České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Einsteinovy rovnice a de Sitterovo řešení

Ivo Petr

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

10. června 2006

Poděkování: Rád bych tímto poděkoval všem, kteří mi při mé práci jakkoliv pomohli. Především bych chtěl poděkovat svému školiteli, Prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc., za mnohé cenné rady a připomínky týkající se dané problematiky. Rád bych také zmínil Doc. RNDr. Jiřího Podolského, CSc., DSc., jemuž vděčím za poskytnutí potřebných materiálů.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 10.června 2006 ....

podpis

Název práce:
Einsteinovy rovnice a de Sitterovo řešení

Autor: Ivo Petr

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Tato práce si klade za cíl shrnout nejdůležitější poznatky o prostorech nenulové konstantní křivosti popisujících řešení Einsteinových polních rovnic s kosmologickou konstantou a nulovou pravou stranou. V první kapitole jsou proto v kostce shrnuty nejdůležitější geometrické vlastnosti těchto prostorů jako konformní plochost, možnost zanoření do plochého prostoru vyšší dimenze a jejich symetrie. V druhé kapitole je pak provedena konstrukce metriky de Sitterova řešení, jsou uvedena její různá vyjádření a znázornění de Sitterovy variety jako hyperkvadriky v plochém prostoru. Třetí kapitola pak pojednává o symetriích prostoročasu, geodetických křivkách a horizontech.

Klíčová slova: Einsteinovy polní rovnice, (anti)de Sitterovo řešení, Ricciho skalární křivost, Killingův vektor

Title:
Einstein's equations and de Sitter's solution

Author: Ivo Petr

Abstract: The aim of this work is to summarize key facts concerning spaces of nonzero constant curvature describing solutions of Einstein's field equations with cosmological constant and of zero right hand side. The first chapter therefore summarizes the most important geometrical properties of these spaces such as the ability to immerse them into the flat space of higher dimension, characteristics of conformal spaces or symmetries. In the second chapter we construct the metric of de Sitter's solution, introduce some other expressions of it and illustrate de Sitter's manifold as hypersurface in a flat space. The third chapter deals with symmetries of space-time, geodesics and horizons.

Key words: Einstein's field equations, (anti)de Sitter's solution, Ricci scalar curvature, Killing vector

Obsah

0.1 Obecná teorie relativity 5

1 Geometrické vlastnosti prostorů konstantní křivosti 7

1.1 Konformní prostory 7
1.2 Prostory konstantní křivosti 8
1.3 Symetrické prostory 11
1.3.1 Killingovy vektory 11
1.3.2 Maximálně symetrické prostory 13
1.3.3 Konstrukce metriky 14
1.3.4 Symetrie maximálně symetrického prostoru 15

2 Prostoročas 18

2.1 Řešení Einsteinových polních rovnic 18
2.2 De Sitterův prostoročas 19
2.3 De Sitterův prostoročas jako nadplocha v plochém prostoru . . 21
2.4 Další vyjádření de Sitterova prostoročasu 25

3 Vlastnosti de Sitterovy variety 29

3.1 Symetrie de Sitterova prostoročasu 29
3.2 Geodetiky a horizonty 34
3.3 Zobecnění na N-dimenzionální de Sitterův prostor 35

A Znázornění de Sitterovy variety v plochém prostoru 37

B Značení 39

0.1 Obecná teorie relativity

Počátkem minulého století bylo již zřejmé, že představa Newtonovského vesmíru je dále neudržitelná. Když pak roku 1916 zveřejnil Albert Einstein svoji dlouho budovanou *obecnou teorii relativity*, znamenalo to skutečný zlom ve vědeckém náhledu na svět kolem nás. Galileovské transformace byly nahrazeny Lorentzovskými již dříve ve speciální teorii relativity. Nyní si však byly všechny souřadné systémy z hlediska platnosti fyzikálních zákonů navzájem rovnocenné. Největší význam měly výsledky Einsteinovy práce pro rozvoj kosmologie. Newtonovská mechanika totiž vůbec neumožňovala studovat vlastnosti vesmíru jako celku. V době vzniku obecné teorie relativity již byla k dispozici poměrně propracovaná matematická teorie geometrie, která se neopírala o pátý postulát Euklidovské geometrie. První, kdo připustil logickou možnost *neeuklidovské geometrie* jako geometrie popisující skutečný prostor, byl zřejmě Gauss. Na něj ve svých pracech navazovali mnozí: Bólyai, Lobachevski, Riemann, Christoffel, Ricci, Bianchi a další, až byla vytvořena ucelená teorie *Riemannovy geometrie* a *tenzorového počtu*. Byl to však Einstein, kdo jako první dal těmto matematickým poznatkům fyzikální smysl, když udal způsob, jak lze vlastnosti prostoročasu popisovat pomocí *metriky*. Tu je možno dostat jako řešení polních rovnic, které ji uvádí do vztahu s tenzorem energie-hybnosti.

V době publikace polních rovnic byla všeobecně zažitá představa, že náš vesmír je statický. Aby bylo toto řešení možné, zavedl Einstein do svých rovnic tak zvanou *kosmologickou konstantu* Λ. Jak se kosmologie rozvíjela, ukázalo se, že vesmír statický není. Zavedení kosmologické konstanty se ukázalo zbytečné a Einstein ji dokonce prohlásil za největší chybu svého života. V současnosti se však ukazuje, že to zase taková chyba nebyla. Z dnešního pohledu se dokonce zdá, že kosmologický člen je co do hustoty energie dominantní a kosmologické modely, které řeší polní rovnice s Λ, nabývají na významu. Právě takovým řešením se budeme dále zabývat.

K tomu, abychom byli vůbec schopni formulovat polní rovnice a porozumět jim, je nutná znalost tenzorového počtu a diferenciální geometrie. O těchto tématech jsou napsány celé řady knih a zde není místo se jimi zaobírat. Předpokládám, že čtenář je s problematikou obeznámen, a nebudu ji proto blíže rozebírat. Levá strana rovnic je čistě geometrická a z algebraických vlastností členů, které zde vystupují, je vidno, že se jedná o soustavu 10 algebraicky nezávislých rovnic pro 10 neznámých složek metriky. Pro výrazy v rovnicích dále platí Bianchiho identity, tedy 4 diferenciální rovnice. Počet funkcionálně nezávislých rovnic je poté 6 a zůstávají 4 stupně volnosti, které odpovídají volnosti ve volbě souřadnic. Polní rovnice jsou nelineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu a v obecné podobě jsou velmi složité. To je důvod, proč do dnešní doby bylo nalezeno jen určité malé množství řešení, většinou velmi speciálních. K tomu, aby bylo možno Einsteinovy rovnice vůbec vyřešit, je nutno uplatnit jisté zjednodušující předpoklady. Nejčastěji se jedná o předpoklady symetrií, které od hledaného prostoru očekáváme, například homogenita či izotropie.

Složitosti rovnic si byl vědom i Einstein. Proto ho velmi překvapilo, když se záhy po publikaci začala objevovat jistá řešení. Vakuové, sféricky symetrické řešení rovnic bez kosmologické konstanty přinesl K. Schwarzschild ještě téhož roku, řešení rovnic s Λ pak na sebe nenechalo dlouho čekat. Přišel s ním, již tehdy významný, holandský matematik a astronom *Willem de Sitter*. Ačkoliv je *de Sitterovo řešení* poměrně staré, má i moderní kosmologii stále co nabídnout a to je právě důvod, proč se jím budeme dále zabývat. Modely řešící rovnice bez pravé strany pro prázdný vesmír se mohou zdát absurdní, jelikož náš vesmír prázdný není. Na de Sitterově řešení jsou však založeny některé modely popisující rozpínající se vesmír a pro Λ kladné jde libovolný model v limitě $t \to \infty$ právě k de Sitterovu modelu.

Toto řešení má vysoký stupeň *symetrie*, kterou je možno využít při řešení polních rovnic. Proto je úvodní kapitola věnována symetriím prostoročasu a formulaci zjednodušujících předpokladů umožňujících nalézt metriku. Díky těmto obecným úvahám budeme později schopni nahlédnout i na konkrétní symetrie prostoročasu.

To, že počáteční úvahy budou provedeny ve vší obecnosti, má ještě jedno opodstatnění. De Sitterův prostoročas pojednává o řešení pro kladnou kosmologickou konstantu. Velmi podobný model existuje pro Λ záporné a nazývá se *anti-de Sitterův*. Konstrukce metriky je zde de facto shodná a mnohé závěry jsou analogické, proto jsou uváděny již jen v poznámkách. Důvod, proč se o něm zmiňuji, je ten, že v současnosti nachází uplatnění ve strunové teorii prostřednictvím tzv. *AdS/CFT korespondence* mezi klasickou teorií gravitace definovanou na anti-de Sitterově prostoru a teorií konformního pole.

Kromě hledání metriky je dále velký důraz kladen na způsob znázornění variety modelu v prostorech vyšší dimenze a na to, jakým způsobem je možno ho pokrýt souřadnou sítí. Různými parametrizacemi variety lze totiž dosáhnout nejen různých tvarů metriky, ale obecně i modelů různých topologických vlastností.

V celém textu je užíváno Einsteinova sumačního pravidla. Metrika Minkowského prostoročasu je v souladu s literaturou volena $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$. Jak bývá zvykem, pracujeme v geometrizovaných jednotkách, tedy rychlost světla a gravitační konstanta jsou brány jako jednotka.

Kapitola 1

Geometrické vlastnosti prostorů konstantní křivosti

1.1 Konformní prostory

Nejprve bych se rád krátce zmínil o takzvaně konformních prostorech, tedy takových, mezi jejichž fundamentálními formami existuje jistá úměra; zvláště pak o prostorech, jejichž metrika bude úměrná metrice plochého prostoru.

Máme-li dva prostory V_n a V'_n, jejichž fundamentální formy jsou ve vztahu

$$g'_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}$$

kde σ je libovolná funkce souřadnic, říkáme, že tyto prostory jsou *konformní*.

