

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA JADERNÁ  
A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Chaos v jednorozměrném  
integrabilním kvantovém systému**

Chaos in one dimensional integrable  
quantum system

**Daniel Vařata**

Katedra fyziky

Akademický rok: 2006/2007

Školitel: Prof. RNDr. Petr Šeba, DrSc.



## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze 10. 5. 2007

Daniel Vašata



## **Poděkování**

Rád bych poděkoval Prof. RNDr. Petru Šebovi, DrSc. za odborné vedení po celou dobu naší spolupráce.



*Název práce:* Chaos v jednorozměrném integrabilním kvantovém systému

*Autor:* Daniel Vařata

*Obor:* Matematické inženýrství

*Vedoucí práce:* Prof. RNDr. Petr Šeba, DrSc.

*Konzultant:* -

*Abstrakt:* Zabýváme se studiem spektra jednorozměrného kvantového systému, tvořeného  $n$  bodovými interakcemi na kružnici. Bodovou interakci představíme jako dvojici okrajových podmínek v daném bodě, která určuje samosdružená rozšíření jednorozměrného Laplaceova operátoru. Zkonstruujeme model několika těchto bodových interakcí na kružnici a úsečce. Ukážeme, že spektrum tohoto systému je diskrétní a najdeme explicitní vyjádření sekulární rovnice určující vlastní čísla. Dále se zabýváme studiem statistických vlastností spektra. Ačkoli je tento systém klasicky integrabilní, zjistíme, že v některých případech vykazuje vlastnosti typické pro chaotické systémy. Rozdělení vzdáleností mezi sousedními energetickými hladinami, které byli v nepřítomnosti interakce degenerované, odpovídá statistice level spacing ortogonálního souboru náhodných matic.

*Klíčová slova:* Kvantová mechanika, řešitelné modely, bodová interakce, kvantový chaos, teorie náhodných matic.

*Title:* Chaos in one dimensional integrable quantum system

*Author:* Daniel Vařata

*Abstract:* We study the spectrum of one dimensional quantum system composed of  $n$  point interactions on a circle. Point interaction is introduced in terms of boundary conditions, that determine self-adjoint extensions of one dimensional Laplace operator. The spectrum of this system is discrete and it is possible to express explicitly secular equation for the eigenvalues. Then we study statistical properties of the spectrum. Although this system is classically integrable, we find, that in some cases it shows properties typical for chaotic systems. The nearest neighbour spacing distribution for levels, which are degenerate when point interaction vanishes, is in good agreement with the level spacing distribution of orthogonal ensemble of random matrices.

*Keywords:* Quantum mechanics, solvable models, point interaction, quantum chaos, random matrix theory.





# Obsah

Úvod	11
<b>1 Bodová interakce na kružnici</b>	<b>13</b>
1.1 Samosdružená rozšíření	13
1.2 Okrajové podmínky	14
1.3 Speciální případy, symetrie	15
1.3.1 Časová inverze	16
1.4 Spektrum	17
1.4.1 Dirichletovy okrajové podmínky	18
1.4.2 Periodické okrajové podmínky	18
1.4.3 Škálově nezávislá třída okrajových podmínek	19
<b>2 Několik bodových interakcí</b>	<b>21</b>
2.1 Model na kružnici	22
2.1.1 Obecná charakteristika spektra	23
2.1.2 Kladné spektrum	25
2.1.3 Explicitní tvar sekulární rovnice	27
2.1.4 Záporné spektrum	30
2.1.5 Vlastní číslo 0	30
2.2 Model na úsečce	31
2.2.1 Obecná charakteristika spektra	31
2.2.2 Kladné spektrum	32
2.2.3 Záporné spektrum	33
2.2.4 Vlastní číslo 0	34
2.3 Shrnutí spektrálních vlastností	35
2.3.1 Model na kružnici	35
2.3.2 Model na úsečce	35
<b>3 Statistické vlastnosti spektra</b>	<b>37</b>
3.1 Základní vlastnosti	37
3.2 Separování kořenů	40
3.3 Numerické výpočty	42
3.3.1 Výsledky	44
3.4 Poruchový výpočet	45
3.5 Porovnání s modelem na úsečce	48
<b>Závěr</b>	<b>51</b>
<b>A Neomezené operátory na Hilbertově prostoru</b>	<b>53</b>
A.1 Úvod	53
A.2 Spektrální teorie	55
A.3 Rozšíření symetrických operátorů	57

A.4	Diferenciální operátory . . . . .	61
A.5	Spektra diferenciálních operátorů . . . . .	65
A.6	Kreinova formule . . . . .	66
<b>B</b>	<b>Teorie náhodných matic</b>	<b>69</b>
B.1	Klasické Gaussovské soubory . . . . .	69
B.1.1	Time-reversal . . . . .	69
B.1.2	Ortogonální soubor . . . . .	70
B.1.3	Symplektický soubor . . . . .	71
B.1.4	Unitární soubor . . . . .	72
B.1.5	Standardní definice gaussovských souborů . . . . .	73
B.1.6	Rozdělení vlastních čísel . . . . .	74
B.2	Statistiky rozdělení vlastních čísel . . . . .	75
B.2.1	$n$ -bodová korelační funkce . . . . .	75
B.2.2	Unfolding . . . . .	76
B.2.3	Level spacing . . . . .	78
<b>C</b>	<b>Teorie pravděpodobnosti</b>	<b>83</b>
C.1	Transformace náhodné veličiny . . . . .	83
C.2	Příklady rozdělení . . . . .	84
C.2.1	Normální rozdělení . . . . .	84
C.2.2	Rozdělení $\chi_r$ . . . . .	84
C.3	Centrální limitní teorém . . . . .	84
<b>D</b>	<b>Grafy numerických výsledků</b>	<b>85</b>

# Úvod

V klasické mechanice se chaotické chování neintegrabilních systémů projevuje exponenciálním vzdalováním trajektorií ve fázovém prostoru, které vycházejí ze dvou různých libovolně blízkých bodů. Při kvantovém popisu tento efekt ztrácí smysl a chaotické chování od nechaotického je třeba určovat jiným způsobem. Zřejmě nejrozšířenější možností v případě systémů s diskretním energetickým spektrem je studium lokálních statistických vlastností tohoto spektra.

V 80. letech vyslovili Bohigas, Giannoni a Schmidt hypotézu [16] o univerzalitě fluktuací ve spektru pro jednotlivé třídy systémů. U obecného, klasicky integrabilního systému s více než jedním stupněm volnosti dochází ke shlukování energetických hladin. Typické rozdělení vzdáleností mezi sousedními energetickými hladinami je Poissonovo rozdělení ( $f(s) = \exp(-s)$ ). Naopak u klasicky neintegrabilních systémů dochází k odpuzování sousedních energetických hladin. Rozdělení vzdáleností mezi sousedními energetickými hladinami potom odpovídá teorii náhodných matic. Pro chaotické systémy existují tři různé možnosti (GOE, GUE a GSE) lokálních statistických vlastností spektra v závislosti na symetriích daného systému. Ačkoli tato hypotéza nebyla doposud plně dokázána, existuje bezpočet příkladů potvrzujících její platnost.

Důležitou úlohu při studiu fluktuací spektra kvantově chaotických systémů tedy hraje teorie náhodných matic ([1], [2], [3]). Tuto teorii vytvořil Wigner v 50. letech minulého století při studiu vlastností složených jader. O rozvoj po matematické stránce se v dalších letech postarali především Dyson a Mehta. Teorie náhodných matic se zabývá zkoumáním statistických vlastností vlastních čísel souborů matic, jejichž elementy jsou náhodné veličiny. Vyvinula se z požadavku charakterizovat komplexní kvantové systémy, kde je znalost Hamiltoniánu minimální, pouze na základě vlastností plynoucích z příslušnosti k jisté třídě podle symetrií systému a požadavku jejího zachování. Během své existence prokázala využití při popisu statistických vlastností široké škály systémů. Kromě kvantového chaosu našla uplatnění při popisu distribuce nulových bodů Riemannovy zeta funkce, v kvantové chromodynamice, v teorii strun, při studiu dopravních systémů atd.

Jedna z oblastí kvantového chaosu, která se v posledních letech intenzivně studuje, jsou kvantové grafy ([22]). Z matematického hlediska představují klasické metrické grafy, na kterých je vybudována kvantová mechanika. Hamiltonián tohoto systému je reprezentován Laplaceovým operátorem na hranách, s definičním oborem určeným okrajovými podmínkami ve vrcholech. Kvantové grafy představují například jednorozměrné modely systémů složených z kvantových drátků v nanotechnologii. Na základě semiklasického přístupu se pro některé typy grafů podařilo analyticky naznačit [22], [23] platnost univerzality spektrálních vlastností. Standardní kvantové grafy, u kterých se tato univerzalita ukazuje, jsou konstruovány jako složité metrické struktury s jednoduchými (Neumannovými, Dirichletovými) okrajovými podmínkami pro Hamiltonův operátor.

Nabízí se také opačný přístup. Zabývat se topologicky jednoduchým systémem se složitějším typem interakce ve vrcholech. Jednou z možností je systém několika bodových interakcí na intervalu  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Hilbertův prostor tohoto systému je

množina všech měřitelných kvadraticky integrovatelných funkcí na  $I$  s několika vyjmutými body, které představují polohy interakcí (vrcholů grafu). Typ interakce je určen okrajovými podmínkami v těchto bodech a případně na koncích (pokud je  $I$  omezený) intervalu  $I$ .

Teorie jednorozměrných bodových interakcí je široce zpracovávané téma právě v důsledku možného využití v oblasti nanotechnologie. Nejčastěji řešeným typem bodové interakce je  $\delta$ -interakce. Vlastnosti této interakce včetně aproximace lokálními potenciály s krátkým dosahem jsou probírány v monografii [5].

V našem případě jsme zkoumali vliv škálově nezávislé třídy bodových interakcí, kterou zavedli Fülöp a Tsutsui v práci [17]. Specifickou vlastností této interakce je nezávislost koeficientu odrazu a průchodu na energii dopadající částice. Systém několika těchto interakcí na přímce a úsečce je popsán v článku [19]. My se budeme zabývat především modelem několika bodových interakcí na kružnici. Systém korektně zkonstruujeme a ukážeme, že má diskrétní energetické spektrum. Nakonec budeme zkoumat statistické vlastnosti posloupnosti vlastních hodnot energie a srovnávat je s teorií náhodných matic. Náš systém je konzervativní a jednorozměrný, což by v nekvantovém případě znamenalo integrabilitu. Přesto výsledné rozdělení vzdáleností sousedních energetických hladin nebude Poissonovo.

# Kapitola 1

## Bodová interakce na kružnici

V této kapitole se budeme zabývat popisem jedné bodové interakce na kružnici. Tuto interakci můžeme vyjádřit jako samosdružené rozšíření jednorozměrného Laplaceova operátoru na kružnici s jedním vyjmutým bodem,  $S^1 \setminus \{0\}$ . Různá samosdružená rozšíření potom odpovídají různým fyzikálním situacím. Modelu kružnice s vyjmutým jedním bodem odpovídá Hilbertův prostor  $L^2(0, 2\pi) \equiv L^2((0, 2\pi), dx)$ . Při hledání samosdružených rozšíření využijeme teorii shrnutou v dodatku A.4.

### 1.1 Samosdružená rozšíření

Jednorozměrný Laplaceův operátor je formální diferenciální operátor druhého řádu

$$\tau = -\frac{d^2}{dt^2}.$$

Tento operátor je na základě definice A.4.4 formálně samosdružený. Symbolem  $A^2(0, 2\pi)$  označíme množinu všech komplexních funkcí  $f$  na  $(0, 2\pi)$ , které jsou spojitě diferencovatelné a navíc na každém kompaktním podintervalu  $(0, 2\pi)$  je  $f'$  absolutně spojitá. Dále označme symbolem  $H^2(0, 2\pi)$  prostor

$$H^2(0, 2\pi) = \{f \in L^2(0, 2\pi) \mid f \in A^2(0, 2\pi), f'' \in L^2(0, 2\pi)\},$$

a symbolem  $H_0^2(0, 2\pi)$  prostor funkcí z  $H^2(0, 2\pi)$  s kompaktním nosičem.

Tato množina odpovídá běžně užívanému termínu Sobolevův prostor<sup>1</sup>. Pro funkce  $f, g \in H^2(0, 2\pi)$  můžeme při integrování použít pravidlo per partes, z čehož dostaneme tzv. Langrangeovu formuli:

$$\int_0^{2\pi} \overline{(-f'')}(t)g(t)dt = \int_0^{2\pi} \overline{(f)'(t)}(-g''(t))dt + F_{2\pi-}(f, g) - F_{0+}(f, g), \quad (1.1)$$

kde  $F_t(f, g) = \overline{f(t)}g'(t) - \overline{f'(t)}g(t)$  a hodnotami v bodech  $2\pi_-$  resp.  $0_+$  myslíme příslušné konečné limity výrazu  $F_t(f, g)$  zleva resp. zprava (viz odstavec okolo Lemmatu A.4.15).

Na  $L^2(0, 2\pi)$  definujeme operátory  $T_0$  a  $T_1$ :

$$\begin{aligned} D(T_0) &= H_0^2(0, 2\pi), & T_0 f &= -f'', & f &\in D(T_0), \\ D(T_1) &= H^2(0, 2\pi), & T_1 f &= -f'', & f &\in D(T_1) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Viz [10] kapitola IX

Operátory  $T_0$  a  $T_1$  jsou neomezené hustě definované operátory, pro které platí  $T_0 \subset T_1$ . Vidíme, že v případě operátoru  $T_0$  jsou hraniční členy vystupující na pravo Lagrangeovy formule nulové a platí

$$(T_0 f, g) = (f, T_0 g), \quad f, g \in D(T_0).$$

To znamená, že operátor  $T_0$  je symetrický. Zároveň, protože formální diferenciální operátor  $\tau$  je formálně samosdružený,  $\tau^* = \tau$ , plyne z věty A.4.7, že sdružený operátor k operátoru  $T_0$  je  $T_0^* = T_1$ .

