

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Rešeršní práce

Daniel Vašata

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

**Analýza časových řad měřených
silovou plošinou při studiu
kardiovaskulární dynamiky**

Daniel Vašata

Katedra fyziky

Akademický rok: 2004/2005

Školitel: Prof. RNDr. Petr Šeba, DrSc.

Chtěl bych poděkovat prof. RNDr. Petru Šebovi, DrSc. za cenné informace a ochotu, s jakou mi je poskytoval.

Obsah

Úvod	7
1 Základy diferenciální geometrie křivek	9
1.1 Základní pojmy	9
1.1.1 Afinní prostor	9
1.1.2 Tečný prostor	11
1.1.3 Bodové a vektorové funkce	11
1.2 Parametrizovaná křivka	12
1.2.1 Délka křivky, parametrizace obloukem	13
1.2.2 Tečna ke křivce, vektorové pole	14
1.3 Frenetův repér	14
2 Studium kardiovaskulární dynamiky	21
2.1 Srdeční cyklus	21
2.1.1 Mechanické děje v průběhu srdečního cyklu	21
2.1.2 Srdeční ozvy	23
2.2 Hemodynamika	24
2.2.1 Vliv toku krve na pohyb lidského těla	25
2.3 Silová plošina	26
2.3.1 Působíště tlakové síly	27
2.4 Měření toku krve pomocí silové plošiny	28
2.5 Interpretace	30
2.6 Význam v medicíně	31
Závěr	35

Úvod

Cílem práce je seznámit se s diferenciální geometrií křivek a ukázat využití jejích nejdůležitějších tvrzení k analýze časových řad, které jsou produkovány při zkoumání kardiovaskulární dynamiky pomocí silové plošiny.

První kapitola je věnována diferenciální geometrii křivek z klasického pohledu. Na počátku jsou zopakovány některé základní pojmy nezbytné k dalšímu výkladu. V následujícím oddíle zavedeme parametrizovanou křivku a ukážeme, že pro každou regulární křivku existuje oblouk jako přirozený parametr. V poslední části první kapitoly definujeme pohyblivý repér a Frenetův repér, pomocí kterého posléze zavedeme křivosti obecné parametrizované křivky. Nakonec dokážeme několik zásadních tvrzení ohledně jednoznačnosti určení dané křivky pomocí jejích křivostí.

Druhá kapitola se zabývá popisem kardiovaskulární dynamiky a využitím některých výsledků diferenciální geometrie křivek k jejímu studiu. Nejprve popíšeme srdeční cyklus a šíření tlakové vlny velkými tepnami. Následuje popis silové plošiny a jejího nejčastějšího využití. Ve zbylé části se budeme věnovat využití silové plošiny při studiu kardiovaskulární dynamiky. Popíšeme si zpracování naměřených dat, která převádíme na křivosti jisté křivky parametrizované časem. Ukážeme, že nalezené křivosti mají vztah ke studovanému procesu. Na závěr nastíníme některé výsledky výzkumů, které v této oblasti v současné době probíhají.

Kapitola 1

Základy diferenciální geometrie křivek

Diferenciální geometrie křivek a ploch má dva aspekty. První, který můžeme nazvat klasickou diferenciální geometrií, se začal rozvíjet v počátcích matematické analýzy. Zhruba řečeno, klasická diferenciální geometrie je studium *lokálních* vlastností křivek a ploch. Lokálními vlastnostmi myslíme ty, které závisí jenom na chování křivky nebo plochy v okolí nějakého bodu. Metody používané ke zkoumání těchto vlastností vychází z diferenciálního počtu.

Druhý aspekt je tzv. *globální* diferenciální geometrie. Ta se zabývá studiem vlivu lokálních vlastností na chování celé křivky nebo plochy.

V této kapitole se budeme zabírat klasickou diferenciální geometrií křivek. Postupně si odvodíme nejdůležitější poznatky v této oblasti. Jedná se především o tvrzení o tzv. invariantech křivek (křivost a torze určují křivku v trojrozměrném prostoru až na přímé shodnosti jednoznačně).

1.1 Základní pojmy

1.1.1 Afinní prostor

Prostor, ve kterém se budeme pohybovat, je reálný normovaný afinní prostor. Později při definici Frenetova repéru a křivosti budeme potřebovat skalární součin a naše úvahy tedy zůstanou na eukleidovský prostor dimenze n .

1.1.1 Definice. Buď E neprázdná množina, $\vec{E}$ lineární prostor nad tělesem T . Buď dále definováno zobrazení $(x, y) \mapsto \vec{xy}$ množiny $E \times E$ do prostoru $\vec{E}$, které má následující vlastnosti:

- (i). $\forall x, y, z \in E$ platí $\vec{xy} + \vec{yz} + \vec{zx} = \vec{0}$,
- (ii). $\forall x \in E$ je zobrazení $y \mapsto \vec{xy}$ bijekcí E na $\vec{E}$.

Potom dvojici $(E, \vec{E})$ nazýváme **afinním prostorem nad tělesem T** .

V dalším zápisu nebudeme rozlišovat mezi nosnou množinou a samotným prostorem. Symbolem E tedy budeme značit afinní prostor $(E, \vec{E})$. Prvky přidruženého lineárního prostoru budeme nazývat vektory. Obvykle místo $\vec{xy}$ píšeme $x - y$. Je-li tedy $\vec{h} = y - x$, klademe $y = x + \vec{h}$.

Buď x pevně zvolený bod v afinním prostoru E . Potom existuje pro každý bod $y \in E$ právě jeden vektor $\vec{h}_y \in \vec{E}$ tak, že $y = x + \vec{h}_y$. Budeme používat následující terminologii:

- Pevný bod x se značí O a nazývá **počátek**.
- Vektor $\vec{h}_y$ se značí $\vec{y}$ a nazývá se **polohový vektor bodu y** .
- Prvky lineárního prostoru $\vec{E}$ se také označují jako **volné vektory afinního prostoru E** .

Pro libovolný bod y platí $y = O + \vec{y}$.

1.1.2 Definice. Afinní prostor E je **konečnědimenzionální** a má **dimenzi rovnou číslu n** , je-li konečnědimenzionální přidružený lineární prostor $\vec{E}$ a má dimenzi n . Říkáme, že je dán **souřadný systém** konečnědimenzionálního afinního prostoru E , je-li dán bod $O \in E$ (tzv. počátek) a báze prostoru $\vec{E}$.

Afinní prostor dimenze n budeme značit E^n .

Je-li $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ souřadný systém v afinním prostoru E , potom pro každý bod $x \in E$ existuje právě jedna n -tice čísel $x_1, \dots, x_n$ tak, že platí:

$$x = O + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i.$$

Čísla $x_1, \dots, x_n$ nazýváme **souřadnicemi bodu x v souřadném systému** $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

1.1.3 Definice. Afinní prostor E se nazývá **normovaný**, je-li normovaný jemu přidružený lineární prostor $\vec{E}$.

Normovaný afinní prostor je metrizable. Metriku zavádíme vztahem

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|$$

.

1.1.4 Definice. Afinní prostor E nazýváme **eukleidovský**, je-li přidružený lineární prostor $\vec{E}$ eukleidovský.

1.1.5 Příklad. Na eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ máme definován „standardní“ skalární součin volných vektorů vztahem

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

kde $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$.

Dále se budeme zabývat pojmem orientace afinního (eukleidovského) prostoru. Orientace afinního prostoru E je určena orientací jeho přidruženého lineárního prostoru $\vec{E}$.

Na množině všechází $\mathcal{B}$ prostoru $\vec{E}$ můžeme zavést relaci ekvivalence.

1.1.6 Definice. Dvě báze $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ jsou **shodně orientovány**, $\alpha \equiv \beta$, právě když matice přechodu mezi nimi má kladný determinant.

Vytvoříme množinu $\tilde{\mathcal{B}}$ všech třídází podle této ekvivalence. Snadno lze ukázat, že $\tilde{\mathcal{B}}$ obsahuje pouze 2 prvky. Prvek, do kterého patří námi předem vybraná báze, označíme „+“ a ten druhý „−“. Platí tedy

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{+, -\}$$

Touto volbou označení jsme určili, které báze budeme nazývat kladně orientované a které záporně orientované.

Volbou pevné souřadné soustavy (a tím i příslušné báze) jsme tedy určili orientaci prostoru $\vec{E}$ a tím potažmo i orientaci afinního prostoru E .

Značení

V následujícím textu budeme pod symbolem E rozumět reálný normovaný afinní prostor dimenze n . Většinou budeme používat jednu pevně zvolenou soustavu souřadnou. Body resp. volné vektory afinního prostoru tedy budeme charakterizovat jejich souřadnicemi ve zvoleném souřadném systému resp. příslušné bázi.

Symbolem $\mathcal{E}$ budeme značit eukleidovský prostor, jehož přidružený lineární prostor je $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem (ne nutně standardním). Na tomto prostoru budeme požadovat, aby příslušná báze zvolené soustavy souřadné byla ortonormální.

1.1.7 Definice. Nechtě $\varrho(x, y)$ je vzdálenost bodů v eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$. Zobrazení $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ se nazývá **shodnost v $\mathcal{E}$** , jestliže pro každé dva body $x, y \in \mathcal{E}$ platí

$$\varrho(x, y) = \varrho(h(x), h(y)).$$

Lze ukázat, že shodnosti v eukleidovském prostoru jsou tvaru $h(x) = \mathcal{R}x + b$, kde $\mathcal{R}$ je ortogonální matice (operátor).

1.1.2 Tečný prostor

1.1.8 Definice. Buď $x \in E$ a $\vec{u} \in \vec{E}$, potom dvojici $(x, \vec{u})$ nazýváme **tečným vektorem v bodě x** .

Množina všech tečných vektorů s operacemi sčítání a násobení číslem

$$(x, \vec{u}) + (x, \vec{v}) = (x, \vec{u} + \vec{v}); \quad \lambda(x, \vec{u}) = (x, \lambda\vec{u})$$

tvorí vektorový prostor, který značíme $T_x E$ a nazýváme **tečným prostorem k E v bodě x** .

Prostory $T_x E$ a $\vec{E}$ jsou izomorfní prostřednictvím zobrazení $(x, \vec{u}) \mapsto \vec{u}$. Dále je zřejmé, že pro každé dva různé body jsou tečné prostory v nich disjunktní.

$$(\forall x, y \in E; x \neq y) (T_x E \cap T_y E = \emptyset)$$

Zároveň jsou prostřednictvím zobrazení $(x, \vec{u}) \mapsto (y, \vec{u})$ izomorfní. Tento izomorfismus zadává tzv. paralelní přenos vektoru z jednoho bodu do druhého.

V případě prostoru $\mathcal{E}$ je $\forall x$ tečný prostor $T_x \mathcal{E}$ izomorfní s $\mathbb{R}^n$. Pomocí tohoto izomorfismu se na $T_x \mathcal{E}$ přenáší operace skalárního součinu:

$$\langle (x, \vec{u}), (x, \vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

1.1.9 Definice. Množinu $TE = \bigcup_x T_x E$ nazýváme **tečným fibrovaným prostorem k E** .

Při pevné volbě soustavy souřadné je každý element tečného fibrovaného prostoru $(x, \vec{u}) \in TE$ jednoznačně určen $2n$ -tíci čísel $(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$, kde $x_1, \dots, x_n$ jsou souřadnice bodu x ve zvolené souřadné soustavě a $u_1, \dots, u_n$ jsou souřadnice vektoru $\vec{u}$ v příslušné bázi. Je tedy zřejmé, že existuje bijekce mezi TE a $\mathbb{R}^{2n}$.