Díky vztahu mezi metrikami můžeme vyjádřit složky Riemannova tenzoru $R'^{\mu}_{\nu\lambda\kappa}$ pomocí složek tenzoru $R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa}$, metriky $g_{\mu\nu}$ a derivací σ. Toto lze po několika úpravách, viz [1], převést na rovnost dvou tenzorů

$$C'^{\mu}_{\nu\lambda\kappa} = C^{\mu}_{\nu\lambda\kappa}$$

kde

$$\begin{aligned} C^{\mu}_{\nu\lambda\kappa} = R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa} - \frac{1}{n-2}(\delta^{\mu}_{\lambda} R_{\nu\kappa} - \delta^{\mu}_{\kappa} R_{\nu\lambda} + g_{\nu\kappa} R^{\mu}_{\lambda} - g_{\nu\lambda} R^{\mu}_{\kappa}) \\ - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^{\mu}_{\kappa} g_{\nu\lambda} - \delta^{\mu}_{\lambda} g_{\nu\kappa}) \end{aligned}$$

Pro konformní prostory jsou tedy složky tenzorů $C^{\mu}_{\nu\lambda\kappa}$ a $C'^{\mu}_{\nu\lambda\kappa}$ stejné. Tento tenzor je konformně invariantní, a proto se někdy nazývá konformní tenzor. Častěji však bývá označován jako tenzor *Weylův*, který se jím jako první zabýval. Přechodem k jeho úplně kovariantní podobě máme

$$C_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\lambda\mu\nu\kappa} - \frac{1}{n-2}(g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu})$$

$$-\frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa})$$

Weylův tenzor má stejné algebraické vlastnosti jako Riemannův tenzor, ale platí pro něj navíc

$$C^{\mu}_{\nu\mu\kappa} = 0$$

a lze se na něj dívat jako na tu část Riemannova tenzoru, jejíž libovolné zúžení dává nulový tenzor.

Pro prostor V_n, kde dim$V_n = n \leq 3$, lze Riemannův tenzor vyjádřit pouze pomocí $R, R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$ a Weylův tenzor bude nulový. To vyplývá i z jeho algebraických vlastností. Pro kosmologii jsou ovšem zajímavé především prostory dimenze 4 a vyšší, kde $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$ má nenulové složky.

Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby pro prostor V_n existovaly souřadnice, v nichž fundamentální forma bude mít tvar tenzoru o konstantních složkách, je podmínka, aby všechny složky Riemannova tenzoru byly nulové. Takový prostor se pak označuje jako *plochý*. Pokud V_n bude plochý prostor, budou

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\mu\nu} = R = 0$$

tedy i

$$C_{\mu\nu\lambda\kappa} = 0$$

a pro V'_n platí

$$C'_{\mu\nu\lambda\kappa} = 0$$

Lze ukázat, viz [1], že nulovost Weylova tenzoru je rovněž postačující k tomu, aby prostor byl konformně plochý, tzn. jeho metrika byla úměrná konstantní matici.

Prostor V'_n pro $n > 3$ je konformně plochý právě tehdy, když $C'_{\mu\nu\lambda\kappa}$ je nulový tenzor.

Toho lze užít, pokud nás zajímá, zda je daný prostor konformně plochý. Jinak je totiž nutno najít patřičné souřadnice.

1.2 Prostory konstantní křivosti

Dále uvedu stručný popis vlastností prostorů konstantní křivosti, neboť právě o takový prostor nám půjde při zkoumání de Sitterova prostoročasu. Jedná se o poměrně významnou třídu prostorů mnoha vlastností, které se vyznačují značnou měrou symetrie, díky níž lze snáze řešit Einsteinovy polní rovnice.

V diferenciální geometrii jsou prostory *konstantní Riemannovy křivosti* charakterizovány podmínkou

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = K(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu})$$

kde K je konstanta. Jak dále uvidíme, není to to samé, jako položit $R = konst.$ Konstantu K lze určit přímo vypočítáním Ricciho křivosti R. Uvažujme prostor dimenze N. Zúžením přes λ a ν dostáváme

$$R_{\mu\kappa} = K(N-1)g_{\mu\kappa}$$

a zúžením přes zbylé dva indexy

$$R = KN(N-1)$$

Zde je vidět, že Ricciho křivost bude konstantní. Nyní lze do původní podmínky dosadit za K

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{R}{N(N-1)}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) \tag{1.1}$$

Ricciho tenzor tedy dostává tvar

$$R_{\mu\kappa} = \frac{R}{N}g_{\mu\kappa} \tag{1.2}$$

Konkrétně pro prostory dimenze 4, které jsou z hlediska obecné relativity nejzajímavější, dostáváme

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{R}{12}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) \tag{1.3}$$

$$R_{\mu\kappa} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\kappa} = 0 \tag{1.4}$$

Z (1.1) tedy plyne (1.2), zatímco opačná implikace obecně neplatí. K tomu je třeba přidat ještě jednu podmínku.

Při jejím odvození vyjdeme z vyjádření Riemannova tenzoru křivosti ve tvaru

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = {} & \frac{1}{N-2}(g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu}) \\ & - \frac{R}{(N-1)(N-2)}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) + C_{\lambda\mu\nu\kappa} \end{aligned}$$

který jsme dostali v předešlé kapitole. Dosazením (1.2) do pravé strany výrazu dostáváme

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{R}{N(N-1)}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) + C_{\lambda\mu\nu\kappa}$$

z čehož můžeme vidět, že (1.1) platí právě tehdy, když platí (1.2) a $C_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$. Prostor konstantní křivosti je proto konformně plochý.

Speciálně pro prostory dimenze 4 platí, že

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{R}{12}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) \quad \Leftrightarrow \quad R_{\mu\kappa} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\kappa} = 0 = C_{\lambda\mu\nu\kappa}$$

což charakterizuje prostory konstantní křivosti.

Prostory, pro které platí (1.1), mají ještě jednu důležitou vlastnost, která se týká možnosti zanořit je do plochého prostoru vyšší dimenze.

Jak již bylo uvedeno, plochý prostor $\overline{V}_m$ je takový prostor, jehož metriku lze vyjádřit jako tenzor o konstantních složkách. Lze tedy najít takové reálné funkce určující souřadnice na $\overline{V}_m$, že fundamentální forma bude mít tvar

$$ds^2 = C_{\mu\nu}dy^\mu dy^\nu \qquad C_{\mu\nu} = diag(C_1, C_2, \ldots, C_m)$$

kde C_i je ± 1 v závislosti na charakteru prostoru. Takových souřadných systémů existuje více, avšak počet kladných a záporných C_i zůstává konstantní. Například pro $dim\overline{V}_m = 4$ a $C_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ máme Minkowského prostoročas. Mějme prostor V_n s fundamentální formou

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

K tomu, aby bylo možno ho zanořit do plochého $\overline{V}_m$, je nutné a postačující, aby soustava

$$C_i \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^i}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu}$$

připouštěla m nezávislých řešení

$$y^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

které poté udávají parametrizaci V_n ve $\overline{V}_m$. Podle [1] lze tyto f^i nalézt a prostor V_n vždy zanořit do plochého prostoru dimenze $m = N(N+1)/2$. Zajímavější však je hledat prostor $\overline{V}_m$ co *nejnižší* dimenze. Pozoruhodnou vlastností prostorů konstantní křivosti je, že je možné zanořit je do plochého prostoru jako nadplochu, kdy $m = n + 1$. Mějme ve $\overline{V}_{n+1}$ varietu

$$C_i(y^i)^2 = eA^2$$

kde e je ± 1 a A libovolná konstanta. Takováto varieta má charakter *hyperkvadriky.* Například pro $C_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots n+1$ a $e = 1$ se jedná o kouli v $n+1$ rozměrech. Pro tyto variety lze ukázat (bude provedeno v další kapitole), že mají konstantní křivost, a navíc, že jedině tyto variety mohou být nadplochami nenulové konstantní křivosti v plochém prostoru. Tento teorém nám posléze pomůže při konstrukci obecné metriky prostoru konstantní křivosti a při zkoumání de Sitterova prostoročasu jako variety v plochém prostoru o dimenzi 5.

1.3 Symetrické prostory

V Euklidovské geometrii se implicitně předpokládá, že metrické vztahy neovlivní translace ani rotace. Skutečná gravitační pole nemívají tak vysoký stupeň symetrie. Často však jistou symetrii připouští, čehož lze využít při řešení Einsteinových polních rovnic. Ty jsou totiž přesně řešitelné pouze při uplatnění určitých zjednodušujících předpokladů. Matematická teorie symetrických prostorů je poměrně rozsáhlá a propracovaná, proto se zaměřím především na prostory maximálně symetrické, které mají v kosmologii největší využití.

Základní problém, se kterým se setkáváme, je ten, že lze těžko užít nějakou předpokládanou symetrii metrického prostoru a dostat tak informace o metrice, potřebujeme-li ji znát před tím, než zavedeme souřadnicový systém, ve kterém uplatníme symetrii. Proto je třeba popsat symetrie v kovariantním zápise, který nebude záviset na volbě souřadnic. Určení vlastností metriky plynoucích ze symetrií bude poté otázkou matematických operací.

1.3.1 Killingovy vektory

Zkoumejme podmínku, kdy se metrika daného prostoru nezmění při transformaci souřadnic, tedy kdy jednotlivé koeficienty $g'_{\mu\nu}(x')$ budou stejnými funkcemi argumentů x'^{μ}, jako byly původní $g_{\mu\nu}(x)$ funkcemi argumentů x^{μ}. To lze zapsat jako

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) \tag{1.5}$$

Pokud rovnice transformace mezi těmito dvěma souřadnými systémy obsahují jeden nebo více parametrů, je možné je interpretovat tak, že definují *spojitou grupu transformací* prostoru do sebe. Využitím vzorce pro transformaci $g_{\mu\nu}(x)$ ve tvaru

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g'_{\rho\sigma}(x')$$

ve kterém dosadíme (1.5), dostáváme

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x') \tag{1.6}$$

Jakákoliv transformace $x \quad \rightarrow \quad x'$ splňující (1.6) je *izometrií*. Obecně je (1.6) velmi složitou podmínkou na $x'^{\mu}(x)$, lze ji však výrazně zjednodušit přechodem k infinitezimálním transformacím

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon\xi^{\mu}(x) \qquad | \varepsilon | \ll 1 \tag{1.7}$$

Uvažujeme-li pouze členy do prvního řádu v ε, bude mít (1.6) tvar

$$0 = \frac{\partial \xi^{\mu}(x)}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\sigma}(x) + \frac{\partial \xi^{\nu}(x)}{\partial x^{\sigma}} g_{\rho\nu}(x) + \xi^{\mu}(x) \frac{\partial g_{\rho\sigma(x)}}{\partial x^{\mu}}$$

To lze přepsat pomocí kovariantních komponent ξ_{σ} do kompaktní podoby

$$\xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} = 0 \tag{1.8}$$

kde středník značí kovariantní derivaci ξ_{σ} podle proměnné x^{ρ}, definovanou jako

$$\xi_{\sigma;\rho} = \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho}\xi_{\lambda}$$

O vektorovém poli $\xi_{\sigma}(x)$, které splňuje (1.8), říkáme, že vytváří *Killingův vektor* metriky $g_{\mu\nu}(x)$. Problém určení infinitesimálních izometrií se tedy povedlo převést na určování Killingových vektorů metriky. Jejich libovolná lineární kombinace přitom bude opět Killingovým vektorem.

