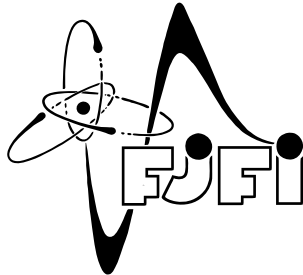


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ



# VÝZKUMNÝ ÚKOL

TRANSFORMACE OKRAJOVÝCH PODMÍNEK  
POMOCÍ POISSON-LIE T-PLURALITY

Ivo Petr

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

5. července 2007

*Název práce:*

**Transformace okrajových podmínek pomocí Poisson-Lie T-plurality**

*Autor:* Ivo Petr

*Obor:* Matematické inženýrství

*Druh práce:* Výzkumný úkol

*Vedoucí práce:* Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

*Abstrakt:* Zapišeme okrajové podmínky pro řešení  $\sigma$ -modelu pomocí lepící matice a odvodíme vztah pro její transformaci při Poisson-Lie T-pluralitě. Na příkladu konkrétního Drinfeldova double zjistíme závislost transformované lepící matice na souřadnicích double. Ukážeme, že okrajové podmínky na funkce vystupující v řešení  $\sigma$ -modelu se při provedení T-plurální transformace nezmění a že podmínka konformní symetrie se zachovává.

*Klíčová slova:*  $\sigma$ -model, Drinfeldův double, Poisson-Lie T-pluralita, okrajové podmínky, otevřená struna

*Title:*

**Transformation of boundary conditions via Poisson-Lie T-plurality**

*Author:* Ivo Petr

*Abstract:* We formulate boundary conditions for  $\sigma$ -model solution in terms of gluing matrix and derive its Poisson-Lie T-plurality transformation. We present an example of particular Drinfeld double and show how the transformed matrix depends on coordinates of the double. We show that the boundary conditions imposed on the functions in the  $\sigma$ -model solution are left unchanged by the transformation and that the conformal symmetry condition is preserved.

*Key words:*  $\sigma$ -model, Drinfeld double, Poisson-Lie T-plurality, boundary conditions, open string

# Obsah

0.1	Úvod . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Teorie</b>	<b>5</b>
1.1	Sigma modely . . . . .	5
1.2	Poisson-Lie T-dualita . . . . .	6
1.3	Poisson-Lie T-pluralita . . . . .	11
1.4	Řešení $\sigma$ -modelu . . . . .	11
1.5	Okrajové podmínky . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Příklad - Drinfeldův double <math>(4 1) \leftrightarrow (6_0 2)</math></b>	<b>17</b>
2.1	Řešení $\sigma$ -modelu . . . . .	17
2.2	Transformace okrajových podmínek . . . . .	22
2.2.1	D2-brána . . . . .	22
2.2.2	D1-brána . . . . .	24
2.2.3	D0-brána . . . . .	27
2.2.4	D(-1)-brána . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Závěr</b>	<b>30</b>
<b>A</b>	<b>Značení</b>	<b>31</b>

## 0.1 Úvod

Duální symetrie jsou patrně jedněmi z nejzajímavějších symetrií ve fyzice. O "dualitě" se hovoří tehdy, máme-li co do činění se dvěma zdánlivě různými modely, které jsou pouze jinými popisy stejné fyzikální reality. Široké pole pro uplatnění duálních symetrií nabízí teorie strun, v níž hrají zásadní úlohu jako nástroj pro získávání informací neporuchovými metodami. Díky tomu, že uvádí do vztahu odlišné popisy téhož, je někdy možný problém, neřešitelný v jednom modelu, převést do formalismu modelu druhého, kde už řešení může být nalezeno.

Významným prostředkem pro pochopení symetrií prostoročasu z pohledu strunové teorie je T-dualita ("target space"). Tu je možno realizovat jako transformaci působící na cílové varietě dvoudimenzionálního  $\sigma$ -modelu, který popisuje vývoj struny pomocí zobrazení ze světloplochy struny ("worldsheet") do d-dimenzionální variety. Původně byla T-dualita chápána jako symetrie pozadí prostoročasu, který připouštěl abelovské izometrie. Tento popis však nemohl obsáhnout celou řadu fyzikálně zajímavých situací. Významného zobecnění bylo dosaženo v [1], na který bezprostředně navazuje [2]. Zde byla představena myšlenka Poisson-Lie T-duality jako rozšíření dosavadní T-duality na větší algebraický objekt, tzv. Drinfeldův double. Poisson-Lie T-dualita byla zkoumána v řadě dalších prací jak z pohledu klasické, tak kvantové fyziky. Její možnosti byly ještě zesíleny na tzv. pluralitu, viz [3], a povedlo se rovněž nalézt řešení pohybových rovnic několika netriviálních  $\sigma$ -modelů.

Pro chování otevřené struny je zásadní nejen znalost řešení, ale i okrajových podmínek pro konce struny. Pohyb konců struny bývá omezen na D-brány a různé způsoby fixace konců struny vedou k různým druhům vibrací struny. To po kvantování vykládáme jako projevy různých částic. Z tohoto důvodu je velmi zajímavé prozkoumat, jak se při dualitě okrajové podmínky transformují.

Cílem mé práce bylo, seznámit se s problematikou  $\sigma$ -modelů a pokud možno co nejlépe porozumět Poisson-Lie T-pluralitě jako prostředku pro transformaci řešení jednoho modelu na řešení modelu jiného. Dále pak prozkoumat, jak se při této transformaci mění okrajové podmínky kladené na řešení, a nabyté znalosti aplikovat na konkrétní  $\sigma$ -model, jehož řešení je známo. Celá práce nevybočuje z rámce klasické fyziky. Pro úplný kvantový popis otevřené struny by bylo potřeba zkoumat množství dalších podmínek, které by uvažovaný  $\sigma$ -model měl splňovat.

První kapitola obsahuje shrnutí teoretického podkladu celé práce. Připomíná základní pojmy tématu: co je to  $\sigma$ -model, Drinfeldův double, Maninova trojice, původní myšlenku Poisson-Lie T-duality, její zobecnění na Poisson-Lie T-pluralitu a obecný postup jak T-plurální transformaci provést. Okrajové podmínky pro řešení pohybových rovnic  $\sigma$ -modelu jsou zde formulovány pomocí lepící matice, jejíž transformace je pak nalezena využitím vlastností pravoinvariantních polí.

Ve druhé kapitole jsou popsány konkrétní výpočty a výsledky pro  $\sigma$ -modely žijící na Drinfeldově doublem rozloženém do Maninových trojic  $(4|1)$  a  $(6_0|2)$ . Nejprve budou zrekapitulovány některé výsledky práce [4], v níž bylo nalezeno řešení zmiňovaných  $\sigma$ -modelů. Následně zvolíme konkrétní podobu okrajových podmínek ve tvaru lepící matice. Po vyjádření v patřičných souřadnicích provedeme její Poisson-Lie T-plurální transformaci. Výsledná matice bude záviset na určité sadě souřadnic, tedy na řešení  $\sigma$ -modelu. Dosazením známého řešení bude pak názorně demonstrováno, v jakém smyslu jsou okrajové podmínky pro uvažované modely ekvivalentní.

Třetí kapitola osahuje shrnutí práce a diskusi výsledků.

# Kapitola 1

## Teorie

Nyní přejdeme k samotné problematice  $\sigma$ -modelů. Připomeneme základní pojmy a zformulujeme teoretický podklad celé práce.

### 1.1 Sigma modely

Začneme formulací  $\sigma$ -modelu relevantního pro naše potřeby. Klasický nelineární dvoudimenzionální  $\sigma$ -model je zobrazení  $\phi : \Sigma \mapsto M$ ,  $\phi \in C^\infty$  z diferencovatelné variety  $\Sigma = \mathbb{R}^2$  s Minkowského metrikou do diferencovatelné variety  $M$ , která je  $d$ -dimenzionální a je na ní zadán kovariantní tenzor druhého řádu  $\mathcal{F}$ . Varieta  $\Sigma$  odpovídá světoploše struny a takovýto model je možno použít k popisu bozonové struny. Na  $\Sigma$  si místo tradičních parametrů  $\tau, \sigma$ , v nichž má metrika diagonální tvar, zavedeme souřadnice světelného kužele

$$x_\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma)$$

Dynamiku systému popíšeme pomocí akce

$$S_{\mathcal{F}}(\phi) = \int_{\Sigma} d^2x \partial_- \phi^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu}(\phi) \partial_+ \phi^\nu \quad (1.1)$$

kde  $\mathcal{F}$  je kovariantní tenzorové pole druhého řádu a  $\phi^\mu : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\mu = 1 \dots \dim M$  vznikne složením zobrazení  $\phi$  a složek souřadnicové mapy na okolí  $U_\phi$  bodu  $\phi(x_+, x_-) \in M$ . Pohybové rovnice modelu získáme pomocí variačního principu ve tvaru

$$\partial_- \partial_+ \phi^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \partial_- \phi^\nu \partial_+ \phi^\lambda = 0 \quad (1.2)$$

kde  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\mu\rho} (\mathcal{F}_{\rho\lambda,\nu} + \mathcal{F}_{\nu\rho,\lambda} - \mathcal{F}_{\nu\lambda,\rho})$ ,  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  je symetrická část  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  a  $\mathcal{G}^{\mu\nu}$  její inverze.  $\mathcal{G}$  pak považujeme za metriku na  $M$ . Pomocí antisymetrické části  $\mathcal{F}$

$$\mathcal{B}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{\mu\nu} - \mathcal{F}_{\nu\mu})$$

definujeme tenzor torze  $\mathcal{H}_{\mu\nu\lambda}$

$$\mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} = \mathcal{B}_{\nu\lambda,\mu} + \mathcal{B}_{\lambda\mu,\nu} + \mathcal{B}_{\mu\nu,\lambda}$$

Je-li torze odpovídající tenzorovému poli  $\mathcal{F}$  rovna nule, platí

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}\mathcal{G}^{\mu\rho}(\mathcal{F}_{\rho\lambda,\nu} + \mathcal{F}_{\nu\rho,\lambda} - \mathcal{F}_{\nu\lambda,\rho}) = \frac{1}{2}\mathcal{G}^{\mu\rho}(\mathcal{G}_{\rho\lambda,\nu} + \mathcal{G}_{\nu\rho,\lambda} - \mathcal{G}_{\nu\lambda,\rho}) \quad (1.3)$$

Při nulové torzi je tedy pro řešení pohybových rovnic rozhodující pouze tvar  $\mathcal{G}$ . Pohybové rovnice mohou být pro neplochou metriku komplikované a obtížně řešitelné. Pokusíme se proto jejich řešení převést na řešení rovnic s jinou metrikou.

Předpokládejme, že na cílové varietě působí svou akcí nějaká Lieova grupa  $G$ . Pokud akce  $G$  je volná a tranzitivní, můžeme ztotožnit varietu  $M$  a grupu  $G$ . V dalším budeme uvažovat pouze tento případ a budeme hovořit o "atomární" dualitě. Pokud akce není tranzitivní, je nutno do úvah zahrnout tzv. přihlížející proměnné, které číslují jednotlivé orbity a duální transformace se neúčastní, viz [1] a [2].

Na Lieově grupě lze tenzorové pole  $\mathcal{F}$  vyjádřit pomocí nedegenerované bilineární formy  $F(g)$  na Lieově algebře  $\mathfrak{g}$  a pravoinvariantních Maurer-Cartanových forem  $(dgg^{-1})$  jako

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(g) = e_{\mu}^a(g)F_{ab}(g)e_{\nu}^b(g)$$

kde  $e_{\mu}^a(g)$  jsou komponenty  $(dgg^{-1})$ . Zvolíme bázi  $\mathfrak{g}$  jako  $T_a$  a definujeme

$$R_{\pm}^a(g) \equiv (\partial_{\pm}gg^{-1})^a = \partial_{\pm}\phi^{\mu}e_{\mu}^a(g) \quad (\partial_{\pm}gg^{-1}) = (\partial_{\pm}gg^{-1})^a T_a \quad (1.4)$$

Při vynechání indexů budou mít předchozí vztahy tvar (použijeme  $T$  pro transpozici a tečku pro maticové násobení)

$$\mathcal{F}(g) = e(g) \cdot F(g) \cdot e^T(g) \quad (1.5)$$

$$R_{\pm}(g) \cdot T = \partial_{\pm}\phi \cdot e(g) \cdot T \quad (1.6)$$

a akci (1.1) lze přepsat do tvaru

$$S_F(g) = \int_{\Sigma} d^2x R_{-}(g) \cdot F(g) \cdot R_{+}^T(g) \quad (1.7)$$

## 1.2 Poisson-Lie T-dualita

Pokusíme se nyní představit ideu Poisson-Lie T-duality tak, jak byla formulována v [1].