Defektní podprostory operátoru  $T_0$  jsou tvořeny všemi  $f \in D(T_1)$ , které řeší rovnici  $T_0 f = if$  resp.  $T_0 f = -if$ . Tyto řešení jsou v důsledku A.4.3 tvořeny klasickými řešeními diferenciálních rovnic  $-f'' = if$  resp.  $f'' = if$ , která jsou v  $L^2(0, 2\pi)$ . Každá z těchto rovnic má právě dvě lineárně nezávislá řešení:

$$f_{\pm}(x) = e^{\pm i\alpha x} \quad \text{resp.} \quad g_{\pm}(x) = e^{\pm \alpha x},$$

kde  $\alpha = (1 + i)/\sqrt{2}$  je komplexní číslo s vlastností  $\alpha^2 = i$ . Indexy defektu jsou tedy  $n_+ = n_- = 2$ . V důsledku A.3.4 samosdružená rozšíření operátoru  $T_0$  existují. Každou parciální izometrii  $\mathcal{K}_+$  na  $\mathcal{K}_-$  můžeme vyjádřit pomocí unitární matice  $2 \times 2$  přiřazující složkám vektoru z  $\mathcal{K}_+$  v bázi  $f_{\pm}(x)$  složky vektoru z  $\mathcal{K}_-$  v bázi  $g_{\pm}(x)$ . Samosdružená rozšíření jsou tedy určena čtyřmi reálnými parametry.

Ke konkrétnímu vyjádření samosdružených rozšíření je však výhodné užít teorii okrajových podmínek. Podle věty A.3.13 jsou samosdružená rozšíření operátoru  $T_0$  určena množinami dvou symetrických lineárně nezávislých okrajových podmínek. Dále dle věty A.4.11 a tvrzení A.4.12 lze všechny takové okrajové podmínky nakombinovat z okrajových hodnot  $f(0_+)$ ,  $f'(0_+)$  v bodě 0 a  $f(2\pi_-)$ ,  $f'(2\pi_-)$  v bodě  $2\pi$ .

## 1.2 Okrajové podmínky

Důležitou podmnožinu obecných okrajových podmínek můžeme vyjádřit způsobem, který představili Fülöp a Tsutsui v práci [17]. Označme jednotkovou matici  $2 \times 2$  symbolem  $\mathbf{I}$ . Okrajové podmínky pro vektor  $f \in H^2(0, 2\pi)$  jsou při tom určeny soustavou dvou rovnic

$$(\mathbf{U} - \mathbf{I})\Phi + iL_0(\mathbf{U} + \mathbf{I})\Phi' = 0, \quad \Phi = \begin{pmatrix} f(0_+) \\ f(2\pi_-) \end{pmatrix}, \quad \Phi' = \begin{pmatrix} f'(0_+) \\ -f'(2\pi_-) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

kde  $\mathbf{U} \in U(2)$  je unitární matice a  $L_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  je libovolná délková konstanta. Za chvíli ukážeme, že konstanta  $L_0$ , která zde vystupuje zdánlivě navíc jako další parametr, může být eliminována vhodným výběrem  $\mathbf{U}$ . Nejprve však dokážeme, že okrajové podmínky určené vztahem (1.2) tvoří symetrickou lineárně nezávislou množinu, a tedy skutečně určují samosdružená rozšíření  $T_0$ .

Z definice A.3.10 plyne, že pro každé  $f, g$  splňující (1.2) musí platit  $\{f, g\} = 0$ . Protože seskvilineární formu  $\{f, g\}$  můžeme vyjádřit pomocí polarizačních identit, stačí ukázat, že pro každé  $f$  splňující (1.2) platí  $\{f, f\} = 0$ . Z Lagrangeovy formule plyne

$$\{f, f\} = -i[F_{2\pi_-}(f, f) - F_{0_+}(f, f)] = i[(\Phi, \Phi') - (\Phi', \Phi)],$$

kde symbolem  $(\Phi, \Phi')$  myslíme standardní skalární součin na prostoru  $\mathbb{C}^2$  tzn.  $(\Phi, \Phi') = f(0_+)f'(0_+) - f(2\pi_-)f'(2\pi_-)$ . Podmínky (1.2) můžeme přepsat jako

$$\Phi - iL_0\Phi' = \mathbf{U}(\Phi + iL_0\Phi').$$

Matice  $\mathbf{U}$  je unitární a nemění tedy normu vektoru v  $\mathbb{C}^2$ . To znamená, že

$$\|\Phi - iL_0\Phi'\|^2 - \|\Phi + iL_0\Phi'\|^2 = 0.$$

Po vyjádření normy pomocí skalárního součinu a vydělení číslem  $-2L_0$  dostaneme přímo  $\{f, f\} = 0$ .

Množina okrajových podmínek je tedy symetrická. Lineární nezávislost je patrná po rozepsání do složek:

$$\begin{aligned}(u_{11} - 1)f(0_+) + u_{12}f(2\pi_-) + iL_0(u_{11} + 1)f'(0_+) - iL_0u_{12}f'(2\pi_-) &= 0, \\ u_{21}f(0_+) + (u_{22} - 1)f(2\pi_-) + iL_0u_{21}f'(0_+) - iL_0(u_{22} + 1)f'(2\pi_-) &= 0.\end{aligned}$$

Nyní ukážeme, že konstanta  $L_0$  může být eliminována nastavením parametrů matice  $\mathbf{U}$  a tedy, že samosdružená rozšíření jsou určena pouze čtyřmi parametry matice  $\mathbf{U}$  v souladu s teorií. Unitární matice  $\mathbf{U} \in U(2)$  je unitárně podobná diagonální matici  $\mathbf{D}$ , která má na diagonále vlastní čísla  $e^{i\mu_1}$ ,  $e^{i\mu_2}$ ;  $\mu_1, \mu_2 \in [0, 2\pi)$  matice  $\mathbf{U}$ ,

$$\mathbf{V}\mathbf{U}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} e^{i\mu_1} & 0 \\ 0 & e^{i\mu_2} \end{pmatrix}.$$

Rovnici (1.2) upravíme vynásobením zleva maticí  $\mathbf{V}$ :

$$(\mathbf{D} - \mathbf{I})\mathbf{V}\Phi + iL_0(\mathbf{D} + \mathbf{I})\mathbf{V}\Phi' = 0.$$

Složky vektoru  $\mathbf{V}\Phi$  resp.  $\mathbf{V}\Phi'$  označíme  $a_1$ ,  $a_2$  resp.  $b_1$ ,  $b_2$  a předchozí vztah rozeptejeme po složkách

$$a_1 + iL_0 \frac{e^{i\mu_1} + 1}{e^{i\mu_1} - 1} b_1 = 0, \quad a_2 - iL_0 \frac{e^{i\mu_2} + 1}{e^{i\mu_2} - 1} b_2 = 0.$$

Po úpravě

$$a_1 + L_0 \cot\left(\frac{\mu_1}{2}\right) b_1 = 0, \quad a_2 - L_0 \cot\left(\frac{\mu_2}{2}\right) b_2 = 0.$$

Je patrné, že hodnota  $L_0$  může být absorbována změnou parametrů  $\mu_1$  a  $\mu_2$ .

Zúžení operátoru  $T_1$  na podmnožinu definičního oboru  $D(T_1)$  určenou podmínkami (1.2) pro nějaké  $\mathbf{U}$  a  $L_0$  představuje samosdružené rozšíření  $T$  operátoru  $T_0$ . Definiční obor operátoru  $T$  je

$$D(T) = \{f \in D(T_1) | (\mathbf{U} - \mathbf{I})\Phi + iL_0(\mathbf{U} + \mathbf{I})\Phi' = 0\} \quad (1.3)$$

a pro  $f \in D(T)$  platí  $Tf = -f''$ .

### 1.3 Speciální případy, symetrie

Nyní se budeme zabývat různými podmnožinami těchto obecných okrajových podmínek. Zavedeme parametrizaci grupy  $U(2)$  následujícím způsobem

$$U = e^{i\xi} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

kde  $\xi \in [0, \pi)$  a  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  přičemž  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

**Dirichletovy okrajové podmínky**  $f(0_+) = f(2\pi_-) = 0$  nastávají pro  $\mathbf{U} = -\mathbf{I}$ .

**Neumannovy okrajové podmínky**  $f'(0_+) = f'(2\pi_-) = 0$ , nastávají pro  $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ .

**Periodické okrajové podmínky**  $f(0_+) = f(2\pi_-)$ ,  $f'(0_+) = f'(2\pi_-)$  nastávají

$$\text{pro } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dirichletovy a Neumannovy okrajové podmínky představují separovaný typ okrajových podmínek. Tyto podmínky odpovídají částici v boxu, jehož stěny jsou skutečně fyzicky odděleny. Periodické podmínky naopak odpovídají situaci částice na kružnici bez jakéhokoli interakce.

Třída okrajových podmínek při kterých se v (1.2) členy s derivací oddělují od členů bez derivace se nazývá **škálově nezávislá třída** (scale independent subfamily). Nastává v případě kdy

$$(U - I)\Phi = 0, \quad (U + I)\Phi' = 0.$$

Hodnota tohoto systému je přitom stále rovna 2. To je možné pouze v případě, že  $U = \pm I$ , nebo vlastní čísla matice  $U$  jsou  $\pm 1$ . První dvě možnosti odpovídají Neumannovým resp. Dirichletovým okrajovým podmínkám. Třetí možnost nastává, pokud platí

$$\det(U - I) = \det(U + I) = 0.$$

Při parametrizaci (1.4) to znamená  $\xi = \pi/2$  a  $\operatorname{Re} \alpha = 0$ , takže dostáváme

$$U = \begin{pmatrix} -\operatorname{Im} \alpha & i\beta \\ -i\bar{\beta} & \operatorname{Im} \alpha \end{pmatrix},$$

kde  $(\operatorname{Im} \alpha)^2 + |\beta|^2 = 1$ . Zavedeme novou parametrizaci jako

$$\operatorname{Im} \alpha = -\cos \theta, \quad i\beta = e^{i\phi} \sin \theta, \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi).$$

Matici  $U$  můžeme zapsat jako

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \\ e^{-i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Okrajové podmínky (1.2) pro škálově nezávislou třídu můžeme v případě  $\theta \in (0, \pi)$  při označení  $\alpha = \tan \theta/2$ ,  $\alpha \in (0, +\infty)$  finálně zapsat jako

$$\frac{e^{i\phi}}{\alpha} f(2\pi_-) - f(0_+) = 0, \quad e^{i\phi} \alpha f'(2\pi_-) - f'(0_+) = 0. \quad (1.5)$$

Pro  $\theta = 0$  resp.  $\pi$  dostaneme kombinaci Dirichletovy podmínky v jednom a Neumannovy podmínky v druhém z bodů 0 a  $2\pi$ :  $f'(0_+) = 0$ ,  $f(2\pi_-) = 0$  resp.  $f(0_+) = 0$ ,  $f'(2\pi_-) = 0$

Při speciální volbě parametrů  $\alpha = 1$ ,  $\phi = 0$  dostaneme periodické hraniční podmínky.

Okrajové podmínky systému podléhajícího jisté symetrii tvoří nějakou podmnožinu obecných okrajových podmínek. Podívejme se na jednu, která vyčlení důležitou podtřidu okrajových podmínek.

### 1.3.1 Časová inverze

Symetrie časové inverze (time reversal symmetry) hraje důležitou úlohu při studiu spektrálních vlastností kvantově chaotických systémů. Pro částici beze spinu je systém symetrický vůči inverzi času, pokud Hamiltonián  $T$  komutuje s operátorem  $C$  komplexního sdružení,

$$[T, C] = 0, \quad \forall f \in L^2(0, 2\pi), \quad Cf(x) = \overline{f(x)}.$$

Protože pro  $f \in D(T_1)$  platí  $\overline{-f''} = -\overline{f''}$ , je komutátor roven 0, právě když  $C(D(T)) \subset D(T)$ . Musíme tedy ověřit, že pro každé  $f \in D(T_1)$  platí implikace: jestliže  $f$  splňuje podmínky (1.2), pak také  $\overline{f}$  splňuje ty samé podmínky.



Nechť  $f$  splňuje (1.2). Celou rovnost komplexně umocníme a dostaneme

$$(\overline{U} - I)\overline{\Phi} - iL_0(\overline{U} + I)\overline{\Phi}' = 0.$$

Z unitárnosti matice  $U$  plyne  $U^T\overline{U} = I$ . Nyní vynásobíme předchozí rovnici zleva maticí  $-U^T$ ,

$$(U^T - I)\overline{\Phi} + iL_0(U^T + I)\overline{\Phi}' = 0$$

Protože výrazy  $\overline{\Phi}$  a  $\overline{\Phi}'$  představují okrajové vektory pro funkci  $\overline{f}$  platí, že  $\overline{f}$  splňuje stejné okrajové podmínky, pokud

$$U = U^T.$$

Při parametrizaci (1.4) to znamená, že  $\operatorname{Re}\beta = 0$ . Pro škálově nezávislou třídu to znamená  $\phi = 0$ .

## 1.4 Spektrum

Nyní se zabýváme vlastnostmi spektra vybraných samosdružených rozšíření. Protože indexy defektu operátoru  $T_0$  se rovnají řádu operátoru  $T_0$ , platí podle věty A.5.3, že resolventa libovolného samosdruženého rozšíření  $T$  je kompaktní. Z věty A.5.4 potom plyne, že spektrum  $T$  je čistě diskrétní.