Killingova rovnice (1.8) udává poměrně silnou podmínku, neboť mimo jiné umožňuje zrekonstruovat celou funkci $\xi_{\sigma}(x)$ jako její Taylorův rozvoj, známe-li hodnoty ξ_{σ} a $\xi_{\sigma;\rho}$ v jednom bodě.

Killingovy vektory považujeme za *nezávislé*, pokud neexistuje jejich netriviální lineární kombinace s konstantními koeficienty dávající nulový vektor. Maximální počet takových nezávislých vektorů v prostoru dimenze N je $N(N+1)/2$.

Prostor s metrikou nazýváme *homogenní*, jestliže v něm existují infinitezimální izometrie, které přenášejí libovolný bod X do libovolného bodu v bezprostředním okolí X. To znamená, že metrika musí připouštět Killingovy vektory, které mohou v libovolném bodě nabývat libovolných hodnot.

Prostor s metrikou nazýváme *izotropním* v bodě X, jestliže existují infinitezimální izometrie, které nechávají bod X invariantní, tedy $\xi_{\sigma}(X) = 0$, a přitom derivace $\xi_{\sigma;\rho}(X)$ nabývají všech možných hodnot omezených pouze podmínkou (1.8). Platí, že prostor, který je izotropní v každém bodě, je rovněž homogenní.

Podmínka (1.8) má obecně kovariantní tvar a nemění se při transformaci. Existence určitého počtu nezávislých Killingových vektorů proto nezávisí na volbě souřadnic. Při transformaci $x \rightarrow x'$ se i Killingovy vektory přetransformují podle

$$\xi'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \xi^{\nu}(x)$$

a existence nulové netriviální lineární kombinace $\xi'^{\mu}(x')$ by znamenala rovněž závislost $\xi^{\nu}(x)$.

1.3.2 Maximálně symetrické prostory

Metrika, která připouští nejvyšší množství, tedy $N(N+1)/2$, Killingových vektorů, se nazývá *maximálně symetrická*. Lze dokázat, že homogenní prostor, který je izotropní v každém bodě, je maximálně symetrický a naopak. Z vlastností Killingových vektorů vyplývá, že maximální symetrie daného prostoru je vlastností samotného prostoru, nezávislá na volbě souřadnic. To odpovídá představě, že homogenita či izotropie prostoru by neměla záviset na volbě souřadného systému. Ne každá metrika ovšem připouští tak vysoký stupeň symetrie. To, kolik je možno najít nezávislých Killingových vektorů, závisí na (1.8) a tedy na metrice. Naopak zkoumáním podmínek integrability (1.8) a z informací, které máme o Killingových vektorech, je možno zjistit něco o tenzoru křivosti a tudíž i o tvaru neznámé metriky.

V dalším popisu maximálně symetrických prostorů se nám bude hodit velmi silná vlastnost těchto prostorů, jejíž zdlouhavý důkaz ovšem nebudu uvádět, viz [2]. Platí totiž, že *maximálně symetrické prostory mají konstantní křivost a jsou určeny jednoznačně touto křivostí a počtem kladných a záporných vlastních hodnot metriky.* Pokud tedy máme dvě maximálně symetrické metriky stejné konstantní křivosti a se stejnými počty kladných a záporných vlastních hodnot, je vždy možno najít transformaci souřadnic, která jednu metriku převede na druhou.

Díky tomuto teorému lze ve studiu maximálně symetrických prostorů pokračovat tak, že zkonstruujeme jeden příklad s libovolnou konstantou křivosti K libovolným způsobem. Uvedu jeden postup, ve kterém bude využito právě konstantní křivosti hledaného prostoru. V minulé kapitole jsem uvedl, že prostor konstantní křivosti dimenze N lze vnořit do plochého prostoru dimenze o jedna vyšší, a že při tomto vnoření bude mít vždy podobu hyperkvadriky. Metriku nejprve zkonstruujeme pro obecný případ plochého prostoru a hyperkvadriky. Fundamentální formu metriky tedy zapíšeme pomocí konstantní matice. Teprve v samotné aplikaci na prostoročas bude provedena volba souřadného systému, ve kterém budeme mít metriku v diagonálním tvaru, a zvolíme znaménka vlastních hodnot. Prostor nejprve zkonstruujeme a potom ověříme požadované vlastnosti.

1.3.3 Konstrukce metriky

Uvažujme plochý (N+1)-rozměrný prostor s metrikou zadanou

$$ds^2 \equiv g_{AB} dx^A dx^B = C_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + K^{-1} dz^2 \tag{1.9}$$

kde $C_{\mu\nu}$ je konstantní $N \times N$ matice a K je konstanta. Plochou metriku lze do tohoto tvaru jistě přivést. Do takovéhoto prostoru můžeme zanořit N-dimenzionální prostor omezením proměnných x^μ a z na plochu

$$K C_{\mu\nu} x^\mu x^\nu + z^2 = 1 \tag{1.10}$$

Na této ploše je

$$dz^2 = \frac{K^2 (C_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2}{(1 - K C_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma)}$$

Dosazením do (1.9) dostaneme

$$ds^2 = C_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{K (C_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2}{(1 - K C_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma)} \tag{1.11}$$

Metrika vnořené plochy tedy dostává tvar

$$g_{\mu\nu}(x) = C_{\mu\nu} + \frac{K (C_{\mu\lambda} x^\lambda C_{\nu\kappa} x^\kappa)}{(1 - K C_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma)} \tag{1.12}$$

Tato rovnost udává nejobecnější tvar metriky maximálně symetrického prostoru. Nyní je však na místě ověřit, že jsme skutečně zkonstruovali prostor konstantní křivosti, který připouští $N(N+1)/2$ symetrií. Přímým výpočtem Christoffelových symbolů 2. druhu z (1.12) dostáváme

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = K x^\mu g_{\nu\lambda}$$

ty použijeme ve vyjádření tenzoru křivosti

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] + g_{\eta\sigma} \left[\Gamma^\eta_{\kappa\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} \right]$$

odtud dostaneme

$$\begin{gathered} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = K[C_{\lambda\nu} C_{\mu\kappa} - C_{\lambda\kappa} C_{\mu\nu}] \\ + K^2 [1 - K C_{\sigma\rho} x^\sigma x^\rho]^{-1} [C_{\lambda\nu} x_\mu x_\kappa - C_{\mu\nu} x_\lambda x_\kappa + C_{\mu\kappa} x_\nu x_\lambda - C_{\lambda\kappa} x_\mu x_\nu] \end{gathered}$$

což je rovno

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = K (g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu})$$

a jedná se tedy skutečně o prostor konstantní křivosti K, která odpovídá konstantě K zavedené v (1.9) a (1.10).

1.3.4 Symetrie maximálně symetrického prostoru

Prozkoumejme nyní symetrie takto zkonstruované metriky a dokažme, že (1.12) připouští $N(N+1)/2$ parametrickou grupu izometrií. (1.9) je jistě invariantní vůči rotacím v $N+1$ rozměrném plochém prostoru, kterých je obecně $N(N+1)/2$. Jak to ale vypadá s invariancí rovnice nadplochy vůči těmto rotacím? Uvažujme tyto rotace jako transformace ve tvaru

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = R^\mu_\nu x^\nu + R^\mu_z z \tag{1.13}$$

$$z \rightarrow z' = R^z_\mu x^\mu + R^z_z z \tag{1.14}$$

kde R^A_B jsou konstanty. Naložíme-li na transformace podmínky

$$C_{\mu\nu} R^\mu_\rho R^\nu_\sigma + K^{-1} R^z_\rho R^z_\sigma = C_{\rho\sigma} \tag{1.15}$$

$$C_{\mu\nu} R^\mu_\rho R^\nu_z + K^{-1} R^z_\rho R^z_z = 0 \tag{1.16}$$

$$C_{\mu\nu} R^\mu_z R^\nu_z + K^{-1} (R^z_z)^2 = K^{-1} \tag{1.17}$$

lze přímým dosazením (1.13),(1.14) do (1.10) a užitím (1.15),(1.16),(1.17) ověřit, že se stále jedná o rovnici hyperkvadriky. Nyní je možno rozlišit dva druhy jednoduchých transformací, které splňují podmínky (1.15),(1.16),(1.17):

1. Rotace kolem počátku

   $$x'^\mu = R^\mu_\nu x^\nu \qquad z' = z \tag{1.18}$$

   kdy

   $$R^\mu_\nu = R^\mu_\nu \qquad R^\mu_z = R^z_\mu = 0 \qquad R^z_z = 1$$

   kde R^μ_ν je konstantní $N \times N$ matice a

   $$C_{\mu\nu} R^\mu_\rho R^\nu_\sigma = C_{\rho\sigma}$$

2. „Kvazitranslace"

   $$R^\mu_z = a^\mu \qquad R^z_\mu = -K C_{\mu\nu} a^\nu \qquad R^z_z = (1 - K C_{\rho\sigma} a^\rho a^\sigma)^{\frac{1}{2}}$$

   $$R^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - b K C_{\nu\rho} a^\rho a^\mu$$

   kde a^μ je libovolné s podmínkou

   $$K C_{\rho\sigma} a^\rho a^\sigma \leq 1$$

   aby R^z_z bylo reálné a

   $$b \equiv \frac{1 - (1 - K C_{\rho\sigma} a^\rho a^\sigma)^{\frac{1}{2}}}{K C_{\rho\sigma} a^\rho a^\sigma}$$

   Toto jsou transformace ve tvaru

   $$x'^\mu = x^\mu + a^\mu [(1 - K C_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma)^{\frac{1}{2}} - b K C_{\rho\sigma} x^\rho a^\sigma] \tag{1.19}$$

Existence izometrií (1.19), které budou přemisťovat počátek do jiného bodu, znamená, že takovýto prostor bude homogenní (každý bod bude geometricky stejný jako jiný bod). Existence (1.18) znamená, že prostor je izotropní v počátku. Metrika je tedy homogenní a izotropní v počátku, je proto izotropní v každém bodě, tudíž maximálně symetrická.