Působí-li na varietě  $M$  svou akcí grupa  $G$ , vznikají jedna-formy Noetherovských proudů  $J_a$ . Pokud  $J_a$  splní Maurer-Cartanovu podmínku

$$dJ_a = \frac{1}{2} \tilde{c}_a^{bc} J_b \wedge J_c \quad (1.8)$$

kde  $\tilde{c}_a^{bc}$  jsou strukturní konstanty Lieovy algebry  $\tilde{\mathfrak{g}}$  příslušející Lieově grupě  $\tilde{G}$ , pak existují (alespoň lokálně) zobrazení  $\tilde{g}(x_+, x_-)$  z  $\Sigma$  do  $\tilde{G}$  taková, že  $J_a = d\tilde{g}\tilde{g}^{-1}$  a řešení  $\sigma$ -modelu na grupě  $G$  můžeme považovat za plochu ve varietě  $D$ , která obsahuje  $G$ ,  $\tilde{G}$  a pro kterou platí

$$g(x_+, x_-)\tilde{g}(x_+, x_-) = l(x_+, x_-) \in D$$

Podmínku (1.8) lze formulovat jako podmínku pro lagrangián  $\sigma$ -modelu

$$\mathcal{L}_{v_i}(\mathcal{F})_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\kappa} v_j^\kappa \tilde{c}_i^{jk} v_k^\lambda \mathcal{F}_{\lambda\nu} \quad (1.9)$$

kde  $v_i$  tvoří bázi levoinvariantních polí a  $v_j^k$  jsou jejich komponenty. Podmínka (1.9) se nazývá Poisson-Lieova a je-li splněna, říkáme, že tenzor  $\mathcal{F}$  je  $G$ -Poisson-Lie symetrický vůči  $\tilde{G}$ , resp. že má zobecněné izometrie. Pro Lieovu derivaci platí  $\mathcal{L}_{[v_i, v_j]} = [\mathcal{L}_{v_i}, \mathcal{L}_{v_j}]$ , z čehož plyne, že strukturní konstanty algeber  $\mathfrak{g}$  a  $\tilde{\mathfrak{g}}$  musí vyhovět podmínce

$$\tilde{c}_k^{ac} c_{fa}^l - \tilde{c}_k^{al} c_{fa}^c - \tilde{c}_f^{ac} c_{ka}^l + \tilde{c}_f^{al} c_{ka}^c - \tilde{c}_a^{lc} c_{fk}^a = 0 \quad (1.10)$$

K (1.9) lze napsat podmínku duální

$$\mathcal{L}_{\tilde{v}^i}(\tilde{\mathcal{F}})^{\mu\nu} = \tilde{\mathcal{F}}^{\mu\kappa} \tilde{v}_\kappa^j c_{jk}^i \tilde{v}_\lambda^k \tilde{\mathcal{F}}^{\lambda\nu} \quad (1.11)$$

kde role obou grup jsou zaměněny a  $\tilde{\mathcal{F}}$  je tenzor definující  $\sigma$ -model na grupě  $\tilde{G}$ . V praxi je velmi obtížné najít pro zadaný model algebry  $\mathfrak{g}$  a  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , které splňují (1.9, 1.10, 1.11). Lze ovšem pro zadané algebry vzájemně duální  $\sigma$ -modely zkonstruovat. Velmi elegantní způsob jak vyřešit (1.9, 1.10, 1.11) byl představen v [1] a podrobně rozpracován v [2]. Zcela zásadní roli zde hraje Drinfeldův double.

Drinfeldův double je souvislá Lieova grupa  $D$ , jejíž Lieova algebra  $\mathfrak{d}$ , vybavená bilineární symetrickou ad-invariantní nedegenerovanou formou  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , se dá rozložit na dvojici podalgeber  $\mathfrak{g}$  a  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , které jsou jako vektorové prostory maximálně izotropní vůči  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a  $\mathfrak{d}$  je jejich direktním součtem. Maninovou trojicí rozumíme uspořádanou trojici algeber  $(\mathfrak{d}, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ .

Dimenze podalgeber musí být shodné a v každé z nich lze zvolit bázi  $T_a \in \mathfrak{g}, \tilde{T}^a \in \tilde{\mathfrak{g}}$  tak, že

$$\langle T_a, T_b \rangle = 0 = \langle \tilde{T}^a, \tilde{T}^b \rangle \quad \langle T_a, \tilde{T}^b \rangle = \delta_a^b \quad (1.12)$$



Díky ad-invarianci  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  strukturní konstanty podalgeber plně určují celou algebru  $\mathfrak{d}$

$$[T_a, T_b] = c_{ab}^c T_c \quad [\tilde{T}^a, \tilde{T}^b] = \tilde{c}_c^{ab} \tilde{T}^c \quad [T_a, \tilde{T}^b] = c_{ca}^b \tilde{T}^c + \tilde{c}_a^{bc} T_c \quad (1.13)$$

Prvky  $l \in D$  doublu lze (alespoň na nějakém okolí jednotkového prvku  $e$ ) rozložit dvěma způsoby na

$$l(x_+, x_-) = g(x_+, x_-) \tilde{g}(x_+, x_-) = \tilde{h}(x_+, x_-) h(x_+, x_-) \quad (1.14)$$

kde  $g, h \in G, \tilde{g}, \tilde{h} \in \tilde{G}$ .

Zkonstruujeme nyní na Drinfeldově doublu  $\sigma$ -modely, viz [1]. Uvažujme  $n$ -dimenzionální podprostor  $\mathcal{E}^+$  Lieovy algebry  $\mathfrak{d}$ , který vznikne jako graf lineárního zobrazení  $E : \mathfrak{g} \mapsto \tilde{\mathfrak{g}}$  zadaného konstantní maticí  $E_{ab}$ . Označíme  $\mathcal{E}^-$  ortogonální doplněk  $\mathcal{E}^+$  vůči  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Ve [2] je ukázáno, že tyto prostory plně určují dvojici duálních  $\sigma$ -modelů. Podprostor  $\mathcal{E}^+ \subset T_e D$  lze roznést pomocí adjungované reprezentace grupy na celou  $G$  a získat tak v každém  $g \in G$  graf zobrazení  $E(g) : \mathfrak{g} \mapsto \tilde{\mathfrak{g}}$  a tedy i matici  $E_{ab}(g)$ . Konkrétně

$$\begin{aligned} g^{-1} \mathcal{E}^+ g &= \text{Span } g^{-1} (T_a + E_{ab} \tilde{T}^b) g = \\ &= \text{Span } [(a(g)_a^i + E_{aj} b(g)^{ji}) T_i + E_{aj} d(g)_i^j \tilde{T}^i] \end{aligned} \quad (1.15)$$

kde  $a, b, d$  jsou submatice adjungované reprezentace grupy  $G$  na  $\mathfrak{d}$  v bázi  $T_a, \tilde{T}^a$

$$Ad(g^{-1}) \triangleright T_a = a(g)_a^i T_i \quad Ad(g^{-1}) \triangleright \tilde{T}^a = b(g)^{ai} T_i + d(g)_i^a \tilde{T}^i \quad (1.16)$$

$$Ad(g^{-1})^T = \begin{pmatrix} a(g) & 0 \\ b(g) & d(g) \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Transpozice  $Ad$  je zde proto, že zobrazujeme báze vektory a výsledek opět vyjadřujeme v báze vektorech.  $a(g)_a^i, b(g)^{ai}, d(g)_i^a$  jsou nyní pouhá čísla. Z (1.15) vyjádříme (při vynechání indexů)

$$E(g) = (a(g) + E \cdot b(g))^{-1} \cdot E \cdot d(g) \quad (1.18)$$

Pokud nyní matici (1.18) dosadíme do vztahu analogického (1.5), kde ovšem místo pravoinvariantních vielbeinů  $e$  použijeme levoinvariantní  $\overset{L}{e}$ , dostaneme tenzorové pole  $\overset{L}{\mathcal{F}}$ , kterým můžeme zadat  $\sigma$ -model na grupě  $G$  a které splňuje Poisson-Lieovu podmínku (1.9) se strukturními konstantami algebry  $\tilde{\mathfrak{g}}$ .

Analogicky lze zkonstruovat matici  $\tilde{E}(g)$  a tenzorové pole  $\overset{L}{\tilde{\mathcal{F}}}$ , které bude splňovat (1.11), pouze nahradíme adjungovanou reprezentaci  $G$  reprezentací

$\tilde{G}$ . Vzájemně duální modely dostaneme tak, že budeme po dublu roznášet stejný podprostor  $\mathcal{E}^+$ , což nastane, když  $\tilde{E} = E^{-1}$ .

Stále ještě není zřejmé, proč a v jakém smyslu by takto zkonstruované modely měly být vzájemně duální. Jak již bylo řečeno, prvky Drinfeldova dublu  $l(x_+, x_-)$  lze rozložit na  $l(x_+, x_-) = g(x_+, x_-)\tilde{g}(x_+, x_-)$ . Podmínky pro to, aby  $l(x_+, x_-)$  bylo možno dostat pomocí zdvihu řešení  $g(x_+, x_-)$  modelu na grupě  $G$  do  $D$ , jsou podle [1]

$$\partial_+ l l^{-1} \in \mathcal{E}^- \quad \partial_- l l^{-1} \in \mathcal{E}^+ \quad (1.19)$$

To je ekvivalentní následujícím rovnicím

$$\langle \partial_{\pm} l l^{-1}, \mathcal{E}^{\pm} \rangle = 0 \quad (1.20)$$

Rozložíme  $l$  jako  $l = g\tilde{g}$ , dosadíme a využijeme ad-invariance  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \partial_{\pm}(g\tilde{g})(g\tilde{g})^{-1}, \mathcal{E}^{\pm} \rangle &= \langle \partial_{\pm} g g^{-1} + g \partial_{\pm} \tilde{g} \tilde{g}^{-1} g^{-1}, \mathcal{E}^{\pm} \rangle = \\ &= \langle g^{-1} \partial_{\pm} g + \partial_{\pm} \tilde{g} \tilde{g}^{-1}, g^{-1} \mathcal{E}^{\pm} g \rangle \end{aligned} \quad (1.21)$$

Podprostor  $g^{-1} \mathcal{E}^+ g$  lze zapsat jako

$$g^{-1} \mathcal{E}^+ g = \text{Span} (T_a + E_{ab}(g) \tilde{T}^b) \quad (1.22)$$

$\mathcal{E}^-$  je ortogonálním doplňkem  $\mathcal{E}^+$ , zapíšeme jej tedy ve tvaru  $\mathcal{E}^- = \text{Span} (T_a - E_{ba} \tilde{T}^b)$  a proto

$$g^{-1} \mathcal{E}^- g = \text{Span} (T_a - E_{ba}(g) \tilde{T}^b) \quad (1.23)$$

Dosazením (1.22) a (1.23) do (1.21) a využitím (1.12) dospějeme k sadě rovnic

$$-(\partial_+ \tilde{g} \tilde{g}^{-1})_a = (g^{-1} \partial_+ g)^b E_{ab}(g) \equiv A_{+,a}(g) \quad (1.24)$$

$$-(\partial_- \tilde{g} \tilde{g}^{-1})_a = -(g^{-1} \partial_- g)^b E_{ba}(g) \equiv A_{-,a}(g) \quad (1.25)$$

Z těchto rovnic lze vyloučit  $\tilde{g}$  a dospět tak k soustavě rovnic

$$\partial_+ A_{-,a}(g) - \partial_- A_{+,a}(g) - \tilde{c}_a^{bc} A_{-,b}(g) A_{+,c}(g) = 0 \quad (1.26)$$

kde  $\tilde{c}_a^{bc}$  jsou strukturální konstanty  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Podle [2] se dá ověřit, že (1.26) jsou pohybové rovnice  $\sigma$ -modelu s lagrangianem zadaným tenzorovým polem  $\overset{L}{\mathcal{F}}$ , které jsme zkonstruovali výše. Celý postup lze znovu zopakovat, rozložíme-li prvek Drinfeldova dublu na  $l(x_+, x_-) = \tilde{h}(x_+, x_-)h(x_+, x_-)$ . Získáme tak pohybové rovnice modelu zadaného tenzorovým polem  $\overset{L}{\tilde{\mathcal{F}}}$ . Poisson-Lie T-dualita tedy plyne z možnosti rozložit prvky dublu  $D$  dvěma možnými způsoby

(1.14), kde  $g$  a  $\tilde{h}$  jsou řešení duálních modelů,  $\tilde{g}$  a  $h$  jsou pomocná zobrazení umožňující zdvih z  $G, \tilde{G}$  do  $D$ .

