítáme jak působí operátory $\hat{D}$ a $\hat{A}_i$ na ξ_k:

$$\hat{D}\xi_k = (k+1)\xi_k$$
$$\hat{A}_i\xi_k = \begin{cases} 0 & \text{pro k} = 0 \vee \text{i} \in \{1,\text{k}\} \vee \text{i} \geq \text{k}+2 \\ \xi_0^{k+1} & i = k+1 \\ \xi_0^i\xi_{k-i} & 2 \leq i \leq k-1 \end{cases}$$

Nyní použijeme metodu charakteristik.

$$\hat{F}I(\xi_0,\ldots,\xi_{n-4}) = \sum_{k=0}^{n-4}(\hat{F}\xi_k)\partial_{\xi_k}I$$

Funkce na pravé straně rovnic (6.4) jsou právě $\hat{F}\xi_k$.

Dostaneme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
\dot\chi_0(t) &= 2\chi_0 \\
\dot\chi_k(t) &= 2(k+1)\chi_k + \sum_{i=2}^{k-1} a_i \chi_0^i \chi_{k-i} + a_{k+1}\chi_0^{k+1} \qquad k \in \widehat{n-5} \\
\chi_i(0) &= \xi_i \qquad 0 \le i \le n-5
\end{aligned}$$

Indukcí dokážeme, že řešením této soustavy rovnic je

$$\begin{aligned}
\chi_k(t) = \sum_{q=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{t^q}{q!}\Big(& \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_q=k+1} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_q}\xi_0^{k+1} + \\
+ & \sum_{j+i_1+i_2+\ldots+i_q=k+1} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_q}\xi_{j-1}\xi_0^{k+1-j}\Big)e^{2(k+1)t} \\
& 0 \le k \le n-5, \quad 2 \le j, i_1, \ldots, i_q \ .
\end{aligned}$$

Pro $k=0$ je to zřejmé. Předpokládejme platnost tvrzení pro $0 \le l \le k-1$. Řešíme rovnici

$$\begin{aligned}
\dot\chi_k(t) &= 2(k+1)\chi_k + \sum_{i=2}^{k-1} a_i \chi_0^i \chi_{k-i} + a_{k+1}\chi_0^{k+1} \\
\chi_k(0) &= \xi_k \ .
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Poznámka 6.4.2. Řešení rovnice $\dot f(t) = af(t) + P(t)e^{at}$ s počáteční podmínkou $f(0)=c$ je $f(t) = (c + \int_0^t P)e^{at}$.

Využijeme indukční předpoklad a dosadíme do rovnice (6.6). Vznikne nám diferenciální rovnice ve tvaru zmiňovaném v poznámce, kterou vyřešíme.

$$\chi_k = e^{2(k+1)t}\Bigg(\xi_k + \sum_{i=2}^{k-1}\int dt\ a_i\xi_0^i \sum_{q=0}^{\left[\frac{k-i+1}{2}\right]} \frac{t^q}{q!}\Big(\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_q=k+1-i} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_q}\xi_0^{k+1-i} +$$

$$+ \sum_{j+i_1+i_2+\ldots+i_q=k+1-i} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_q}\xi_{j-1}\xi_0^{k+1-j-i}\Big) + a_{k+1}\xi_0^{k+1}t\Bigg)$$

$$= e^{2(k+1)t}\Bigg(\xi_k + \sum_{i=2}^{k-1}\sum_{q=0}^{\left[\frac{k-i+1}{2}\right]} \frac{t^{q+1}}{(q+1)!}\Big(\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_q=k+1-i} a_i a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_q}\xi_0^{k+1} +$$

$$+ \sum_{j+i_1+i_2+\ldots+i_q=k+1-i} a_i a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_q}\xi_{j-1}\xi_0^{k+1-j}\Big) + a_{k+1}\xi_0^{k+1}t\Bigg)$$

$$= e^{2(k+1)t}\Bigg(\xi_k + \sum_{i=2}^{k-1}\sum_{q=1}^{\left[\frac{k-i+3}{2}\right]} \frac{t^{q}}{q!}\Big(\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_{q-1}=k+1-i} a_i a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_{q-1}}\xi_0^{k+1} +$$

$$+ \sum_{j+i_1+i_2+\ldots+i_{q-1}=k+1-i} a_i a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_{q-1}}\xi_{j-1}\xi_0^{k+1-j}\Big) + a_{k+1}\xi_0^{k+1}t\Bigg)\ .$$

Teď zaměníme sumy a prozkoumáme vzniklý výraz.

$$\chi_k = e^{2(k+1)t}\Bigg(\xi_k + \sum_{q=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}\sum_{i=2}^{k-2q+3} \frac{t^{q}}{q!}\Big(\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_{q-1}+i=k+1} a_i a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_{q-1}}\xi_0^{k+1} +$$

$$+ \sum_{j+i_1+i_2+\ldots+i_{q-1}+i=k+1} a_i a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_{q-1}}\xi_{j-1}\xi_0^{k+1-j}\Big) + a_{k+1}\xi_0^{k+1}t\Bigg)\ .$$

Jelikož

$$(q-1)2 \le i_1 + i_2 + \ldots + i_{q-1} = k+1-i \Rightarrow i \le k+3-2q\ ,$$

jsou v pořádku meze. Po začlenění výrazů ξ_k a $a_{k+1}\xi_0^{k+1}t$, dostaneme výsledek v požadovaném tvaru

$$\chi_k = \sum_{q=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{t^q}{q!}\Big(\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_q=k+1} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_q}\xi_0^{k+1} +$$

$$+ \sum_{j+i_1+i_2+\ldots+i_q=k+1} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_q}\xi_{j-1}\xi_0^{k+1-j}\Big) e^{2(k+1)t}\ .$$

Nyní vyjádříme t z rovnice $1 = \xi_0(t) = \xi_0 e^{2t}$ a po dosazení do zbylých funkcí χ_k nám vyjde hledaný výsledek.