1.1.3 Bodové a vektorové funkce

Budeme se zabývat zobrazeními z podmnožiny reálných čísel do konečnědimenzionálního normovaného afinního prostoru E resp. do jeho přidruženého lineárního prostoru $\vec{E}$.

1.1.10 Definice. Nechtě $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Zobrazení $f : I \rightarrow E$ (resp. $f : I \rightarrow \vec{E}$) nazýváme **bodovou** (resp. **vektorovou**) **funkcí v E** reálné proměnné s definičním oborem I .

Vzhledem k tomu, že jsme se rozhodli používat jednu pevně zvolenou soustavu souřadnou, můžeme při popisu bodové (resp. vektorové) funkce f používat vyjádření ve složkách.

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)); f_i : I \mapsto \mathbb{R}, i \in \hat{n}$$

Pojmy jako limita či spojitost bodové (vektorové) funkce f se zřejmě přenášejí na limity či spojitosti složek f_i , $i \in \hat{n}$.

Mějme $I \subset \mathbb{R}$ interval a $t \in I$. Zobrazení $f : I \mapsto E$ (resp. $f : I \mapsto \vec{E}$) je **spojité v bodě** t , právě když $\forall i \in \hat{n}$ jsou funkce $f_i : I \mapsto \mathbb{R}$ spojité v bodě t .

Nyní se budeme zabývat diferencovatelností bodové (vektorové) funkce. Nejprve uvedeme definici derivace.

1.1.11 Definice. Buď $I \subset \mathbb{R}$ interval, $t_0 \in I^\circ$ vnitřní bod I a f zobrazení $I \mapsto E$ ($\vec{E}$). Existuje-li limita $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t-t_0}(f(t) - f(t_0))$, nazveme ji **derivací zobrazení f v bodě** t_0 a označíme ji $f'(t_0)$, resp. $\frac{df}{dt}(t_0)$.

Derivace bodové (vektorové) funkce f v bodě je tedy vektor z přidruženého lineárního prostoru $\vec{E}$. Na množině bodů, ve kterých existuje derivace zobrazení $f : I \mapsto E(\vec{E})$, je definováno nové zobrazení $f' : t \mapsto f'(t)$ z I do $\vec{E}$, což je, na jistém podintervalu definičního oboru (pokud existuje), vektorová funkce. Na vektorovou funkci f' můžeme opět aplikovat definici 1.1.11. Takto lze definovat derivace druhého řádu a indukci derivace vyšších řádů.

Dále je zřejmé, že f má v bodě t_0 derivaci, právě když existují derivace funkcí $f'_i(t_0)$, $\forall i \in \hat{n}$ a platí:

$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0))$$

Indukcí dostaneme podobný vztah i pro derivace vyšších řádů.

1.1.12 Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f : I \mapsto E$ ($\vec{E}$) a $p \in \mathbb{N}$. Řekněme, že zobrazení f je **p -krát spojitě diferencovatelné**, nebo že je **třídy C^p** , je-li jeho p -tá derivace spojitá v každém bodě intervalu I . Zobrazení f je **třídy C^∞** , je-li třídy C^p pro každé přirozené číslo p .

1.2 Parametrizovaná křivka

Parametrizovanou křivku bychom mohli jednoduše definovat jako spojitě zobrazení intervalu I do konečnědimenzionálního normovaného afinního prostoru E . Požadavek spojitosti se však ukazuje jako nedostatečný vzhledem k určitým vlastnostem křivky. Mohou tak např. vzniknout křivky, u kterých nelze určit délku. Lze ukázat, že tyto „patologické“ vlastnosti se odstraní, budeme-li požadovat diferencovatelnost zobrazení f .

1.2.1 Definice. Buď $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval a $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Zobrazení $f : I \mapsto E$ třídy C^p nazýváme **otevřenou parametrizovanou křivkou třídy C^p** . Množina bodů $f(I)$ v E se nazývá **obraz křivky f** .

Proměnná t se nazývá parametrem křivky. Pokud bychom chtěli křivku definovat na polouzavřeném nebo uzavřeném intervalu, použijeme následující definici

1.2.2 Definice. Nechť $f : [a, b] \mapsto E$ je zobrazení takové, že zúžení f na $]a, b[$ je třídy C^p , $p \geq 1$ a v krajních bodech a a b existují konečné limity $f^{(i)}(a) = \lim_{t \rightarrow a+} f^{(i)}(t)$ a $f^{(i)}(b) = \lim_{t \rightarrow b-} f^{(i)}(t)$ pro $1 \leq i \leq p$. Potom f nazýváme **parametrizovanou křivkou třídy C^p** .

Obraz křivky bude v tomto případě definován stejně. V krajních bodech uzavřeného intervalu jsme tedy rozšířili pojem derivací i -tého řádu ve smyslu příslušných

jednostranných derivací. Podle předpokladu $p \geq 1$ je parametrizovaná křivka diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru I (libovolný interval). Toho využijeme k zavedení pojmu regularity.

1.2.3 Definice. Bod $t \in I$ se nazývá **regulárním bodem** parametrizované křivky, pokud $f'(t) \neq \vec{0}$ a **stacionárním bodem** v opačném případě. Parametrizovaná křivka f třídy C^p se nazývá **regulární parametrizovanou křivkou třídy C^p** , právě když je regulární v každém bodě $t \in I$.

1.2.4 Příklad. Mějme bod $x \in E$ a nenulový vektor $\vec{v} \in \vec{E}$. Můžeme definovat zobrazení $f: \mathbb{R} \mapsto E$ jako $f(t) = x + t\vec{v}$. Dostali jsme tedy otevřenou parametrizovanou křivku, kterou nazýváme **přímkou se směrovým vektorem $\vec{v}$** . Je zřejmé, že přímka je regulární v každém bodě ($f' = \vec{v}$).

Dále se budeme zabývat skutečností, že změna parametru nezmění „geometrický tvar“ obrazu křivky. Z tohoto důvodu si zavedeme pojem difeomorfismu otevřeného intervalu.

Řekněme, že zobrazení $\phi:]a, b[\mapsto]c, d[$ je **difeomorfismus třídy C^p** , právě když ϕ je bijekce a ϕ i ϕ^{-1} jsou třídy C^p .

Pokud budeme v dalším textu říkat, že něco je třídy C^p , budeme tím automaticky myslet $p \geq 1$.

1.2.5 Definice. Nechtě $f:]a, b[\mapsto E$ a $g:]c, d[\mapsto E$ jsou dvě otevřené parametrizované křivky třídy C^p . Difeomorfismus $\phi:]a, b[\mapsto]c, d[$ třídy C^p takový, že $f = g \circ \phi$, se nazývá **změnou (transformací) parametru od g k f** . Pokud $\phi' > 0$ na $]a, b[$, říkáme, že **zachovává orientaci**.

Rozšířením pojmu difeomorfismus můžeme zavést změnu parametru také pro parametrizované křivky, které nejsou otevřené.

Pomocí změny parametru resp. změny parametru zachovávající orientaci zavedeme na množině parametrizovaných křivek třídy C^p relaci $\equiv$ resp. $\equiv$. Je zřejmé, že relace $\equiv$ je ekvivalence. Z vlastností derivace složeného a inverzního zobrazení plyne, že i $\equiv$ je relace ekvivalence.

1.2.6 Definice. Třída ekvivalence $\equiv$ parametrizovaných křivek se nazývá **křivka v E** . Třída ekvivalence $\equiv$ parametrizovaných křivek se nazývá **orientovaná křivka v E** .

Obraz křivky f nezávisí ani na parametrizaci ani na orientaci a značíme ho $\langle f \rangle$.

1.2.1 Délka křivky, parametrizace obloukem

1.2.7 Definice. Nechtě $I, I' \subset \mathbb{R}$, $I' \subset I$ jsou intervaly a $f: I \mapsto E$ je regulární parametrizovaná křivka třídy C^p . Potom číslo $l(f; I') = \int_{I'} \|f'(t)\| dt$ nazveme **délkou křivky na intervalu I'** .

Klasicky se délka křivky definuje jako suprémum z množiny délek lomených čar příslušných danému úseku křivky. Dále se dokazuje, že pro křivku třídy aspoň C^1 je toto suprémum vždy konečné (pokud I' je omezený) a je rovno integrálu, který jsme uvedli v naší definici.

1.2.8 Definice. Nechtě $f: I \mapsto E$ je regulární parametrizovaná křivka třídy C^p . Jestliže $\|f'(t)\| = 1$, $\forall t \in I$, řekneme, že křivka je **parametrizovaná obloukem**.

Ukážeme, že každá regulární křivka má parametrizaci obloukem. Nechtě tedy $f: I \mapsto E$ je regulární parametrizovaná křivka třídy C^p a $t_0 \in I$. Na intervalu I definujme funkci $s: I \mapsto \mathbb{R}$ vztahem

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$$

Nazveme ji **obloukem (přirozeným parametrem)** příslušným k parametrizaci f .

Z regularity křivky plyne, že oblouk má v každém bodě $t \in I$ kladnou derivaci $s'(t) = \|f'(t)\| > 0$. Funkce s je tedy vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu I na interval $J \equiv s(I)$ (s je prostá a spojitá).

Lze ukázat, že $s : I \mapsto J$ je dokonce difeomorfismus třídy C^p .

Parametrizovaná křivka $g : J \mapsto E$ definovaná jako $g = f \circ \varphi$, kde $\varphi = s^{-1}$, je (C^p) ekvivalentní parametrizované křivce f . Přitom platí $f = g \circ s$ a s je tedy transformací parametru od g k f zachovávající orientaci.

$$g'(u) = (f \circ \varphi)'(u) = f'(\varphi(u))\varphi'(u) = \frac{f'(\varphi(u))}{s'(\varphi(u))} = \frac{f'(\varphi(u))}{\|f'(\varphi(u))\|}$$

Zřejmě $\|g'(u)\| = 1$, $\forall u \in J$ a g je tedy křivka parametrizovaná obloukem.

1.2.2 Tečna ke křivce, vektorové pole

1.2.9 Definice. Buď $f : I \mapsto E$ regulární parametrizovaná křivka třídy C^p a $t_0 \in I$. Přímkou $T_{t_0,f}(s) = f(t_0) + sf'(t_0)$, $s \in \mathbb{R}$, nazýváme **tečnou ke křivce f v bodě $f(t_0)$** . Podprostor $T_{f(t_0)}f = \{(f(t_0), \vec{v}) | \vec{v} \in [f'(t_0)]_{\text{lin}}\}$ prostoru $T_{f(t_0)}E$ nazýváme **tečným prostorem křivky f v bodě $f(t_0)$** . Vektory z $T_{f(t_0)}f$ nazýváme **tečnými vektory křivky f v bodě $f(t_0)$** .

Tečnu ke křivce lze zavést i ve stacionárních bodech, ale pro naše potřeby je výše uvedená definice postačující.

1.2.10 Definice. Zobrazení $X : E \mapsto TE$, které splňuje $X(p) \in T_pE$, $\forall p \in E$, nazýváme **vektorovým polem**. Buď dále $f : I \mapsto E$ parametrizovaná křivka třídy C^p . Zobrazení $X : I \mapsto TE$ takové, že $X(t) \in T_{f(t)}E$, $\forall t \in I$, nazveme **vektorovým polem podél křivky f** . Pokud navíc platí $X(t) \in T_{f(t_0)}f$, $\forall t \in I$, nazveme X **tečným vektorovým polem podél křivky f** .

Vektorové pole X podél křivky f je zřejmě tvaru $X(t) = (f(t), x(t))$, kde $x(t) \in \vec{E}$. Přijmeme úmluvu, že druhou složku vektorového pole podél křivky budeme značit malým písmem.