Předchozí vztahy byly v [1],[2] odvozeny za použití levoinvariantních Maurer-Cartanových forem  $(g^{-1}\partial_{\pm}g)$ . Označíme-li podobně jako v (1.4)

$$L_{\pm}^a(g) \equiv (g^{-1}\partial_{\pm}g)^a = \partial_{\pm}\phi^{\mu} e_{\mu}^a(g) \quad (g^{-1}\partial_{\pm}g) = (g^{-1}\partial_{\pm}g)^a T_a \quad (1.27)$$

bude tenzorové pole zadávající zkonstruovaný model

$$\overset{L}{\mathcal{F}}(g) = \overset{L}{e}(g) \cdot E(g) \cdot \overset{L}{e}^T(g) \quad (1.28)$$

a výrazy (1.24, 1.25) dostanou tvar

$$\tilde{R}_+(\tilde{g}) = -L_+(g) \cdot E^T(g) \quad (1.29)$$

$$\tilde{R}_-(\tilde{g}) = L_-(g) \cdot E(g) \quad (1.30)$$

Celý formalismus je možno vyjádřit též v termínech pravoinvariantních polí. Jelikož platí

$$\overset{L}{e}(g) = e(g) \cdot a(g) \quad (1.31)$$

kde  $e(g)$  je určeno (1.4), platí také

$$L_{\pm}(g) = R_{\pm}(g) \cdot a(g) \quad (1.32)$$

Chceme-li dostat stejný lagrangián pomocí levo i pravoinvariantních polí, je nutno upravit matici  $E(g)$

$$\begin{aligned} \overset{L}{\mathcal{F}} = \overset{L}{e}(g) \cdot E(g) \cdot \overset{L}{e}^T(g) &= \\ e(g) \cdot a(g) \cdot E(g) \cdot a(g)^T \cdot e(g)^T &\stackrel{!}{=} e(g) \cdot F(g) \cdot e^T(g) \end{aligned}$$

Při následující úpravě použijeme  $d(g) = a^{-T}(g)$ , kde  $a^{-T}$  značí  $(a^{-1})^T$ .

$$\begin{aligned} F(g) &= a(g) \cdot E(g) \cdot a(g)^T = a(g) \cdot (a(g) + E \cdot b(g))^{-1} \cdot E \cdot d(g) \cdot a(g)^T = \\ &= a(g) \cdot [E \cdot (E^{-1} + b(g) \cdot a(g)^{-1}) \cdot a(g)]^{-1} \cdot E = (E^{-1} + b(g) \cdot a(g)^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

Upravíme rovnice (1.29, 1.30) za pomoci (1.32) a předchozího vztahu. Dále už budeme používat pouze pravoinvariantní pole, takže budeme psát

$$F(g) = (E^{-1} + b(g) \cdot a(g)^{-1})^{-1} \quad (1.33)$$

$$\tilde{R}_+(\tilde{g}) = -R_+(g) \cdot F^T(g) \cdot a^{-T}(g) \quad (1.34)$$

$$\tilde{R}_-(\tilde{g}) = R_-(g) \cdot F(g) \cdot a^{-T}(g) \quad (1.35)$$

### 1.3 Poisson-Lie T-pluralita

Jak bylo v [1] zmíněno, některé Drinfeldovy dvojby mohou být rozložitelné více způsoby na různé direktní součty maximálně izotropních podprostorů, přičemž tyto rozklady jsou vzájemně izomorfní. To znamená, že pro každý rozklad existuje matice, která udává vztah mezi báзовými vektory jednotlivých podalgeber. Prvky dvojby pak lze rozložit několika způsoby

$$l(x_+, x_-) = g(x_+, x_-)\tilde{g}(x_+, x_-) = \hat{h}(x_+, x_-)\bar{h}(x_+, x_-) \quad (1.36)$$

kde  $g \in G, \tilde{g} \in \tilde{G}, \hat{h} \in \hat{H}, \bar{h} \in \bar{H}$  a  $G, \tilde{G}, \hat{H}, \bar{H}$  jsou grupy příslušné algebřám  $\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{h}}, \bar{\mathfrak{h}}$ , pro které platí  $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \tilde{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{h}} \oplus \bar{\mathfrak{h}}$ . Tomuto jevu řikáme Poisson-Lie T-pluralita. Mějme matici  $C$ , která zobrazuje duální báze (ve smyslu (1.12)) jednoho rozkladu na duální báze druhého rozkladu

$$\begin{pmatrix} T \\ \tilde{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U} \\ \bar{U} \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

$T_a \in \mathfrak{g}, \tilde{T}^a \in \tilde{\mathfrak{g}}, \hat{U}_a \in \hat{\mathfrak{h}}, \bar{U}^a \in \bar{\mathfrak{h}}$ . Potom byla v [3] vypracována metoda, pomocí které lze k modelu danému tenzorovým polem  $\mathcal{F}$  zkonstruovaným podle (1.33, 1.5) najít model T-plurální. Konstrukce je podobná konstrukci duálního modelu, s tím rozdílem, že v  $\tilde{F} = (\tilde{E}^{-1} + \tilde{b}(\tilde{g}) \cdot \tilde{a}(\tilde{g})^{-1})^{-1}$  nahradíme  $\tilde{E} = E^{-1}$  maticí

$$\hat{E} = M \cdot N^{-1} \quad (1.38)$$

kde

$$M = S^T \cdot E - Q^T \quad (1.39)$$

$$N = P^T - R^T \cdot E \quad (1.40)$$

a  $b(\tilde{g}), a(\tilde{g})$  nahradíme submaticemi adjungované reprezentace  $\hat{H}$ , takže

$$\hat{F}(\hat{h}) = (\hat{E}^{-1} + \hat{b}(\hat{h}) \cdot \hat{a}(\hat{h})^{-1})^{-1} \quad (1.41)$$

Vzájemný vztah řešení  $\sigma$ -modelů zkonstruovaných na  $G, \hat{H}$  lze obdržet z rozkladu (1.36). Různé rozklady dvojby jsou dány vztahem mezi bazickými vektory (1.37). Pro volbu  $P = 0, Q = \delta_a^b, R = \delta_a^b, S = 0$  dostáváme modely duální.

### 1.4 Řešení $\sigma$ -modelu

Pohybové rovnice (1.2) modelu s neplochou metrikou jsou velmi obtížně řešitelné. Jejich řešení však lze obejít. Popíšeme ve stručnosti obecný postup, který byl použit v [4].

Máme-li  $\sigma$ -model na podgrupě  $\hat{H}$  Drinfeldova dublu  $D$  rozloženého do Maninovy trojice  $(\hat{H}|\bar{H})$  a tento model má neplochou metriku, je možné v některých případech najít rozklad dublu  $(G|\tilde{G})$  takový, že model na  $G$  má metriku plochou. Má-li tento model zároveň i nulovou torzi, umíme ho vyřešit.

O ploché metrice hovoříme tehdy, jsou-li všechny složky Riemannova tenzoru nulové. Pro takovou metriku lze nalézt transformaci souřadnic, která ji převede na triviálně plochou, kdy má tvar Minkowského metriky. Pro řešení pohybových rovnic však postačí najít souřadnice, v nichž je metrika zadána libovolnou konstantní maticí. Podle (1.3) totiž v těchto souřadnicích pohybové rovnice dostanou jednoduchý tvar

$$\partial_+ \partial_- \xi^\mu = 0 \quad (1.42)$$

Obecným řešením těchto rovnic je (pro přehlednost v komplikovanějších výrazech píšeme indexy dole)

$$\xi^\mu = W_\mu(x_+) + Y_\mu(x_-) \quad (1.43)$$

kde  $W_\mu(x_+), Y_\mu(x_-)$  jsou libovolné funkce jedné proměnné.  $\sigma$ -model na ploché varietě je tím vyřešen. Způsob, jakým lze najít transformaci, která převede metriku do souřadnic  $\xi$ , je uveden v [5].

Pro nalezení řešení původního modelu s neplochou metrikou nyní využijeme připraveného aparátu Poisson-Lie T-plurality. Pokud se nám povede provést záměnu rozkladů prvků dublu, dostaneme řešení pohybových rovnic plurálního modelu. Abychom mohli přejít od jednoho rozkladu (1.36) k druhému, je nutné znát tvar všech souřadnic na dublu, tedy i pomocných zobrazení. To znamená vyřešit soustavu parciálních diferenciálních rovnic (1.34, 1.35).

Zkoumáme-li řešitelné grupy, můžeme jejich elementy vyjadřovat jako součin prvků jednoparametrických podgrup. Ty pak vyjadřujeme pomocí exponenciálního zobrazení bazických vektorů příslušné algebry. Mějme prvky dublu rozložené jako v (1.36). Konkrétně prvek 6-ti dimenzionálního Drinfeldova dublu rozložený na součin jednoparametrických podgrup zapíšeme jako ve [4] (pro účely výpočtu zde byl druhý rozklad vyjádřen v nestandardní parametrizaci)

$$e^{\phi^1 T_1} e^{\phi^2 T_2} e^{\phi^3 T_3} e^{\tilde{g}_1 \tilde{T}^1} e^{\tilde{g}_2 \tilde{T}^2} e^{\tilde{g}_3 \tilde{T}^3} = e^{\chi^3 \hat{U}_3} e^{\chi^2 \hat{U}_2} e^{\chi^1 \hat{U}_1} e^{\bar{h}_3 \bar{U}^3} e^{\bar{h}_2 \bar{U}^2} e^{\bar{h}_1 \bar{U}^1} \quad (1.44)$$

kde  $T_a \in \mathfrak{g}, \tilde{T}^a \in \tilde{\mathfrak{g}}, \hat{U}_a \in \hat{\mathfrak{h}}, \bar{U}^a \in \bar{\mathfrak{h}}$  jsou vektory bazí,  $(\phi^\mu, \tilde{g}_i)$  jsou souřadnice na dublu rozloženém do Maninovy trojice  $(G|\tilde{G})$  a  $(\chi^\mu, \bar{h}_i)$  souřadnice na  $(\hat{H}|\bar{H})$ . Nyní je možno z (1.37) dosadit do (1.44) za  $T, \tilde{T}$  a pokusit se prvek rozložený do parametrizace  $(G|\tilde{G})$  přepsat do parametrizace  $(\hat{H}|\bar{H})$ .