Obecné řešení diferenciální rovnice  $-f'' = k^2 f$ ,  $k > 0$  můžeme zapsat jako

$$\psi_k(x) = A_k e^{ikx} + B_k e^{-ikx}. \quad (1.6)$$

Aby se jednalo o vlastní vektor odpovídající kladným vlastním číslům  $k^2$  operátoru  $T$ , musí  $\psi_k(x)$  splňovat příslušné okrajové podmínky. Ty můžeme vyjádřit jako soustavu rovnic pro koeficienty  $A_k$  a  $B_k$ . V maticovém zápisu

$$\mathbf{D}(k) \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = 0. \quad (1.7)$$

Nenulový vlastní vektor existuje, pokud má předchozí soustava netriviální řešení tzn. pokud

$$\det(\mathbf{D}(k)) = 0. \quad (1.8)$$

Předchozí rovnice je algebraickou rovnicí určující kladná vlastní čísla  $k^2$  operátoru  $T$ .

Nula náleží do spektra operátoru  $T$ , jestliže lze najít nenulové koeficienty  $A_0$  a  $B_0$  tak, aby vektor

$$\psi_0(x) = A_0 x + B_0 \quad (1.9)$$

splňoval okrajové podmínky definující  $T$ . V [17] je explicitně ukázáno, jakou podmínku musí splňovat koeficienty matice  $U$ , aby nula náležela do spektra operátoru  $T$ .

Záporná vlastní čísla můžeme určit zkoumáním existence vlastních vektorů ve tvaru

$$\psi_k(x) = A_k e^{kx} + B_k e^{-kx}, \quad (1.10)$$

kteří řeší rovnici  $-f'' = -k^2 f$ ,  $k < 0$ . Požadavek platnosti okrajových podmínek opět vede na soustavu rovnic pro koeficienty  $A_k$  a  $B_k$ . Podmínka řešitelnosti této soustavy potom určuje záporná vlastní čísla.

Označení koeficientů  $A_k$ ,  $B_k$  a vektorů  $\psi_k$  jsme provedli tak, že pro  $k > 0$  přísluší kladným vlastním číslům  $k^2$ , pro  $k = 0$  vlastnímu číslu 0 a pro  $k < 0$  záporným vlastním číslům  $-k^2$ . Násobnost každého vlastního čísla odpovídajícího jednoznačně nějakému  $k \in \mathbb{R}$  je rovna číslu  $2 - h(\mathbf{D}_k)$ , kde  $h(\mathbf{D}_k)$  značí hodnotu matice  $\mathbf{D}_k$  soustavy rovnic určující koeficienty  $A_k$  a  $B_k$  příslušného vlastního vektoru. Protože determinant soustavy je roven nule, platí  $h(\mathbf{D}_k) \leq 1$ .

Nyní si rozebereme spektrum samosdružených rozšíření odpovídající konkrétním typům okrajových podmínek.

### 1.4.1 Dirichletovy okrajové podmínky

Dosadíme-li tvar vlastního vektoru (1.6) odpovídajícímu kladným vlastním číslům do příslušných okrajových podmínek, dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{ik2\pi} & e^{-ik2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = 0.$$

Podmínka řešitelnosti soustavy vede na rovnici  $e^{ik4\pi} = 1$ , která má řešení

$$k_n = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hodnost matice soustavy je zjevně pro každé  $k_n$  rovna 1, a tedy existuje právě jedno lineárně nezávislé řešení. Všechna kladná vlastní čísla jsou tedy nedegenerovaná.

Nula do spektra nepatří, protože  $\psi_0(x) = Ax + B$  splňuje okrajové podmínky pouze v případě  $A = B = 0$ .

Zápornou část spektra určíme dosazením předpokládaného tvaru vlastního vektoru (1.10) do okrajových podmínek. Obdržíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{k2\pi} & e^{-k2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = 0.$$

Tato soustava má netriviální řešení pokud  $e^{k4\pi} = 1$ . Tuto rovnost pro  $k < 0$  nelze splnit. Záporná část spektra operátoru  $T$  příslušejícího Dirichletovým okrajovým podmínkám je tedy prázdná.

Celkově jsme zjistili, že samosdružené rozšíření  $T$  operátoru  $T_0$  určené Dirichletovými okrajovými podmínkami má nedegenerované čistě diskrétní kladné spektrum ve tvaru

$$E_n = \frac{n^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

### 1.4.2 Periodické okrajové podmínky

Soustava rovnic určující koeficienty  $A_k, B_k$  vlastního vektoru (1.6) je v případě periodických okrajových podmínek

$$\begin{pmatrix} (1 - e^{ik2\pi}) & (1 - e^{-ik2\pi}) \\ ik(1 - e^{ik2\pi}) & -ik(1 - e^{ik2\pi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = 0.$$

Podmínka nulovosti determinantu vede na rovnici  $(1 - e^{ik2\pi})^2 = 0$  s řešeními

$$k_n = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pro  $k = k_n$  je matice soustavy rovna 0 a má tedy nulovou hodnotu. To znamená, že pro každé  $k_n$  existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory  $\psi_{k_n}$  a tedy, že kladná vlastní čísla jsou dvojnásobně degenerovaná.

Nula do spektra náleží, protože po dosazení (1.9) do okrajových podmínek obdržíme následující soustavu pro koeficienty  $A_0$  a  $B_0$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Tato soustava je řešitelná a hodnost její matice je rovna 1. Tedy 0 je nedegenerovaná vlastní hodnota.

Nakonec určíme zápornou část spektra  $T$ . Po dosazení (1.10) do okrajových podmínek obdržíme

$$\begin{pmatrix} (1 - e^{k2\pi}) & (1 - e^{-k2\pi}) \\ k(1 - e^{k2\pi}) & -k(1 - e^{k2\pi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = 0,$$

což vede na rovnici  $(1 - e^{k2\pi})^2 = 0$ , která opět pro  $k < 0$  nemá řešení.

Samosdružené rozšíření  $T$  operátoru  $T_0$  určené periodickými okrajovými podmínkami má čistě diskrétní nezáporné spektrum ve tvaru

$$E_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Kladné vlastní hodnoty jsou dvojnásobně degenerované, zatímco 0 je nedegenerovaná.

### 1.4.3 Škálově nezávislá třída okrajových podmínek

Po dosažení obecného vlastního vektoru (1.6) pro kladná vlastní čísla do podmínek (1.5) dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} \left( \frac{e^{i\phi}}{\alpha} e^{ik2\pi} - 1 \right) & \left( \frac{e^{i\phi}}{\alpha} e^{-ik2\pi} - 1 \right) \\ ik(e^{i\phi}\alpha e^{ik2\pi} - 1) & -ik(e^{i\phi}\alpha e^{-ik2\pi} - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = 0. \quad (1.11)$$

Podmínka nulového determinantu vede na rovnici

$$\frac{e^{i\phi}}{\alpha} (e^{ik2\pi} + e^{-ik2\pi}) + e^{i\phi}\alpha (e^{ik2\pi} + e^{-ik2\pi}) - 2(e^{i2\phi} + 1) = 0,$$

která lze zjednodušit na

$$\cos(k2\pi) \left( \frac{1}{\alpha} + \alpha \right) - 2 \cos(\phi) = 0.$$

Při označení  $\vartheta = \arccos\left(\frac{2\cos(\phi)}{\frac{1}{\alpha} + \alpha}\right)$  můžeme v případě  $\vartheta \neq 0$  řešení vyjádřit jako

$$k_n = \left\lfloor \frac{\vartheta}{2\pi} + n \right\rfloor, \quad n \in \mathbb{Z},$$

a v případě  $\vartheta = 0$  (odpovídá  $\phi = 0, \alpha = 1$ ) jako

$$k_n = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z výrazu pro  $\vartheta$  je zřejmé, že záměna  $\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha}$  nemění kladnou část spektra.

Podívejme se nyní jak je to s degenerací kladných vlastních čísel. Aby byla vlastní čísla dvojnásobně degenerovaná, musí být hodnota matice uvažované soustavy rovna 0. To je možné pouze v případě, že jsou všechny složky nulové. V takovém případě je nulový také součet prvního řádku matice soustavy.

$$\left( \frac{e^{i\phi}}{\alpha} e^{ik2\pi} - 1 \right) + \left( \frac{e^{i\phi}}{\alpha} e^{-ik2\pi} - 1 \right) = 0.$$

Zjevně platí  $\cos(k_n 2\pi) = \frac{2\alpha \cos \phi}{(1+\alpha^2)}$ . Po dosažení a úpravě dostaneme rovnici

$$2e^{i\phi} \cos(\phi) - 1 - \alpha^2 = 0.$$

Imaginární část levé strany je 0 v případě, že  $\sin \phi = 0$ . To nastává, pokud  $\phi = 0$  nebo  $\phi = \pi$ . Uvažujme nejprve  $\phi = 0$ . Protože  $\alpha > 0$ , plyne z rovnice  $\alpha = 1$ . Tento případ odpovídá periodickým hraničním podmínkám, kde jsme ukázali, že kladná část spektra je skutečně dvojnásobně degenerovaná.

Nyní uvažujme  $\phi = \pi$ . I v tomto případě dostaneme  $\alpha = 1$ , a proto  $\vartheta = \pi$ . To znamená, že  $e^{ik_n 2\pi} = -1$ . Po dosažení do (1.11) dostaneme všechny složky

matice soustavy nulové. To znamená, že i v tomto případě je kladná část spektra dvojnásobně degenerovaná.

Pro všechny ostatní hodnoty  $\alpha$  a  $\phi$  je součet prvních dvou prvků matice soustavy nenulový, a tedy alespoň jeden z těchto prvků je nenulový. To znamená, že hodnota matice soustavy je právě rovna 1. Kladné spektrum je tedy nedegenerované.

Po dosazení (1.9) do okrajových podmínek dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{i\phi}}{\alpha} 2\pi & \left(\frac{e^{i\phi}}{\alpha} - 1\right) \\ (e^{i\phi}\alpha - 1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = 0,$$

kteřá je řešitelná pokud  $\left(\frac{e^{i\phi}}{\alpha} - 1\right)(e^{i\phi}\alpha - 1) = 0$ . Toto nastává pouze v případě, že alespoň jeden z členů je nulový. Potom, protože  $\alpha > 0$ , dostaneme  $\phi = 0$  a  $\alpha = 1$ . Tento případ odpovídá periodickým hraničním podmínkám. To znamená, že 0 je vlastní hodnota (nedegenerovaná) operátoru  $T$  pouze v případě  $\phi = 0$  a  $\alpha = 1$ .

V případě záporného spektra dostaneme soustavu shodnou se soustavou (1.11) po záměně  $ik \rightarrow k$ :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{e^{i\phi}}{\alpha} e^{k2\pi} - 1\right) & \left(\frac{e^{i\phi}}{\alpha} e^{-k2\pi} - 1\right) \\ k(e^{i\phi}\alpha e^{k2\pi} - 1) & -k(e^{i\phi}\alpha e^{-k2\pi} - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = 0.$$

Řešitelnost této soustavy vede na rovnici

$$\cosh(k2\pi) \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) - 2 \cos(\phi) = 0.$$

Protože pro všechna  $\alpha > 0$  platí  $\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) \geq 2$ , nemá tato rovnice pro  $k < 0$  řešení.

Shrneme vlastnosti spektra samosdruženého rozšíření  $T$  operátoru  $T_0$  určeného třídou škálově invariantních okrajových podmínek. Spektrum je nezáporné čistě diskrétní ve tvaru

$$E_n = \left(\frac{\vartheta}{2\pi} + n\right)^2, \quad n \in \mathbb{Z},$$

kde  $\vartheta = \arccos\left(\frac{2 \cos(\phi)}{\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right)}\right)$ . Všechny vlastní hodnoty jsou nedegenerované, kromě případu  $\phi = 0$  nebo  $\pi$ ,  $\alpha = 1$ , kdy jsou nenulová vlastní čísla dvojnásobně degenerovaná.

## Kapitola 2

# Několik bodových interakcí

V této kapitole zkonstruujeme model kvantově mechanického systému částice na kružnici resp. úseče s  $n$  bodovými interakcemi příslušejícími do škálově nezávislé třídy. Hilbertův prostor tohoto systému je  $L^2(0, 2\pi)$ . Polohy bodových interakcí označíme  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 2\pi$ .

Symbolem  $A^2(a, b)$  označíme množinu všech komplexních funkcí  $f$  na  $(a, b)$ , které jsou spojitě diferencovatelné a navíc na každém kompaktním podintervalu  $(a, b)$  je  $f'$  absolutně spojitá. Dále označme symbolem  $H^2(a, b)$  prostor

$$H^2(a, b) = \{f \in L^2(a, b) \mid f \in A^2(a, b), f'' \in L^2(a, b)\},$$

a symbolem  $H_0^2(a, b)$  prostor funkcí z  $H^2(a, b)$  s kompaktním nosičem.

Na  $L^2(0, 2\pi)$  definujeme operátor  $T_0$  následujícím způsobem

$$\begin{aligned} D(T_0) &= H_0^2(0, x_1) \oplus H_0^2(x_1, x_2) \oplus \dots \oplus H_0^2(x_n, 2\pi) \\ T_0 f &= -f'', \quad f \in D(T_0). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Definujme dále operátor  $T_1$

$$\begin{aligned} D(T_1) &= H^2(0, x_1) \oplus H^2(x_1, x_2) \oplus \dots \oplus H^2(x_n, 2\pi) \\ T_1 f &= -f'', \quad f \in D(T_1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Operátory  $T_0$  a  $T_1$  jsou zřejmě hustě definovány a platí  $T_0 \subset T_1$ . Podívejme se na symetričnost  $T_0$ . Při označení  $x_0 = 0$  a  $x_{n+1} = 2\pi$  dostaneme pro funkce  $f, g \in D(T_1)$  rozdělením a integrací per partes

$$\int_0^{2\pi} \overline{(-f'')(t)} g(t) dt = \int_0^{2\pi} \overline{(f)(t)} (-g'')(t) dt + \sum_{k=0}^n (F_{x_{(k+1)-}}(f, g) - F_{x_{k+}}(f, g)), \quad (2.3)$$

kde  $F_t(f, g) = \overline{f(t)} g'(t) - \overline{f'(t)} g(t)$  a hodnotami v bodech  $x_{k+}$  resp.  $x_{k-}$  myslíme příslušné konečné limity výrazu  $F_t(f, g)$  zleva resp. zprava (Viz odstavec okolo lemmatu A.4.15).