Řekneme, že vektorové pole X je třídy C^p , právě když zobrazení $x : I \mapsto \vec{E}$ je třídy C^p .

Na vektorová pole podél stejné křivky snadno přeneseme operace, které platí pro volné vektory. Například skalární součin vektorových polí $X(t) = (f(t), x(t))$ a $Y(t) = (f(t), y(t))$ podél křivky f má následující smysl $\langle X(t), Y(t) \rangle = \langle x(t), y(t) \rangle$, závisí tedy na parametru $t \in I$. Podobně přenesením na druhou složku zavedeme normu a derivace.

Mějme $f : I \mapsto E$ parametrizovanou křivku třídy C^p . Můžeme definovat vektorová pole podél f pomocí derivací parametrizace

$$F^{(k)}(t) = (f(t), f^{(k)}(t)), \quad t \in I, \quad k = 1, \dots, p.$$

1.3 Frenetův repér

Od této chvíle se budeme zabývat křivkami v eukleidovském prostoru dimenze n , který jsme označili $\mathcal{E}$ (viz 1.1.1). Skalární součin volných, vázaných vektorů i vektorových polí budeme značit symbolem „ $\cdot$ “.

1.3.1 Definice. Nechť $f : I \mapsto \mathcal{E}$ je parametrizovaná křivka třídy C^p , kde $p \geq n$ a $E_1(t), \dots, E_n(t)$, $E_i(t) = (f(t), e_i(t))$ jsou vektorová pole podél křivky f , která splňují následující podmínky:

- (i). Systém $E_1(t), \dots, E_n(t)$ je ortonormální.
- (ii). Vektorové pole E_i je třídy C^{n-i} pro každé $i = 1, \dots, n-1$ a třídy C^1 pro $i = n$.

Systém vektorových polí $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ nazýváme **pohyblivý repér podél f** .

Pohyblivý repér podél f takový, že pro každé k , $1 \leq k \leq n$ a $t \in I$ je k -tá derivace $f^{(k)}(t)$ křivky $f(t)$ lineární kombinací vektorů $e_1(t), \dots, e_k(t)$, se nazývá **Frenetův repér**.

Předpoklad (i) lze ekvivalentně přepsat jako

$$e_i(t) \cdot e_j(t) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad \forall t \in I,$$

nebo také

$$E_i(t) \cdot E_j(t) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad \forall t \in I.$$

1.3.2 Definice. Nechť $f : I \mapsto \mathcal{E}$ je parametrizovaná křivka třídy C^p , kde $p \geq n$. Jestliže její derivace $f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ jsou lineárně nezávislé pro všechna $t \in I$, nazýváme křivku f **obecnou parametrizovanou křivkou**.

Obecná parametrizovaná křivka je zřejmě regulární. Ze vztahů pro derivaci složené funkce plyne, že vlastnost obecnosti se zachovává při změnách parametru. Je tedy dobře definován pojem obecná křivka a obecná orientovaná křivka.

Připomeňme označení $F^{(k)}(t) = (f(t), f^{(k)}(t))$.

1.3.3 Věta. Buď $f : I \mapsto \mathcal{E}$ obecná parametrizovaná křivka třídy C^p , kde $p \geq n$. Potom existuje jediný Frenetův repér $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ s následujícími vlastnostmi:

- (i). Pro každé k , $1 \leq k \leq n-1$, jsou k -repéry $(F^{(1)}(t), \dots, F^{(k)}(t))$ a $(E_1(t), \dots, E_k(t))$ stejně orientovány.
- (ii). $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ je kladně orientován.

Tento Frenetův repér se nazývá **význačný (speciální) Frenetův repér**.

Důkaz. Užijeme Gram-Schmidtova ortonomalizačního procesu. Nejprve položíme

$$e_1(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}. \quad (1.1)$$

Potom postupně pro každé i , $2 \leq i \leq n-1$ klademe

$$e_i(t) = \frac{\tilde{e}_i(t)}{\|\tilde{e}_i(t)\|}, \quad (1.2)$$

kde

$$\tilde{e}_i(t) = f^{(i)}(t) - \sum_{k=1}^{i-1} (f^{(i)}(t) \cdot e_k(t)) e_k(t). \quad (1.3)$$

Poslední jednotkový vektor $e_n(t)$ doplníme tak, aby $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ byla kladně orientovaná báze.

Z konstrukce a vlastností křivky f plyne, že $e_i(t)$ je třídy C^{n-i} pro $1 \leq i \leq n-1$. Protože složky $e_n(t)$ jsou jednoznačně určeny jistými (diferencovatelnými) funkcemi složek vektorů $e_1(t), \dots, e_{n-1}(t)$, je $e_n(t)$ třídy C^1 .

Položíme $E_i(t) = (f(t), e_i(t))$ pro $1 \leq i \leq n$ a takto získaný systém vektorových polí je hledaný Frenetův repér. Jednoznačnost repéru plyne z jednoznačnosti jeho konstrukce. $\square$

1.3.4 Věta. Nechť $f : I \mapsto \mathcal{E}$ je obecná parametrizovaná křivka třídy C^p , kde $p \geq n$ a $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ je libovolný pohyblivý repér podél f . Označme $\omega_{ij}(t) = E'_i(t) \cdot E_j(t)$. Potom platí,

$$E'_i(t) = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} E_j(t), \quad (1.4)$$

kde $\omega_{ij}(t) = -\omega_{ji}(t)$. Dále existují koeficienty $\alpha_i(t) : I \mapsto \mathbb{R}$ takové, že platí

$$F'(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) E_i(t).$$

Je-li navíc $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ význačný Frenetův repér podél f , platí

$$\alpha_1(t) = \|F'(t)\|, \quad \alpha_i(t) = 0 \text{ pro } i > 1$$

$$\omega_{ij} = 0 \text{ pro } j > i + 1$$

Důkaz. Systém $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ tvoří ortonormální bázi. $F'(t)$ i $E'_i(t)$ jsou tedy lineární kombinací $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ se známými Fourierovými koeficienty. Platí

$$E'_i(t) = \sum_{j=1}^n (E'_i(t) \cdot E_j(t)) E_j(t).$$

Derivací vztahu $E_i(t) \cdot E_j(t) = \delta_{ij}$ dostaneme $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

Nechť je nyní $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ význačný Frenetův repér. Z důkazu předchozí věty je zřejmé, že $E'_i(t)$ je lineární kombinací $F'(t), \dots, F^{(i)}(t)$ a tedy $F^{(i)}(t)$ je lineární kombinací $E_1(t), \dots, E_i(t)$.

Pole $E'_i(t)$ závisí na $F'(t), \dots, F^{(i+1)}(t)$ a tedy na $E_1(t), \dots, E_{i+1}(t)$. Z této úvahy plyne $\omega_{ij} = 0$ pro $j > i + 1$. Z antisymetrie ω_{ij} navíc plyne $\omega_{ij} = 0$ pro $i = j$ a $j < i - 1$.

Z důkazu předchozí věty také dostáváme $F'(t) = \|F'(t)\| E_1(t)$. $\square$

Pro význačný Frenetův repér $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ tedy ve vektorovém zápisu platí

$$(E'_1(t), \dots, E'_n(t)) = -(E_1(t), \dots, E_n(t)) \omega(t),$$

kde $\omega(t)$ je antisymetrická matice tvaru

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & & & \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & & \\ & -\omega_{23} & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \omega_{n-1,n} \\ & & & -\omega_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

Závislosti mezi $E'_i(t)$ a $E_i(t)$ význačného Frenetova repéru dané vztahy 1.4 se nazývají **Frenetovy rovnice** křivky f .

1.3.5 Věta. Nechť $f : I \mapsto \mathcal{E}$ je obecná parametrizovaná křivka třídy C^p , kde $p \geq n$.

- (i). Nechť $h : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ je shodnost s příslušnou lineární izometrií $\mathcal{R}$ (tedy tvaru $y = \mathcal{R}x + b$ kde $\mathcal{R} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$). Položme $\tilde{f} = h \circ f$. Pak $\tilde{f}$ je obecná parametrizovaná křivka. Pro každý pohyblivý repér $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ podél f je systém vektorových polí $(\tilde{E}_1(t), \dots, \tilde{E}_n(t))$, kde $\tilde{e}_i(t) = \mathcal{R}(e_i(t))$ a $\tilde{E}_i(t) = (\tilde{f}(t), \tilde{e}_i(t))$, pohyblivý repér podél $\tilde{f}$. Navíc platí

$$\tilde{\omega}_{ij}(t) = \omega_{ij}(t) \text{ a } \|\tilde{F}'(t)\| = \|F'(t)\|.$$

- (ii). Necht $\tilde{f} : J \mapsto \mathcal{E}$ je parametrizovaná křivka třídy C^p a $\phi : J \mapsto I$ je libovolná změna parametru od f k $\tilde{f}$ zachovávající orientaci: $\tilde{f} = f \circ \phi$. Pro každý pohyblivý repér $E = (E_1(t), \dots, E_n(t))$ podél f je systém vektorových polí $\tilde{E} = (\tilde{E}_1(s), \dots, \tilde{E}_n(s))$, kde $\tilde{E}_i(s) = E_i(\phi(s))$, pohyblivý repér podél $\tilde{f}$. Je-li navíc f obecná parametrizovaná křivka, je i $\tilde{f}$ obecná parametrizovaná křivka a je-li E význačný Frenetův repér, je i $\tilde{E}$ význačný Frenetův repér a platí

$$\frac{\tilde{\omega}_{ij}(s)}{\|\tilde{F}'(s)\|} = \frac{\omega_{ij}(\phi(s))}{\|\tilde{F}'(\phi(s))\|}.$$

Důkaz. Provede se přímým výpočtem. $\square$

Předchozí věta nás vede k definici křivostí tak, aby nezávisely na poloze křivky v prostoru ani na parametrizaci.

1.3.6 Definice. Necht $f : I \mapsto \mathcal{E}$ je obecná parametrizovaná křivka třídy C^p , kde $p \geq n$ a $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ je význačný Frenetův repér podél křivky f . Funkce $\kappa_i(t) : I \mapsto \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$\kappa_i(t) = \frac{\omega_{ii+1}}{\|f'(t)\|}, \quad (1.5)$$

pro $1 \leq i \leq n-1$ se nazývá *i -tá křivost křivky f* .

První a druhá křivost se také nazývají křivost a torze (zvláště pokud se jedná o křivku v dimenzi $n = 3$).

Matici $\omega(t)$ můžeme nyní pomocí křivostí zapsat jako

$$\omega(t) = \|f'(t)\| \kappa(t),$$

kde

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_{12} & & & \\ -\kappa_{12} & 0 & \kappa_{23} & & \\ & -\kappa_{23} & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \kappa_{n-1,n} \\ & & & -\kappa_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice $\kappa(t)$ bývá nazývána **Cartanova matice**. Vztah mezi prvky Cartanovy matice a křivostmi je tedy:

$$\kappa_{i,i+1} = \kappa_i, \text{ pro } 1 \leq i \leq n-1, \quad \kappa_{i,i-1} = -\kappa_i, \text{ pro } 2 \leq i \leq n, \text{ jinak } \kappa_{ij} = 0$$

1.3.7 Věta. Necht $f : I \mapsto \mathcal{E}$ je obecná parametrizovaná křivka třídy C^p , kde $p \geq n$. Potom pro každé i , $1 \leq i \leq n-2$, je $\kappa_i > 0$.