Lze rovněž určit Killingovy vektory. To provedeme tak, že budeme uvažovat transformace blízké jednotkovým. Pro již uvedené transformace:

1. Rotace kolem počátku

$$R^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \varepsilon\Omega^\mu_\nu \qquad |\ \varepsilon\ | \ll 1$$

lze dosadit do $C_{\mu\nu}R^\mu_\rho R^\nu_\sigma = C_{\rho\sigma}$ a dostat tak

$$C_{\mu\sigma}\Omega^\mu_\rho + C_{\rho\mu}\Omega^\mu_\sigma = 0$$

Index μ je sčítací a podmínka je symetrická vůči záměně ρ a σ. Udává proto $N(N+1)/2$ podmínek na prvky Ω^μ_ν. To je matice $N \times N$ a tudíž bude mít $N(N-1)/2$ nezávislých prvků. Porovnáním s (1.7) budou odpovídající Killingovy vektory vypadat jako

$$\xi^\mu_\Omega(x) = \Omega^\mu_\nu x^\nu$$

2. Kvazitranslaci

$$a^\mu = \varepsilon\alpha^\mu \qquad |\ \varepsilon\ | \ll 1$$

budou, opět srovnáním s (1.7), odpovídat Killingovy vektory

$$\xi^\mu_\alpha(x) = \alpha^\mu[1 - KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu]^{\frac{1}{2}}$$

Lze ověřit, že tyto vektory skutečně splňují Kilingovu rovnici (1.8), přičemž Ω^μ_ν má $N(N-1)/2$ a α^μ má N nezávislých parametrů. To dává celkem $N(N+1)/2$ nezávislých Killingových vektorů.

Jelikož K je invariantní parametr, není možno nějakou transformací souřadnic přejít k metrice s jiným K. Provedeme-li však lineární transformaci

$$x'^\mu = A^\mu_\nu x^\nu$$

změní se $C_{\rho\sigma}$ na

$$C'_{\mu\nu} = A^\rho_\mu A^\sigma_\nu C_{\rho\sigma}$$

a $C_{\mu\nu}$ v (1.12) je možno přetransformovat na libovolnou reálnou symetrickou matici, která si ovšem zachová počty kladných a záporných vlastních hodnot.

Tomuto pravidlu o zachování signatury se říká Silvestrův zákon a platí pro libovolné transformace tvaru

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}g_{\rho\sigma}(x)$$

V bodě $x = 0$ jsou znaménka vlastních hodnot metrik $C_{\mu\nu}$ a $g_{\mu\nu}$ v (1.12) stejná, a jelikož se počty znamének vlastních hodnot metriky zachovávají na celé varietě které metrika přísluší, platí to v celém prostoru. Konkrétní prostor pak dostaneme zvolením $C_{\mu\nu}$ a K.

Kapitola 2

Prostoročas

2.1 Řešení Einsteinových polních rovnic

Nyní již přejdeme k řešení rovnic pro prostoročasovou metriku. Einsteinovy polní rovnice obecné relativity s kosmologickou konstantou Λ mají tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

kde $R_{\mu\nu}$ je Ricciho tenzor, R skalární křivost, $g_{\mu\nu}$ metrika, Λ kosmologická konstanta, $T_{\mu\nu}$ tenzor energie-hybnosti, G a c představují gravitační konstantu a rychlost světla (ty jinak pokládáme rovny 1). Těchto 10 rovnic je možno analyticky vyřešit pouze pro několik speciálních případů.

Předmětem našeho zájmu jsou *vakuová řešení*, tedy rovnice s nulovou pravou stranou, která budou popisovat prázdný prostor. Rovnice dostávají tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{2.1}$$

Zúžením přes oba indexy

$$R - 4\frac{1}{2}R + 4\Lambda = 0$$

je možno najít vztah mezi R a Λ

$$R = 4\Lambda \tag{2.2}$$

z čehož mimo jiné plyne, že Ricciho skalární křivost R je konstanta. Tvar rovnic se ještě zjednoduší na

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} = 0 \tag{2.3}$$

To je ovšem jedna z podmínek pro čtyřdimenzionální prostor konstantní křivosti. Lze tedy říct, že prostory konstantní křivosti jsou řešením vakuových Einsteinových polních rovnic s kosmologickou konstantou. Jak již bylo ukázáno, (2.3) není podmínkou postačující pro konstantní křivost. K tomu je nutno přidat nulovost Weylova tenzoru a proto dostáváme: *Vakuová řešení Einsteinových rovnic s kosmologickou konstantou budou prostory konstantní křivosti tehdy a jen tehdy, když budou konformě plochá.* Podle znaménka Λ lze díky vztahu Λ a R prostory konstantní křivosti rozdělit do tří skupin:

1. $R = 0$ Minkowského prostoročas
2. $R > 0$ de Sitterův prostoročas
3. $R < 0$ anti-de Sitterův prostoročas

2.2 De Sitterův prostoročas

De Sitterův prostoročas je vakuové řešení Einsteinových polních rovnic s kosmologickou konstantou, které má *pozitivní konstantní křivost.* Riemannův tenzor křivosti zde dostává tvar

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{R}{12}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu})$$

a $R > 0$. Konstanta křivosti je

$$K = \frac{R}{12} = \frac{\Lambda}{3}$$

Díky konstantní křivosti lze rovnou říci, že se bude jednat o prostor konformně plochý. Již víme, že maximálně symetrický prostor je jednoznačně zadán svou konstantní křivostí a počty kladných a záporných vlastních čísel metriky. Prostor konstantní křivosti tedy jednoznačně udává maximálně symetrický prostor. Pro nalezení metriky nyní lze využít teorie maximálně symetrických prostorů. Konstrukce obecného prostoru křivosti K začínala tak, že jsme uvažovali plochý $(N + 1)$ rozměrný (N bude nyní 4) prostor. Uplatníme to, že se budeme pohybovat v prostoročase, a zvolíme v konstrukci za

$$C_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

Tím jsme vlastně provedli transformaci souřadnic tak, aby měla $N+1$ dimenzionální metrika diagonální tvar a zvolili znaménka vlastních čísel. Již bylo vidět, že metrika $g_{\mu\nu}$ pro náš čtyřrozměrný prostoročas a $C_{\mu\nu}$ mají stejná znaménka vlastních hodnot, tedy hledáme maximálně symetrickou metriku se třemi kladnými a jedním záporným vlastním číslem. Metriku

$$ds^2 = C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{K(C_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{(1 - KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma)}$$

potom lze zapsat jako

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{K(-tdt + xdx + ydy + zdz)^2}{(1 - K(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2))} \tag{2.4}$$

Pro námi zkoumaný případ je $K > 0$ a lze přejít k jiným souřadnicím pomocí

$$t = \frac{1}{K^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{Kr'^2}{2}\cosh(K^{\frac{1}{2}}t') + (1 + \frac{Kr'^2}{2})\sinh(K^{\frac{1}{2}}t')\right]$$

$$\vec{x} = \vec{x'}exp(K^{\frac{1}{2}}t')$$

kde $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

Poté (2.4) přejde na tvar

$$ds^2 = -dt'^2 + exp(2K^{\frac{1}{2}}t')(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) \tag{2.5}$$

Odstraníme čárky a dosadíme za

$$K = R/12 \qquad R = 4\Lambda$$

čímž konečně dostáváme

$$ds^2 = -dt^2 + exp(2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{2.6}$$

Právě tato metrika bývá nejčastěji spojována se jménem de Sitter, jenž byl první, kdo se jí zabýval. V této metrice je samotný prostor plochý, zakřivený je až prostoročas. Díky jednoduchému tvaru metriky lze přímým výpočtem ověřit, že splňuje Einsteinovy vakuové rovnice s Λ.

Poznámka: Tvar metriky je stejný, jaký se používá pro „*steady state*" kosmologii, kterou se zabývali Bondi, Gold a Hoyle. V tomto modelu se předpokládá, že prostor je nejen homogenní a izotropní, ale jeví se stejně i ve všech časových okamžicích. Jak se prostor rozpíná, musí zde docházet ke kontinuálnímu vzniku hmoty, aby tlak zůstával konstantní. Vzhledem k současným pozorováním se tento model jeví jako nepravděpodobný. Významnou oblastí užití (2.6) je *inflační kosmologie*, která je na ní de facto založena. V obou případech lze konstantu křivosti chápat jako kvadrát Hubblovy konstanty a exponencielu jako poloměr vesmíru, který roste jako $exp(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t)$.

2.3 De Sitterův prostoročas jako nadplocha v plochém prostoru

Zajímavé je zjistit, jakým způsobem bude prostor s metrikou (2.6) zanořen do plochého prostoru vyšší dimenze.

Metriku maximálně symetrického prostoru jsme konstruovali v plochém prostoru. Bylo též vidět, že čtyřrozměrný prostoročas nenulové konstantní křivosti bude nadplochou a bude mít tvar hyperkvadriky. Tvar variety rovněž dostaneme dosazením $C_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ do konstrukce. Uvažujme proto 4-rozměrnou hyperkvadriku v plochém 5-ti rozměrném prostoru s metrikou

$$ds^2 = -dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(K je kladné a znaménka tedy odpovídají konstrukci). Rovnice variety po dosazení za $C_{\mu\nu}$ dostane tvar

$$-v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \tag{2.7}$$

kde α je konstanta, kterou jsme označili $K^{-\frac{1}{2}}$ a je tedy kladná. Otázka zní, jak parametrizovat varietu (2.7), abychom dostali metriku (2.6)? Zavedeme parametrizaci

$$\begin{aligned} v &= \alpha \sinh(\frac{t}{\alpha}) + \frac{r'^2}{2\alpha} e^{\frac{t}{\alpha}} \\ w &= \alpha \cosh(\frac{t}{\alpha}) - \frac{r'^2}{2\alpha} e^{\frac{t}{\alpha}} \\ \vec{x} &= \vec{x'} e^{\frac{t}{\alpha}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

kde $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. To, že jde o parametrizaci hyperboloidu, se ověří dosazením do (2.7). Nyní lze přímým výpočtem spočítat metriku hyperboloidu při této parametrizaci jako

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f_t f_t & f_t f_{x'} & \cdots \\ f_{x'} f_t & f_{x'} f_{x'} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

kde např. f_t je 5-vektor derivace $(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial t})$ parametrizace a skalární součin provádíme v plochém prostoru pomocí metriky $\eta'_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1, 1)$. Tímto výpočtem nám vyjde právě metrika (2.6), přičemž

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$$

což odpovídá výše uvedeným vztahům. Popisovaný prostor lze proto znázornit jako *4-rozměrný jednodílný hyperboloid* zanořený v plochém prostoru dimenze 5, který je lokálně popsán prostorově plochou metrikou (2.6). Souřadnice, v nichž má metrika tento tvar, nesou název *standartní synchronní*. Právě tento hyperboloid bývá označován jako varieta de Sitterova prostoročasu.