Pro  $f, g \in D(T_0)$  všechny okrajové členy vymizí a operátor  $T_0$  je tedy symetrický. Ukážeme, že  $T_0^* = T_1$ . Z věty A.4.7 pro každé  $k = 0, \dots, n$  plyne, že zúžení  $T_1$  na interval  $(x_k, x_{k+1})$  neboli  $T_1|_{H^2(x_k, x_{k+1})}$  je sdruženým operátorem k zúžení  $T_0|_{H_0^2(x_k, x_{k+1})}$ ,

$$(T_0|_{H_0^2(x_k, x_{k+1})})^* = T_1|_{H^2(x_k, x_{k+1})}.$$

Z definice (A.1) sdruženého operátoru plyne, že pro funkci  $f \in L^2(x_k, x_{k+1})$  existuje  $h \in L^2(x_k, x_{k+1})$  a zároveň platí

$$(f, T_0 g)_k = (h, g)_k, \quad \forall g \in H_0^2(x_k, x_{k+1}), \quad (2.4)$$

právě, když  $f \in H^2(x_k, x_{k+1})$ . V takovém případě potom  $h = -f''$ . Symbolem  $(h, g)_k$  myslíme skalární součin na  $L^2(x_k, x_{k+1})$ .

Uvažujme nyní funkci  $f \in L^2(0, 2\pi)$ . Nechť existuje  $h \in L^2(0, 2\pi)$  tak, že

$$(f, T_0g) = (h, g), \quad \forall g \in D(T_0).$$

Každou funkci  $g \in D(T_0)$  můžeme jednoznačně napsat ve tvaru  $g = g_0 + g_1 + \dots + g_n$ , kde  $g_k \in H_0^2(x_k, x_{k+1})$  je funkce s nosičem uvnitř intervalu  $(x_k, x_{k+1})$ .

Uvažujme nyní libovolné  $g \in H_0^2(x_k, x_{k+1})$  a libovolné  $k = 0, \dots, n$ . Funkce  $T_0g$  má nosič v intervalu  $(x_k, x_{k+1})$ , a proto argumenty integrálů představujících skalární součiny  $(f, T_0g)$  a  $(h, g)$  vymizí mimo interval  $(x_k, x_{k+1})$ . Pro každé takové  $g$  je tedy  $(f, T_0g)_k = (h, g)_k$ , což z (2.4) znamená, že  $f_k \in H^2(x_k, x_{k+1})$ , kde  $f_k = f \cdot \chi_{(x_k, x_{k+1})}$  a  $\chi_{(x_k, x_{k+1})}$  je charakteristická funkce intervalu  $(x_k, x_{k+1})$ . Při stejném označení potom  $h_k = -f_k''$ . Předchozí úvaha platí pro každé  $k$  což znamená  $f \in D(T_1)$  a  $h = -f''$ . Tímto jsme ukázali, že  $T_0^* = T_1$ .

Podívejme se defektní podprostory operátoru  $T_0$ . Budeme hledat řešení rovnic  $T_1f = if$  resp.  $T_1f = -if$ . Tato řešení představují v důsledku A.4.3 na každém intervalu  $(x_k, x_{k+1})$  klasická řešení diferenciálních rovnic  $-f'' = if$  resp.  $f'' = if$ , která leží v  $L^2(x_k, x_{k+1})$ . Lineárně nezávislá řešení první rovnice jsou

$$f_{k\pm}(x) = \begin{cases} e^{\pm i\alpha x} & x \in (x_k, x_{k+1}), \\ 0 & x \in (0, 2\pi) \setminus (x_k, x_{k+1}), \end{cases}$$

kde  $\alpha = (1 + i)/\sqrt{2}$  je komplexní číslo s vlastností  $\alpha^2 = i$  a  $k = 0, \dots, n$ . Lineárně nezávislá řešení druhé rovnice jsou  $g_{k\pm}(x) = \overline{f_{k\pm}(x)}$ .

Indexy defektu jsou tedy  $n_+ = n_- = 2(n + 1)$ . V důsledku A.3.4 samosdružená rozšíření operátoru  $T_0$  existují. Každou parciální izometrii  $\mathcal{K}_+$  na  $\mathcal{K}_-$  můžeme vyjádřit pomocí unitární matice  $2(n + 1) \times 2(n + 1)$  přiřazující složkám vektoru z  $\mathcal{K}_+$  v bázi  $f_{k\pm}(x)$  složky vektoru z  $\mathcal{K}_-$  v bázi  $g_{k\pm}(x)$ . Obecné samosdružené rozšíření je tedy určeno  $4(n + 1)^2$  reálnými parametry.

Stejně jako v první kapitole je i zde výhodné konkrétní tvar samosdružených rozšíření určovat pomocí okrajových podmínek. Budeme se zabývat dvěma speciálními třídami okrajových podmínek, které odpovídají systému  $n$  bodových interakcí na kružnici a na úsečce.

## 2.1 Model na kružnici

Pro  $f \in D(T_1)$  uvažujme následující množinu  $2(n + 1)$  okrajových podmínek:

$$\begin{aligned} f(2\pi_-) - f(0_+) &= 0, & f'(2\pi_-) - f'(0_+) &= 0, & (2.5) \\ \frac{e^{i\phi}}{\alpha} f(x_{k-}) - f(x_{k+}) &= 0, & e^{i\phi} \alpha f'(x_{k-}) - f'(x_{k+}) &= 0, & k = 1, \dots, n, & (2.6) \end{aligned}$$

kde  $\alpha \in (0, +\infty)$  a  $\phi \in [0, 2\pi)$ . Periodické podmínky (2.5) odpovídají napojení intervalu  $(0, 2\pi)$  do kružnice bez jakékoli singularity v tomto bodě. Podmínky (2.6) představují podmínky separované do bodů  $x_k$  ze škálově nezávislé podtřídy (viz 1.3) podmínek (1.2). To znamená, že všechny netriviální bodové interakce jsou stejného charakteru a závisí na dvou parametrech  $\alpha$  a  $\phi$ .

Ukážeme, že okrajové podmínky (2.5) spolu s (2.6), které jsou zjevně lineárně nezávislé, tvoří symetrickou množinu, a tedy podle věty A.3.13 určují samosdružená rozšíření operátoru  $T_0$ . Podobně jako v části 1.2 ukážeme, že pro každé  $f, g$  splňující (2.5), (2.6) platí  $\{f, g\} = 0$ . Protože seskvilineární formu  $\{f, g\}$  lze vyjádřit pomocí polarizačních identit, stačí ukázat  $\{f, f\} = 0$  pro  $f$  splňující (2.5) spolu s (2.6).

Z formule (2.3) plyne

$$\{f, f\} = -i \left[ F_{2\pi-}(f, f) - F_{0+}(f, f) + \sum_{k=1}^n (F_{x_{k-}}(f, g) - F_{x_{k+}}(f, g)) \right],$$

Okrajové podmínky (2.5) přepíšeme do tvaru

$$(\mathbf{U}_0 - \mathbf{I})\Phi_0 + iL_0(\mathbf{U}_0 + \mathbf{I})\Phi'_0 = 0, \quad \Phi_0 = \begin{pmatrix} f(0_+) \\ f(2\pi_-) \end{pmatrix}, \quad \Phi'_0 = \begin{pmatrix} f'(0_+) \\ -f'(2\pi_-) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

kde matice  $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  a  $L_0$  je libovolné kladné číslo. Okrajové podmínky (2.6) můžeme pro každé  $k = 1, \dots, n$  vyjádřit jako

$$(\mathbf{U}_k - \mathbf{I})\Phi_k + iL_0(\mathbf{U}_k + \mathbf{I})\Phi'_k = 0, \quad \Phi_k = \begin{pmatrix} f(x_{k+}) \\ f(x_{k-}) \end{pmatrix}, \quad \Phi'_k = \begin{pmatrix} f'(x_{k+}) \\ -f'(x_{k-}) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

kde  $L_0$  je opět libovolné kladné číslo a  $\mathbf{U}_k$  jsou stejné matice příslušející do škálově nezávislé třídy (viz 1.3), kterou můžeme parametrizovat

$$\mathbf{U}_k = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \\ e^{-i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Při takovém označení okrajových podmínek můžeme formu  $\{f, f\}$  vyjádřit jako

$$\{f, f\} = i \sum_{k=0}^n ((\Phi_k, \Phi'_k) - (\Phi'_k, \Phi_k)),$$

kde symbolem  $(\Phi_k, \Phi'_k)$  opět myslíme standardní skalární součin na prostoru  $\mathbb{C}^2$  tzn.  $(\Phi_k, \Phi'_k) = \overline{f(x_{k+})}f'(x_{k+}) - \overline{f(x_{k-})}f'(x_{k-})$ . Podmínky (2.7) a (2.8) lze pro  $k = 0, \dots, n$  shodně přepsat jako

$$\Phi_k - iL_0\Phi'_k = \mathbf{U}_k(\Phi_k + iL_0\Phi'_k).$$

Matice  $\mathbf{U}_k$  jsou unitární a jejich působení nemění normu vektoru v  $\mathbb{C}^2$ . To znamená, že

$$\|\Phi_k - iL_0\Phi'_k\|^2 - \|\Phi_k + iL_0\Phi'_k\|^2 = 0.$$

Po vyjádření normy pomocí skalárního součinu a vydělení číslem  $-2L_0$  dostaneme pro každé  $k = 0, \dots, n$

$$i((\Phi_k, \Phi'_k) - (\Phi'_k, \Phi_k)) = 0.$$

To znamená, že  $\{f, f\} = 0$ , a proto podmínky (2.5) spolu s (2.6) představují symetrickou množinu okrajových podmínek operátoru  $T_0$ .

Samosdružené rozšíření operátoru  $T_0$  určené okrajovými podmínkami (2.5) a (2.6) pro nějaké  $\alpha$  a  $\phi$  budeme značit  $T_{\alpha, \phi}$ .

### 2.1.1 Obecná charakteristika spektra

V této části budeme zkoumat obecné vlastnosti spektra samosdruženého operátoru  $T_{\alpha, \phi}$ .

Nejprve se zabýváme případem  $\alpha = 1$  a  $\phi = 0$ . Funkci  $f \in D(T_{1,0})$  můžeme spojitě dodefinovat v bodech  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  tak, že  $f \in H^2(0, 2\pi)$ . Tento případ tedy odpovídá periodickým okrajovým podmínkám u jedné bodové interakce tak, jak jsme ji zkoumali v kapitole 1. Resolventa  $R(\lambda; T_{1,0})$  je podle vět A.5.2 a A.5.3 pro  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  integrální Hilbert-Schmidtův operátor a  $T_{1,0}$  má čistě diskrétní spektrum, jehož konkrétní podobu jsme určili v 1.4.2.

Uvažujme nyní  $T_{\alpha,\phi}$  pro obecné  $\alpha$  a  $\phi$  tak, že buď  $\alpha \neq 1$  nebo  $\phi \neq 0$ . Pomocí Kreinovy formule v kapitole A.6 ukážeme, že resolventa  $R(\lambda; T_{\alpha,\phi})$  je pro  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  také kompaktní operátor.

Vektor  $f \in D(T_1)$  leží v průniku  $D(T_{1,0}) \cap D(T_{\alpha,\phi})$  pokud v bodech  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  platí společné podmínky

$$\frac{e^{i\phi}}{\alpha} f(x_{k-}) - f(x_{k+}) = 0 \quad \text{a} \quad f(x_{k-}) - f(x_{k+}) = 0.$$

Tyto lze pro  $\frac{e^{i\phi}}{\alpha} \neq 1$  splnit pouze v případě  $f(x_{k-}) = f(x_{k+}) = 0$ . Podobně společná platnost

$$e^{i\phi} \alpha f'(x_{k-}) - f'(x_{k+}) = 0 \quad \text{a} \quad f'(x_{k-}) - f'(x_{k+}) = 0,$$

kde opět  $e^{i\phi} \alpha \neq 1$  implikuje  $f'(x_{k-}) = f'(x_{k+}) = 0$ .

Definujme operátor  $\tilde{T}_0$  jako zúžení operátoru  $T_1$  na definiční obor  $D(\tilde{T}_0)$  určený okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} D(\tilde{T}_0) = \{f \in D(T_1) \mid & f(2\pi_-) - f(0_+) = 0, \quad f'(2\pi_-) - f'(0_+) = 0, \\ & f(x_{k-}) = f(x_{k+}) = 0, \quad f'(x_{k-}) = f'(x_{k+}) = 0, \quad k = 1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Je zřejmé, že operátor  $\tilde{T}_0$ , který představuje symetrické rozšíření operátoru  $T_0$ , je maximální společnou částí operátorů  $T_{1,0}$  a  $T_{\alpha,\phi}$  tak, jak jsme tento pojem zavedli v kapitole A.6.

K vyjádření  $\tilde{T}_0^*$  využijeme větu A.3.12. Z definice A.3.11 není těžké určit, že množina sdružených okrajových podmínek k podmínkám ve výrazu (2.9) je tvořena pouze dvěma podmínkami

$$f(2\pi_-) - f(0_+) = 0, \quad f'(2\pi_-) - f'(0_+) = 0.$$

Operátor  $\tilde{T}_0^*$  je potom z věty A.3.12 roven zúžení  $T_1$  na definiční obor

$$D(\tilde{T}_0^*) = \{f \in D(T_1) \mid f(2\pi_-) - f(0_+) = 0, \quad f'(2\pi_-) - f'(0_+) = 0\}. \quad (2.10)$$

Na operátory  $T_{\alpha,\phi}$  a  $T_{1,0}$  nyní můžeme nahlížet jako na vzájemně prostá samosdružená rozšíření symetrického operátoru  $\tilde{T}_0$ .