Důkaz. Z věty 1.3.3 víme, že $E_1(t), \dots, E_{n-1}(t)$ jsou lineární kombinací $F'(t), \dots, F^{(n-1)}(t)$. Pro $i = 1, \dots, n-1$ platí

$$E_i(t) = \sum_{j=1}^i a_{ij}(t) F^{(j)}(t),$$

kde koeficienty a_{ij} splňují, $a_{ij} = 0$ pro $j > i$ a $a_{ii} > 0$. Invertujeme-li toto vyjádření, dostaneme pro $i = 1, \dots, n-1$,

$$F^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^i b_{ij}(t) E_j(t),$$

kde $b_{ii}(t) = \frac{1}{a_{ii}(t)} > 0$. Protože $F^{(j)}(t) \cdot E_i(t) = 0$ pro $j < i$, dostáváme

$$\|F'(t)\| \kappa_i(t) = \omega_{ii+1}(t) = E_i'(t) \cdot E_{i+1}(t) = a_{ii}(t) F^{(i+1)}(t) \cdot E_{i+1}(t) = a_{ii} b_{i+1, i+1}.$$

Pro $i = 1, \dots, n-2$ dostáváme tedy $\kappa_i(t) > 0$. $\square$

1.3.8 Věta. Necht $f : I \mapsto \mathcal{E}$ a $\tilde{f} : I \mapsto \mathcal{E}$ jsou obecné parametrizované křivky třídy C^p , kde $p \geq n$, s význačnými Frenetovy repéry $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ a $(\tilde{E}_1(t), \dots, \tilde{E}_n(t))$. Jestliže $\kappa_i(t) = \tilde{\kappa}_i(t)$, kde $1 \leq i \leq n-1$, a $\|f'(t)\| = \|\tilde{f}'(t)\|$ pro každé $t \in I$, pak existuje jediná shodnost h taková, že

$$\tilde{f} = h \circ f.$$

Důkaz. Vezměme $t_0 \in I$ libovolně, ale pevně. Zřejmě existuje jediná shodnost $h : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ taková, že

$$h(f(t_0)) = \tilde{f}(t_0) \text{ a } \mathcal{R}(e_i(t_0)) = \tilde{e}_i(t_0)$$

pro každé i , $1 \leq i \leq n$, kde $\mathcal{R}$ je lineární isometrie příslušná h (viz 1.1.7).

Položme $\tilde{f} = h \circ f$. Z věty 1.3.5 víme, že $\tilde{f}$ je také obecná parametrizovaná křivka a platí $\tilde{\omega}_{ij}(t) = \omega_{ij}(t)$ a $\|\tilde{f}'(t)\| = \|f'(t)\|$. To nám spolu s předpoklady věty dává

$$\tilde{\omega}_{ij}(t) = \omega_{ij}(t) = \omega_{ij}(t) \text{ a } \|\tilde{f}'(t)\| = \|f'(t)\| = \|f'(t)\|$$

pro každé $t \in I$ a $i, j = 1, \dots, n$.

Z konstrukce dále plyne

$$(\bar{e}_1(t_0), \dots, \bar{e}_n(t_0)) = (\tilde{e}_1(t_0), \dots, \tilde{e}_n(t_0)) \text{ a } \tilde{f}'(t_0) = f'(t_0).$$

Zavedeme funkci $\delta(t)$ vztahem

$$\delta(t) = \sum_{i=1}^n \|\bar{e}_i(t) - \tilde{e}_i(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n [\bar{e}_i(t) - \tilde{e}_i(t)] \cdot [\bar{e}_i(t) - \tilde{e}_i(t)]. \quad (1.6)$$

Protože $\bar{\omega}_{ii} = \tilde{\omega}_{ii} = 0$, po derivaci vztahu 1.6 získáme

$$\delta'(t) = 2 \sum_{i=1}^n [\bar{e}_i(t) - \tilde{e}_i(t)] \cdot [\bar{e}_i'(t) - \tilde{e}_i'(t)] = -2 \sum_{i=1}^n [\bar{e}_i(t) \cdot \tilde{e}_i'(t) + \tilde{e}_i(t) \cdot \bar{e}_i'(t)].$$

Dále využijeme Frenetovy rovnice (pro jednoduchost vynecháme t):

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= -2 \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \omega_{ij} \bar{e}_i \cdot \tilde{e}_j + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \bar{e}_j \cdot \tilde{e}_i \right] = \\ &= -2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \bar{e}_i \cdot \tilde{e}_j - 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \omega_{ji} \bar{e}_i \cdot \tilde{e}_j = \\ &= -2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \bar{e}_i \cdot \tilde{e}_j + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \omega_{ij} \bar{e}_i \cdot \tilde{e}_j = 0 \end{aligned}$$

Funkce $\delta(t)$ je tedy konstantní, a protože $\delta(t_0) = 0$, je rovna 0 všude na I . To je podle 1.6 možné jedinečně, pokud $\bar{e}_i = \tilde{e}_i$ pro každé i .

Z toho plyne

$$\tilde{f}'(t) = \|\tilde{f}'(t)\| \bar{e}_1(t) = \|\tilde{f}'(t)\| \tilde{e}_1(t) = \tilde{f}'(t),$$

takže rozdíl $\tilde{f}'(t) - f'(t)$ je konstantní. V bodě t_0 se ale rovnají a proto se rovnají všude na I .

Celkem tak máme $\tilde{f} = f = h \circ f$ a důkaz je dokončen. $\square$

1.3.9 Věta. Necht $\kappa_1(t), \dots, \kappa_{n-1}(t)$ jsou funkce definované na otevřeném intervalu $]a, b[$ obsahujícím bod 0 takové, že κ_i je třídy C^{n-i-1} pro $i = 1, \dots, n-1$ a $\kappa_i(t) > 0$ pro $i = 1, \dots, n-2$ a všechna $t \in]a, b[$. Mějme dále libovolný bod $x \in \mathcal{E}$ a libovolnou kladnou ortonormální bázi $(V_1, \dots, V_n)$ prostoru $T_x \mathcal{E}$.

Potom existuje jediná obecná parametrizovaná křivka $f :]a, b[\rightarrow \mathcal{E}$ třídy C^p , kde $p \geq n$, jejímž parametrem je oblouk, taková, že její křivosti jsou právě $\kappa_1(t), \dots, \kappa_{n-1}(t)$, $f(0) = x$ a význačný Frenetův repér splňuje $E_i(0) = V_i$ pro každé i .

Důkaz. Důkaz provedeme pro případ, že $\mathcal{E}$ je eukleidovský prostor se standardním skalárním součinem.

Při parametrizaci obloukem platí mezi Cartanovou maticí $\kappa(t)$ a maticí $\omega(t)$ rovnost $\kappa(t) = \omega(t)$.

Označme $X(t)$ matici, jejíž sloupce jsou tvořeny vektory $e_1(t), \dots, e_n(t)$ resp. jejich složkami. Frenetovy rovnice můžeme zapsat v kompaktním tvaru jako

$$X'(t) = -X(t)\kappa(t) \quad (1.7)$$

Jedná se o systém obyčejných diferenciálních rovnic (ODE) pro neznámé složky e_i^j vektorů e_i . Označme V matici, jejíž sloupce jsou tvořeny vektory $v_1, \dots, v_n$ kde $V_i = (x, v_i)$. Počáteční podmínku volíme dle předpokladů věty jako

$$X(0) = V. \quad (1.8)$$

Z teorie diferenciálních rovnic víme, že systém 1.7 s počáteční podmínkou 1.8 má na intervalu $]a, b[$ jediné řešení $X(t)$.

Ukážeme, že matice $X(t)$ je ortogonální, a tedy že systém $e_1(t), \dots, e_n(t)$ je ortonormální. Aby tomu tak bylo, musí platit

$$X(t)X^\top(t) = I, \quad \forall t \in]a, b[. \quad (1.9)$$

Z vlastností matic X a κ dostáváme pro derivaci

$$(XX^\top)' = X'X^\top + X(X^\top)' = -X\kappa X^\top - X\kappa^\top X^\top = -X\kappa X^\top + X\kappa X^\top = 0$$

Z počáteční podmínky plyne $X(0)X^\top(0) = I$ a podmínka 1.9 je tedy splněna.

Definujme křivku f vztahem

$$f(s) = x + \int_0^s e_1(t)dt,$$

pro $s \in]a, b[$. Snadno lze ukázat, že f je hledaná křivka parametrizovaná obloukem s Frenetovým repérem X a křivostmi κ_i . $\square$

Kapitola 2

Studium kardiovaskulární dynamiky

Následkem činnosti srdce dochází k pohybu krve v cévách. Srdeční kontrakce a následné šíření tlakové vlny v aortě a dalších velkých tepnách se projevují pohybem celého těla. Pomocí silové plošiny můžeme tento pohyb detekovat a převést na vícerozměrný signál. Tento signál lze zpracovat metodami diferenciálního počtu jako křivku parametrizovanou časem. Tuto křivku můžeme dále vyjádřit pomocí invariantů křivosti. Pomocí další časové řady, výstupu z EKG, lze pak tyto křivosti interpretovat ve vztahu ke skutečnému srdečnímu cyklu.

2.1 Srdeční cyklus

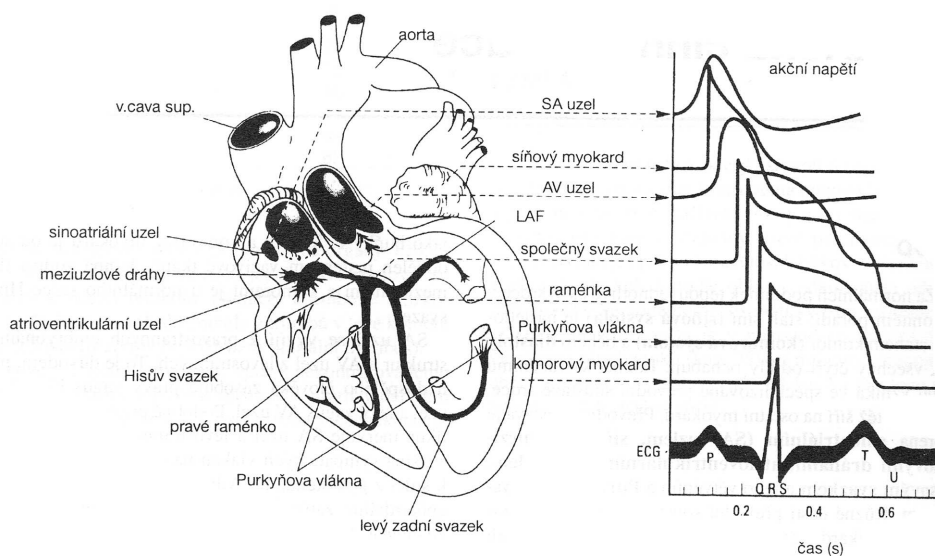
Za normálních podmínek tepou jednotlivé části srdce v zákonitém pořadí: stah síní (síňová systola) je následován stahem komor (komorová systola) a během diastoly pak všechny čtyři oddíly ochabují. Podnět k srdečnímu stahu vzniká ve specializované převodní soustavě srdce, kterou se též šíří na ostatní myokard (srdeční svalovinu). Převodní soustava znázorněná na obrázku 2.1 je tvořena sinoatriálním (SA) uzlem, síňovými meziuzlovými dráhami, atrioventrikulárním (AV) uzlem, Hisovým svazkem a jeho větvením a Purkyňovým systémem. Různé části převodní soustavy, stejně jako pracovní myokard za patologických okolností, mají schopnost spontánní tvorby vzruchů. SA uzel však tvoří normálně vzruchy nejrychleji a depolarizace se z něj rozšíří na ostatní oblasti dříve, než se samy spontánně vybijí. SA uzel je proto přirozený udavatel rytmu a frekvence jeho vzruchů určuje frekvenci srdečních stahů. Impulzy tvořené SA uzlem jsou vedeny síňovými dráhami, AV uzlem, Hisovým svazkem na obě raménka a cestou Purkyňova systému ke komorovému svalu.