Poznámka: Bereme-li v konstrukci K záporné, lze obdobným způsobem znázornit anti-de Sitterovo řešení pro zápornou konstantní křivost jako dvoudílný hyperboloid o rovnici

$$-v^2 - w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -\alpha^2$$

v 5-ti dimenzionálním plochém prostoru o metrice

$$ds^2 = -dv^2 - dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

přičemž nyní je $-\alpha^2 = K^{-1}$, a tedy $\alpha = \sqrt{-\frac{3}{\Lambda}}$

Sečteme-li v (2.8) $v + w = \alpha exp(\frac{t}{\alpha})$, zjistíme, že naše parametrizace nepopisuje celý hyperboloid, nýbrž pouze tu část, kdy $v + w > 0$. V této parametrizaci bude souřadnicová síť vypadat jako na obrázku A.2. Vyjádřením

$$t' = \alpha \ln(\frac{v+w}{\alpha}) \qquad \vec{x'} = \frac{\alpha \vec{x}}{v+w} \tag{2.9}$$

lze studovat další vlastnosti parametrizace. Plochy konstantního času jsou zde popsány $v+w = konst.$ a $t \to -\infty$ plochou $v+w = 0$. Tato polovina hyperboloidu je právě oblastí, na níž je popsán „steady state" model a modely inflační kosmologie. Tyto prostory ovšem nebudou geodeticky úplné v minulosti, viz [4]. K tomu, abychom mohli souřadnou sítí pokrýt celou varietu, je nutno buď zavést jinou parametrizaci, nebo zavést druhou souřadnou síť.

Položíme-li v rovnici hyperboloidu $v = v_0 = konst.$ a převedeme na druhou stranu, dostaneme

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 + v_0^2$$

což je rovnice třírozměrné koule S^3 s poloměrem $(\alpha^2 + v_0^2)^{\frac{1}{2}}$. Prostor proto bude mít topologii $S^3 \times R$.

Abychom popsali celou de Sitterovu varietu a tím i celý prostoročas byl geodeticky úplný, je třeba zavést jinou parametrizaci hyperboloidu pomocí *globálních synchronních souřadnic* $(t, \chi, \vartheta, \varphi)$.

$$
\begin{aligned}
v &= \alpha \sinh(\frac{t}{\alpha}) \\
w &= \alpha \cosh(\frac{t}{\alpha}) \cos\chi \\
x &= \alpha \cosh(\frac{t}{\alpha}) \sin\chi \cos\vartheta \\
y &= \alpha \cosh(\frac{t}{\alpha}) \sin\chi \sin\vartheta \cos\varphi \\
z &= \alpha \cosh(\frac{t}{\alpha}) \sin\chi \sin\vartheta \sin\varphi
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Opětovným napočítáním fundamentální formy této parametrizace dostaneme metriku tvaru

$$
ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cosh^2(\frac{t}{\alpha}) \left[d\chi^2 + \sin^2\chi (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \right] \tag{2.11}
$$

Souřadnicová síť je znázorněna na obrázku A.1. Singularity pro tyto souřadnice

$$
\chi = 0 \qquad \chi = \pi \qquad \vartheta = 0 \qquad \vartheta = \pi
$$

jsou stejné povahy jako u polárních souřadnic. Mimo tyto singularity souřadnice pokrývají celý prostor pro

$$
-\infty < t < \infty \qquad 0 \leq \chi \leq \pi \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi
$$

a metrika (2.11) popisuje celý de Sitterův prostoročas. Plochy konstantního času odpovídají plochám konstantní souřadnice v. Při pohledu na rovnice parametrizace zjistíme, že plochy konstantního času budou koule S^3 konstantní kladné křivosti o poloměru $\alpha \cosh(\frac{t}{\alpha})$. S rostoucím časem proto bude prostor skutečně expandovat.

Poznámka: Podobnou parametrizací lze získat metriku anti-de Sitterova prostoročasu ve tvaru

$$
ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cos^2(\frac{t}{\alpha})(d\chi^2 + \sinh^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2))
$$

která ovšem nepokrývá celý prostor. Ten je pak pokryt souřadnicemi (t, r, θ, ϕ), zadanými jako

$$
\begin{aligned}
v &= \alpha \cosh r \sin(\frac{t}{\alpha}) \\
w &= \alpha \cosh r \cos(\frac{t}{\alpha}) \\
x &= \alpha \sinh r \cos\theta \\
y &= \alpha \sinh r \sin\theta \cos\phi \\
z &= \alpha \sinh r \sin\theta \sin\phi
\end{aligned}
$$

pro které má metrika statický tvar

$$ds^2 = -\cosh^2 r dt^2 + \alpha^2 dr^2 + \alpha^2 \sinh^2 r (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$-\infty < t < \infty \qquad 0 \le r < \infty \qquad 0 \le \theta \le \pi \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$

Jak již bylo v obecnosti řečeno, prostor konstantní křivosti bude konformně plochý. K tomu bychom se jistě dostali již z metriky (2.6) transformací souřadnice t. Měli bychom ovšem parametrizovanou pouze polovinu prostoročasu. Konformně plochou metriku na celé de Sitterově varietě lze zavést užitím parametrizace hyperboloidu jako (η, x', y', z'):

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2\eta}(\alpha^2 - \eta^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ w &= \alpha\frac{x'}{\eta} \\ x &= \alpha\frac{y'}{\eta} \\ y &= \alpha\frac{z'}{\eta} \\ z &= \frac{1}{2\eta}(\alpha^2 + \eta^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2) \end{aligned} \tag{2.12}$$

kde $-\infty < \eta, x', y', z' < \infty$. Tyto souřadnice popisují celý hyperboloid, metrika prostoročasu nabývá tvar

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\eta^2}(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{2.13}$$

a je evidentně konformní s plochou metrikou. Pokud bychom nyní přešli k (t, x', y', z'), jednoduše přetransformovali

$$\eta = \alpha exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right) \tag{2.14}$$

a využili vztahu K a α dostali bychom původní metriku (2.6)

$$ds^2 = -dt^2 + exp(2\frac{t}{\alpha})(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) \tag{2.15}$$

která ovšem pokrývá pouze polovinu variety. To není překvapující, neboť se vlastně jedná o složení (2.12) a (2.14), kterým dostaneme parametriaci (2.8). Je odtud ale vidět, že je možné pokrýt i druhou polovinu variety. K tomu je ovšem třeba zavést jinou souřadnicovou síť $(\tilde{t}, x', y', z')$ pomocí

$$\eta = -\alpha exp\left(-\frac{\tilde{t}}{\alpha}\right)$$

přičemž metrika bude opět (2.15).

2.4 Další vyjádření de Sitterova prostoročasu

Existuje celá řada způsobů jak zapsat metriku de Sitterova prostoročasu. Sám de Sitter používal množství vyjádření, mezi nimiž přecházel třeba i pomocí komplexních transformací souřadnic. Nejednou se v minulosti stalo, že bylo nalezeno řešení Einsteinových rovnic, o němž se později ukázalo, že odpovídá buď celému, nebo alespoň části řešení de Sitterova. To je zřejmě důsledkem vysokého stupně symetrie tohoto prostoru. V následujícím uvedu pouze některá vyjádření, další jsou k nalezení například v [5].

Souřadnice, se kterými se lze často setkat, jsou *Schwarzschildovy souřadnice* $(t, r, \vartheta, \varphi)$, v nichž je metrika statická, sféricky symetrická.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\alpha^2 - r^2}\sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \\ w &= \sqrt{\alpha^2 - r^2}\cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \\ x &= r\cos\vartheta \\ y &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ z &= r\sin\vartheta\sin\varphi \end{aligned} \tag{2.16}$$

Tyto souřadnice pokrývají pro

$$-\infty < t < \infty \qquad 0 \leq r \leq \alpha \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

pouze část celé variety. Metrika de Sitterova prostoročasu ve své statické podobě pak má tvar

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \tag{2.17}$$

Na pokrytí celého hyperboloidu potřebujeme celkově 4 souřadnicové mapy, kdy je třeba $\sqrt{\alpha^2 - r^2}$ nahrazovat $\pm\sqrt{\mid \alpha^2 - r^2 \mid}$ a $0 \leq r \leq \alpha$, respektive $\alpha \leq r < \infty$. Metrika má v těchto souřadnicích singularitu v $r = \alpha$ a pro takové r existuje kosmologický horizont.

Provedením transformace $r = \alpha\sin r'$ v (2.16) je možno dostat další vyjádření de Sitterova řešení, konkrétně tedy $(t, r', \vartheta, \varphi)$

$$\begin{aligned} v &= \alpha\cos r'\sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \\ w &= \alpha\cos r'\cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \\ x &= \alpha\sin r'\cos\vartheta \\ y &= \alpha\sin r'\sin\vartheta\cos\varphi \\ z &= \alpha\sin r'\sin\vartheta\sin\varphi \end{aligned} \tag{2.18}$$

a metrika nabývá tvar

$$ds^2 = -\cos^2 r' dt^2 + \alpha^2 dr'^2 + \alpha^2 \sin^2 r' (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \tag{2.19}$$

přičemž souřadnice opět pokrývají pouze část variety.

Poznámka: Einstein původně do svých rovnic zavedl kosmologickou konstantu Λ proto, aby zachoval možnost statického vesmíru. Pro určité $\Lambda = \Lambda_{crit}$ skutečně statické řešení existuje. Metrika tohoto řešení má tvar

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \sin^2 r (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

Vraťme se ke globálním synchronním souřadnicím. Zavedením *konformní* časové souřadnice

$$\eta = 2 \arctan \left(e^{\frac{t}{\alpha}} \right)$$

metrika (2.11) dostane tvar

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\sin^2 \eta} \left[-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right] \tag{2.20}$$

De Sitterův prostoročas je díky tomu konformní části Einsteinova statického vesmíru pro $0 \leq \eta \leq \pi$.

Poznámka: Podle kosmologického principu předpokládáme, že náš vesmír je homogenní a izotropní. To tedy znamená, že 3D-prostor považujeme za maximálně symetrický podprostor prostoročasu. Prostor těchto vlastností bývá označován jako Friedmann-Robertson-Walkerův (FRW). 3D-prostor jako takový bude mít konstantní křivost K a jeho vlastnosti budou záviset na znaménku této křivosti. Vhodnou volbou souřadnic lze K normalizovat tak, viz [3], že bude rovno 1,0 nebo -1 a metrika bude mít tvar

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(t)(d\chi^2 + B^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))$$

přičemž A je nějakou funkcí času a pro B platí

$$B(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{když } K = 1,\ \chi \in \langle 0, \pi \rangle \\ \chi & \text{když } K = 0,\ \chi \in \langle 0, \infty) \\ \sinh \chi & \text{když } K = -1,\ \chi \in \langle 0, \infty) \end{cases} \tag{2.21}$$

Metrika (2.6) de Sitterova prostoru má poté tvar FRW metriky pro $K = 0$ (pouze nutno x, y, z přetransformovat do sférických souřadnic), zatímco (2.11) odpovídá FRW pro $K = 1$.