Tento proces může být velmi komplikovaný. Pokud ale pro bázové vektory algebry platí "podmínka záměnnosti"

$$[X, [X, Y]] = [Y, [X, Y]] = 0$$

lze využít speciálního tvaru Baker-Campbell-Hausdorffovy formule

$$e^X e^Y = e^{X+Y} e^{\frac{1}{2}[X, Y]} \quad (1.45)$$

$$e^X e^Y = e^Y e^X e^{[X, Y]} \quad (1.46)$$

a dospět tak k vyjádření prvku double

$$l = e^{\chi^3(\phi^\mu, \tilde{g}_i) \hat{U}_3} e^{\chi^2(\phi^\mu, \tilde{g}_i) \hat{U}_2} e^{\chi^1(\phi^\mu, \tilde{g}_i) \hat{U}_1} e^{\bar{h}_3(\phi^\mu, \tilde{g}_i) \bar{U}^3} e^{\bar{h}_2(\phi^\mu, \tilde{g}_i) \bar{U}^2} e^{\bar{h}_1(\phi^\mu, \tilde{g}_i) \bar{U}^1} \quad (1.47)$$

a tedy i k následující závislosti souřadnic

$$\begin{aligned} \chi^\mu &= \chi^\mu(\phi^\mu, \tilde{g}_i) \\ \bar{h}_i &= \bar{h}_i(\phi^\mu, \tilde{g}_i) \end{aligned} \quad (1.48)$$

Vyjádříme-li nyní řešení modelu s plochým pozadím (1.43) a řešení soustavy (1.34, 1.35) v patričních souřadnicích a dosadíme do (1.48), dostaneme hledané řešení plurálního modelu s neplochou metrikou, které bude záviset na funkcích  $W_\mu(x_+), Y_\mu(x_-)$ .

Je na místě zmínit, že ani jeden z kroků popsaného postupu není vůbec triviální. I když nalezneme rozklad double, kde je metrika plochá, (1.34, 1.35) mohou být tak komplikované, že je nebudeme schopni vyřešit. Mimo to, možnost použití BCH-formule závisí na splnění podmínky záměnnosti a zvolené parametrizaci. Nelze-li formuli použít, nevíme jak postupovat.

## 1.5 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky pro konce otevřené bozonové struny uvádíme jako podmínky pro derivace zobrazení  $\phi : \Sigma \mapsto M$  vyjadřujícího vývoj struny. V minulé kapitole jsme pro  $\sigma$ -model našli řešení, které obsahovalo blíže neurčené funkce  $W_\mu(x_+), Y_\mu(x_-)$ . Tyto funkce volíme tak, abychom vyhověli okrajovým podmínkám.

Podmínka pevného konce - Dirichletova podmínka - říká, že konec struny je vázán na nějakou podvarietu  $M$ , nazývanou  $Dp$ -brána. Dimenze  $Dp$ -brány je určena počtem Dirichletových směrů, tzn. složek zobrazení  $\phi$  na které Dirichletovu podmínku uplatníme. Označíme jako  $\psi^\mu$  takzvané adaptované souřadnice. To jsou souřadnice cílové variety takové, že část jich směřuje

v Dirichletových směrech kolmých na  $Dp$ -bránu, zbytek míří v tzv. Neumannových směrech tečných k  $Dp$ -bráně. V těchto souřadnicích má Dirichletova podmínka tvar

$$\partial_\tau \psi^\mu |_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad \text{Dirichletova podmínka} \quad (1.49)$$

Podmínka pro volné konce udává, ve kterých směrech se konec struny může volně pohybovat, což odpovídá Neumannovým směrům. Jedná se o zobecnění Neumannových okrajových podmínek

$$\partial_\sigma \psi^\mu |_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad \text{Neumannova podmínka} \quad (1.50)$$

nicméně ve statické kalibraci struny je to totéž. Zavedeme na  $\Sigma$  souřadnice světelného kužele  $x_\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma)$ . Pak budou mít uvedené rovnosti tvar

$$\partial_- \psi^\mu |_{\sigma=0,\pi} = -\partial_+ \psi^\mu |_{\sigma=0,\pi} \quad \text{Dirichletova podmínka} \quad (1.51)$$

$$\partial_- \psi^\mu |_{\sigma=0,\pi} = \partial_+ \psi^\mu |_{\sigma=0,\pi} \quad \text{podmínka volných konců} \quad (1.52)$$

Zobecněním předchozího na libovolné souřadnice je formulace okrajových podmínek pomocí tzv. lepící matice  $\mathcal{R}$  ("gluing matrix"), viz [6].

$$\partial_- \psi^\mu |_{\sigma=0,\pi} = \partial_+ \psi^\nu \mathcal{R}_\nu^\mu[\psi] |_{\sigma=0,\pi} \quad (1.53)$$

Lepící matice vyjadřuje veškeré informace o okrajových podmínkách. Geometrická násobnost vlastního čísla  $-1$  vyjadřuje počet Dirichletových směrů, čímž určuje i dimenzi  $Dp$ -brány. Konkrétní tvar  $\mathcal{R}$  pak vypovídá o tom, jak je brána vložena do cílové variety. V souřadnicích adaptovaných na  $Dp$ -bránu má lepící matice tvar

$$\mathcal{R}_\psi = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_i^j & 0 \\ 0 & -\delta_k^l \end{pmatrix} \quad i, j = 1, \dots, p+1; \quad k, l = p+2, \dots, \dim M$$

Zřejmě ne každá matice může být lepící maticí a v [6] je uvedena řada podmínek, které musí  $\mathcal{R}$  splnit, aby zadávala přípustné okrajové podmínky a  $Dp$ -brána byla dobře definovanou varietou.

Nás bude v této práci zajímat pouze to, jak se při Poisson-Lie T-pluralitě transformují podmínky na funkce  $W_\mu(x_+), Y_\mu(x_-)$ . Submatici  $\mathcal{R}_i^j$  zastupující v  $\mathcal{R}$  Neumannovy směry, budeme volit  $\delta_i^j$ , což je podle [6] pro modely, jimiž se v našem výpočtu zabýváme, možné. Navíc ověříme pouze zachování podmínky konformní symetrie

$$\mathcal{R} \cdot \mathcal{G} \cdot \mathcal{R}^T = \mathcal{G} \quad (1.54)$$

kde  $\mathcal{G}$  je metrika  $\sigma$ -modelu. Platnost (1.54) byla v [6] prokázána pro dualitu obecně.

Připomeňme, že  $\mathcal{R}$  je podle (1.53) smíšený tenzor druhého řádu a jako takový se chová při transformaci souřadnic na varietě. Uvádět závislost  $\mathcal{R}$  na souřadnicích je poněkud zavádějící. Proto budeme raději uvádět souřadnice, ve kterých  $\mathcal{R}$  působí, a to buď dolním indexem, nebo hranatými závorkami.

Najdeme teď vztah pro transformaci lepící matice při Poisson-Lie T-pluralitě.  $\mathcal{R}$  nejprve převedeme do souřadnic, které máme zavedeny na grupě příslušející prvnímu modelu

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\iota^\kappa[\phi] &= \frac{\partial\psi^\nu}{\partial\phi^\iota}\mathcal{R}_\nu^\mu[\psi]\frac{\partial\phi^\kappa}{\partial\psi^\mu} \\ \mathcal{R}_\phi &= J(\phi)^{-T} \cdot \mathcal{R}_\psi \cdot J(\phi)^T\end{aligned}\tag{1.55}$$

kde  $J(\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial\psi}$  je Jacobiho matice transformace souřadnic  $\psi \rightarrow \phi$ .

Nyní můžeme zapsat  $\mathcal{R}$  jako operátor působící na algebře pravoinvariantních polí. Z dřívějšíka máme  $R_\pm^a(g) = \partial_\pm\phi^\mu e_\mu^a(g)$ , takže (1.53) zapíšeme jako

$$\begin{aligned}R_-(g) &= R_+^b(g)R_b^a \\ R_b^a &= (e^{-1})_b^\nu(g)\mathcal{R}_\nu^\mu[\phi]e_\mu^a(g)\end{aligned}$$

což při vynechání indexů dá okrajové podmínky a lepící matici

$$R_-(g) = R_+(g) \cdot R\tag{1.56}$$

$$R = e^{-1}(g) \cdot \mathcal{R}_\phi \cdot e(g)\tag{1.57}$$

Podmínka konformní symetrie dostane tvar

$$R \cdot G \cdot R^T = G\tag{1.58}$$

kde  $G = \frac{1}{2}(F + F^T)$ ,  $F$  viz (1.33). Dalším krokem je nalezení formule pro transformaci pravoinvariantních polí  $R_\pm(g)$ .

Zkoumejme proto pravoinvariantní pole  $(\partial_+ll^{-1})$  na Drinfeldově double.

$$\begin{aligned}(\partial_+ll^{-1}) &= (\partial_+(g\tilde{g})(g\tilde{g})^{-1}) = \partial_+gg^{-1} + g(\partial_+\tilde{g}\tilde{g}^{-1})g^{-1} = \\ &= \partial_+\phi^\mu e_\mu^a(g)T_a + \partial_+\tilde{g}_i\tilde{e}_a^i(\tilde{g})g\tilde{T}^a g^{-1} = R_+(g) \cdot T + \tilde{R}_+(\tilde{g}) \cdot \left(b^T(g) \cdot T + a^T(g) \cdot \tilde{T}\right)\end{aligned}$$

kde jsme při úpravě použili (1.4) a toho, že pro submatice adjungované reprezentace platí  $a(g^{-1}) = a^{-1}(g)$ ,  $b(g^{-1}) = b^T(g)$ . V úpravě výrazu pokračujeme dosazením za  $\tilde{R}_+(\tilde{g})$  z (1.34)

$$(\partial_+ll^{-1}) = R_+(g) \cdot T - \tilde{R}_+(\tilde{g}) \cdot F^T(g) \cdot \left(a^{-T}(g) \cdot b^T(g) \cdot T + \tilde{T}\right)$$



Úpravou (1.33) dostaneme  $a^{-T}(g) \cdot b^T(g) = F^{-T}(g) - E^T$ , což dosadíme do předchozího výrazu a máme

$$(\partial_+ ll^{-1}) = R_+(g) \cdot F^T(g) \cdot \left( E^{-T} \cdot T - \tilde{T} \right) \quad (1.59)$$

Zcela analogicky získáme

$$(\partial_+ ll^{-1}) = (\partial_+(\hat{h}\bar{h})(\hat{h}\bar{h})^{-1}) = \hat{R}_+(\hat{h}) \cdot \hat{F}^T(\hat{h}) \cdot \left( \hat{E}^{-T} \cdot \hat{U} - \bar{U} \right) \quad (1.60)$$

Nyní dosadíme (1.37) do (1.59) a využijeme toho, že výrazy (1.59, 1.60) se musí rovnat

$$R_+(g) \cdot F^T(g) \cdot \left( (E^{-T} \cdot P - R) \cdot \hat{U} + (E^{-T} \cdot Q - S) \cdot \bar{U} \right) = \hat{R}_+(\hat{h}) \cdot \hat{F}^T(\hat{h}) \cdot \left( \hat{F}^{-T} \cdot \hat{U} - \bar{U} \right)$$

Porovnáním koeficientů u bazických vektorů  $\bar{U}$  získáme hledaný vztah pro transformaci pravoinvariantních polí

$$\hat{R}_+(\hat{h}) = R_+(g) \cdot F^T(g) \cdot (S - E^{-T} \cdot Q) \cdot \hat{F}^{-T}(\hat{h}) \quad (1.61)$$

Celý postup lze zopakovat pro  $R_-(g)$  a dostat tak

$$\hat{R}_-(\hat{h}) = R_-(g) \cdot F(g) \cdot (S + E^{-1} \cdot Q) \cdot \hat{F}^{-1}(\hat{h}) \quad (1.62)$$

Máme už připraveno vše, co potřebujeme pro transformaci matice  $R$ . Pro T-plurální model má platit vztah analogický k (1.56)

$$\hat{R}_-(\hat{h}) = \hat{R}_+(\hat{h}) \cdot \hat{R} \quad (1.63)$$

Po dosazení (1.61, 1.62) do (1.63) a drobné úpravě získáme kýžený vztah pro transformaci matice  $R$  při Poisson-Lie T-pluralitě

$$\hat{R} = \hat{F}^T(\hat{h}) \cdot (S - E^{-T} \cdot Q)^{-1} \cdot F^{-T}(g) \cdot R \cdot F(g) \cdot (S + E^{-1} \cdot Q) \cdot \hat{F}^{-1}(\hat{h}) \quad (1.64)$$

Lepící matici  $\hat{\mathcal{R}}_\chi$  získáme z  $\hat{R}$  podle (1.57) jako

$$\hat{\mathcal{R}}_\chi = \hat{e}(\hat{h}) \cdot \hat{R} \cdot \hat{e}^{-1}(\hat{h}) \quad (1.65)$$

Tím jsme dokončili teoretickou přípravu. V další kapitole se podíváme na konkrétní příklad a prozkoumáme, jak vypadají transformované matice  $\hat{\mathcal{R}}_\chi$  a podmínky na volné funkce  $W_\mu(x_+), Y_\mu(x_-)$ .