Zákonitě uspořádaný proces depolarizace spouští kontrakční vlnu, která se šíří myokardem. Systola síní začíná za vlnou P na EKG. Systola komor začíná na konci kmitu R a končí těsně za vlnou T. Kontrakce vyvolá sekvenci tlakových a průtokových změn v srdečních dutinách a cévách, viz obrázky 2.2 a 2.3.

2.1.1 Mechanické děje v průběhu srdečního cyklu

Pozdní diastola

Na konci diastoly je mitrální a trikuspidální (trojcípá) chlopeň mezi síněmi a komorami otevřena a chlopeň aortální a pulmonální je uzavřena. Během diastoly krev přitéká do srdce a plní síně i komory. Jak se komory postupně rozpínají, rychlost



Obrázek 2.1: Převodní soustava srdce. Typické membránové akční napětí SA a AV uzlu, dalších částí převodní soustavy, síňového a komorového svalu jsou zobrazeny spolu s elektrocardiogramem (EKG). Akční napětí a EKG jsou na téže časové ose. LAF je levý přední svazek.

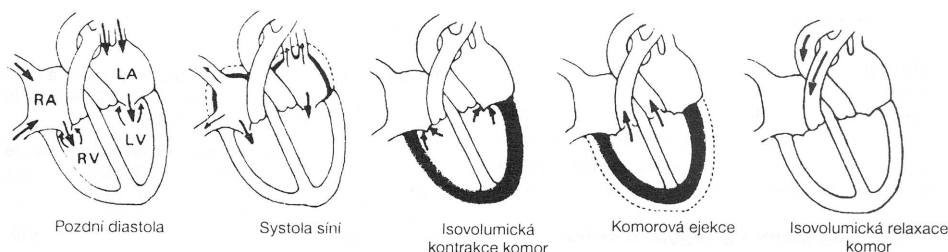
plnění klesá a cípy atrioventrikulárních (AV) chlopní se přivírají. Tlak v komorách přitom zůstává stále nízký.

Systola síní

Stahem síní se určité množství krve vžene do komor, avšak plnění komor je asi ze 70 % pasivní. Ústí dutých a plicních žil, obklopených síňovým myokardem, se přitom zužují. Malá část krve se těmito zúženými dostává zpět do žil.

Systola komor

Na začátku systoly komor se AV chlopně uzavírají. Myokard svým stahem stlačuje krev v dutinách, nitrokomorový tlak prudce vzrůstá. Tato fáze se nazývá **isovolum-**



Obrázek 2.2: Tok krve v srdci a velkých cévách během srdečního cyklu. Kontrahující se části srdce jsou vyznačeny černě. RA, LA - pravá a levá síň, RV, LV - pravá a levá komora.

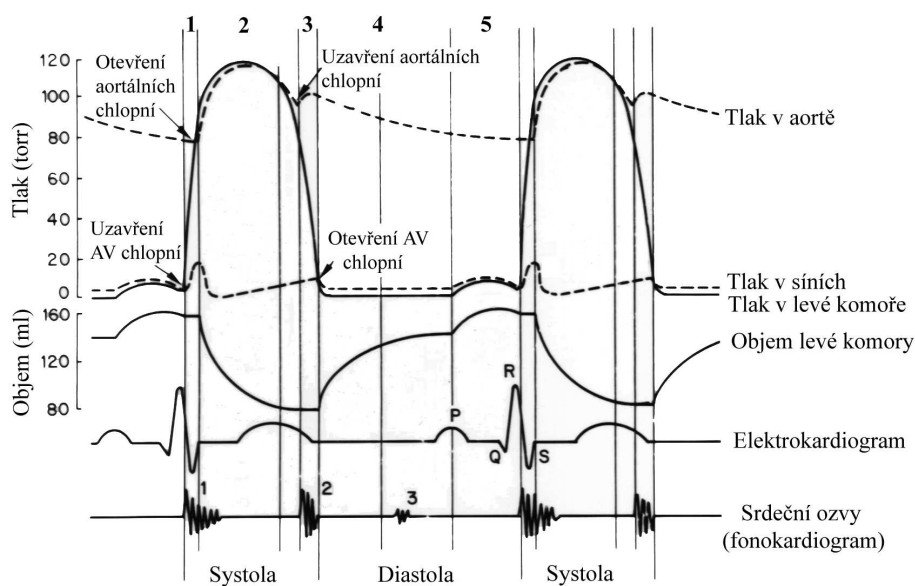
mická (isometrická) komorová kontrakce a trvá asi 50 ms. Končí ve chvíli, kdy tlak v levé komoře přesáhne tlak v aortě (80 torr) a tlak v pravé komoře přesáhne tlak v plicnici (10 torr).

Otevřením aortálních a pulmonálních chlopní začíná fáze komorové ejekce, která trvá asi 280 ms. Vypuzování krve je zpočátku rychlé a v dalším průběhu systoly se zpomaluje. Nitrokomorový tlak stoupá k maximu a před ukončením systoly o něco klesá. Maximum tlaku v levé komoře je kolem 120 torr a v pravé 25 torr nebo méně. Množství krve, vypuzené každou komorou při jednom stahu (systolický objem), je v tělesném klidu 70 - 90 ml. Po skončení systoly zůstává v každé komoře asi 50 ml krve.

Časná diastola

Poté, co komorový sval dosáhl vrcholu kontrakce, nitrokomorový tlak začne klesat. Tato fáze trvá asi 40 ms a končí v okamžiku, kdy je setrvačnost toku krve překonána a aortální a pulmonální chlopně se uzavřou. Přitom přechodně vznikají vibrace krve a cév. Tlak v komorách začne strmě klesat a nastává fáze **isovolumické relaxace**. Tato fáze končí okamžikem poklesu tlaku v komorách pod tlak v síních. AV chlopně se otevrou a umožní tak nové naplnění komor krví. Plnění je zpočátku rychlé a během diastoly postupně slábne.

Děje v průběhu srdečního cyklu jsou znázorněny na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Děje v průběhu srdečního cyklu. Fáze cyklu jsou označeny nahoře číslem: 1 - isovolumická kontrakce, 2 - ejekce komor, 3 - isovolumická relaxace, 4 - plnění komor, 5 - systola síní.

2.1.2 Srdeční ozvy

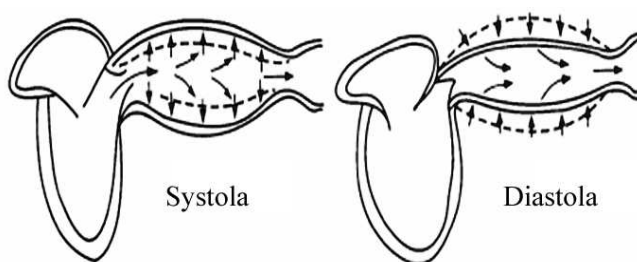
Za normálních okolností je možné slyšet během každého srdečního cyklu dvě ozvy. První je hlubší a o něco delší. Je způsobena vibracemi při náhlém uzavření síňokomorových chlopní na začátku systoly, viz obrázek 2.3. Druhá ozva je kratší a vyšší. Vzniká vibracemi při uzavěru semilunárních chlopní těsně po skončení systoly. Třetí

ozva je slyšet na konci první třetiny diastolické fáze. Je spojena s fází rychlého plnění komor. Konečně čtvrtá ozva je slyšitelná těsně před první ozvou, je-li síňový tlak vysoký nebo u nepoddajných komor. Je rovněž způsobena plněním komor krví.

2.2 Hemodynamika

Krev vypuzená během systoly do aorty nejen pohání tok krve v cévách, ale vyvolá též tlakovou vlnu, která se stěnou cév šíří na periferii a při svém postupu je rozepíná. Toto rozepětí je hmatné jako puls (tep).

V místě kam dorazí tlaková vlna dojde v důsledku vzrůstu tlaku (systola) k rozepnutí tepenné stěny. Během systoly tedy daný úsek cévy zadržuje část krve, kterou odevzdá během diastoly. Tento proces (tzv. arterial buffering) je znázorněn na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Arterial buffering na vzestupné části aorty.

Rychlost pulsu přenášeného tepnami je ovlivněna elastickými a geometrickými vlastnostmi tepenné stěny a také hustotou krve. Vztah mezi rychlostí tlakové vlny, tlakem a pružností cévní stěny byl formalizován v mnoha matematických modelech. Ve většině z nich je uvažován kruhový průřez tepny. Asi nejznámější rovnice popisující rychlost šíření tlakové vlny (v_{PWV}), je **Moens-Kortewegova rovnice**

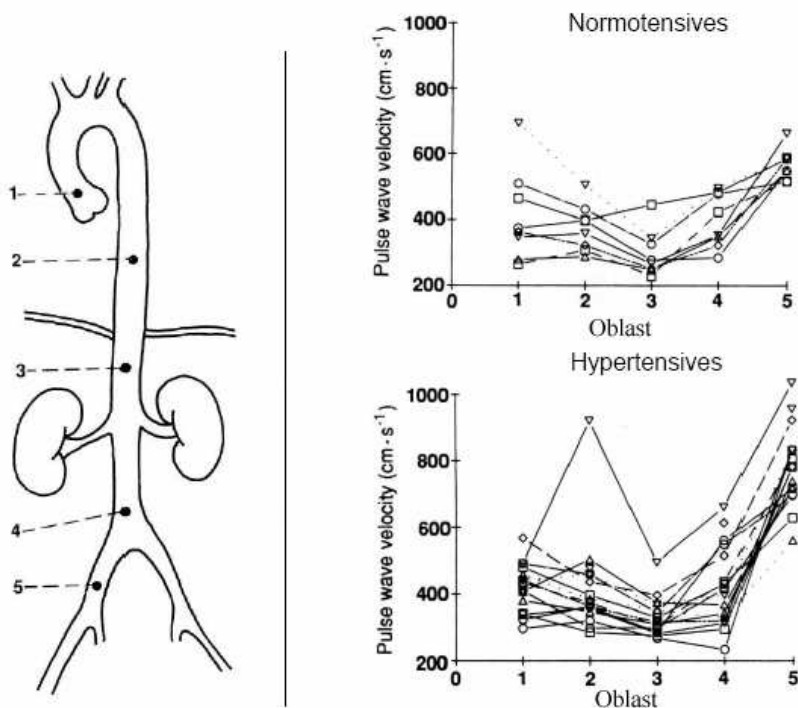
$$v_{PWV}^2 = \frac{Eh}{2r\rho}, \quad (2.1)$$

kde h je tloušťka cévní stěny, ρ je hustota krve (konstantní), r je vnitřní poloměr a E je modul pružnosti cévní stěny.

Na obrázku 2.5 jsou znázorněny výsledky měření rychlosti šíření tlakové vlny v různých částech hlavního tepenného systému prováděného na osobách s normálním a zvýšeným tlakem. Tlaková vlna se v aortě u mladého člověka pohybuje rychlostí $2,5 - 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vlastní rychlost pohybu krve, která na rychlosti tlakové vlny nezávisí, má v důsledku prudkých změn tlakových poměrů pulsní charakter. Elasticita tepen postupně převádí pulsující akci srdce na laminární tok krve k tělním buňkám.

Jak stárneme, dochází ke změnám dynamiky tohoto systému. Strukturní změny cévní stěny zahrnují fragmentaci a degeneraci elastinu, vzrůst obsahu kolagenu a zužování tepenné stěny. Dochází tedy ke snižování elasticity cév. Toto všechno se projevuje vzrůstem rychlosti šíření tlakové vlny.