Další souřadnice, které jsou někdy užívány, jsou $(t_{-1}, \chi, \vartheta, \varphi)$. Metrika v nich nabývá FRW tvaru pro $K = -1$, proto t označíme indexem -1. Jsou zadány jako

$$
\begin{aligned}
v &= \alpha \sinh\left(\frac{t_{-1}}{\alpha}\right)\cosh\chi \\
w &= \alpha \cosh\left(\frac{t_{-1}}{\alpha}\right) \\
x &= \alpha \sinh\left(\frac{t_{-1}}{\alpha}\right)\sinh\chi\cos\vartheta \\
y &= \alpha \sinh\left(\frac{t_{-1}}{\alpha}\right)\sinh\chi\sin\vartheta\cos\varphi \\
z &= \alpha \sinh\left(\frac{t_{-1}}{\alpha}\right)\sinh\chi\sin\vartheta\sin\varphi
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Metrika může být vyjádřena jako

$$
ds^2 = -dt_{-1}^2 + \alpha^2\sinh^2\left(\frac{t_{-1}}{\alpha}\right)\left(d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right) \tag{2.23}
$$

Pro

$$
-\infty < t_{-1} < \infty \qquad 0 \le \chi < \infty \qquad 0 \le \vartheta \le \pi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi
$$

souřadnice opět pokrývají pouze část variety. Toto vyjádření bylo užíváno právě de Sitterem.

Homogenní, obecně anizotropní, kosmologické modely bývají rozlišovány podle Lieových algeber grup symetrií, které metrika připouští. Tyto modely mohou být proto klasifikovány podle svých vlastností do tříd Bianchi I až IX. Mimoto rozlišujeme Kantowski-Sachs modely. Bianchiho typy mají 3-dimenzionální grupy symetrií, K-S modely 4-dimenzionální. Námi zkoumaný prostoročas má značný stupeň symetrie. Tou se budu zabývat dále. Nyní však prozradím, že ho lze zařadit do tříd Bianchi I, V, VII a IX. Například souřadnice $(t_B, z_B, \vartheta, \varphi)$ zadané jako

$$
\begin{aligned}
v &= \alpha \sinh\left(\frac{t_B}{\alpha}\right)\cosh\vartheta \\
w &= \alpha \cosh\left(\frac{t_B}{\alpha}\right)\cos z_B \\
x &= \alpha \cosh\left(\frac{t_B}{\alpha}\right)\sin z_B \\
y &= \alpha \sinh\left(\frac{t_B}{\alpha}\right)\sinh\vartheta\cos\varphi \\
z &= \alpha \sinh\left(\frac{t_B}{\alpha}\right)\sinh\vartheta\sin\varphi
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

parametrizují *Bianchi III homogenní anizotropní* formu de Sitterovy metriky

$$ds^2 = -dt_B^2 + \alpha^2 \cosh^2 \left(\frac{t_B}{\alpha}\right) dz_B^2 + \alpha^2 \sinh^2 \left(\frac{t_B}{\alpha}\right) (d\vartheta^2 + \sinh^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (2.25)$$

Kantowski-Sachs metrika

$$ds^2 = -dt_K^2 + \alpha^2 \sinh^2 \left(\frac{t_K}{\alpha}\right) dz_K^2 + \alpha^2 \cosh^2 \left(\frac{t_K}{\alpha}\right) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (2.26)$$

reprezentovaná souřadnicemi $(t_K, z_K, \vartheta, \varphi)$

$$\begin{aligned} v &= \alpha \sinh \left(\frac{t_K}{\alpha}\right) \cosh z_K \\ w &= \alpha \sinh \left(\frac{t_K}{\alpha}\right) \sinh z_K \\ x &= \alpha \cosh \left(\frac{t_K}{\alpha}\right) \cos \vartheta \\ y &= \alpha \cosh \left(\frac{t_K}{\alpha}\right) \sin \vartheta \cos \varphi \\ z &= \alpha \cosh \left(\frac{t_K}{\alpha}\right) \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.27)$$

je rovněž *homogenní a anizotropní*, ale nepatří do žádné Bianchiho třídy.

Kapitola 3

Vlastnosti de Sitterovy variety

3.1 Symetrie de Sitterova prostoročasu

Zabývejme se nyní symetriemi de Sitterova řešení. Existenci izometrií, tedy zobrazení prostoru do sebe, při nichž je metrika invariantní, se povedlo převést na hledání Killingových vektorů, které generují příslušné izometrie. Námi zkoumaný prostor má konstantní křivost a je maximálně symetrický. Metrika tudíž připouští maximální počet, tedy 10, nezávislých Killingových vektorů. Jejich libovolná lineární kombinace bude opět Killingovým vektorem a bude splňovat rovnici $\xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} = 0$. Tím, co ve skutečnosti generuje infinitezimální izometrie, je lineární obal 10 vektorů. V důsledku toho bude grupa izometrií 10-ti parametrická. V kapitole o maximálně symetrických prostorech byl k vidění způsob, jak najít symetrie. Uvažovali jsme všechny „rotace" v 5-dimenzionálním prostoru, které zanechávají invariantní hyperkvadriku a samozřejmě metriku plochého 5-D prostoru. Z obecného vyjádření jsme přešli ke konkrétnímu řešení dosazením $C_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ a hledaný prostoročas jsme tedy vnořili do prostoru s fundamentální formou

$$ds^2 = -dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Právě invariance ploché metriky znamená, že zkoumaná grupa zachovává invariantní diagonální matici s prvky $-1, +1, +1, +1, +1$ a lze ji proto klasifikovat jako grupu SO(1,4). Tato bývá často nazývána de Sitterovou grupou.

Poznámka: obdobným postupem lze anti-de Sitterovo řešení vnořit do prostoru s metrikou

$$ds^2 = -dv^2 - dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Tato se opět bude zachovávat při transformacích generovaných 10-ti parametrickou grupou. Grupa symetrií anti-de Sitterova řešení tedy bude grupa SO(2,3).

Prostoročas zkoumaného řešení má být homogenní a izotropní. Metriku tudíž nemají ovlivnit transformace, které interpretujeme jako 4 „translace" a 6 „rotací". V kapitole o maximálně symetrických prostorech jsme explicitně určili Killingovy vektory v obecném tvaru pro libovolnou maximálně symetrickou metriku. Konkrétně 6 vektorů

$$\xi^\mu_\Omega(x) = \Omega^\mu_\nu x^\nu$$

a 4 vektory

$$\xi^\mu_\alpha(x) = \alpha^\mu[1 - KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu]^{\frac{1}{2}}$$

Kde Ω^μ_ν je matice 4×4 se šesti nezávislými složkami a α^μ je čtyřvektor. Toto jsou kontravariantní vektory a jako takové se budou také chovat při transformaci souřadnic. Pro lepší interpretaci symetrií se nyní podívejme na konkrétní tvar metriky de Sitterova prostoročasu.

Poměrně jednoduše je možno hledané izometrie vysledovat v souřadnicích (t, x, y, z), v nichž nabývá metrika tvar

$$ds^2 = -dt^2 + exp(2\frac{t}{\alpha})(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{3.1}$$

Kontravariantní Killingovy vektory pro tuto metriku jsou:

$$\begin{aligned}
\xi^\mu_{(1)} &= (0, 1, 0, 0) && (3.2)\\
\xi^\mu_{(2)} &= (0, 0, 1, 0) && (3.3)\\
\xi^\mu_{(3)} &= (0, 0, 0, 1) && (3.4)\\
\xi^\mu_{(4)} &= (0, y, -x, 0) && (3.5)\\
\xi^\mu_{(5)} &= (0, z, 0, -x) && (3.6)\\
\xi^\mu_{(6)} &= (0, 0, z, -y) && (3.7)\\
\xi^\mu_{(7)} &= (-\alpha, x, y, z) && (3.8)\\
\xi^\mu_{(8)} &= (-2\alpha x, \alpha^2 exp(-2\frac{t}{\alpha}) + x^2 - y^2 - z^2, 2xy, 2xz) && (3.9)\\
\xi^\mu_{(9)} &= (-2\alpha y, 2xy, \alpha^2 exp(-2\frac{t}{\alpha}) - x^2 + y^2 - z^2, 2zy) && (3.10)\\
\xi^\mu_{(10)} &= (-2\alpha z, 2xz, 2zy, \alpha^2 exp(-2\frac{t}{\alpha}) - x^2 - y^2 + z^2) && (3.11)
\end{aligned}$$

Ověření, že se skutečně jedná o Killingovy vektory, je jen otázkou času. Stačí přejít k jejich kovariantnímu vyjádření snížením indexů a přímo dosadit do Killingovy rovnice. Výskyt první šestice nebude žádným překvapením. Víme, že vztah mezi generátorem infinitezimální transformace a tokem je

$$\xi^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \varepsilon}\right)_{|\varepsilon=0}$$

Integrací lze získat předpis pro transformaci. Odtud je vidět, že první 3 reprezentují posun v souřadnicích x, y, z. Další trojice bude generovat rotace v rovinách xy, xz a yz. Už z toho je patrno, že uvažujeme-li pouze prostor a nikoliv prostoročas, bude tento homogenní a izotropní. Prostorové symetrie jsou zde stejné jako v Minkowského plochém prostoročase, což odpovídá tomu, že de Sitterův prostoročas je v této metrice sice zakřivený, nicméně 3-D prostor je plochý. Vektor (3.8) vydělíme pro lepší představu konstantou $-\alpha$ a dostaneme $(1, -x/\alpha, -y/\alpha, -z/\alpha)$. Posun v čase bude tedy provázet přeškálování prostorových souřadnic, konktrétně jejich kontrakce závislá na ε jako $exp(-\frac{\varepsilon}{\alpha})$. Tato symetrie ukazuje, že i přes rozpínání 3-D prostoru reprezentuje (3.1) kosmologický model, kde jsou všechny invarianty nezávislé na čase. Výpočet transformací generovaných poslední trojicí již není tak jednoduchý. Podívejme se, jak budou vektory vypadat v souřadné soustavě (η, x, y, z), v níž má metrika tvar

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\eta^2}(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\xi^\mu_{(1)} &= (0, 1, 0, 0) && (3.13)\\
\xi^\mu_{(2)} &= (0, 0, 1, 0) && (3.14)\\
\xi^\mu_{(3)} &= (0, 0, 0, 1) && (3.15)\\
\xi^\mu_{(4)} &= (0, y, -x, 0) && (3.16)\\
\xi^\mu_{(5)} &= (0, z, 0, -x) && (3.17)\\
\xi^\mu_{(6)} &= (0, 0, z, -y) && (3.18)\\
\xi^\mu_{(7)} &= (\eta, x, y, z) && (3.19)\\
\xi^\mu_{(8)} &= (2\eta x, \eta^2 + x^2 - y^2 - z^2, 2xy, 2xz) && (3.20)\\
\xi^\mu_{(9)} &= (2\eta y, 2xy, \eta^2 - x^2 + y^2 - z^2, 2yz) && (3.21)\\
\xi^\mu_{(10)} &= (2\eta z, 2xz, 2yz, \eta^2 - x^2 - y^2 + z^2) && (3.22)
\end{aligned}$$

Význam první šestice zůstal stejný jako v předchozím. $\xi^\mu_{(7)}$ se transformoval na škálování všech souřadnic, což ovšem metriku evidentně nezmění. Izometrii generovanou vektorem $\xi^\mu_{(8)}$ je nyní možno napočítat jako

$$\begin{aligned}
\eta' &= \frac{\eta}{(-\eta^2 + x^2 + y^2 + z^2)\varepsilon^2 + 2x\varepsilon + 1}\\
x' &= \frac{(-\eta^2 + x^2 + y^2 + z^2)\varepsilon + x}{(-\eta^2 + x^2 + y^2 + z^2)\varepsilon^2 + 2x\varepsilon + 1}\\
y' &= \frac{y}{(-\eta^2 + x^2 + y^2 + z^2)\varepsilon^2 + 2x\varepsilon + 1}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$z' = \frac{z}{(-\eta^2 + x^2 + y^2 + z^2)\varepsilon^2 + 2x\varepsilon + 1}$$

Další izometrie $\xi^\mu_{(9)}$ a $\xi^\mu_{(10)}$ dostaneme cyklickou záměnou $x \to y \to z \to x$. Tyto transformace uvádí prostorové souřadnice do vztahu se souřadnicí časovou a můžeme je proto interpretovat jako analogie Lorentzovských transformací.