# Kapitola 2

## Příklad - Drinfeldův double

$$(4|1) \leftrightarrow (6_0|2)$$

Přístupme nyní k praktické aplikaci odvozených vztahů. Nejprve uvedeme příklad modelu, který se povedlo vyřešit pomocí Poisson-Lie T-plurality, poté prozkoumáme okrajové podmínky. Jak dále uvidíme, provádět následující výpočty ručně a bez chyb není v lidských silách. Všechny výpočty byly prováděny na počítači v programu Mathematica, což práci usnadnilo vskutku značně.

### 2.1 Řešení $\sigma$ -modelu

Zrekapitulujme pro začátek výsledky práce [4]. Zde byly zkonstruovány  $\sigma$ -modely na dvou izomorfních rozkladech Drinfeldova double  $D$  do Maninových trojic  $(4|1)$  a  $(6_0|2)$ , kde čísla v závorkách uvádí, do jaké třídy patří příslušné Lieovy algebry v Bianchiho klasifikaci. Vzájemně T-plurální modely zkonstruujeme na grupách příslušných algebrám Bianchi4 a Bianchi6<sub>0</sub>.

Při rozkladu prvku double do Maninovy trojice  $(4|1)$  je pro zápis pomocí jednoparametrických podgrup zvolena standardní parametrizace

$$l = e^{\phi^1 T_1} e^{\phi^2 T_2} e^{\phi^3 T_3} e^{\tilde{g}_1 \tilde{T}^1} e^{\tilde{g}_2 \tilde{T}^2} e^{\tilde{g}_3 \tilde{T}^3} \quad (2.1)$$

Nenulové komutační relace bazických vektorů algeber jsou

$$\begin{aligned} [T_1, T_2] &= T_3 - T_2 & [T_3, T_1] &= T_3 \\ [T_1, \tilde{T}^2] &= \tilde{T}^2 & [T_1, \tilde{T}^3] &= -\tilde{T}^2 + \tilde{T}^3 & [T_2, \tilde{T}^2] &= -\tilde{T}^1 \\ [T_2, \tilde{T}^3] &= \tilde{T}^1 & [T_3, \tilde{T}^3] &= -\tilde{T}^1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde  $T_a \in \mathfrak{g}$ ,  $\tilde{T}^a \in \tilde{\mathfrak{g}}$ . Komutační relace určují submatice adjungované reprezentace grupy  $G$

$$a(g) = \begin{pmatrix} 1 & -\phi^2 & \phi^2 - \phi^3 \\ 0 & e^{\phi^1} & -\phi^1 e^{\phi^1} \\ 0 & 0 & e^{\phi^1} \end{pmatrix} \quad b(g) = 0 \quad (2.3)$$

a ve zvolené parametrizaci je pravoinvariantní vielbein  $e(g)$  roven

$$e(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\phi^1} & \phi^1 e^{-\phi^1} \\ 0 & 0 & e^{-\phi^1} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Zvolíme matici  $E$  v následujícím tvaru

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa \\ 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

a dosadíme do (1.33). Protože  $b = 0$ , bude

$$F(g) = E \quad (2.6)$$

tenzorové pole  $\mathcal{F}$  definující  $\sigma$ -model bude podle (1.5)

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\phi^1 e^{-\phi^1} & \kappa e^{-\phi^1} \\ \kappa\phi^1 e^{-\phi^1} & \kappa e^{-2\phi^1} & 0 \\ \kappa e^{-\phi^1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

tenzor  $\mathcal{F}$  je symetrický a je proto přímo roven metrice  $\mathcal{G}$ . tenzor torze a Riemannův tenzor vypočítaný z této metriky jsou oba nulové, což ukazuje, že metrika je plochá a tento model umíme vyřešit. Přejdeme-li podle [5] do souřadnic  $\xi$  pomocí transformace

$$\begin{aligned} \xi^1 &= -e^{-\phi^1} \\ \xi^2 &= \phi^2 e^{-\phi^1} + \phi^1 + e^{-\phi^1} \\ \xi^3 &= \frac{1}{2}e^{-\phi^1} + \phi^3 + \frac{1}{2}(\phi^2)^2 e^{-\phi^1} + \phi^1 \phi^2 - \phi^2 + \phi^2 e^{-\phi^1} + \phi^1 - \frac{1}{2}e^{\phi^1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

dostane metrika tvar konstantní matice

$$\mathcal{G}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa \\ 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

a řešení pohybových rovnic bude, jak bylo popsáno v kapitole 1.4,

$$\xi^\mu = W_\mu(x_+) + Y_\mu(x_-)$$

Dosazením tohoto výsledku do transformace inverzní k (2.8) získáme řešení modelu s plochou metrikou v souřadnicích  $\phi$ , jimiž máme parametrizovanou grupu. Pro přehlednost už nebudeme uvádět explicitně závislost  $W_\mu(x_+), Y_\mu(x_-)$  na proměnných. Bereme je vždy jako funkce jedné příslušné proměnné. Budeme také předpokládat, že  $W_1 + Y_1 \neq 0$ .

$$\begin{aligned}\phi^1 &= -\ln(-W_1 - Y_1) \\ \phi^2 &= \frac{1}{W_1 + Y_1} \left( -\ln(-W_1 - Y_1) - \right. \\ &\quad \left. -W_1 - Y_1 - W_2 - Y_2 \right) \\ \phi^3 &= \frac{1}{2(W_1 + Y_1)} \left( -\ln^2(-W_1 - Y_1) - 1 + \right. \\ &\quad \left. +(W_2 + Y_2)^2 - 2W_1 - 2Y_1 - \right. \\ &\quad \left. -2W_2 - 2Y_2 - 2\ln(-W_1 - Y_1) + \right. \\ &\quad \left. +2(W_3 + Y_3)(W_1 + Y_1) \right)\end{aligned}\tag{2.10}$$

Abychom mohli pokračovat a najít řešení modelu spojeného T-pluralitou s modelem vyřešeným, potřebujeme znát i řešení zbývajících souřadnic doublu. Proto je třeba řešit rovnice (1.34, 1.35). V [4] bylo jejich řešení nalezeno ve tvaru

$$\begin{aligned}\tilde{g}_1 &= \kappa(-W_2 + Y_2 + W_3Y_1 - W_1Y_3 - \Omega(x_+, x_-) + \alpha(x_+, x_-)) \\ \tilde{g}_2 &= \kappa(\Omega(x_+, x_-) + \beta(x_+, x_-)) \\ \tilde{g}_3 &= \kappa(-W_1 + Y_1)\end{aligned}\tag{2.11}$$

kde

$$\Omega(x_+, x_-) = W_1 - Y_1 - W_1Y_2 + W_2Y_1\tag{2.12}$$

a  $\alpha(x_+, x_-), \beta(x_+, x_-)$  jsou libovolné funkce, pro něž platí ( ' značí derivaci)

$$\begin{aligned}\partial_+\alpha(x_+, x_-) &= W_3'W_1 - W_2'W_1 - W_1'W_3 + W_1'W_2 \\ \partial_-\alpha(x_+, x_-) &= -Y_3'Y_1 + Y_2'Y_1 + Y_1'Y_3 - Y_1'Y_2 \\ \partial_+\beta(x_+, x_-) &= W_2'W_1 - W_1'W_2 \\ \partial_-\beta(x_+, x_-) &= Y_1'Y_2 - Y_2'Y_1\end{aligned}\tag{2.13}$$

Rozklad prvků doublu do Maninovy trojice  $(6_0|2)$  je určen nestandardní parametrizací

$$l = e^{\chi^3\hat{U}_3} e^{\chi^2\hat{U}_2} e^{\chi^1\hat{U}_1} e^{\bar{h}_3\bar{U}^3} e^{\bar{h}_2\bar{U}^2} e^{\bar{h}_1\bar{U}^1}\tag{2.14}$$

a komutačními relacemi bazických vektorů algeber

$$\begin{aligned} [\hat{U}_2, \hat{U}_3] &= \hat{U}_1 & [\hat{U}_3, \hat{U}_1] &= -\hat{U}_2 \\ [\bar{U}^1, \bar{U}^2] &= \bar{U}^3 & [\hat{U}_1, \bar{U}^2] &= -\bar{U}^3 & [\hat{U}_2, \bar{U}^1] &= -\bar{U}^3 \\ [\hat{U}_3, \bar{U}^1] &= \hat{U}_2 + \bar{U}^2 & [\hat{U}_3, \bar{U}^2] &= -\hat{U}^1 + \bar{U}^1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Tím máme určeny i matice  $\hat{a}(\hat{h}), \hat{b}(\hat{h}), \hat{e}(\hat{h})$

$$\hat{a}(\hat{h}) = \begin{pmatrix} \cosh(\chi^3) & \sinh(\chi^3) & 0 \\ \sinh(\chi^3) & \cosh(\chi^3) & 0 \\ -\chi^2 & -\chi^1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\hat{b}(\hat{h}) = \begin{pmatrix} -\chi^3 \sinh(\chi^3) & -\chi^3 \cosh(\chi^3) & 0 \\ \chi^3 \cosh(\chi^3) & \chi^3 \sinh(\chi^3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\hat{e}(\hat{h}) = \begin{pmatrix} \cosh(\chi^3) & -\sinh(\chi^3) & 0 \\ -\sinh(\chi^3) & \cosh(\chi^3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Matici  $\hat{E}$  si nemůžeme volit libovolně. Mezi vektory bazí máme vztah (1.37). Pro náš případ je izomorfismus mezi rozklady doublu realizován maticí

$$C = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Dosazením (2.19) do (1.39, 1.40) spočítáme z (1.38)

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa} & -\frac{1}{\kappa} & \frac{\kappa}{2} \\ -\frac{1}{\kappa} & \frac{1}{\kappa} & \frac{\kappa}{2} \\ \frac{\kappa}{2} & \frac{\kappa}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

To použijeme společně s (2.16, 2.17) v (1.41), takže dostaneme

$$\hat{F}(\hat{h}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa} & -\frac{1}{\kappa} & \frac{\kappa}{2} + \chi^3 \\ -\frac{1}{\kappa} & \frac{1}{\kappa} & \frac{\kappa}{2} - \chi^3 \\ \frac{\kappa}{2} - \chi^3 & \frac{\kappa}{2} + \chi^3 & -\kappa(\chi^3)^2 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Model T-plurální k předchozímu tedy bude podle (1.5) definován tenzorem

$$\hat{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa} e^{2\chi^3} & -\frac{1}{\kappa} e^{2\chi^3} & \frac{1}{2} \kappa e^{-\chi^3} + \chi^3 e^{\chi^3} \\ -\frac{1}{\kappa} e^{2\chi^3} & \frac{1}{\kappa} e^{2\chi^3} & \frac{1}{2} \kappa e^{-\chi^3} - \chi^3 e^{\chi^3} \\ \frac{1}{2} \kappa e^{-\chi^3} - \chi^3 e^{\chi^3} & \frac{1}{2} \kappa e^{-\chi^3} + \chi^3 e^{\chi^3} & -\kappa(\chi^3)^2 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Metrika  $\hat{\mathcal{G}}$  odvozená z  $\hat{\mathcal{F}}$  již není plochá.

$$\hat{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa}e^{2\chi^3} & -\frac{1}{\kappa}e^{2\chi^3} & \frac{1}{2}\kappa e^{-\chi^3} \\ -\frac{1}{\kappa}e^{2\chi^3} & \frac{1}{\kappa}e^{2\chi^3} & \frac{1}{2}\kappa e^{-\chi^3} \\ \frac{1}{2}\kappa e^{-\chi^3} & \frac{1}{2}\kappa e^{-\chi^3} & -\kappa(\chi^3)^2 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Známe už řešení všech souřadnic na doublu rozloženém do (4|1). Abychom našli řešení zakřiveného modelu na (6<sub>0</sub>|2) musíme nalézt transformaci souřadnic, která realizuje přechod od rozkladu (2.1) k (2.14). V [4] se povedlo tuto transformaci nalézt pomocí Baker-Campbell-Hausdorffovy formule.