Pro  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  zavedme množinu  $\mathcal{M}_\lambda = \{f \in D(\tilde{T}_0^*) \mid \tilde{T}_0^* f = \lambda f\}$ . V případě  $\text{Im } \lambda > 0$  definujeme  $\nu \equiv \nu(\lambda)$  tak, že  $\lambda = i\nu^2$ ,  $\text{Im } \nu \geq 0$  (resp.  $\text{Re } \nu > 0$  pro  $\nu \in \mathbb{R}$ ). Báze množiny  $\mathcal{M}_\lambda$  je potom tvořena vektory

$$\begin{aligned} \varphi_{2k-1}(\lambda; x) &= \begin{cases} e^{i\nu x} & x \in (x_k, x_{k+1}), \\ 0 & x \in (0, 2\pi) \setminus (x_k, x_{k+1}), \end{cases} \quad k = 1, \dots, n-1, \\ \varphi_{2k}(\lambda; x) &= \begin{cases} e^{-i\nu x} & x \in (x_k, x_{k+1}), \\ 0 & x \in (0, 2\pi) \setminus (x_k, x_{k+1}), \end{cases} \quad k = 1, \dots, n-1, \\ \varphi_{2n-1}(\lambda; x) &= \begin{cases} e^{i\nu x} & x \in [0, x_1), \\ 0 & x \in (x_1, x_n), \\ e^{i\nu(x-2\pi)} & x \in (x_n, 2\pi), \end{cases} \\ \varphi_{2n}(\lambda; x) &= \begin{cases} e^{-i\nu x} & x \in [0, x_1), \\ 0 & x \in (x_1, x_n), \\ e^{-i\nu(x-2\pi)} & x \in (x_n, 2\pi), \end{cases} \end{aligned}$$

kde  $c = (1+i)/\sqrt{2}$  je komplexní číslo s vlastností  $c^2 = i$ . Je evidentní, že vektory  $\varphi_j(\bar{\lambda}; x) = \varphi_j(\lambda; x)$  pro  $j = 1, \dots, 2n$  tvoří bázi množiny  $\mathcal{M}_{\bar{\lambda}}$ .



Uvažujme nyní libovolné pevné  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $\text{Im } \lambda > 0$ . V kapitole A.6 je ukázáno, že existují koeficienty  $\gamma_{ik}(\lambda)$ ,  $i, k = 1, \dots, 2n$ , tak, že můžeme vyjádřit resolventu  $R(\lambda; T_{\alpha, \phi})$  pomocí resolventy  $R(\lambda; T_{1,0})$  následujícím způsobem:

$$R(\lambda; T_{\alpha, \phi}) = R(\lambda; T_{1,0}) - \sum_{i,k=1}^{2n} \gamma_{ik}(\lambda) (\varphi_i(\bar{\lambda}), \cdot) \varphi_k(\lambda).$$

Protože  $R(\lambda; T_{1,0})$  je integrální Hilbert-Schmidtův operátor s jádrem  $K(t, s; \lambda)$ , jehož konkrétní tvar můžeme určit z věty A.5.2., je  $R(\lambda; T_{\alpha, \phi})$  také integrální operátor

$$(R(\lambda; T_{\alpha, \phi})f)(t) = \int_0^{2\pi} K_{\alpha, \phi}(t, s; \lambda) f(s) ds, \quad f \in L^2(0, 2\pi),$$

s jádrem

$$K_{\alpha, \phi}(t, s; \lambda) = K(t, s; \lambda) - \sum_{i,k=1}^{2n} \gamma_{ik}(\lambda) \varphi_i(\bar{\lambda}; s) \varphi_k(\lambda; t).$$

Protože  $\varphi_k(\lambda; s) \in L^2(0, 2\pi)$  pro každé  $k = 1, \dots, 2n$ , dostáváme okamžitě

$$\int_0^{2\pi} |K_{\alpha, \phi}(t, s; \lambda)|^2 ds dt < +\infty.$$

To v důsledku vět A.1.3 a A.1.4 znamená, že resolventa  $R(\lambda; T_{\alpha, \phi})$  je pro nějaké  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  Hilbert-Schmidtův, a tedy kompaktní operátor. Důsledkem (viz větu A.2.6) je, že operátor  $T_{\alpha, \phi}$  má čistě diskrétní spektrum.

### 2.1.2 Kladné spektrum

V této části ukážeme postup, jakým lze určit kladná vlastní čísla systému  $n$  bodových interakcí na kružnici. Rovnice  $T_1 f = k^2 f$ ,  $k > 0$  má  $(2n + 2)$  lineárně nezávislých řešení

$$\varphi_{j\pm}(x) = \begin{cases} e^{\pm ikx} & x \in (x_j, x_{j+1}), \\ 0 & x \in (0, 2\pi) \setminus (x_j, x_{j+1}), \end{cases} \quad j = 0, \dots, n,$$

Obecné řešení rovnice  $T_{\alpha, \phi} f = k^2 f$ ,  $k > 0$  je dáno lineární kombinací vektorů  $\varphi_{j\pm}(x)$ , která splňuje příslušné okrajové podmínky (2.5) a (2.6). Obecný vlastní vektor má tedy tvar

$$\psi_k(x) = \sum_{j=0}^n A_k^j \varphi_{j+}(x) + \sum_{j=0}^n B_k^j \varphi_{j-}(x). \quad (2.11)$$

Požadavek platnosti okrajových podmínek (2.5), (2.6) určujících definiční obor operátoru  $T_{\alpha, \phi}$  vede na soustavu lineárních rovnic, jejíž matici označíme  $\mathbf{D}(k)$ , pro koeficienty  $A_k^j$  a  $B_k^j$ . Číslo  $k^2$  náleží do spektra operátoru  $T_{\alpha, \phi}$  právě tehdy, když má daná soustava netriviální řešení. Toto nastává v případě, že determinant soustavy je roven nule. Rovnice určující kladná vlastní čísla je tedy

$$\det(\mathbf{D}(k)) = 0.$$

Tento způsob určení vlastních čísel naráží na obtížnost explicitního výpočtu determinantu matice  $\mathbf{D}(k)$ . Existuje však jiný, vhodnější způsob, který nám umožní explicitně napsat rovnici určující vlastní čísla (sekulární rovnici) v případě  $n$  bodových interakcí na kružnici i úsečce.

Na intervalu  $(x_j, x_{j+1})$  můžeme řešení  $f_j(k; x)$  rovnice  $-f'' = k^2 f$ ,  $k > 0$  obecně vyjádřit jako lineární kombinaci

$$f_j(k; x) = A_j(k)e^{ikx} + B_j(k)e^{-ikx}. \quad (2.12)$$

Obecný vlastní vektor  $\psi_k \in D(T_{\alpha, \phi})$  k vlastnímu číslu  $k^2$  vznikne vhodným najojením  $f_j(k; x)$  v krajních bodech intervalů  $(x_j, x_{j+1})$ . V dalším textu budeme používat zjednodušené značení  $f_j(x) \equiv f_j(k; x)$ ,  $A_j \equiv A_j(k)$  a  $B_j \equiv B_j(k)$ , ve kterém explicitně nevyjadřujeme závislost na  $k$ .

Část (2.6) okrajových podmínek určujících definiční obor  $T_{\alpha, \phi}$ , je tvořena podmínkami separovanými do bodů  $x_j$ . To znamená, že funkce  $f_j(x)$  pro  $j = 1, \dots, n-1$  je přímým vztahem svázána pouze s funkcemi  $f_{j-1}(x)$  a  $f_{j+1}(x)$ . Okrajovou podmínku určující přímý vztah  $f_{j-1}(x)$  a  $f_j(x)$  můžeme vyjádřit pomocí tzv. matice navázání  $\mathbf{T}_j$ , která vyjadřuje vztah mezi koeficienty  $A_{j-1}$ ,  $B_{j-1}$  určujícími  $f_{j-1}$  a koeficienty  $A_j$ ,  $B_j$  určujícími  $f_j$ ,

$$\begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = \mathbf{T}_j \begin{pmatrix} A_{j-1} \\ B_{j-1} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Pro  $j = 1, \dots, n$  jsou okrajové podmínky mezi  $f_{j-1}(x)$  a  $f_j(x)$  dány vztahy

$$\frac{e^{i\phi}}{\alpha} f_{j-1}(x_{j-}) - f_j(x_{j+}) = 0, \quad e^{i\phi} \alpha f'_{j-1}(x_{j-}) - f'_j(x_{j+}) = 0.$$

Odpovídající matice navázání je potom

$$\mathbf{T}_j = \frac{e^{i\phi}}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) & \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) e^{-i2kx_j} \\ \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) e^{i2kx_j} & \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Jednoduchým výpočtem zjistíme, že  $\det(\mathbf{T}_j) = e^{i2\phi}$  a tedy, že pro každé  $j$  je matice navázání regulární.

Vztah mezi  $f_n(x)$  a  $f_0(x)$  je určen okrajovými podmínkami (2.5) jako

$$f_0(0_+) - f_n(2\pi_-) = 0, \quad f'_0(0_+) - f'_n(2\pi_-) = 0.$$

Příslušnou závislost mezi koeficienty  $A_n$ ,  $B_n$  a  $A_0$ ,  $B_0$  můžeme vyjádřit pomocí matice navázání

$$\mathbf{T}_P = \begin{pmatrix} e^{i2k\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i2k\pi} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

tak, že

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_P \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

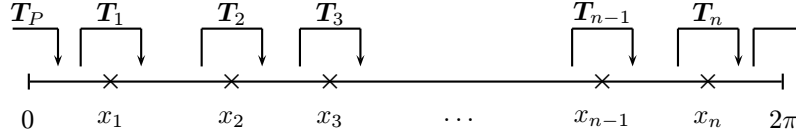
Matice navázání  $\mathbf{T}_P$  je také regulární s determinantem rovným 1.

Uvažujme kandidáta na vlastní vektor  $\psi_k$ , který je na intervalu  $(0, x_1)$  vyjádřen koeficienty  $A_0$  a  $B_0$ . Aby tento vektor patřil do definičního oboru, musí splňovat okrajové podmínky v bodě  $x_1$ . Tyto podmínky jednoznačně určují  $\psi_k$  na intervalu  $(x_1, x_2)$ , a tedy jednoznačně určují koeficienty  $A_1$  a  $B_1$ . Z předchozích úvah plyne, že jejich souvislost s  $A_0$ ,  $B_0$  je vyjádřena pomocí matice navázání  $\mathbf{T}_1$ ,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí matice navázání můžeme stejnou úvahou z  $A_1$ ,  $B_1$  určit koeficienty  $A_2$ ,  $B_2$ . Složením těchto dvou vztahů dostaneme

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_2 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}.$$

Obrázek 2.1: Schéma přenášení koeficientů  $A_i$  a  $B_i$  pomocí matic navázání.

Opakováním tohoto postupu, který je symbolicky znázorněn na obrázku 2.1, dostaneme vyjádření  $A_n, B_n$

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = T_n \cdots T_2 T_1 \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Protože matice navázání  $T_j$  jsou regulární, je zřejmé, že celý vektor  $\psi_k$  je jednoznačně určen koeficienty  $A_0$  a  $B_0$ . Důsledkem tohoto tvrzení je, že vektor  $\psi_k$  je nulový právě tehdy, když jsou současně oba koeficienty  $A_0$  i  $B_0$  nulové.

Příslušnost  $\psi_k$  do  $D(T_{\alpha, \phi})$  vyžaduje také platnost okrajových podmínek (2.6), které můžeme ekvivalentně vyjádřit vztahem (2.16) mezi koeficienty  $A_n, B_n$  a  $A_0, B_0$ . Spojením s (2.17) tak dostaneme

$$(T_P T_n \cdots T_1 - I) \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.18)$$

kde  $I$  je jednotková matice  $2 \times 2$ . Platnost této rovnosti je zjevně nutnou a postačující podmínkou pro to, aby vektor  $\psi_k$  byl vlastním vektorem operátoru  $T_{\alpha, \phi}$  příslušejícím vlastnímu číslu  $k^2$ . Aby nějaké  $k^2$  mohlo náležet do spektra  $T_{\alpha, \phi}$ , musí existovat nenulový vlastní vektor  $\psi_k$ , který je plně určen koeficienty  $A_0, B_0$ , z nichž alespoň jeden je nenulový. Tento požadavek je ekvivalentní existenci netriviálního řešení soustavy (2.18). Takové řešení existuje, pokud je determinant soustavy nulový. Dostáváme tak sekulární rovnici určující kladná vlastní čísla modelu na kružnici jako

$$\det(T_P T_n \cdots T_1 - I) = 0. \quad (2.19)$$

Dimenze prostoru řešení soustavy (2.18) pro  $k^2 \in \sigma(T_{\alpha, \phi})$  určuje násobnost vlastního čísla  $k^2$ . Dostáváme tak, že kladná vlastní čísla jsou maximálně dvojnásobně degenerovaná.