Epidemiologické studie ukazují, že rychlost šíření tlakové vlny, se svojí vazbou na elasticitu cév, je důležitý ukazatel kardiovaskulárního rizika. Na obrázku 2.6 jsou znázorněny výsledky studie [8] týkající se pravděpodobnosti přežití v závislosti na rychlosti tlakové vlny, která byla provedena na pacientech s ledvinovým onemocněním v koncovém stádiu.



Obrázek 2.5: Rychlost šíření tlakové vlny (pulse wave velocity) v různých místech aorty a pánevní tepny. Měření bylo prováděno pomocí funkční magnetické rezonance na dvou skupinách osob - s normálním (normotensives) a zvýšeným krevním tlakem (hypertensives).

Zjišťování rychlosti šíření tlakové vlny je v praxi velmi problematickou záležitostí. Nejprve je potřeba určit časový odstup ΔT , ve kterém tlaková vlna dorazí do dvou různých míst podél své cesty. Potom se musí zjistit, jaká je mezi těmito místy vzdálenost (označíme L). Rychlost šíření tlakové vlny je potom dána jejich podílem.

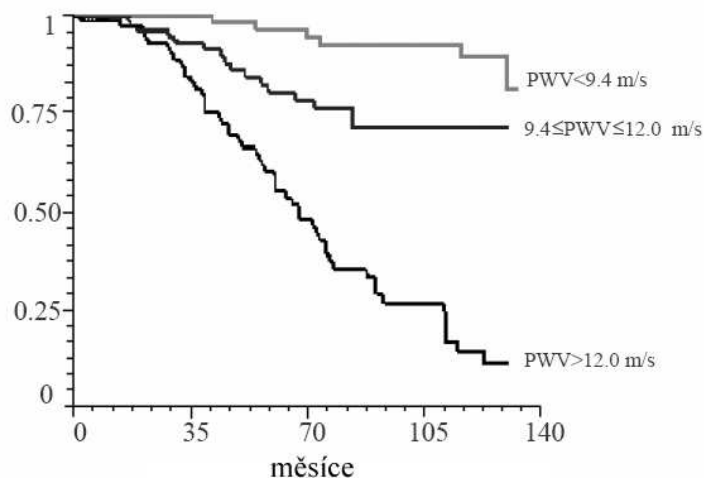
$$v_{PWV} = \frac{L}{\Delta T} \quad (2.2)$$

Standardní metody používané při určování těchto dvou potřebných hodnot jsou velmi náročné. Jejich náročnost spočívá v potřebě, buď velkého zásahu do lidského organismu, nebo velmi speciálního (a tedy drahého) technického vybavení.

Mezi invazivní metody patří např. zavádění katetrů, které v příslušném místě měří tlak. Neinvazivní metody jsou potom např. funkční magnetická rezonance nebo echokardiografie za použití dvou sond. Posledně jmenovaná metoda slouží pouze k určení časového odstupu ΔT . Vzdálenost mezi příslušnými body je nutné určit jiným způsobem, např. pomocí (normální) magnetické rezonance, CT apod.

2.2.1 Vliv toku krve na pohyb lidského těla

Při srdečním cyklu dochází ke kontrakcím srdečního svalu, které vyvolávají prudké pohyby krve. Z levé komory je během systoly krev vytlačována do aorty. Vzniklá tlaková vlna se šíří krevním řečištěm. Přitom mění směr (např. v aortálním oblouku) a částečně se odráží v místech větvení velkých tepen (např. bifurkace aorty, dělení pánevní tepny na vnitřní a zevní pánevní tepnu). Tyto události jsou spojeny

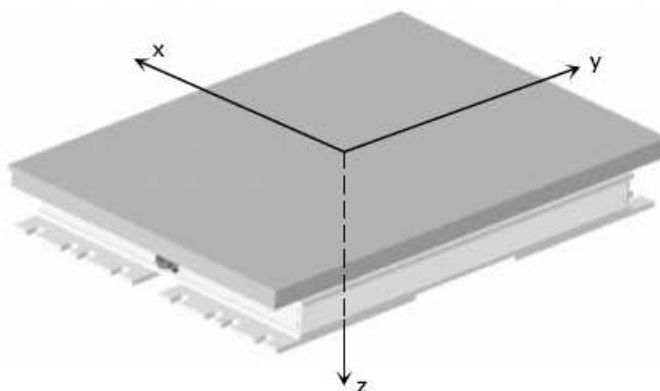


Obrázek 2.6: Pravděpodobnost celkového přežití studované populace podle rychlosti šíření tlakové vlny (PWV).

s předáváním hybnosti mezi srdcem a krví, a mezi tepnami a tlakovou vlnou. V souladu s principem akce a reakce se změna hybnosti jistého objemu krve následkem kontaktu se srdeční (tepennou) stěnou projeví pohybem samotné stěny, tzn. celého objektu (srdce, daný úsek tepny), který se předání účastnil. Tento pohyb se projevuje drobnými pohyby těla, které můžeme za pomoci dostatečně citlivého zařízení snímat. Klasická metoda využívající tohoto efektu je balistokardiografie ([10]).

2.3 Silová plošina

Silová plošina je zařízení umístěné na pevném podkladu, které měří síly působící na jeho svrchní desku. Jejím výstupem jsou 3 kolmé složky výslednice a 3 složky momentu těchto sil vůči počátku měřené ve stejném ortogonálním souřadném systému. Na obrázku 2.7 je znázorněna silová plošina a její standardní souřadný systém.



Obrázek 2.7: Standardní souřadný systém silové plošiny

Měření je obvykle realizováno pomocí čtyř senzorů sil umístěných v rozích plo-

šiny pod svrchní deskou. Každý senzor měří tři složky síly působící v daném místě mezi svrchní deskou a podkladem. Signály z těchto senzorů se potom převádí na 6 výše popsaných výstupních hodnot.

Na výstupu plošiny je analogový 6-ti kanálový signál, který se nejprve zesiluje a potom převádí do digitální podoby. U nejnovějších plošin (např. plošiny firmy Bertec) se digitalizace dat provádí přímo uvnitř silové plošiny a na výstupu z plošiny je již plně digitální signál, který přenosem na větší vzdálenosti (mezi plošinou a sběrným PC) neztrácí kvalitu. V případech kdy je na výstupu potřeba analogový signál se potom používají digital-analogové (D/A) převodníky.

Analogové zesilovače signálu z plošiny jsou vybaveny funkcí automatického nulování (auto zero). Tím je umožněno odečíst od signálu vliv různých pomůcek použitých při měření (např. židle nebo lehátko) a dosáhnout tak plné rozlišitelnosti.

Výstup z plošiny ve formě 6-ti signálů plně neodpovídá skutečným hodnotám složek sil a momentů, a je tedy potřeba provést kalibraci. Pro každou plošinu zvlášť je od výrobce dodána kalibrační matice, která umožňuje převést výstupní signál na skutečné hodnoty. Jestliže na výstupu naměříme hodnoty F'_x , F'_y , F'_z , M'_x , M'_y , M'_z pak skutečné hodnoty F_x , F_y , F_z , M_x , M_y , M_z spočítáme podle vztahu

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \\ M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

kde C je matice rozměru 6×6 . Kalibrační matice k námi použité plošině je

$$C = \begin{pmatrix} 21,7891 & -1,6582 & -0,5048 & 0,0558 & -0,1200 & 0,6807 \\ -0,9058 & 18,4961 & 0,5648 & 0,9997 & -0,1166 & 1,6683 \\ -1,9852 & -3,1859 & 153,3295 & -0,5817 & 0,3908 & -5,2889 \\ 0,3994 & -0,4475 & -0,1211 & 15,4285 & -0,1840 & 0,1820 \\ 1,4528 & 0,8332 & 0,4480 & -0,0879 & 10,8282 & 0,6205 \\ 0,1402 & 0,1686 & 0,4949 & 0,0365 & 0,0397 & 4,3869 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Takto získané výsledky už mají příslušný fyzikální význam složek síly a momentu v kartézském souřadném systému plošiny. Tento standardní souřadný systém je znázorněn na obrázku 2.7. Počátek souřadného systému je na povrchu svrchní desky v jejím středu, y -ová osa je orientována směrem od konektoru, x -ová osa míří doleva při pohledu ve směru y -ové osy a z -ová osa směřuje dolů tak, aby byl souřadný systém pravotočivý.

Během výrobního procesu vznikají jisté odchylky a bod O' , vůči kterému je ve skutečnosti počítána výslednice sil a výsledný moment, je od počátku standardního souřadného systému O trochu posunut a má v tomto systému souřadnice (a, b, c) . Poloha tohoto bodu bývá zjišťována sérií kalibrací.

Síla působící na plošinu vlivem kontaktu s nějakým tělesem je přesně opačná síle, kterou naopak svrchní deska působí na toto těleso, kterou nazýváme reakční síla podkladu (ground reaction force).

2.3.1 Působíště tlakové síly

Silová plošina bývá nejčastěji používána k určování působíště tlakové síly (center of pressure - COP) a velikosti tzv. volného momentu. Ovlivňuje-li nějaký objekt měřicí část silové plošiny (svrchní deska), můžeme tuto interakci plně popsat pomocí výslednice působících sil v počátku a výsledného momentu těchto sil vzhledem ke

stejnému počátku standardního souřadného systému plošiny. Tyto hodnoty můžeme po jistých transformacích přímo odečíst z výstupu plošiny.

Stejnou situaci ovšem můžeme také popsat pomocí stejné výslednice sil přenesené do speciálního bodu ležícího na povrchu plošiny a výsledného momentu silových dvojic působících na plošinu, který má pouze vertikální složku. Tento bod se nazývá působíště tlakové síly a moment potom volný moment. Působíště tlakové síly je tedy definováno požadavkem, aby leželo v předem určené rovině (např. na povrchu plošiny) a aby výsledný moment silových dvojic, které vznikají při přenášení sil z místa jejich skutečného působení do tohoto bodu, měl pouze vertikální složku.

Výslednici vnějších sil označíme $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, výsledný moment silových dvojic $\vec{T}_z = (0, 0, T_z)$ a působíště tlakové síly $P = (x_p, y_p, 0)$. Snadno se ukáže [7], že vztah mezi těmito veličinami a momentem měřeným plošinou (vzhledem k bodu O') je

$$\vec{M} = \vec{r}_p \times \vec{F} + \vec{T}_z, \quad (2.5)$$

kde $\vec{r}_p = (x_p - a, y_p - b, -c)$ je vektor spojující body O' a P a „ $\times$ “ značí vektorový součin.

Z této vektorové rovnice snadno vyjádříme neznámé x_p , y_p a T_z .

$$x_p = -\frac{M_y + cF_x}{F_z} + a \quad (2.6)$$

$$y_p = \frac{M_x - cF_y}{F_z} + b \quad (2.7)$$

$$T_z = M_z + \frac{M_y + cF_x}{F_z}F_y + \frac{M_x - cF_y}{F_z}F_x \quad (2.8)$$

2.4 Měření toku krve pomocí silové plošiny

Silová plošina je zařízení umožňující s dostatečnou přesností detekovat drobné pohyby vznikající následkem srdeční aktivity. Měření se provádí za pomoci speciálního lehátka umístěného na plošině, na které si měřená osoba lehne, viz obrázek 2.8.

U klidně ležícího člověka má na působení těla na podložku rozhodující vliv právě pohyb jeho vnitřních částí. Tento pohyb je indukovan srdeční aktivitou a následným pohybem krve v cévách. Jsou zde i jiné zdroje vnitřních pohybů jako například peristaltické pohyby, žaludeční aktivita apod. Ty jsou ale mnohem pomalejší, nevykazují vzhledem k zpracovávaným datům periodický charakter, a nelze je tedy rozpoznat.