$$\begin{aligned} \chi^1 &= \phi^3 + \frac{1}{2}\tilde{g}_2 \\ \chi^2 &= \phi^3 - \frac{1}{2}\tilde{g}_2 \\ \chi^3 &= \phi^1 \\ \bar{h}_1 &= \phi^2 + \frac{1}{2}\tilde{g}_3 \\ \bar{h}_2 &= -\phi^2 + \frac{1}{2}\tilde{g}_3 \\ \bar{h}_3 &= \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2\phi^2 - \frac{1}{2}(\phi^2)^2 + \frac{1}{2}\tilde{g}_3\phi^2 + \frac{1}{8}(\tilde{g}_3)^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dosazením (2.10, 2.11) do (2.24) dostaneme řešení pohybových rovnic modelu zadaného (2.22).

$$\begin{aligned} \chi^1 &= \frac{1}{2(W_1 + Y_1)} \left( -\ln^2(-W_1 - Y_1) - 1 + \right. \\ &\quad \left. + (W_2 + Y_2)^2 - 2W_1 - 2Y_1 - \right. \\ &\quad \left. - 2W_2 - 2Y_2 - 2\ln(-W_1 - Y_1) + \right. \\ &\quad \left. + 2(W_3 + Y_3)(W_1 + Y_1) \right) + \frac{1}{2}\kappa(\Omega(x_+, x_-) + \beta(x_+, x_-)) \\ \chi^2 &= \frac{1}{2(W_1 + Y_1)} \left( -\ln^2(-W_1 - Y_1) - 1 + \right. \\ &\quad \left. + (W_2 + Y_2)^2 - 2W_1 - 2Y_1 - \right. \\ &\quad \left. - 2W_2 - 2Y_2 - 2\ln(-W_1 - Y_1) + \right. \\ &\quad \left. + 2(W_3 + Y_3)(W_1 + Y_1) \right) - \frac{1}{2}\kappa(\Omega(x_+, x_-) + \beta(x_+, x_-)) \\ \chi^3 &= -\ln(-W_1 - Y_1) \end{aligned} \quad (2.25)$$

kde funkce  $\beta, \Omega$  splňují (2.12, 2.13). Oba  $\sigma$ -modely jsou tím vyřešeny a můžeme přistoupit ke studiu okrajových podmínek.

## 2.2 Transformace okrajových podmínek

V následující kapitole uvedeme konkrétní příklady  $Dp$ -bran a jejich transformací. Jako adaptované souřadnice pro  $Dp$ -bránu zvolíme souřadnice  $\psi$ , v nichž má metrika plochého modelu diagonální tvar

$$\mathcal{G}(\psi) = \begin{pmatrix} -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Transformace souřadnic, která metriku do tohoto tvaru převede, je

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 + \psi^3) \\ \xi^2 &= \psi^2 \\ \xi^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi^1 + \psi^3) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Řešení modelu na plochem pozadí má v souřadnicích  $\psi$  tvar

$$\begin{aligned} \psi^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 + Y_1 - W_3 - Y_3) \\ \psi^2 &= W_2 + Y_2 \\ \psi^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 + Y_1 + W_3 + Y_3) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Souřadnice  $\psi$  jsme pro formulaci  $Dp$ -bran a lepící matice zvolili proto, že tak máme kontrolu nad tím, ve kterém směru volíme Dirichletovy směry. Kupříkladu uplatňovat podmínku pevného konce na souřadnici, která reprezentuje tok souřadnicového času, je sice matematicky přípustné, postrádá to však fyzikální význam. Lepící matice v souřadnicích  $\psi$  budou podle [6] diagonální a  $Dp$ -brány jsou podvariety určené zafixováním těch souřadnic, na které klademe Dirichletovy podmínky.

### 2.2.1 D2-brána

$D2$ -brána v našem případě znamená, že na všechny souřadnice jsou kladeny podmínky volných konců a konce struny se volně pohybují v prostoru ("spacefilling brane"). Lepící matice v adaptovaných souřadnicích má tvar matice jednotkového operátoru a stejně tak je tomu podle (1.55) i v souřadnicích  $\xi, \phi$  i po přepsání  $\mathcal{R}$  jako operátoru na algebře (1.57).

$$\mathcal{R}_\psi = \mathcal{R}_\xi = \mathcal{R}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R \quad (2.29)$$

Podmínka konformní symetrie (1.54) i (1.58) je splněna triviálně a rovnost (1.53) nám dává okrajové podmínky pro volné funkce v řešení plochého modelu

$$W'_\mu(x_+) |_{\sigma=0,\pi} = Y'_\mu(x_-) |_{\sigma=0,\pi} \quad (2.30)$$

Již máme připraveno vše potřebné pro nalezení T-plurální lepící matice. Dosazením (2.5, 2.6, 2.19, 2.21, 2.29) do (1.64) dostaneme matici  $\hat{R}$  a z ní i  $\hat{\mathcal{R}}$

$$\hat{\mathcal{R}}_\chi = \hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Jednoduchý tvar  $\hat{\mathcal{R}}$  značně usnadňuje další práci. Podmínku konformní symetrie lze ověřit přímo - dosazením zjistíme, že (1.54) i (1.58) pro  $\hat{G}, \hat{\mathcal{G}}, \hat{R}, \hat{\mathcal{R}}$  platí.

Zjistíme nyní, jaké podmínky klade na řešení (2.25) rovnost

$$\partial_- \chi |_{\sigma=0,\pi} = \partial_+ \chi \hat{\mathcal{R}} |_{\sigma=0,\pi} \quad (2.32)$$

Spočítáme nejprve derivace složek řešení a nahradíme v nich derivace funkcí  $\beta$  podle (2.13).

$$\begin{aligned} \partial_+ \chi^1 &= \frac{1}{2(W_1 + Y_1)^2} \left( (-1 + \ln^2(-W_1 - Y_1) + 2W_2 + \kappa Y_1^2 + 2Y_2 - \right. \\ &\quad \left. - (\kappa W_1^2 + 2\kappa W_1 Y_1)(-1 + W_2 + Y_2) - (W_2 + Y_2)(W_2 + \kappa Y_1^2 + Y_2)) W_1' + \right. \\ &\quad \left. + (W_1 + Y_1)((\kappa(W_1 + Y_1)^2 + 2(-1 + W_2 + Y_2)) W_2' + 2(W_1 + Y_1) W_3') \right) \\ \partial_+ \chi^2 &= \frac{1}{2(W_1 + Y_1)^2} \left( (-1 + \ln^2(-W_1 - Y_1) + 2W_2 - \kappa Y_1^2 + 2Y_2 - \right. \\ &\quad \left. + (\kappa W_1^2 + 2\kappa W_1 Y_1)(-1 + W_2 + Y_2) - (W_2 + Y_2)(W_2 - \kappa Y_1^2 + Y_2)) W_1' + \right. \\ &\quad \left. + (W_1 + Y_1)(-\kappa(W_1 + Y_1)^2 - 2(-1 + W_2 + Y_2)) W_2' + 2(W_1 + Y_1) W_3') \right) \\ \partial_+ \chi^3 &= -\frac{W_1'}{(W_1 + Y_1)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \partial_- \chi^1 &= \frac{1}{2(W_1 + Y_1)^2} \left( (-1 + \ln^2(-W_1 - Y_1) + 2W_2 - \kappa Y_1^2 + 2Y_2 + \right. \\ &\quad \left. + (\kappa W_1^2 + 2\kappa W_1 Y_1)(-1 + W_2 + Y_2) - (W_2 + Y_2)(W_2 - \kappa Y_1^2 + Y_2)) Y_1' + \right. \\ &\quad \left. + (W_1 + Y_1)(-\kappa(W_1 + Y_1)^2 - 2(-1 + W_2 + Y_2)) Y_2' + 2(W_1 + Y_1) Y_3') \right) \\ \partial_- \chi^2 &= \frac{1}{2(W_1 + Y_1)^2} \left( (-1 + \ln^2(-W_1 - Y_1) + 2W_2 + \kappa Y_1^2 + 2Y_2 - \right. \\ &\quad \left. - (\kappa W_1^2 + 2\kappa W_1 Y_1)(-1 + W_2 + Y_2) - (W_2 + Y_2)(W_2 + \kappa Y_1^2 + Y_2)) Y_1' + \right. \\ &\quad \left. + (W_1 + Y_1)((\kappa(W_1 + Y_1)^2 + 2(-1 + W_2 + Y_2)) Y_2' + 2(W_1 + Y_1) Y_3') \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$



$$+(W_1 + Y_1)((\kappa(W_1 + Y_1)^2 + 2(-1 + W_2 + Y_2))Y_2' + 2(W_1 + Y_1)Y_3')$$

$$\partial_- \chi^3 = -\frac{Y_1'}{(W_1 + Y_1)}$$

Dosazením do (2.32) získáme soustavu rovnic, kde na levé straně figurují složky (2.34), na pravé straně složky (2.33) pouze s prohozením  $\partial_+ \chi^1 \leftrightarrow \partial_+ \chi^2$ .

$$\begin{aligned} \partial_- \chi^1 |_{\sigma=0,\pi} &= \partial_+ \chi^2 |_{\sigma=0,\pi} \\ \partial_- \chi^2 |_{\sigma=0,\pi} &= \partial_+ \chi^1 |_{\sigma=0,\pi} \\ \partial_- \chi^3 |_{\sigma=0,\pi} &= \partial_+ \chi^3 |_{\sigma=0,\pi} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Z rovnosti  $\partial_- \chi^3 |_{\sigma=0,\pi} = \partial_+ \chi^3 |_{\sigma=0,\pi}$  je přímo vidět, že platí  $W_1'(x_+) |_{\sigma=0,\pi} = Y_1'(x_-) |_{\sigma=0,\pi}$ . Dosadíme tedy za  $W_1' |_{\sigma=0,\pi}$  do dalších dvou rovnic. Vyjádřením  $W_3' |_{\sigma=0,\pi}$  z druhé rovnice, dosazením do první a zjednodušením výrazů dostaneme  $W_2'(x_+) |_{\sigma=0,\pi} = Y_2'(x_-) |_{\sigma=0,\pi}$  a nakonec i  $W_3'(x_+) |_{\sigma=0,\pi} = Y_3'(x_-) |_{\sigma=0,\pi}$ . Vidíme tedy, že okrajové podmínky pro volné funkce (2.30) v řešení původního modelu jsou shodné s podmínkami pro řešení modelu spojeného s prvním pomocí Poisson-Lie T-plurality. Podstatné je, že jsme v závěrečné fázi nepotřebovali nic víc než jednoduché algebraické úpravy a žádné jiné podmínky na volné funkce tedy nejsou.