### 2.1.3 Explicitní tvar sekulární rovnice

Odvodíme explicitní tvar sekulární rovnice (2.19). Nejprve se podívejme na obecný tvar součinu matic navázání  $T_j$ . K tomuto účelu si matici  $T_j$  vyjádříme následujícím způsobem

$$T_j = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta e^{-i2kx_j} \\ \beta e^{i2kx_j} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

kde  $\gamma = \frac{e^{i\phi}}{2} \left( \frac{1}{\alpha} + \alpha \right)$  a  $\beta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$ . Je výhodné uvést následující vztah mezi  $\gamma$  a  $\beta$ ,

$$\gamma = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (2.21)$$

Pro  $j = 1, \dots, n$  zavedme označení součinu matic

$$\tilde{T}_j = T_j T_{j-1} \cdots T_1.$$

Matice  $\mathbf{T}_j$ , až na faktor  $\gamma$  má obecnou strukturu

$$\begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix},$$

která se zjevně zachovává při součinu. Z toho důvodu můžeme uvažovat matici  $\tilde{\mathbf{T}}_j$  ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{T}}_j = \gamma^j \begin{pmatrix} D_j & \bar{N}_j \\ N_j & \bar{D}_j \end{pmatrix}.$$

Budeme hledat obecné vyjádření výrazů  $D_j$  a  $N_j$ . Platí

$$D_1 = 1, \quad N_1 = \beta e^{i2kx_1}.$$

Přejdeme-li od  $\tilde{\mathbf{T}}_{j-1}$  k  $\tilde{\mathbf{T}}_j$  vynásobením maticí  $\mathbf{T}_j$  zleva, obdržíme rekurentní relaci

$$\begin{aligned} D_j &= D_{j-1} + \beta e^{-i2kx_j} N_{j-1}, \\ N_j &= N_{j-1} + \beta e^{i2kx_j} D_{j-1}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Indukcí podle  $j$  dokážeme, že pro  $D_j$  a  $N_j$  platí explicitní vyjádření

$$\begin{aligned} D_j &= 1 + \beta^2 \sum_{k<l}^j e^{i2k(x_k-x_l)} + \beta^4 \sum_{k<l<m<p}^j e^{i2k(x_k-x_l+x_m-x_p)} + \beta^6 \dots, \\ N_j &= \beta \sum_k^j e^{i2kx_k} + \beta^3 \sum_{k<l<m}^j e^{i2k(x_k-x_l+x_m)} + \beta^5 \dots, \end{aligned} \quad (2.23)$$

kde poslední suma sčítá přes  $j - (j \bmod 2)$  indexů u  $D_j$  resp. přes  $j - 1 + (j \bmod 2)$  indexů u  $N_j$  a  $(j \bmod 2)$  značí zbytek po dělení 2. Pro  $j = 1$  tvrzení zřejmě platí. Podívejme se na indukční krok  $(j-1) \rightarrow j$ . Po dosazení (2.23) pro  $j-1$  do (2.22) dostaneme

$$D_j = 1 + \beta^2 \sum_{k<l}^{j-1} e^{i2k(x_k-x_l)} + \beta^4 \dots + \beta e^{-i2kx_j} \left( \beta \sum_k^{j-1} e^{i2kx_k} + \beta^3 \dots \right).$$

Po roznásobení a úpravě dostaneme

$$D_j = 1 + \beta^2 \left( \sum_{k<l}^{j-1} e^{i2k(x_k-x_l)} + \sum_{k=1}^{j-1} e^{i2k(x_k-x_j)} \right) + \beta^4 (\dots) +$$

což je po sloučení příslušných sum přesně vyjádření  $D_j$  v (2.23). Obdobným způsobem se dojde k vztahu pro  $N_j$ .

Před výpočtem determinantu (2.19) musíme napřed vynásobit  $\tilde{\mathbf{T}}_n$  zleva maticí  $\mathbf{T}_P$ . Dostaneme tak

$$\mathbf{T}_P \tilde{\mathbf{T}}_n = \gamma^n \begin{pmatrix} \tilde{D}_j & \bar{\tilde{N}}_j \\ \tilde{N}_j & \bar{\tilde{D}}_j \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j &= e^{i2k\pi} + \beta^2 \sum_{k<l}^j e^{i2k(x_k-x_l+\pi)} + \beta^4 \sum_{k<l<m<p}^j e^{i2k(x_k-x_l+x_m-x_p+\pi)} + \dots, \\ \tilde{N}_j &= \beta \sum_k^j e^{i2k(x_k-\pi)} + \beta^3 \sum_{k<l<m}^j e^{i2k(x_k-x_l+x_m-\pi)} + \beta^5 \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

Při vyjádření  $\zeta_P(k)$  využijeme toho, že pro matici  $\mathbf{A}$  rozměru  $2 \times 2$  platí

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \det \mathbf{A} - \operatorname{tr} \mathbf{A} + 1.$$

Ze vztahů  $\det(\mathbf{T}_j) = e^{i2\phi}$  a  $\det(\mathbf{T}_P) = 1$  dostaneme  $\det(\mathbf{T}_P \tilde{\mathbf{T}}_n) = e^{i2n\phi}$ . Stopu  $\mathbf{T}_P \tilde{\mathbf{T}}_n$  snadno určíme z (2.24) jako

$$\operatorname{tr}(\mathbf{T}_P \tilde{\mathbf{T}}_n) = \gamma^n (\tilde{D}_j + \overline{\tilde{D}}_j) = 2\gamma^n \left[ \cos(2k\pi) + \beta^2 \sum_{k < l}^n \cos(2k(x_k - x_l + \pi)) + \beta^4 \dots \right]$$

Po dosazení všech těchto vyjádření do (2.19) dostaneme

$$1 + e^{i2n\phi} - 2\gamma^n \left[ \cos(2k\pi) + \beta^2 \sum_{k < l}^n \cos(2k(x_k - x_l + \pi)) + \beta^4 \dots \right] = 0.$$

Nakonec vyjádříme  $\gamma^n$  pomocí vztahu (2.21) a po vynásobení číslem  $-\frac{e^{-in\phi}}{2} \sqrt{1 - \beta^2}^n$  dostaneme finální podmínku, jejíž levou stranu označíme symbolem  $\zeta_P(k)$ :

$$\zeta_P(k) = \cos(2k\pi) - \cos(n\phi)(1 - \beta^2)^{\frac{n}{2}} + \beta^2 \sum_{k < l}^n \cos(2k(x_k - x_l + \pi)) + \beta^4 \dots = 0. \quad (2.25)$$

Rovnice  $\zeta_P(k) = 0$  tedy představuje sekulární rovnici určující kladná vlastní čísla systému  $n$  bodových interakcí na kružnici jako kvadráty kladných kořenů reálné funkce  $\zeta_P(k)$ . Podrobným studiem jejích kořenů se budeme zabývat v následující kapitole.

### Případ $\alpha = 1$

Uvažujme nyní speciální případ, kdy  $\alpha = 1$ . Protože  $\beta = 0$  a  $\gamma^n = e^{in\phi}$ , dostaneme vyjádření

$$\mathbf{T}_P \tilde{\mathbf{T}}_n - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} e^{i2k\pi + in\phi} - 1 & 0 \\ 0 & e^{-i2k\pi + in\phi} - 1 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Nulovost determinantu této matice dává podmínku, kterou po roznásobení upravíme v souladu s (2.25) na tvar

$$\cos(2k\pi) = \cos(n\phi).$$

V případě  $\phi \neq 0$  lze řešení vyjádřit jako

$$k_l = \left\lfloor \frac{n\phi}{2\pi} + l \right\rfloor, \quad l \in \mathbb{Z},$$

a v případě  $\phi = 0$  jako

$$k_n = l, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Podívejme se nyní, jak je to s degenerací vlastních čísel v tomto speciálním případě. V případě, že vlastní čísla jsou dvojnásobně degenerovaná, jsou všechny složky matice soustavy nulové. To znamená, že i jejich součet je nulový:

$$e^{i2k_l\pi + in\phi} - 1 + e^{-i2k_l\pi + in\phi} - 1 = 0.$$

Tuto rovnost spolu s využitím  $\cos(2k_l\pi) = \cos(n\phi)$  upravíme na

$$e^{in\phi} \cos(n\phi) - 1 = 0.$$

Imaginární část levé strany je 0 v případě, že  $\sin n\phi = 0$ . To nastává v případech

$$\phi = \phi_m = \frac{m\pi}{n}, \quad m = 0, \dots, 2n - 1.$$

Všechny tyto možnosti implikují v důsledku vztahu  $|\cos(2k_l\pi)| = |\cos(n\phi_m)| = 1$  rovnost  $\sin(2k_l\pi) = 0$ . Po dosazení do (2.26) zjistíme, že jsou všechny složky nulové. Ve výše jmenovaných případech je kladná část spektra dvojnásobně degenerovaná. Pro  $\alpha = 1$  a  $\phi \neq \phi_m$  jsou kladné vlastní hodnoty nedegenerované.

### 2.1.4 Záporné spektrum

Záporné spektrum budeme určovat stejnou metodou jako kladné spektrum. Na intervalu  $(x_j, x_{j+1})$  můžeme řešení  $f_j(k; x)$  rovnice  $-f'' = -k^2 f$ ,  $k < 0$  obecně vyjádřit jako lineární kombinaci

$$f_j(k; x) = A_j(k)e^{kx} + B_j(k)e^{-kx}. \quad (2.27)$$

Je patrné, že všechny úvahy, které jsme prováděli pro kladné spektrum, zůstávají v platnosti při formální záměně  $ik \rightarrow k$ .

Matice navázání  $\mathbf{T}_j$  jsou opět regulární a mají podobu

$$\mathbf{T}_j = \frac{e^{i\phi}}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) & \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) e^{-2kx_j} \\ \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) e^{2kx_j} & \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Matice navázání  $\mathbf{T}_P$  je

$$\mathbf{T}_P = \begin{pmatrix} e^{2k\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2k\pi} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Podmínka existence nenulového vlastního vektoru vede opět na nulovost determinantu soustavy určující koeficienty  $A_0$  a  $B_0$ . Sekulární rovnice určující záporná vlastní čísla pro model  $n$  bodových interakcí na kružnici je analogicky k (2.19)

$$\det(\mathbf{T}_P \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_1 - \mathbf{I}) = 0. \quad (2.30)$$

Záporná vlastní čísla mohou být nejvýše dvojnásobně degenerovaná.

Podívejme se na explicitní vyjádření sekulární rovnice. Relevantní složky matic  $\tilde{\mathbf{T}}_j$  se od těch původních liší záměnou  $ik \rightarrow k$ . Celý postup až k finálním rovnicím je jinak naprosto analogický. Ve konečném vztahu (2.25) dojde u členů, v jejichž argumentu vystupuje  $k$  k záměně  $\cos \rightarrow \cosh$  a  $\sin \rightarrow \sinh$ .

Sekulární rovnice určující záporná vlastní čísla je potom

$$\cosh(2k\pi) - \cos(n\phi)(1 - \beta^2)^{\frac{n}{2}} + \beta^2 \sum_{k < l}^n \cosh(2k(x_k - x_l + \pi)) + \beta^4 \dots = 0. \quad (2.31)$$

Protože  $\cos(n\phi)(1 - \beta^2)^{\frac{n}{2}} \leq 1$ , pro  $k < 0$  je  $\cosh(2k\pi) > 1$  a ostatní členy v sumách jsou také kladné, nemá rovnice (2.31) řešení a záporná část spektra operátoru  $T_{\alpha, \phi}$  je prázdná.

### 2.1.5 Vlastní číslo 0

Na intervalu  $(x_j, x_{j+1})$  můžeme řešení  $f_j(0; x)$  rovnice  $-f'' = 0$  obecně vyjádřit jako lineární kombinaci

$$f_j(0; x) = A_j(0)x + B_j(0). \quad (2.32)$$

Matice navázání  $f_{j-1}(x)$  a  $f_j(x)$  v bodě  $x_j$  odpovídající okrajovým podmínkám

$$\frac{e^{i\phi}}{\alpha} f_{j-1}(x_{j-}) - f_j(x_{j+}) = 0, \quad e^{i\phi} \alpha f'_{j-1}(x_{j-}) - f'_j(x_{j+}) = 0,$$

je regulární matice

$$\mathbf{T}_j = e^{i\phi} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) x_j & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Matice navázání  $\mathbf{T}_P$  je potom

$$\mathbf{T}_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Nenulový vlastní vektor existuje, pokud je determinant soustavy určující koeficienty  $A_0$  a  $B_0$  nulový:

$$\det(\mathbf{T}_P \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_1 - \mathbf{I}) = 0. \quad (2.35)$$

Stejně jako nenulová vlastní čísla může být i 0 u modelu na kružnici nejvýše dvojnásobně degenerovaná.

Podívejme se nyní konkrétněji na podmínku (2.35). Zavedeme opět označení  $\tilde{\mathbf{T}}_j = \mathbf{T}_j \cdots \mathbf{T}_1$ . Indukcí se snadno ověří platnost vztahu

$$\tilde{\mathbf{T}}_j = e^{ij\phi} \begin{pmatrix} \alpha^j & 0 \\ \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) \left(\sum_{k=1}^j x_k \alpha^{(2k-j-1)}\right) & \frac{1}{\alpha^j} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

určujícího obecný tvar matice  $\tilde{\mathbf{T}}_j$ . Po vynásobení maticí  $\mathbf{T}_P$  obdržíme

$$\mathbf{T}_P \tilde{\mathbf{T}}_n = e^{in\phi} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 2\pi\alpha^n + \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) \left(\sum_{k=1}^n x_k \alpha^{(2k-n-1)}\right) & \frac{1}{\alpha^n} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Dosazením do (2.35) dostaneme explicitní vyjádření

$$(e^{in\phi} \alpha^n - 1) \left( \frac{e^{in\phi}}{\alpha^n} - 1 \right) = 0.$$

Tato podmínka je splněna, pokud  $\alpha = 1$  a  $\phi = 2\pi \frac{k}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . V takovém případě patří 0 do spektra systému  $n$  bodových interakcí na kružnici a z (2.37) je patrné, že je nedegenerovaná vlastní hodnota.