Po dobu měření je současně zaznamenáván signál z EKG a případně také signál z mikrofону, který snímá srdeční ozvy (fonokardiogram). Záznam hodnot měřených veličin provádíme při určité vzorkovací frekvenci. Naměřená data je výhodné vyhladit ve smyslu odstranění vysokofrekvenčních složek vznikajících např. chvěním podložky, které s měřenými procesy zřejmě nesouvisí. Získáme tedy $6 + 1$ (2) časových řad. Na obrázku 2.9 je ukázka typických dat naměřených tímto způsobem.

Z obrázku je rovněž patrné, že přímá interpretace takto naměřených dat je problematická. Budeme se tedy zabývat způsobem, jak tyto hodnoty převést do lépe interpretovatelné podoby. Jednou z možností je využít metod diferenciální geometrie křivek.

Signály získané ze silové plošiny budeme považovat za průměty křivky v 6-ti rozměrném prostoru ($\mathbb{R}^6$ se standardním skalárním součinem) do standardních souřadnicových os daných směrovými vektory $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), \dots, \vec{e}_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Definujeme tak křivku $f : I \mapsto \mathbb{R}^6$ parametrizovanou časem:

$$f(t) = (F_x(t), F_y(t), F_z(t), M_x(t), M_y(t), M_z(t)). \quad (2.9)$$



Obrázek 2.8: Měřicí místnost - silová plošina s lehátkem a měřenou osobou je vpravo.

Křivku budeme považovat za dostatečně hladkou (existují derivace požadovaných řádů). V první kapitole jsme si ukázali, že taková křivka je jednoznačně určena pomocí křivosti (požadavek obecnosti vynecháme). O křivostech proto předpokládáme, že by mohly dobře vyjadřovat proces, který stojí za produkovánými daty.

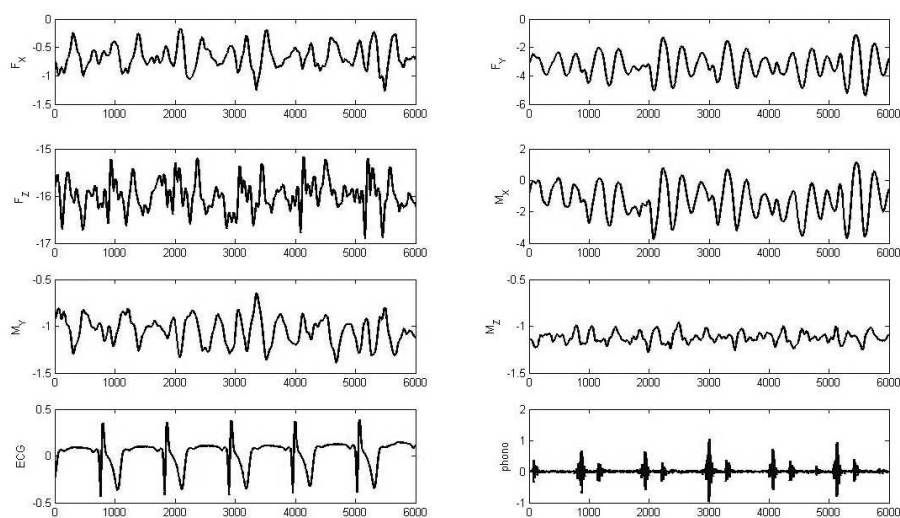
V této kapitole jsme také uvedli způsob, jakým lze požadované křivosti spočítat. Nejprve sestojíme Frenetův repér podle postupu použitého při důkazu věty 1.3.3. Křivosti potom určíme ze vztahu 1.5.

Při výpočtech křivosti nastane problém pouze v případě, že by derivace f' křivky f byla v některém bodě rovna 0. V tomto bodě by tedy musely být rovny 0 všechny derivace složek síly a momentu současně, což je značně nepravděpodobné. V ostatních případech dostaneme křivosti (první až čtvrtou) buď kladné nebo rovny nule. Druhý případ nastane pokud derivace křivky nebudou lineárně nezávislé.

Nalezené křivosti nyní spojíme se srdečním cyklem. Nalezneme si časy výskytu R vlny na EKG signálu, který jsme zaznamenávali současně s daty z plošiny. Tyto časy budeme uvažovat za počátky sledovaných srdečních cyklů. Délku sledování jednoho cyklu budeme volit např. 1000 ms. Tyto cykly mají tedy prostřednictvím počátečního bodu přímou souvislost se srdeční aktivitou. Každému cyklu jednoznačně odpovídá nějaký časový interval a tedy nějaký úsek křivky, který je charakterizován spočtenými křivostmi. Pokud porovnáme křivosti odpovídající jednotlivým cyklům, zjistíme, viz obrázek 2.10 pro první křivost, že se odlišují pouze do jisté míry, zatímco základní charakteristika zůstává stejná. Díky tomu má smysl vypočítat průměrné křivosti během jednoho cyklu.

Pokud si tyto průměrné křivosti během jednoho cyklu vyneseme do jednoho grafu, jak je provedeno na obrázku 2.11, vidíme, že polohy píků u jednotlivých křivostí jsou velmi podobné.

Nadále se proto se budeme zabývat pouze interpretací píků první křivosti.



Obrázek 2.9: Ukázka části naměřených dat. Na ose x je čas v ms.

2.5 Interpretace

V současné době probíhá výzkum vztahu křivostí a kardiovaskulárních událostí. Bez podrobnějšího výkladu zde uvedeme některé předběžné výsledky. Prozatím byla analyzována data naměřená u 17 zdravých dospělých mužů. Ve všech případech byl zaznamenáván výstup ze silové plošiny a EKG, u tří osob byly také snímány srdeční ozvy. Data byla zaznamenávána po dobu 8 minut při vzorkovací frekvenci 1000 Hz stejně pro všechny signály.

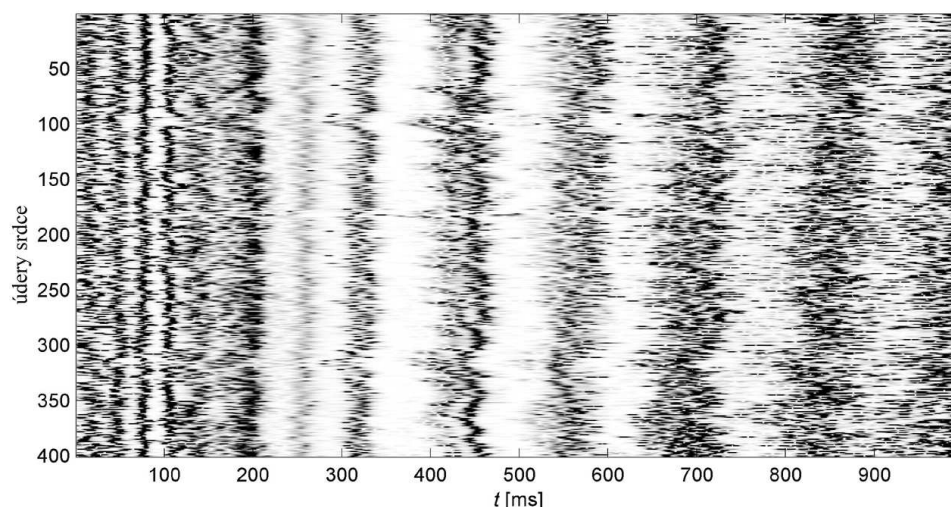
Budeme se nyní zabývat interpretací spočtené první křivosti. Přitom se především zajímáme o polohy jednotlivých píků (maxim), které jasně určují nějaký čas, spíše než o jejich velikost, která nemá zřejmý fyzikální obsah.

Pokusíme se přiřadit jednotlivé píky nějakým fyziologickým událostem. Má-li křivka v daném místě velkou křivost, znamená to, že se v daném místě stáčí prudčeji než jinde. V našem případě tedy v takovém místě (čase) dochází ke změnám složek sil a momentů - k jistému pohybu těla. Jedná-li se o výchylku opakující se v každém srdečním cyklu, potom je zřejmě spojena buď s pohybem samotného srdce nebo se změnou pohybu tlakové vlny.

Interpretaci poloh jednotlivých píků si ukážeme na příkladu průměrné křivosti znázorněné na obrázku 2.12.

Polohy jednotlivých píků

- 1 Objevuje se při uzavření AV chlopní na počátku systoly komor. K tomuto závěru nás vede fakt, že se objevuje současně s první srdeční ozvou, viz obrázek 2.11 pík E_2^+ .
- 2 Je spojen s isovolumickou kontrakcí komor.
- 3,4 Tyto píky nejspíše přísluší otevření pulmonárních a aortálních chlopní.
- 5 Nastává zhruba v první třetině ejekce komor. Nejspíše tedy souvisí s kontrakcí srdečního svalu. Je také možné, že se jedná o okamžik, ve kterém tlaková vlna opouští ústí aorty.
- 6 Píky v této oblasti odpovídají průchodu tlakové vlny aortálním obloukem.



Obrázek 2.10: Porovnání průběhu první křivosti v jednotlivých srdečních cyklech. Místa s velkou křivostí jsou vybarvená tmavě.

- 7 Tato oblast přísluší průchodu tlakové vlny větvením v břišní části aorty. Oddělují se zde velké tepny zásobující ledviny, játra apod.
- 8 Odpovídá okamžiku, kdy tlaková vlna dosáhne bifurkace aorty. Tento závěr můžeme opřít o několik pozorování. Současně s tímto píkem se objevuje maximální výchylka F_y , viz obrázek 2.11 pík K. Tato složka síly souvisí v našem uspořádání s podélným pohybem těla. Odraz tlakové vlny na bifurkaci přitom způsobí právě podélný (kaudální) pohyb těla.

Pokud měřená osoba během měření pokrčí nohy, dojde ke změně tlakových poměrů v tepenném systému dolních končetin. Charakter křivosti za tímto píkem se značně změní. Toto pozorování je také v souladu s naší interpretací tohoto píku.

O původu dalších píků křivosti, které se objevují za hranicí 400 ms, nemáme prozatím žádné informace. Je možné, že vznikají oscilací tlakové vlny mezi místy v aortě, na kterých dochází k částečnému odrazu.

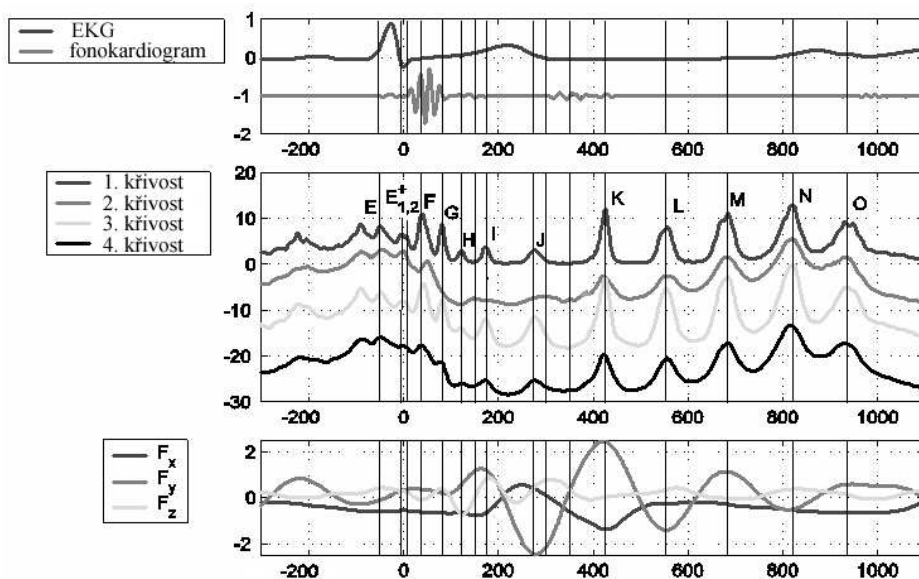
Ukazuje se, že získané výsledky jsou reprodukcibilní (tzn. opakovaná měření provedená na téže osobě dávají přibližně stejný výsledek). Na obrázku 2.13 je ukázka reproducibility u jedné z měřených osob.