## 2.2.2 D1-brána

Lepící matici pro D1-bránu zvolíme ve tvaru

$$\mathcal{R}_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

takže D1-brána je v plochých souřadnicích přímka o konstantní souřadnici  $\psi^3$ , po níž se konec struny může volně pohybovat. Podmínka konformní symetrie (1.54) je splněna a rovnost (1.53) nám dává

$$\begin{aligned} W_1'(x_+) |_{\sigma=0,\pi} &= -Y_3'(x_-) |_{\sigma=0,\pi} \\ W_2'(x_+) |_{\sigma=0,\pi} &= Y_2'(x_-) |_{\sigma=0,\pi} \\ W_3'(x_+) |_{\sigma=0,\pi} &= -Y_1'(x_-) |_{\sigma=0,\pi} \end{aligned} \quad (2.37)$$

V souřadnicích  $\phi$  už bude lepící matice poměrně komplikovaná. Zapišeme ji tedy raději po složkách.

$$\mathcal{R}_1^1[\phi] = \frac{1}{2}(1 - e^{\phi^1} + \phi^2)^2$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1^2[\phi] &= -\frac{1}{2}(-1 + e^{\phi^1} - \phi^2)(-1 + e^{2\phi^1} + 2\phi^2 + (\phi^2)^2 - 2e^{\phi^1}(1 + \phi^2)) \\
\mathcal{R}_1^3[\phi] &= \frac{1}{4}e^{-\phi^1} \left( 2e^{\phi^1}\phi^1(-1 + e^{\phi^1} - \phi^2)(-1 + e^{2\phi^1} + 2\phi^2 + (\phi^2)^2 - 2e^{\phi^1}(1 + \phi^2)) - \right. \\
&\quad \left. - (-1 + e^{2\phi^1} + 2\phi^2 + (\phi^2)^2 - 2e^{\phi^1}(1 + \phi^2))^2 \right) \\
\mathcal{R}_2^1[\phi] &= -1 - e^{\phi^1}(-1 + \phi^1) - \phi^2 \\
\mathcal{R}_2^2[\phi] &= 1 + (-1 + e^{\phi^1} - \phi^2)(1 + e^{\phi^1}(-1 + \phi^1) + \phi^2) \\
\mathcal{R}_2^3[\phi] &= \frac{1}{2}e^{-\phi^1} \left( -1 - e^{3\phi^1}(-1 + \phi^1)(-1 + 2\phi^1) + \phi^2 + 3(\phi^2)^2 + (\phi^2)^3 + \right. \\
&\quad \left. + e^{2\phi^1}(3 + 2(-3 + \phi^1)\phi^1)(1 + \phi^2) + e^{\phi^1}(-1 + \phi^1)(1 + 3\phi^2(2 + \phi^2)) \right) \\
\mathcal{R}_3^1[\phi] &= -e^{\phi^1} \\
\mathcal{R}_3^2[\phi] &= e^{\phi^1}(-1 + e^{\phi^1} - \phi^2) \\
\mathcal{R}_3^3[\phi] &= -\frac{1}{2}(-1 + e^{\phi^1} - \phi^2)(1 + e^{\phi^1}(-1 + 2\phi^1) + \phi^2)
\end{aligned}$$

Matice  $R$  je sice o něco jednodušší, ale ne o mnoho. Dostaneme ji z (1.57).

Dalším krokem je přechod k maticím  $\hat{R}, \hat{\mathcal{R}}$ . Matici  $\hat{R}$  už nebudeme pro její značnou složitost vypisovat. Uvedeme až  $\hat{\mathcal{R}}$ , a to spíše proto, aby bylo vidět, že je jednodušší ji spočítat, než správně opsat.

$R$  závisí pouze na souřadnicích  $\phi^1, \phi^2$ . Ty si vyjádříme z (2.24) pomocí souřadnic na rozkladu (6<sub>0</sub>|2).

$$\phi^1 = \chi^3 \quad (2.38)$$

$$\phi^2 = \frac{1}{2}(\bar{h}_1 - \bar{h}_2) \quad (2.39)$$

$R$  je teď závislá na  $\chi^3, \bar{h}_1, \bar{h}_2$ , dosadíme do (1.64) a z (1.65) získáme  $\hat{\mathcal{R}}$ . Tím zde vzniká zajímavá situace. Lepící matice teď závisí nejen na souřadnicích  $\chi$  modelu se zakřiveným pozadím, ale i na pomocných souřadnicích  $\bar{h}$ . To je dosti matoucí a dosud v žádné z dostupných prací nebylo zjištěno, jaký to má geometrický význam nebo jak se této situaci vyhnout. Kritické místo je transformace souřadnic umožňující přechod mezi rozklady  $\bar{h}$ . Pokud by souřadnice  $\phi$  závisely pouze na  $\chi$ , tato komplikace nenastane. Pro její značnou složitost vypíšeme  $\hat{\mathcal{R}}$  po složkách

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}_1^1[\chi] &= \frac{1}{16\kappa} \left( e^{-\chi^3}(-\kappa + e^{\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) + 2e^{2\chi^3}(-1 + \chi^3))(2\kappa(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) - \right. \\
&\quad \left. - 4e^{2\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{3\chi^3}(-1 + 2\chi^3) + e^{\chi^3}(4 - 4\kappa - \bar{h}_1^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) - (-4 + \bar{h}_2)\bar{h}_2 + 4\kappa\chi^3)) \\
\hat{\mathcal{R}}_1^2[\chi] &= \frac{1}{16} \left( 4 - 4\kappa - 4\bar{h}_1 - \bar{h}_1^2 + 2e^{-\chi^3} \kappa(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) + 4\bar{h}_2 + 2\bar{h}_1\bar{h}_2 - \bar{h}_2^2 + 4\kappa\chi^3 + \right. \\
& + \frac{1}{\kappa} (8e^{4\chi^3}(-1 + \chi_3)(-1 + 2\chi^3)) - \frac{1}{\kappa} (e^{\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(\bar{h}_1^2 - 2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) + \\
& + \bar{h}_2^2 - 4(1 + \kappa + \bar{h}_2) + 4\kappa\chi^3)) - \frac{1}{\kappa} (4e^{3\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(3 + 2(-3 + \chi^3)\chi^3)) - \\
& - \frac{1}{\kappa} (2e^{2\chi^3}(3\bar{h}_1^2(-1 + \chi^3) - 6\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) - 12\bar{h}_2(-1 + \chi^3) + \\
& \left. + 3\bar{h}_2^2(-1 + \chi^3) + 2(-2 + \kappa + 2\chi^3(1 - \kappa + \kappa\chi^3)))) \right) \\
\hat{\mathcal{R}}_1^3[\chi] &= \frac{1}{2\kappa} (e^{\chi^3}(-\kappa + e^{\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) + 2e^{2\chi^3}(-1 + \chi^3))) \\
\hat{\mathcal{R}}_2^1[\chi] &= \frac{1}{16} \left( 4 + 4\kappa - 4\bar{h}_1 - \bar{h}_1^2 - 2e^{-\chi^3} \kappa(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) + 4\bar{h}_2 + 2\bar{h}_1\bar{h}_2 - \bar{h}_2^2 - 4\kappa\chi^3 - \right. \\
& - \frac{1}{\kappa} (8e^{4\chi^3}(-1 + \chi_3)(-1 + 2\chi^3)) + \frac{1}{\kappa} (e^{\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-4 + 4\kappa + \bar{h}_1^2 - 2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) + \\
& + (-4 + \bar{h}_2)\bar{h}_2 - 4\kappa\chi^3)) + \frac{1}{\kappa} (4e^{3\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(3 + 2(-3 + \chi^3)\chi^3)) - \\
& - \frac{1}{\kappa} (2e^{2\chi^3}(-3\bar{h}_1^2(-1 + \chi^3) + 6\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 12\bar{h}_2(-1 + \chi^3) - \\
& \left. - 3\bar{h}_2^2(-1 + \chi^3) + 2(2 + \kappa - 2(1 + \kappa)\chi^3 + 2\kappa(\chi^3)^2))) \right) \\
\hat{\mathcal{R}}_2^2[\chi] &= -\frac{1}{16\kappa} (e^{-\chi^3}(\kappa + e^{\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) + 2e^{2\chi^3}(-1 + \chi^3))(-2\kappa(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) - \\
& - 4e^{2\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{3\chi^3}(-1 + 2\chi^3) - \\
& - e^{\chi^3}(\bar{h}_1^2 - 2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) + \bar{h}_2^2 - 4(1 + \kappa + \bar{h}_2) + 4\kappa\chi^3))) \\
\hat{\mathcal{R}}_2^3[\chi] &= \frac{1}{2\kappa} (e^{\chi^3}(-\kappa + e^{\chi^3}(-2 - \bar{h}_1 + \bar{h}_2) - 2e^{2\chi^3}(-1 + \chi^3))) \\
\hat{\mathcal{R}}_3^1[\chi] &= \frac{1}{64} e^{-2\chi^3} (2\kappa(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) - 4e^{2\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{3\chi^3}(-1 + 2\chi^3) + \\
& + e^{\chi^3}(4 - 4\kappa - \bar{h}_1^2 + 2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) - (-4 + \bar{h}_2)\bar{h}_2 + 4\kappa\chi^3))(-4 + 4\bar{h}_1 + \bar{h}_1^2 - 4\bar{h}_2 - \\
& - 2\bar{h}_1\bar{h}_2 + \bar{h}_2^2 + 4e^{\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{2\chi^3}(1 + 2(-1 + \chi^3)\chi^3)) \\
\hat{\mathcal{R}}_3^2[\chi] &= \frac{1}{64} e^{-2\chi^3} (-2\kappa(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) - 4e^{2\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{3\chi^3}(-1 + 2\chi^3) - \\
& - e^{\chi^3}(\bar{h}_1^2 - 2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) + \bar{h}_2^2 - 4(1 + \kappa + \bar{h}_2) + 4\kappa\chi^3))(-4 + 4\bar{h}_1 + \bar{h}_1^2 - 4\bar{h}_2 - 2\bar{h}_1\bar{h}_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{h}_2^2 + 4e^{\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{2\chi^3}(1 + 2(-1 + \chi^3)\chi^3)) \\
\hat{\mathcal{R}}_3^3[\chi] &= \frac{1}{8}((2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)^2 + 4e^{\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{2\chi^3}(1 + 2(-1 + \chi^3)\chi^3))
\end{aligned}$$

Dosazením do (1.54) se přesvědčíme, že podmínka konformní symetrie je zachována. Chceme-li zjistit, jaké okrajové podmínky nám dává  $\hat{\mathcal{R}}$  na funkce  $W_\mu, Y_\mu$ , musíme dosadit za  $\chi^3, \bar{h}_1, \bar{h}_2$ , tedy musíme znát nejen řešení souřadnic na  $\hat{H}$ , ale i na  $\bar{H}$ . Podle (2.10, 2.11, 2.24) je

$$\begin{aligned}
\chi^3 &= -\ln(-W_1 - Y_1) \\
\bar{h}_1 &= \frac{\kappa}{2}(-W_1 + Y_1) + \frac{1}{W_1 + Y_1}(-\ln(-W_1 - Y_1) - \\
& \quad -W_1 - Y_1 - W_2 - Y_2) \\
\bar{h}_2 &= \frac{\kappa}{2}(-W_1 + Y_1) - \frac{1}{W_1 + Y_1}(-\ln(-W_1 - Y_1) - \\
& \quad -W_1 - Y_1 - W_2 - Y_2)
\end{aligned}$$

$\hat{\mathcal{R}}$  už po tomto dosazení skutečně nemá smysl vypisovat. Je ovšem možno dosadit do (2.32). Pravá strana se překvapivě velice zjednoduší a dostaneme tak soustavu tří rovnic, která je velice podobná soustavě, kterou jsme řešili u  $D0$ -brány. Stejnými algebraickými úpravami ji vyřešíme a získáme vztah mezi funkcemi  $W_\mu, Y_\nu$ , který je přesně shodný s rovnostmi (2.37). Můžeme tedy konstatovat, že přestože lepící matice  $\hat{\mathcal{R}}$  byla velmi komplikovaná a závisela na pomocných souřadnicích  $\hat{H}$ , pro což nemáme vysvětlení, okrajové podmínky, které popisuje, jsou shodné s těmi, které popisuje původní  $\mathcal{R}$ .