## 2.2 Model na úsečce

Pod tímto názvem budeme rozumět samosdružená rozšíření operátoru  $T_0$  dané pro  $f \in D(T_1)$  následující množinou  $2(n+1)$  okrajových podmínek:

$$f(0_+) = 0, \quad f(2\pi_-) = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{e^{i\phi}}{\alpha} f(x_{k-}) - f(x_{k+}) = 0, \quad e^{i\phi} \alpha f'(x_{k-}) - f'(x_{k+}) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.39)$$

kde  $\alpha \in (0, +\infty)$  a  $\phi \in [0, 2\pi)$ . Dirichletovy okrajové podmínky (2.38) odpovídají systému uzavřenému na úsečce  $(0, 2\pi)$ . Podmínky (2.39) představují podmínky separované do bodů  $x_k$  ze škálově nezávislé podtřídy (viz 1.3) podmínek (1.2). Všechny netriviální bodové interakce jsou opět stejného charakteru a závisí na dvou parametrech  $\alpha$  a  $\phi$ .

Analogickým způsobem jako u modelu na kružnici lze dokázat, že se jedná o symetrickou množinu lineárně nezávislých okrajových podmínek, která určuje samosdružená rozšíření operátoru  $T_0$ .

Samosdružené rozšíření operátoru  $T_0$  určené okrajovými podmínkami (2.38) a (2.39) pro nějaké  $\alpha$  a  $\phi$  budeme značit  $\tilde{T}_{\alpha, \phi}$ .

### 2.2.1 Obecná charakteristika spektra

V této části budeme zkoumat obecné vlastnosti spektra operátoru  $\tilde{T}_{\alpha, \phi}$ .

Nejprve se zabýváme případem  $\alpha = 1$  a  $\phi = 0$ . Funkci  $f \in D(\tilde{T}_{1,0})$  můžeme spojitě dodefinovat v bodech  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  tak, že  $f \in H^2(0, 2\pi)$ . Tento případ tedy odpovídá Dirichletovým okrajovým podmínkám u jedné bodové interakce tak, jak jsme ji zkoumali v kapitole 1. Resolventa  $R(\lambda; \tilde{T}_{1,0})$  je podle vět A.5.2 a A.5.3 pro  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  integrální Hilbert-Schmidtův operátor a  $\tilde{T}_{1,0}$  má čistě diskrétní spektrum, jehož konkrétní podobu jsme určili v 1.4.1.

Uvažujme nyní  $\dot{T}_{\alpha,\phi}$  pro obecné  $\alpha$  a  $\phi$  tak, že buď  $\alpha \neq 1$  nebo  $\phi \neq 0$ . Analogickým postupem jako v případě modelu na kružnici se ukáže, že resolventa  $R(\lambda; \dot{T}_{\alpha,\phi})$  je pro  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  kompaktní operátor. Důsledkem (viz větu A.2.6) je, že operátor  $\dot{T}_{\alpha,\phi}$  má čistě diskrétní spektrum.

## 2.2.2 Kladné spektrum

Podívejme se na kladná vlastní čísla operátoru  $\dot{T}_{\alpha,\phi}$ . Začneme ihned postupem matic navázání, který umožňuje určit explicitně sekulární rovnici.

Na intervalu  $(x_j, x_{j+1})$  řešení  $f_j(k; x)$  rovnice  $-f'' = k^2 f$ ,  $k > 0$  obecně vyjádříme jako lineární kombinaci

$$f_j(k; x) = A_j(k)e^{ikx} + B_j(k)e^{-ikx}. \quad (2.40)$$

Vlastní vektor  $\psi_k \in D(\dot{T}_{\alpha,\phi})$  k vlastnímu číslu  $k^2$  vznikne vhodným napojením  $f_j(k; x)$  v krajních bodech intervalů  $(x_j, x_{j+1})$ . V dalším textu budeme opět používat zjednodušené značení  $f_j(x) \equiv f_j(k; x)$ ,  $A_j \equiv A_j(k)$  a  $B_j \equiv B_j(k)$ , ve kterém explicitně nevyjadřujeme závislost na  $k$ .

Část (2.39) okrajových podmínek určující definiční obor  $\dot{T}_{\alpha,\phi}$  je stejná jako podmínky (2.6) v případě modelu na kružnici. Okrajovou podmínku určující přímý vztah  $f_{j-1}(x)$  a  $f_j(x)$  můžeme tedy vyjádřit vztahem (2.13) mezi koeficienty  $A_{j-1}$ ,  $B_{j-1}$  a koeficienty  $A_j$ ,  $B_j$ , kde matice navázání  $\mathbf{T}_j$  je opět (2.14).

Poněkud jiná situace nastává v případě části (2.38) okrajových podmínek, které můžeme přepsat jako

$$f_0(0_+) = 0, \quad f_n(2\pi_-) = 0.$$

Tyto podmínky nám neurčují žádný přímý vztah mezi  $f_0(x)$  a  $f_n(x)$ , což odpovídá fyzikální představě oddělených konců systému. Pro koeficienty  $A_0$ ,  $B_0$  a  $A_n$ ,  $B_n$  z těchto podmínek plyne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{i2k\pi} & e^{-i2k\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = 0. \quad (2.41)$$

Uvažujme opět kandidáta  $\psi_k$  na vlastní vektor, který je na intervalu  $(0, x_1)$  vyjádřen koeficienty  $A_0$  a  $B_0$ . Stejnou úvahou jako v případě modelu na kružnici zjistíme, že celý vektor  $\psi_k$  je jednoznačně určen koeficienty  $A_0$  a  $B_0$ . Koeficienty  $A_n$ ,  $B_n$  závisí na  $A_0$  a  $B_0$  vztahem

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Příslušnost  $\psi_k$  do  $D(\dot{T}_{\alpha,\phi})$  vyžaduje platnost okrajových podmínek (2.39), které jsme ekvivalentně vyjádřili vztahy (2.41) pro koeficienty  $A_n$ ,  $B_n$  a  $A_0$ ,  $B_0$ . Spojením s (2.42) dostáváme

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{i2k\pi} & e^{-i2k\pi} \end{pmatrix} \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_1 \right] \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.43)$$

Aby číslo  $k^2$  náleželo do spektra operátoru  $\dot{T}_{\alpha,\phi}$ , musí existovat nenulový vlastní vektor  $\psi_k$ . Tento požadavek je splněn pouze v případě, kdy má tato soustava netriviální řešení. Kladná vlastní čísla jsou tedy určena podmínkou nulovosti determinantu soustavy (2.43),

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{i2k\pi} & e^{-i2k\pi} \end{pmatrix} \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_1 \right] = 0. \quad (2.44)$$



Protože hodnost matice této soustavy je minimálně 1, je zřejmé, že kladná vlastní čísla jsou vždy nedegenerovaná.

Nyní najdeme explicitní vyjádření rovnice (2.44). Nejprve určíme součin

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{i2k\pi} & e^{-i2k\pi} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_n = \gamma^n \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_n & \bar{U}_n \end{pmatrix},$$

kde  $U_n = e^{i2k\pi} D_n + e^{-i2k\pi} N_n$ . Z vyjádření (2.23) plyne explicitní tvar  $U_n$ :

$$U_n = e^{i2k\pi} + \beta \sum_k^n e^{i2k(x_k - \pi)} + \beta^2 \sum_{k < l}^n e^{i2k(x_k - x_l + \pi)} + \beta^3 \sum_{k < l < m}^n e^{i2k(x_k - x_l + x_m - \pi)} \dots$$

Rovnice (2.44) přejde na

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma^n U_n & \gamma^n \bar{U}_n \end{pmatrix} = \gamma^n (\bar{U}_n - U_n) = 0.$$

Tuto rovnost můžeme vydělit číslem  $-2i\gamma^n$  a upravit na finální tvar

$$\zeta_D(k) = \sin(2k\pi) + \beta \sum_k^n \sin(2k(x_k - \pi)) + \beta^2 \sum_{k < l}^n \sin(2k(x_k - x_l + \pi)) + \beta^3 \dots = 0. \quad (2.45)$$

Rovnost  $\zeta_D(k) = 0$  představuje sekulární rovnici určující kladná vlastní čísla systému  $n$  bodových interakcí na úsečce. Pro  $\alpha = 1$  má  $\tilde{T}_{1,\phi}$  nezávisle na  $\phi$  stejnou kladnou část spektra jako systém jedné bodové interakce určené Dirichletovými okrajovými podmínkami.

### 2.2.3 Záporné spektrum

Sekulární rovnice modelu  $n$  bodových interakcí na úsečce určující záporná vlastní čísla je potom analogicky k (2.44)

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{2k\pi} & e^{-2k\pi} \end{pmatrix} \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_1 \right] = 0. \quad (2.46)$$

U systému  $n$  bodových interakcí na úsečce jsou případná záporná vlastní čísla v důsledku vyjádření (2.46) nedegenerovaná.

Podívejme se na explicitní vyjádření sekulární rovnice. Relevantní složky matic  $\tilde{\mathbf{T}}_j$  se od těch původních liší záměnou  $ik \rightarrow k$ . Celý postup až k finálním rovnicím je jinak naprosto analogický. Ve finálních vztazích (2.25) a (2.45) dojde u členů v jejichž argumentu vystupuje  $k$  k záměně  $\cos \rightarrow \cosh$  a  $\sin \rightarrow \sinh$ . Sekulární rovnice určující záporná vlastní čísla modelu na úsečce je tedy

$$\sinh(2k\pi) + \beta \sum_k^n \sinh(2k(x_k - \pi)) + \beta^2 \sum_{k < l}^n \sinh(2k(x_k - x_l + \pi)) + \beta^3 \dots = 0. \quad (2.47)$$

Limita levé strany pro  $k \rightarrow -\infty$  je zřejmě  $-\infty$ , protože všechny argumenty funkcí  $\sinh$  vystupující v sumách jsou menší než  $2\pi$ . Existuje tedy číslo  $k_0 < 0$  omezující zdola množinu kořenů rovnice (2.47). Přitom jsme ukázali, že systém nemá ve spektru žádné hromadné body. Z těchto důvodů může existovat pouze konečný počet záporných vlastních čísel operátoru  $\tilde{T}_{\alpha,\phi}$ .

### 2.2.4 Vlastní číslo 0

Na intervalu  $(x_j, x_{j+1})$  můžeme řešení  $f_j(0; x)$  rovnice  $-f'' = 0$  obecně vyjádřit jako lineární kombinaci

$$f_j(0; x) = A_j(0)x + B_j(0). \quad (2.48)$$

Matice navázání  $f_{j-1}(x)$  a  $f_j(x)$  v bodě  $x_j$  odpovídající okrajovým podmínkám

$$\frac{e^{i\phi}}{\alpha} f_{j-1}(x_{j-}) - f_j(x_{j+}) = 0, \quad e^{i\phi} \alpha f'_{j-1}(x_{j-}) - f'_j(x_{j+}) = 0,$$

je regulární matice

$$\mathbf{T}_j = e^{i\phi} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ (\frac{1}{\alpha} - \alpha) x_j & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Vztahy mezi koeficienty  $A_0, B_0$  a  $A_n, B_n$  odpovídající okrajovým podmínkám (2.38) jsou

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = 0.$$

Nenulový vlastní vektor existuje, pokud je determinant soustavy určující koeficienty  $A_0$  a  $B_0$  nulový,

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\pi & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_1 \right] = 0. \quad (2.50)$$

Z tohoto vyjádření plyne, že pokud náleží do spektra, je 0 vždy nedegenerovaná vlastní hodnota.

Podívejme se konkrétněji na podmínku (2.50). Obecný tvar matice  $\tilde{\mathbf{T}}_j$  při označení  $\tilde{\mathbf{T}}_j = \mathbf{T}_j \cdots \mathbf{T}_1$  je stejně jako u modelu na kružnici

$$\tilde{\mathbf{T}}_j = e^{ij\phi} \begin{pmatrix} \alpha^j & 0 \\ (\frac{1}{\alpha} - \alpha) \left( \sum_{k=1}^j x_k \alpha^{(2k-j-1)} \right) & \frac{1}{\alpha^j} \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Matice soustavy je tedy

$$e^{in\phi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\pi\alpha^n + (\frac{1}{\alpha} - \alpha) \left( \sum_{k=1}^n x_k \alpha^{(2k-n-1)} \right) & \frac{1}{\alpha^n} \end{pmatrix}.$$

Po dosazení do rovnice (2.50) dostaneme

$$e^{in\phi} \left[ 2\pi\alpha^n + \left( \frac{1}{\alpha} - \alpha \right) \left( \sum_{k=1}^n x_k \alpha^{(2k-n-1)} \right) \right] = 0.$$

Rovnici vydělíme  $e^{in\phi}$  a pro přehlednost rozepíšeme několik členů sumy,

$$2\pi\alpha^n + \left( \frac{1}{\alpha} - \alpha \right) \left( \frac{x_1}{\alpha^{n-1}} + \frac{x_2}{\alpha^{n-3}} + \dots + x_n \alpha^{n-1} \right) = 0.$$

Rovnost vynásobíme číslem  $\alpha^n$ , roznásobíme obě závorky a po přeskupení členů získáme finální rovnici,

$$\alpha^{2n}(2\pi - x_n) + \alpha^{2n-2}(x_n - x_{n-1}) + \dots + \alpha^2(x_2 - x_1) + x_1 = 0, \quad (2.52)$$

jejíž levá strana je polynomem v  $\alpha$ . V důsledku vzestupného označení poloh bodových interakcí jsou všechny koeficienty kladné, a tedy polynom nemá žádné reálné kořeny. To znamená, že pro jakékoli hodnoty parametrů  $\alpha$  a  $\phi$  nepatří 0 do spektra operátoru  $\hat{T}_{\alpha, \phi}$ .

## 2.3 Shrnutí spektrálních vlastností

V této části stručně shrneme výsledky analýzy spekter systémů  $n$  bodových interakcí na kružnici a úsečce získané v částech 2.1 a 2.2. Připomeňme, že v celé kapitole uvažujeme ve všech bodech stejné bodové interakce ze škálově nezávislé třídy zavedené v 1.3, které můžeme reprezentovat dvěma parametry  $\alpha \in (0, +\infty)$  a  $\phi \in [0, 2\pi)$ .