Přiložená tabulka komutačních relací dokládá, že existuje velké množství možností jak najít 3, 4 nebo 6-ti parametrické podgrupy de Sitterovy grupy. To je právě důvod, proč je známo tak široké spektrum různých vyjádření metriky.

	$\xi^\mu_{(1)}$	$\xi^\mu_{(2)}$	$\xi^\mu_{(3)}$	$\xi^\mu_{(4)}$	$\xi^\mu_{(5)}$	$\xi^\mu_{(6)}$	$\xi^\mu_{(7)}$	$\xi^\mu_{(8)}$	$\xi^\mu_{(9)}$	$\xi^\mu_{(10)}$
$\xi^\mu_{(1)}$	$*$	0	0	$-\xi^\mu_{(2)}$	$-\xi^\mu_{(3)}$	0	$\xi^\mu_{(1)}$	$2\xi^\mu_{(7)}$	$2\xi^\mu_{(4)}$	$2\xi^\mu_{(5)}$
$\xi^\mu_{(2)}$		$*$	0	$\xi^\mu_{(1)}$	0	$-\xi^\mu_{(3)}$	$\xi^\mu_{(2)}$	$-2\xi^\mu_{(4)}$	$2\xi^\mu_{(7)}$	$2\xi^\mu_{(6)}$
$\xi^\mu_{(3)}$			$*$	0	$\xi^\mu_{(1)}$	$\xi^\mu_{(2)}$	$\xi^\mu_{(3)}$	$-2\xi^\mu_{(5)}$	$-2\xi^\mu_{(6)}$	$2\xi^\mu_{(7)}$
$\xi^\mu_{(4)}$				$*$	$\xi^\mu_{(6)}$	$-\xi^\mu_{(5)}$	0	$\xi^\mu_{(9)}$	$-\xi^\mu_{(8)}$	0
$\xi^\mu_{(5)}$					$*$	$\xi^\mu_{(4)}$	0	$\xi^\mu_{(10)}$	0	$-\xi^\mu_{(8)}$
$\xi^\mu_{(6)}$						$*$	0	0	$\xi^\mu_{(10)}$	$-\xi^\mu_{(9)}$
$\xi^\mu_{(7)}$							$*$	$\xi^\mu_{(8)}$	$\xi^\mu_{(9)}$	$\xi^\mu_{(10)}$
$\xi^\mu_{(8)}$								$*$	0	0
$\xi^\mu_{(9)}$									$*$	0
$\xi^\mu_{(10)}$										$*$

Poznámka: Zajímají-li nás symetrie anti-de Sitterova prostoročasu, je dobré zvolit na varietě souřadnice (η, x', y', z'), obdobně jako při parametrizaci (2.12).

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{2x'}(\alpha^2 - \eta^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2) \\
w &= \alpha\frac{\eta}{x'} \\
x &= \alpha\frac{y'}{x'} \\
y &= \alpha\frac{z'}{x'} \\
z &= \frac{1}{2x'}(\alpha^2 + \eta^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

kde $-\infty < \eta, x', y', z' < \infty$. V těchto souřadnicích bude mít metrika tvar

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{x'^2}(-d\eta^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) \tag{3.25}$$

což je evidentně analogické metrice (3.12). Známe-li Killingovy vektory pro metriku (3.12), nebude už nyní velký problém určit Killingovy vektory metriky (3.25)(vynecháme čárkování u x, y, z).

$$\begin{aligned}
\xi^\mu_{(1)} &= (1,0,0,0) && (3.26)\\
\xi^\mu_{(2)} &= (0,0,1,0) && (3.27)\\
\xi^\mu_{(3)} &= (0,0,0,1) && (3.28)\\
\xi^\mu_{(4)} &= (y,0,\eta,0) && (3.29)\\
\xi^\mu_{(5)} &= (z,0,0,\eta) && (3.30)\\
\xi^\mu_{(6)} &= (0,0,z,-y) && (3.31)\\
\xi^\mu_{(7)} &= (\eta,x,y,z) && (3.32)\\
\xi^\mu_{(8)} &= (\eta^2+x^2+y^2+z^2, 2\eta x, 2\eta y, 2\eta z) && (3.33)\\
\xi^\mu_{(9)} &= (2\eta y, 2xy, \eta^2-x^2+y^2-z^2, 2yz) && (3.34)\\
\xi^\mu_{(10)} &= (2\eta z, 2xz, 2yz, \eta^2-x^2-y^2+z^2) && (3.35)
\end{aligned}$$

Tyto vektory odpovídají po řadě posunutí v čase (reprezentováno posunem ve směru η), dvěma prostorovým translacím (ve směrech y a z), dvěma Lorentzovským transformacím (roviny $\eta - y$ a $\eta - z$), rotaci v rovině $z - y$ a současnému škálováni všech souřadnic. Transformace generovaná vektorem $\xi^\mu_{(8)}$ bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned}
\eta' &= \frac{(-\eta^2+x^2+y^2+z^2)\varepsilon+\eta}{(\eta^2-x^2-y^2-z^2)\varepsilon^2-2\eta\varepsilon+1}\\
x' &= \frac{x}{(\eta^2-x^2-y^2-z^2)\varepsilon^2-2\eta\varepsilon+1}\\
y' &= \frac{y}{(\eta^2-x^2-y^2-z^2)\varepsilon^2-2\eta\varepsilon+1}\\
z' &= \frac{z}{(\eta^2-x^2-y^2-z^2)\varepsilon^2-2\eta\varepsilon+1}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Izometrie generované $\xi^\mu_{(9)}$ a $\xi^\mu_{(10)}$ budou stejné jako u de Sitterova prostoročasu a dostaneme je z (3.23) cyklickou záměnou $x \to y \to z \to x$.

3.2 Geodetiky a horizonty

V závěru bych se rád alespoň krátce zmínil o těch vlastnostech de Sitterova prostoročasu, které souvisí s jeho topologickými vlastnostmi. Zajímáme-li se o geodetiky, je možno postupovat tak, že zapíšeme rovnici geodetiky z metriky a pokusíme se ji vyřešit integrací za využití patřičných počátečních podmínek. Použiji však jiný postup. Zkoumaný prostoročas je izotropní a homogenní a tudíž v něm podle [5] existuje jedna časupodobná, jedna světlupodobná a jedna prostorupodobná geodetika, přičemž ostatní geodetiky z nich můžeme dostat nějakou izometrií.

Prostorupodobnou geodetiku najdeme z metriky (2.11). Jak píše [5], prostorupodobná varieta $t = 0$ má za geodetiky *kružnice* o poloměru α a její geodetiky budou geodetikami i v plném 4-D prostoru. Všechny prostorupodobné geodetiky jsou proto konečné a mají délku $2\pi\alpha$. Plný de Sitterův prostor bude *geodeticky úplný*, polovina variety reprezentovaná metrikou (2.15) však ne. Existují totiž geodetiky, úplné v celém prostoru, které prochází přes hranici $v + w = 0$ a jsou tedy na půlce hyperboloidu neúplné.

Časupodobné geodetiky lze najít jak z (2.11), tak z (2.15) tím, že položíme všechny souřadnice kromě t rovny nule.

Hledejme světlupodobnou geodetiku pro (2.15) takovou, která vychází z počátku ve směru souřadnice x. Tato bude mít rovnici

$$x(t) = \alpha(1 - e^{(-\frac{t}{\alpha})}) \tag{3.37}$$

V jiné souřadné soustavě pro metriku (2.11) můžeme dostat například geodetiku

$$\varphi = \arctan(\sinh(\frac{t}{\alpha})) \tag{3.38}$$

Zajímavé je, že obě světlupodobné geodetiky mají konečnou limitu pro $t \to \infty$, konkrétně α, resp. $\frac{\pi}{2}$

Zkoumejme nyní horizonty de Sitterova prostoročasu. Budeme uvažovat světelný kužel nějakého pozorovatele, který se pohybuje po časupodobné geodetice. Ta může reprezentovat světočáru statického pozorovatele. V Minkowského prostoročase světelný kužel pozorovatele obsáhne celý prostoročas. To však obecně neplatí. Hranici kužele, za kterou leží události o nichž pozorovatel nikdy nebude moct získat žádnou informaci, se nazývá *horizont událostí*. Hranice kužele ohraničující události, jež má pozorovatel možnost ovlivnit, bývá označována jako *částicový horizont*, neboť rovněž představuje hranici mezi částicemi, které kdy mohl pozorovatel spatřit (jejich světočáry nemusely protnout světelný kužel pozorovatele). Pro homogenní izotropní kosmologické modely a pozorovatele v klidu je horizont vždy koule vyvíjející se s časem. Ta je charakterizována svým poloměrem - velikostí horizontu.

Z limity provedené výše plyne, že pro „steady state” model popsaný metrikou (2.15) existuje horizont událostí o velikosti α. Jak se vesmír rozpíná, nebude zde existovat částicový horizont.