6.4.3 Casimirovy invarianty $\mathfrak{s}_{n+2}$

Postup je opět přímočarý. Naznačíme jenom kroky, aniž bychom se o nich nějak výrazně rozepisovali. Jediné v čem se tento případ liší od předchozího je, že máme dva operátory $\hat{F}_1$ a $\hat{F}_2$.

1. Pomocí operátoru $(e_4 \cdot \hat{E}_1 + e_2 \cdot \hat{E}_2 - e_1 \cdot \hat{E}_4)$ odstraníme závislost invariantu na f_2.

2. Pomocí operátoru $\hat{E}_1$ odstraníme závislost invariantu na f_1.

3. Nyní mají operátory $\hat{E}_1, \ldots, \hat{E}_n$ efektivně stejné tvary jako v sekci 6.3.

4. Zbývají nám dva operátory

$$\hat{F}_1 = e_1 \partial_{e_1} + \sum_{k=4}^{n-2} (3-k) e_k \partial_{e_k}$$

$$\hat{F}_2 = 2e_1 \partial_{e_1} + 2e_2 \partial_{e_2} + \sum_{k=4}^{n-2} 2e_k \partial_{e_k} \ .$$

   $\hat{F}_1$ máme předřešené ve větě 6.4.1. Pomocí ní, zjistíme, že invariant I závisí pouze na $\xi_1, \ldots, \xi_{n-5}$. Dál nám nezbude nic jiného, než metoda charakteristik, která nám dá výsledek uvedený v následující větě.

Věta 6.4.3. Řešitelná rozšíření $\mathfrak{s}_{n+2}$ mají $n-6$ funkcionálně nezávislých zobecněných Casimirových invariantů, které vyjádříme jako funkce invariantů $\mathfrak{n}$ uvedených ve větě 6.3.1:

$$\chi_k = \frac{\xi_{k+1}}{\xi_1^{\frac{k+2}{2}}} \qquad k \in \widehat{n-6}$$

Závěr

Klasifikovali jsme řešitelná rozšíření $\mathfrak{n}$. Zjistili jsme, že mohou mít dimenzi maximálně o dva větší. Rozšíření s dimenzí o dva větší je až na izomorfii právě jedno a pro rozšíření s dimenzí o jedna větší jsme vyčlenili osm skupin neizomorfních algeber, přičemž některé skupiny obsahují nespočetně mnoho neizomorfních tříd, které jsme odlišili pomocí parametrů.

Vypočítali jsme Casimirovy invarianty $\mathfrak{n}$ (je jich $n-4$ funkcionálně nezávislých) a jeho řešitelného rozšíření. Pro $\dim \mathfrak{n} \geq 6$ je jich $n-5$ pro rozšíření o jeden vektor a $n-6$ pro rozšíření o dva vektory.

Zjistili jsme, že řešitelná rozšíření pro $\dim \mathfrak{n} = 5$ mají jinou strukturu než ostatní a řešitelná rozšíření pro $\dim \mathfrak{n} \geq 6$ mají velmi podobnou strukturu jako v [9] a to včetně jejich Casimirových invariantů.

Literatura

[1] L. Abellanas and L. Martínez Alonso, *A general setting for Casimir invariants*, J. Math. Phys **16** (1975), 1580–1584.

[2] L. Abellanas and L. Martínez Alonso, *Invariants in enveloping algebras under the action of Lie algebras of derivations*, J. Math. Phys. **20** (1979), no. 3, 437–440.

[3] M. Fecko, *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, IRIS, Bratislava, 2004.

[4] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[5] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover Publications Inc., New York, 1979.

[6] A. A. Kyrillov, *Elements de la Théorie des Représentations*, Mir, Moscow, 1974.

[7] J. C. Ndogmo and P. Winternitz, *Generalized Casimir operators of solvable Lie algebras with abelian nilradicals*, J. Phys. A **27** (1994), no. 8, 2787–2800.

[8] J. C. Ndogmo and P. Winternitz, *Solvable Lie algebras with abelian nilradicals*, J. Phys. A **27** (1994), no. 2, 405–423.

[9] L. Šnobl and P. Winternitz, *A class of solvable Lie algebras and their Casimir invariants*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), 2687–2700.

[10] L. Šnobl and P. Winternitz, *All solvable extensions of a class of nilpotent Lie algebras of dimension n and degree of nilpotency n-1*, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009), 105201.

[11] J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz, and H. Zassenhaus, *Invariants of real low dimension Lie algebras*, J. Math. Phys **17** (1976), no. 6, 986–994.

[12] J. L. Rubin and P. Winternitz, *Solvable Lie algebras with Heisenberg ideals*, J. Phys. A **26** (1993), no. 5, 1123–1138.