2.6 Význam v medicíně

Na základě přiřazení jednotlivých píků kardiovaskulárním událostem jsme tedy schopni určit, kdy přesně tyto události u dané osoby nastaly.

Asi nejdůležitější veličina, která nás v této souvislosti zajímá je rychlost šíření tlakové vlny, která úzce souvisí s vlastnostmi cévní stěny. Vezmeme si dvě události spojené s šířením tlakové vlny. Dobu ΔT mezi těmito událostmi určíme jako rozdíl poloh příslušných píků. Délku L musíme určit některou ze standardních metod (nejlépe neinvazivní). Vztah 2.2 nám udává výslednou průměrnou rychlost mezi těmito body.

Na obrázku 2.14 jsou znázorněny výsledky přibližných výpočtů průměrné rychlosti tlakové vlny v aortě pro všech 17 měřených osob. Za události, mezi kterými



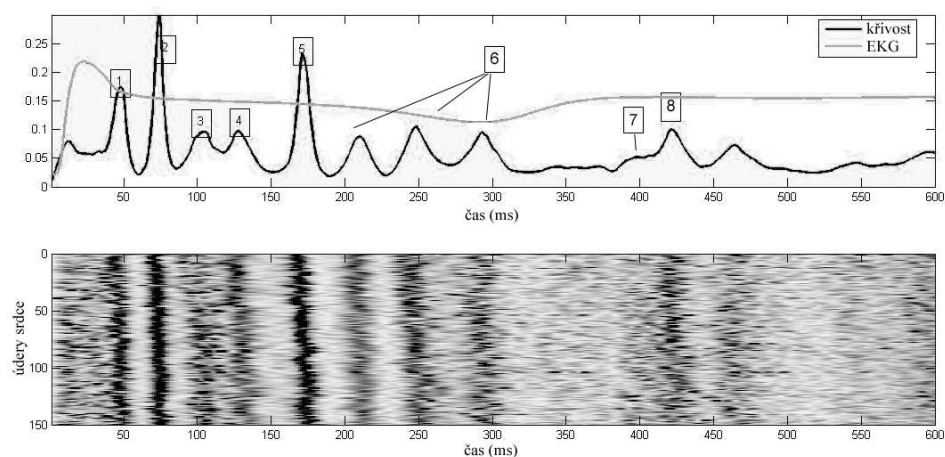
Obrázek 2.11: Ukázka naměřených a spočítaných závislostí.

byla tato rychlost počítána, byly voleny události spojené s píky 5 a 8. Délku aorty mezi těmito místy jsme přibližně určili jako 70 cm. Je patrné, že naměřená rychlost odpovídá hodnotám určeným jinými metodami, viz obrázek 2.5.

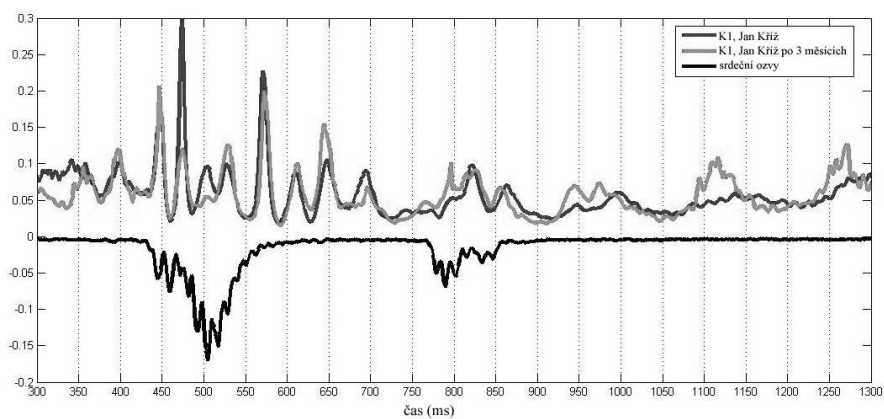
Pomocí spočítané křivosti můžeme rozpoznat některé vady na aortě. Jako příklad uvedeme výskyt aneurismatu, jehož různé druhy jsou znázorněny na obrázku 2.15. Porovnání výsledků zdravého člověka s normálním průběhem křivosti a pacienta s výskytem aneurismatu v hrudní části aorty je provedeno na obrázku 2.16. Vidíme, že do jistého okamžiku, mají křivosti obdobný průběh.

Další možností, kterou nám zkoumání kardiovaskulárního systému pomocí silové plošiny nabízí, je sledování vlivu léků působících na cévy. Například nitroglycerin způsobí ztenčení tepenné stěny a zvětšení jejího vnitřního průřezu. To se tedy projeví zpomalením tlakové vlny, což zaznamenáme jako oddálení některých píků v závislosti křivosti na čase.

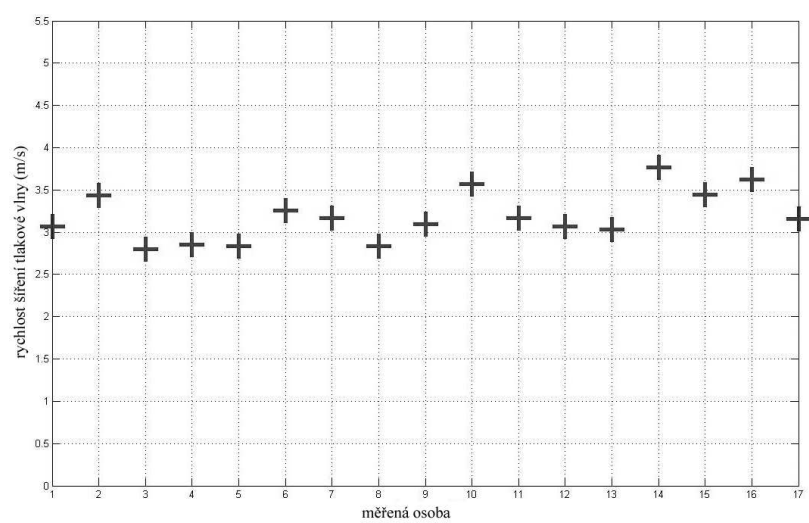
Největší výhodou metody, kterou se zde zaobíráme, je ovšem naprostá neinvazivita. Nejedná se tedy o žádný zásah do organismu, měřená osoba musí pouze po nějakou dobu v klidu ležet.



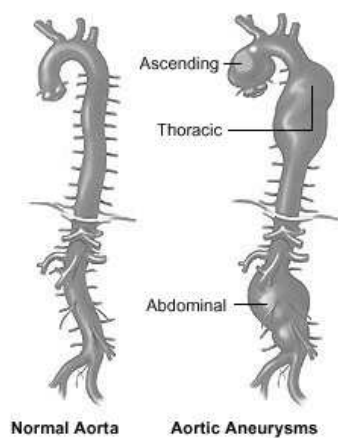
Obrázek 2.12: K interpretaci poloh jednotlivých píků.



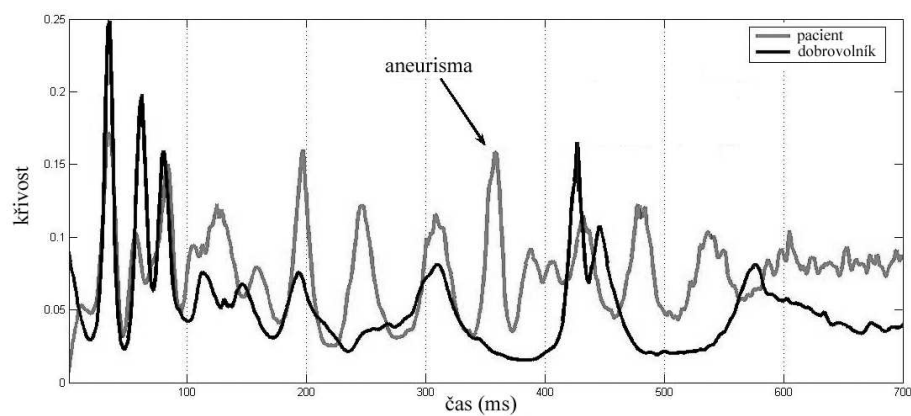
Obrázek 2.13: Ukázka reproducibility získaných výsledků.



Obrázek 2.14: Přibližná rychlost šíření tlakové vlny v aortě.



Obrázek 2.15: Různé druhy aneurismatu v aortě.



Obrázek 2.16: Porovnání křivosti u člověka bez aneurismatu a s aneurismatem.

Závěr

Analýza časových řad produkovaných silovou plošinou, při určité konfiguraci měření, se zdá být velmi perspektivní metodou ke zkoumání kardiovaskulární dynamiky. Při zpracování naměřených dat vycházíme z teorie diferenciální geometrie křivek. Výstup z časové plošiny bereme jako křivku v 6-ti rozměrném prostoru a metodou pohyblivého repéru počítáme její křivost. Ukázali jsme, že tyto křivosti mají jistý vztah k srdečnímu cyklu a navazujícímu šíření tlakové vlny ve velkých tepnách. O jaký vztah se jedná, je předmětem probíhajících výzkumů, jejichž některé závěry jsme zde prezentovali.

Z lékařského hlediska se jedná o zajímavou metodu mezi jejíž výhody patří především šetrnost k pacientům. S její pomocí lze určovat rychlost šíření tlakové vlny, což je jeden ze základních ukazatelů stavu velkých artérií a tedy kardiovaskulárního rizika. Průběh křivostí také indikuje některé patologické změny aorty, např. výskyt aneurismatu. V neposlední řadě může být zkoumán vliv léků působících na cévy.

Literatura

- [1] BUREŠ, J., HRUBČÍK, K. *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. Praha: Karolinum, 1998.
- [2] VANŽUROVÁ, A. *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1996.
- [3] KOHOUT, V. *Diferenciální geometrie*. Praha: SNTL, 1971.
- [4] KRUMP, L., SOUČEK, V., TĚŠÍNSKÝ, J. A. *Matematická analýza na varietách*. Praha: Karolinum, 1998.
- [5] CARMO, M. P. DO. *Differential geometry of curves and surfaces*. New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
- [6] GALLIER, J. *Geometric Methods and Applications For Computer Science and Engineering*. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [7] ŠTOLL, I. *Mechanika*. Praha: ČVUT, 1998.
- [8] SAFAR, M. E., HENRY, O., MEAUME, S. *Aortic Pulse Wave Velocity: An Independent Marker of Cardiovascular Risk*. Am J Geriatr Cardiol, 11(5):295-298, 304, 2002.
- [9] BRUNNER, M., MOESLINGER, T., SPIECKERMANN, P. G. *Echocardiography for teaching cardiac physiology in practical student courses*. Advances in Physiology Education, Vol. 13: N. 1, 1995
- [10] MCKAY, W., GREGSON, P., MCKAY, B., MILITZER, J. *Sternal acceleration ballistocardiography and arterial pressure wave analysis to determine stroke volume*. Clin Invest Med, 22(1):4-14, 1999.
- [11] BERTEC CORPORATION *Force Plate User Manual*. MIE Medical Research Ltd., 2003.
- [12] GANONG, W. F. *Přehled lékařské fyziologie*. Jinočany: Nakladatelství a vydavatelství H&H, 1999.
- [13] FIALA, P., VALENTA, J., EBERLOVÁ, L. *Anatomie pro bakalářské studium ošetrovatelství*. Praha: Karolinum, 2004.