### 2.2.3 $D0$ -brána

Lepící matici pro  $D0$ -bránu zvolíme ve tvaru

$$\mathcal{R}_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Konec struny je tím fixován do bodu o konstantních souřadnicích  $\psi^2, \psi^3$ . Podmínka konformní symetrie (1.54) je splněna a rovnost (1.53) nám dává

$$\begin{aligned}
W_1'(x_+) |_{\sigma=0,\pi} &= -Y_3'(x_-) |_{\sigma=0,\pi} \\
W_2'(x_+) |_{\sigma=0,\pi} &= -Y_2'(x_-) |_{\sigma=0,\pi} \\
W_3'(x_+) |_{\sigma=0,\pi} &= -Y_1'(x_-) |_{\sigma=0,\pi}
\end{aligned} \quad (2.41)$$

Lepící matice ve složkách  $\phi$  má podle očekávání tvar velmi podobný  $\mathcal{R}$ , kterou jsme spočítali pro D1-bránu, a bylo by zbytečné vypisovat ji celou. Uvedeme proto pouze ty složky, které se od předchozího případu liší.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1^2[\phi] &= -\frac{1}{2}(-1 + e^{\phi^1} - \phi^2)(3 + e^{2\phi^1} + 2\phi^2 + (\phi^2)^2 - 2e^{\phi^1}(1 + \phi^2)) \\ \mathcal{R}_1^3[\phi] &= \frac{1}{4}e^{-\phi^1} \left( 2e^{\phi^1} \phi^1 (-1 + e^{\phi^1} - \phi^2)(3 + e^{2\phi^1} + 2\phi^2 + (\phi^2)^2 - 2e^{\phi^1}(1 + \phi^2)) - \right. \\ &\quad \left. - (3 + e^{2\phi^1} + 2\phi^2 + (\phi^2)^2 - 2e^{\phi^1}(1 + \phi^2))^2 \right) \\ \mathcal{R}_2^2[\phi] &= -1 + (-1 + e^{\phi^1} - \phi^2)(1 + e^{\phi^1}(-1 + \phi^1) + \phi^2) \\ \mathcal{R}_2^3[\phi] &= \frac{1}{2}e^{-\phi^1} (3 - e^{3\phi^1}(-1 + \phi^1)(-1 + 2\phi^1) + 5\phi^2 + 3(\phi^2)^2 + (\phi^2)^3 + \\ &\quad + e^{2\phi^1}(3 + 2(-3 + \phi^1)\phi^1)(1 + \phi^2) + e^{\phi^1}(-1 + \phi^1)(5 + 3\phi^2(2 + \phi^2)))\end{aligned}$$

Přechod k maticím plurálním provedeme stejně jako pro oba předchozí případy dosazením do (1.64, 1.65).  $\hat{\mathcal{R}}$  je stejně komplikovaná jako v případě transformace D1-brány, shodný je však pouze poslední sloupec. Pro úplnost uvedeme složky, které se liší.

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{R}}_1^1[\chi] &= \frac{1}{16\kappa} \left( e^{-\chi^3} (-\kappa + e^{\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) + 2e^{2\chi^3}(-1 + \chi^3))(2\kappa(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) - \right. \\ &\quad \left. - 4e^{2\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{3\chi^3}(-1 + 2\chi^3) + e^{\chi^3}(-4(3 + \kappa) - \bar{h}_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) - (-4 + \bar{h}_2)\bar{h}_2 + 4\kappa\chi^3)) \right) \\ \hat{\mathcal{R}}_1^2[\chi] &= \frac{1}{16} \left( -12 - 4\kappa - 4\bar{h}_1 - \bar{h}_1^2 + 2e^{-\chi^3} \kappa(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) + 4\bar{h}_2 + 2\bar{h}_1\bar{h}_2 - \bar{h}_2^2 + 4\kappa\chi^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\kappa}(8e^{4\chi^3}(-1 + \chi^3)(-1 + 2\chi^3)) - \frac{1}{\kappa}(e^{\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(\bar{h}_1^2 - 2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{h}_2^2 - 4(-3 + \kappa + \bar{h}_2) + 4\kappa\chi^3)) - \frac{1}{\kappa}(4e^{3\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(3 + 2(-3 + \chi^3)\chi^3)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\kappa}(2e^{2\chi^3}(3\bar{h}_1^2(-1 + \chi^3) - 6\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) - 12\bar{h}_2(-1 + \chi^3) + \right. \\ &\quad \left. + 3\bar{h}_2^2(-1 + \chi^3) + 2(-10 + \kappa + 2\chi^3(5 - \kappa + \kappa\chi^3)))) \right) \\ \hat{\mathcal{R}}_2^1[\chi] &= -\frac{1}{16\kappa} \left( 2e^{-\chi^3} \kappa^2(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) + 8e^{4\chi^3}(-1 + \chi^3)(-1 + 2\chi^3) + \kappa(\bar{h}_1^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) + \bar{h}_2^2 - 4(-3 + \kappa + \bar{h}_2) + 4\kappa\chi^3) - 4e^{3\chi^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(3 + 2(-3 + \chi^3)\chi^3) - \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e^{x^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(\bar{h}_1^2 - 2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) + (-4 + \bar{h}_2)\bar{h}_2 + 4(3 + \kappa - \kappa\chi^3)) + \\
& 2e^{2x^3}(-3\bar{h}_1^2(-1 + \chi^3) + 6\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 12\bar{h}_2(-1 + \chi^3) - \\
& -3\bar{h}_2^2(-1 + \chi^3) + 2(10 + \kappa - 2(5 + \kappa)\chi^3 + 2\kappa(\chi^3)^2)) \\
\hat{\mathcal{R}}_2^2[\chi] = & -\frac{1}{16\kappa} \left( e^{-x^3}(\kappa + e^{x^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) + 2e^{2x^3}(-1 + \chi^3))(-2\kappa(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) - \right. \\
& -4e^{2x^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{3x^3}(-1 + 2\chi^3) - \\
& \left. -e^{x^3}(\bar{h}_1^2 - 2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) + \bar{h}_2^2 - 4(-3 + \kappa + \bar{h}_2) + 4\kappa\chi^3)) \right) \\
\hat{\mathcal{R}}_3^1[\chi] = & \frac{1}{64} e^{-2x^3} (2\kappa(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) - 4e^{2x^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{3x^3}(-1 + 2\chi^3) + \\
& + e^{x^3}(-4(3 + \kappa) - \bar{h}_1^2 + 2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) - (-4 + \bar{h}_2)\bar{h}_2 + 4\kappa\chi^3))(12 + 4\bar{h}_1 + \bar{h}_1^2 - 4\bar{h}_2 - \\
& -2\bar{h}_1\bar{h}_2 + \bar{h}_2^2 + 4e^{x^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{2x^3}(1 + 2(-1 + \chi^3)\chi^3)) \\
\hat{\mathcal{R}}_3^2[\chi] = & \frac{1}{64} e^{-2x^3} (-2\kappa(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2) - 4e^{2x^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{3x^3}(-1 + 2\chi^3) - \\
& -e^{x^3}(\bar{h}_1^2 - 2\bar{h}_1(-2 + \bar{h}_2) + \bar{h}_2^2 - 4(-3 + \kappa + \bar{h}_2) + 4\kappa\chi^3))(12 + 4\bar{h}_1 + \bar{h}_1^2 - 4\bar{h}_2 - 2\bar{h}_1\bar{h}_2 + \\
& + \bar{h}_2^2 + 4e^{x^3}(2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2)(-1 + \chi^3) + 4e^{2x^3}(1 + 2(-1 + \chi^3)\chi^3))
\end{aligned}$$

Podmínka konformní symetrie (1.54) je zachována. Jak vidno, lepící matice opět závisí na souřadnicích  $\chi^3$ ,  $\bar{h}_1$ ,  $\bar{h}_2$ . Stejným postupem jako u D1-brány ověříme, že okrajové podmínky zadané  $\hat{\mathcal{R}}$  jsou totožné s (2.41).

## 2.2.4 D(-1)-brána

Již bylo řečeno, že z matematického hlediska je přípustné, aby všechny okrajové podmínky byly Dirichletovy. Jediný rozdíl oproti případu D2-brány leží v opačném znaménku lepící matice a v okrajových podmínkách. Postupy jsou stejné a ve výsledcích lze pouze změnit znaménko.

$$\mathcal{R}_\psi = \mathcal{R}_\xi = \mathcal{R}_\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = R \quad (2.42)$$

$$W'_\mu(x_+) |_{\sigma=0,\pi} = -Y'_\mu(x_-) |_{\sigma=0,\pi} \quad (2.43)$$

$$\hat{\mathcal{R}}_\chi = \hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Podmínky konformní symetrie se při transformaci zachovávají a stejně tak se nezmění okrajové podmínky.

# Kapitola 3

## Závěr

Zrekapitulujme nyní, čeho jsme v této práci dosáhli. V první kapitole se nám povedlo najít předpis pro transformaci pravoinvariantních polí při Poisson-Lie T-pluralitě a díky ní jsme našli i transformaci lepící matice, pomocí níž popisujeme okrajové podmínky.

Při praktickém výpočtu jsme využili toho, že je známo několik příkladů, kdy můžeme najít řešení obou vzájemně plurálních modelů. Na řešení modelů jsme postupně aplikovali okrajové podmínky a našli přesný tvar  $Dp$ -bran v termínech lepící matice. Při tom jsme bohužel zjistili, že lepící matice se po provedení T-plurální transformace stávají velmi komplikovanými. To by samo o sobě nebyl největší problém. Z konkrétního tvaru výsledných lepících matic je vidět, že závisí nejen na souřadnicích grupy na níž model žije, ale také na souřadnicích grupy duální, tedy na pomocném zobrazení, které realizuje zdvih grupy do dublu. Tento fakt nejsme nyní schopni objasnit. Přesto lze říct, že transformovaná lepící matice popisuje stejné okrajové podmínky jako matice původní. Povedlo se nám totiž na příkladech ukázat, že na volné funkce neurčené pohybovými rovnicemi  $\sigma$ -modelu klade stejné podmínky  $\mathcal{R}$  i  $\hat{\mathcal{R}}$ . Navíc jsme ověřili zachování podmínky konformní symetrie.

**Poděkování:** Rád bych tímto poděkoval všem, kteří mi při mé práci jakkoliv pomohli. Především bych chtěl poděkovat svému školiteli, Prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc., za trpělivost, mnohé cenné rady a připomínky týkající se dané problematiky.

# Dodatek A

## Značení

Jelikož každý autor používá své vlastní značení a je těžké se v tom orientovat, doplníme pro přehlednost některé výrazy použité v této práci.

Operátory na Lieově algebře zapisujeme klasicky  $E, G, R$ , tenzorová pole jsou uváděna písmem  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{R}$ , algebry značíme standardně  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ . S následujícími objekty zacházíme jako se sloupcovými vektory (přestože každá složka je vektor báze)

$$T \quad \tilde{T} \quad \hat{U} \quad \bar{U}$$

zatímco další jsou řádky

$$\phi \quad \partial_{\pm}\phi \quad L_{\pm}(g) \quad R_{\pm}(g)$$

Pozice indexů jsou voleny tak, abychom mohli používat sumační konvenci. Pro grupy  $G, \hat{H}$  jsou pozice indexů stejné, u grup  $\tilde{G}, \bar{H}$  jsou oproti předchozím dvěma pozice zaměněny.

$$T_i \quad \tilde{T}^i \quad \hat{U}_i \quad \bar{U}^i \quad R_{\pm}^a(g) \quad L_{\pm}^a(g) \quad \partial_{\pm}\phi^{\mu}$$

V submaticích adjungované reprezentace  $a$  značí řádek,  $i$  sloupec

$$a(g)_a^i \quad b(g)^{ai} \quad d(g)_i^a$$

zatímco ve vielbeinech

$$e_{\mu}^a \quad e_{\mu}^a{}^L$$

$\mu$  značí řádek a  $a$  sloupec. V následujících maticích vždy index vlevo značí řádek, vpravo sloupec.

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \quad F_{ab} \quad \mathcal{G}_{\mu\nu} \quad G_{ab} \quad E_{ab}$$

Pro lepicí matice

$$\mathcal{R}_{\nu}^{\mu} \quad R_b^a$$

index nahore označuje sloupec, index dole řádek.



# Literatura

- [1] C.Klimčık and P.Ševera, *Dual non-Abelian duality and the Drinfeld double*, Phys.Lett. B, 351:455–462, 1995 [hep-th/9502122]
- [2] C.Klimčık, *Poisson-Lie T-duality*, Nucl.Phys B (Proc.Suppl.), 46:116–121, 1996 [hep-th/9509095]
- [3] R. von Unge, *Poisson-Lie T-plurality*, J. High En. Phys. 02:07 (2002) 014, [hep-th/0205245]
- [4] J. Hýbl, *Klasické řešení sigma modelu v zakřiveném pozadí*, Diplomová práce FJFI 2006
- [5] L. Hlavatý and M. Turek, J. High En. Phys. 0606, 003 (2006), [hep-th/0512082]
- [6] C. Albertsson, R. A. Reid-Edwards, *Worldsheet boundary conditions in Poisson-Lie T-duality*, 2006 [hep-th/0606024]