Metrika (2.11) úplného de Sitterova prostoru je symetrická vůči záměně $t \leftrightarrow -t$, takže pokud částicový horizont a horizont událostí existují, musí si odpovídat. Jak podrobně popisuje [3], pro pozorovatele v de Sitterově prostoru existuje v minulosti částicový horizont (při $t \to -\infty$ dostaneme všechny události, které je schopen ovlivnit) a v budoucnosti horizont událostí (pro $t \to \infty$ všechny události, o nichž je schopen získat informace). Existence obou horizontů má za následek různé zajímavé situace. Pokud například světočára částice jednou protne pozorovatelův světelný kužel, bude pro něj vždy viditelná. Na světočáře částice však existuje událost U ležící na horizontu událostí pozorovatele. Ten nikdy neuvidí události ležící za U, navíc pro něj musí uběhnout nekonečný vlastní čas než spatří U. Pro částici na druhou stranu uběhne do události U konečný vlastní čas a z jejího hlediska není tato událost nijak významná. Pozorovatel tedy vidí konečnou část historie částice v nekonečném čase (nastává nekonečný rudý posuv).

3.3 Zobecnění na N-dimenzionální de Sitterův prostor

V předchozí kapitole jsme viděli způsob, jakým bude de Sitterův prostoročas popsán pomocí 4-dimenzionálního hyperboloidu

$$-v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$$

v plochém 5-ti rozměrném prostoru s metrikou

$$\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1, 1)$$

Podíváme-li se na věc čistě matematicky, nic nám nebrání zobecnit získané výsledky na prostory dimenze N.

Mějme tedy (N+1)-dimenzionální plochý prostor R^{N+1} s metrikou

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

kde $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, \ldots, 1)$ a v něm uvažujme hyperkvadriku

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = C \tag{3.39}$$

Pro $C \geq 0$ se jedná o jednodílný hyperboloid a můžeme označit $C = R^2$. Přepíšeme-li nyní (3.39) do tvaru

$$(x^0)^2 + R^2 = \sum_{i=1}^{N} (x^i)^2$$

a zvolíme $t = t_0 = konst.$ máme rovnici (N-1)-dimenzionální koule S^{N-1} s poloměrem $r = ((x^0)^2 + R^2)^2$. Pro $N = 1$ se jedná pouze o dva body, takže požadujme $N \geq 2$. Poté je koule S^{N-1} souvislá varieta a hyperkvadrika

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^N)^2 = R^2 \tag{3.40}$$

je jednodílný hyperboloid. N-dimenzionální de Sitterův prostoročas D^N proto definujeme jako varietu (3.40). Z předešlého je vidět, že prostoročas D^N má topologii $R \times S^{N-1}$.

Zaměřme se nyní na odvození metriky D^N. Abychom toho byli schopni, je třeba zvolit vhodnou parametrizaci variety. Postupujeme obdobně jako v odvození (2.11), kouli S^{N-1} parametrizujeme zobecněnými sférickými souřadnicemi.

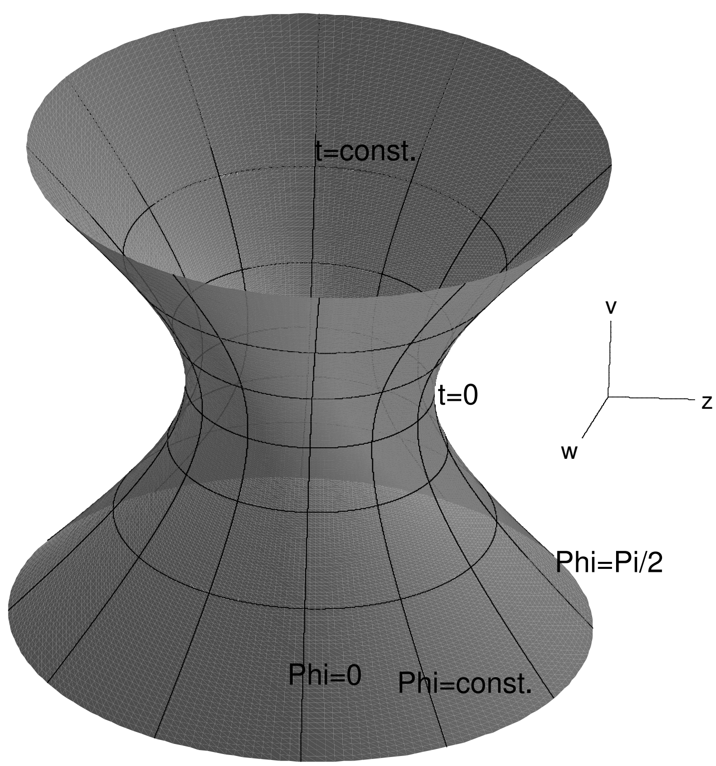
$$\begin{aligned}
x_0 &= R\sinh(\frac{t}{R}) \\
x_1 &= R\cosh(\frac{t}{R})\cos(\phi_1) \\
x_2 &= R\cosh(\frac{t}{R})\sin(\phi_1)\cos(\phi_2) \\
&\vdots \\
x_{N-1} &= R\cosh(\frac{t}{R})\sin(\phi_1)\ldots\sin(\phi_{N-3})\cos(\phi_{N-2}) \\
x_N &= R\cosh(\frac{t}{R})\sin(\phi_1)\ldots\sin(\phi_{N-3})\sin(\phi_{N-2})
\end{aligned} \tag{3.41}$$

V této parametrizaci dostaneme metriku D^N ve tvaru

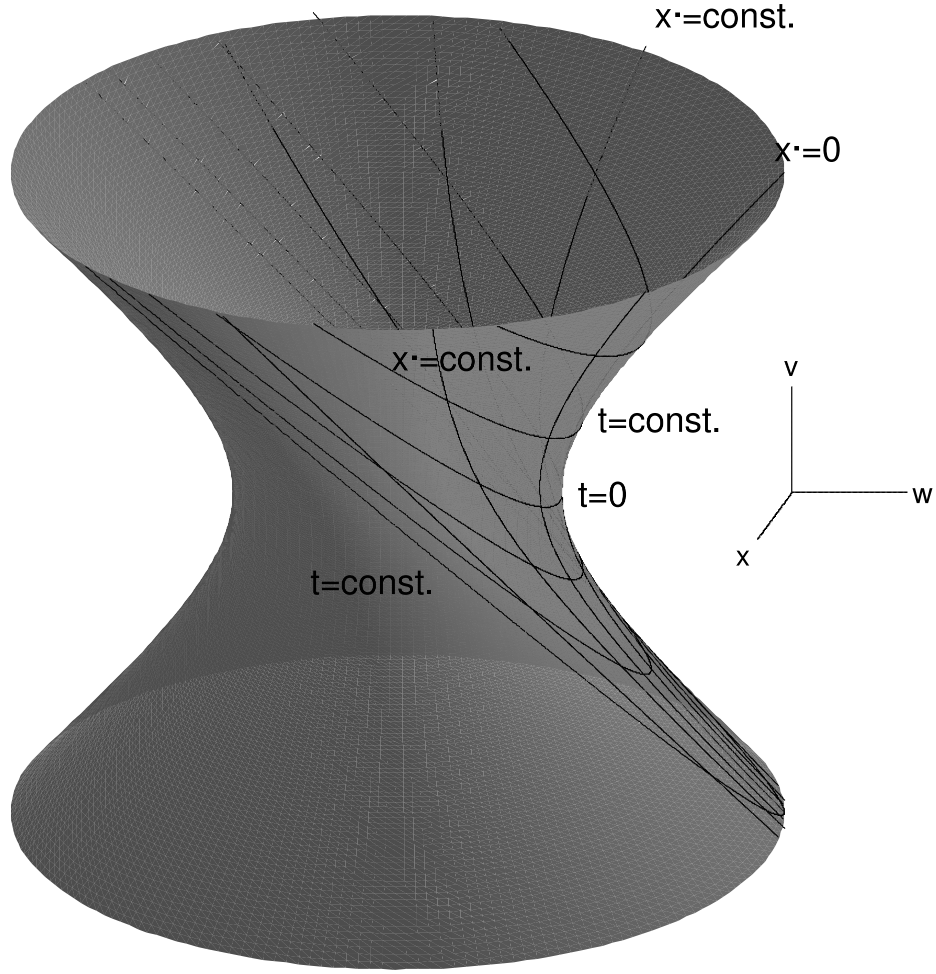
$$ds^2 = -dt^2 + R^2\cosh^2(\frac{t}{R})\left(\sum_{i=1}^{N-1}\prod_{j=1}^{i-1}\sin^2(\phi_j)d\phi_i^2\right) \tag{3.42}$$

Dodatek A

Znázornění de Sitterovy variety v plochém prostoru



Obrázek A.1: Reprezentace de Sitterovy variety a její pokrytí globálními synchronními souřadnicemi $(t, \chi, \vartheta, \varphi)$.



Obrázek A.2: Reprezentace de Sitterovy variety a její pokrytí standartními synchronními souřadnicemi (t, x', y', z').

V obou grafech byly potlačeny dvě souřadnice, aby bylo možno varietu znázornit. Každý bod hyperboloidu zde reprezentuje 2D plochu. V obrázku A.1 je touto plochou povrch koule, v obrázku A.2 rovina.

Dodatek B

Značení

Literatura pojednávající o obecné relativitě bohužel není jednotná ve značení a znaménkové konvenci. I malé rozdíly, především při počítání s tenzorem křivosti, mohou proto působit potíže. Na závěr tedy uvedu několik základních vztahů, které se v textu vyskytují.

Horní (resp. dolní) indexy označují kontravariantní (resp. kovariantní) složky tenzorů (vektorů). Transformační pravidla pro kontravariantní (resp. kovariantní) vektory jsou

$$a'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} a^{\nu} \qquad a'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} a_{\nu}$$

Obdobně transformujeme složky libovolného tenzoru vyššího řádu, násobením $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ za každou kontravariantní složku a $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}$ za každou kovariantní složku.

Metrika Minkowského prostoročasu má v kartézských souřadnicích tvar $\eta_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1)$. Obecnou metriku značíme $g_{\mu\nu}$ a kvadrát prostoročasového intervalu bereme jako

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

Vztah Christoffelových symbolů 2. druhu a metriky je

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\kappa\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\sigma}} \right)$$

Riemannův tenzor křivosti

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta}$$

Ricciho tenzor

$$R_{\mu\kappa} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa}$$

Ricciho skalární křivost

$$R \equiv R^{\mu}_{\mu}$$

Literatura

[1] Eisenhart, L. P., *Riemannian geometry*, Princeton University Press, 1997

[2] Weinberg, S., *Gravitation and cosmology*, Wiley New York, 1972

[3] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R., *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973

[4] Podolský, J., *On exact radiative space-times with cosmological constant*, Department of theoretical Physics, Faculty of mathematics and physics, Charles University, 1993

[5] Schmidt, H.-J., *On the de Sitter space-time - the geometric foundation of inflationary cosmology*, Potsdam preprint PRE-ZIAP 91-04, 1991