### 2.3.1 Model na kružnici

Hamiltonián systému  $n$  bodových interakcí na kružnici je reprezentován samosdruženým operátorem  $T_{\alpha, \phi}$  na Hilbertově prostoru  $L^2(0, 2\pi)$ .

Spektrum tohoto operátoru je nezáporné čistě diskrétní. Kladná vlastní čísla jsou maximálně dvojnásobně degenerovaná a můžeme je vyjádřit jako  $k^2$ , kde  $k > 0$  jsou řešení sekulární rovnice (2.25). Nula patří do spektra pouze v případech  $\alpha = 1$ ,  $\phi = 2\pi \frac{k}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  a je nedegenerovaná.

V případě  $\alpha = 1$  lze řešení explicitně vyjádřit jako

$$E_l = \left( \frac{n\phi}{2\pi} + l \right)^2, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Pro  $\alpha = 1$  a  $\phi \neq \phi_m$ , kde  $\phi_m = \frac{m\pi}{n}$ ,  $m = 0, \dots, 2n-1$ , jsou kladné vlastní hodnoty nedegenerované. Pro  $\alpha = 1$  a  $\phi = \phi_m$  jsou dvojnásobně degenerované.

Protože spektrum  $T_{\alpha, \phi}$  je čistě diskrétní existuje podle Spektrální teorie (viz str. 56) ortonormální báze prostoru  $L^2(0, 2\pi)$  tvořená jeho vlastními vektory. Ukázali jsme, že násobnost každého vlastního vektoru  $T_{\alpha, \phi}$  je konečná (maximálně rovná 2). Přitom ortonormálních vlastních vektorů je nekonečně mnoho, protože  $L^2(0, 2\pi)$  je nekonečně rozměrný separabilní Hilbertův prostor. Z toho plyne, že vlastní čísla tvoří nekonečnou spočetnou množinu. Tato množina je neomezená, neboť čistě diskrétní spektrum nemá žádné hromadné body.

### 2.3.2 Model na úsečce

Hamiltonián systému  $n$  bodových interakcí na úsečce je reprezentován samosdruženým operátorem  $\hat{T}_{\alpha, \phi}$  na Hilbertově prostoru  $L^2(0, 2\pi)$ .

Spektrum  $\hat{T}_{\alpha, \phi}$  je opět čistě diskrétní. Kladná vlastní čísla můžeme vyjádřit jako  $k^2$ , kde  $k > 0$  jsou řešení sekulární rovnice (2.45). Nula do spektra nikdy nepatří. Operátor  $\hat{T}_{\alpha, \phi}$  může mít pouze konečný počet záporných vlastních čísel  $-k^2$ , kde  $k < 0$  jsou řešení rovnice (2.47). Spektrum modelu  $n$  bodových interakcí na úsečce je vždy nedegenerované.

Podobnou úvahou jako pro model na kružnici zjistíme, že spektrum operátoru  $\hat{T}_{\alpha, \phi}$  je neomezená (zdola omezená) spočetná množina.



## Kapitola 3

# Statistické vlastnosti spektra

V této kapitole si ukážeme některé statistické vlastnosti systému  $n$  bodových interakcí na kružnici tak, jak jsme ho zkonstruovali v předchozí kapitole. Spektrum tohoto systému je řešitelné, protože jsme schopni napsat explicitní rovnici určující vlastní čísla. Uvidíme, že rozdělení vzdáleností sousedních vlastních hodnot, které odpovídají rozštěpení jedné degenerované hladiny, je velmi podobné rozdělení level spacing ortogonálního souboru náhodných matic. Tento výsledek je zajímavý, protože podobnými charakteristikami spektra se vyznačují systémy, jejichž odpovídající klasická dynamika je chaotická.

### 3.1 Základní vlastnosti

Polohy  $n$  bodových interakcí jsme označili  $0 < x_1 < \dots < x_n < 2\pi$ . Od této chvíle se budeme zabývat případem, kdy jsou tyto polohy spolu s číslem  $\pi$  racionálně nezávislá iracionální čísla. To znamená, že rovnice

$$\sum_{i=1}^{n+1} m_i x_i = 0, \quad (3.1)$$

kde  $m_i \in \mathbb{Z}$  a  $x_{n+1} = 2\pi$ , má pouze triviální řešení  $m_i = 0$ .

Kladná vlastní čísla operátoru  $T_{\alpha, \phi}$  jsou určeny kladnými reálnými kořeny funkce  $\zeta_P(k)$ . Funkce  $\zeta_P(k)$  je definována vztahem (2.25), který zde pro úplnost zopakujeme

$$\zeta_P(k) = \cos(2k\pi) - \cos(n\phi)(1 - \beta^2)^{\frac{n}{2}} + \beta^2 \sum_{k < l}^n \cos(2k(x_k - x_l + \pi)) + \beta^4 \dots \quad (3.2)$$

Vztah mezi parametry  $\alpha$  a  $\beta$  je  $\beta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$ . Pro  $\alpha \in (0, +\infty)$  je  $\beta \in (-1, 1)$ . Protože funkce  $\zeta_P(k)$  je zjevně invariantní vůči záměně  $\alpha \rightarrow 1/\alpha$ , které odpovídá  $\beta \rightarrow -\beta$ , budeme se zabývat pouze případy  $\alpha \geq 1$ .

Abychom mohli vhodným způsobem studovat rozdělení vlastních čísel, zavedeme následující označení. Označme 0, jestliže náleží do spektra  $T_{\alpha, \phi}$ , a kladné kořeny funkce  $\zeta_P(k)$  jako  $k_j$  ve vzestupném pořadí tak, že je respektována degenerovanost spektra. Dostaneme posloupnost

$$\{k_j\}_{j=1}^{\infty}, \quad 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_j \leq k_{j+1} \leq \dots,$$

kde  $k_1 = 0$ , pokud je 0 ve spektru a ostatní rovnosti platí právě v případě, že příslušné vlastní hodnoty jsou degenerované. Z úvahy o diskrétnosti spektra operátoru

$T_{\alpha,\phi}$ , které jsme uvedli v části (2.3), plyne, že tato posloupnost nemá hromadné hodnoty a je pro  $N \rightarrow +\infty$  neomezená,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} k_N = +\infty.$$

Navíc se mohou rovnat maximálně dva po sobě následující členy, protože spektrum je nejvýše dvojnásobně degenerované. Posloupnost  $\{k_j\}$  jednoznačně určuje posloupnost vlastních čísel  $\{E_j\}$  vztahem

$$E_j = k_j^2, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Pokud chceme porovnávat spektrální statistické vlastnosti s předpovědmi teorie náhodných matic, musíme provést unfolding popsany v dodatku B.2.2, tzn. transformovat hodnoty posloupnosti  $\{E_j\}$  tak, aby průměrná hustota stavů byla rovna 1. Uvidíme, že to v důsledku znamená zabývat se pouze vhodným násobkem posloupnosti  $\{k_j\}$ .

Pojem průměrné hustoty stavů posloupnosti  $\{x_m\}_{m=1}^{+\infty}$  bychom mohli zavést pomocí vztahu (B.45) v dodatku (B.2.2). Pro naše účely je však vhodné to udělat jiným způsobem. Uvažujme nyní prvních  $N$  členů posloupnosti  $\{x_m\}$ . Pro posloupnost  $\{x_m\}_{m=1}^N$  má smysl zavést empirickou hustotu rozdělení a empirickou distribuční funkci vztahy

$$f_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \delta(x - x_m), \quad F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta(x - x_i), \quad (3.4)$$

kde  $\Theta$  je Heavisidova funkce. Nyní provedeme proložení empirické distribuční funkce vhodnou hladkou funkcí  $\bar{F}_N(x)$ . Tuto funkci budeme považovat za distribuční funkci a její derivaci za průměrnou hustotu pravděpodobnosti  $\bar{f}_N(x) = \bar{F}'_N(x)$ . Průměrnou hustotu stavů  $\bar{\sigma}(x)$  posloupnosti  $\{x_j\}$  potom definujeme jako

$$\bar{\sigma}(x) = N\bar{f}_N(x),$$

kde uvažujeme takové  $N$  aby  $x_N \gg x$ . Vzhledem k lokálnosti proložení je zřejmé  $\bar{\sigma}(x)$  na  $N$  nezávislá.

Z provedených numerických výpočtů resp. z teorie popsané v následující části plyne, že posloupnost  $\{k_j\}_{j=1}^{+\infty}$  má konstantní průměrnou hustotu stavů rovnou  $\bar{\sigma}(k) = 2$ . Její empirickou distribuční funkci  $F_N(k)$  můžeme potom proložit lineární funkcí

$$\bar{F}_N(k) = \frac{2}{N}k + \frac{c}{N}, \quad (3.5)$$

kde  $c$  je konstanta. Z numerických experimentů vyplývá, že volba  $c = 0$  by mohla být univerzální. Korektnější důkaz tohoto tvrzení by bylo možno provést na základě analýzy popsané v následující části a teorie čísel. Na obrázku 3.1 je znázorněn příklad takového proložení.

Empirickou distribuční funkci  $G_N(E)$  konečné části posloupnosti vlastních čísel  $\{E_j\}_{j=1}^N$  pro libovolné  $N \in \mathbb{N}$  můžeme na základě vztahu mezi  $k_j$  a  $E_j$  interpolovat funkcí

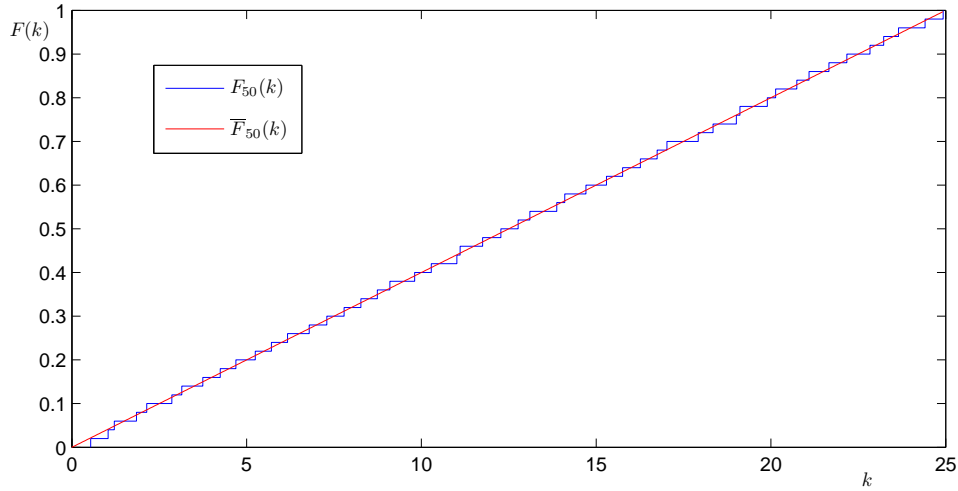
$$\bar{G}_N(E) = \bar{F}_N(\sqrt{E}) = \frac{2}{N}\sqrt{E} + \frac{c}{N}. \quad (3.6)$$

Na obrázku 3.2 je tato úvaha znázorněna pro konkrétní numerické výsledky.

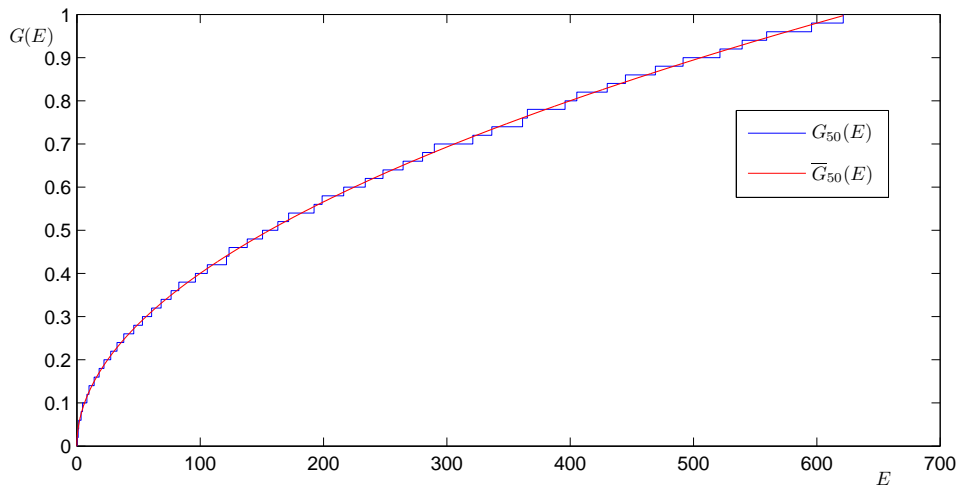
Prvních  $N$  členů posloupnosti  $\{e_j\}_{j=1}^{+\infty}$ , jejíž členy mají průměrnou hustotu stavů rovnou 1, získáme transformací (B.44) posloupnosti  $\{E_j\}_{j=1}^N$ :

$$e_i = N\bar{G}_N(E_i) = N\frac{2}{N}\sqrt{E_i} + c = 2k_i + c, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.7)$$

Vidíme, že tato nová posloupnost je v lineárním vztahu s posloupností kořenů  $\zeta_P(k)$ . Z toho plyne, že všechny potřebné statistiky můžeme počítat na posloupnosti  $k_j$ , kterou pouze vynásobíme průměrnou hustotou stavů.



Obrázek 3.1: Proložení empirické distribuční funkce posloupnosti  $k_j$ . Lomená čára představuje empirickou distribuční funkci  $F_{50}(k)$  prvních 50 kořenů sekulární rovnice systému sedmi bodových interakcí v bodech určených (3.24) s parametry  $\alpha = \sqrt{3}$ ,  $\phi = 0$ . Proložení  $F_{50}(k)$  je realizováno lineární funkcí  $\bar{F}_{50}(k)$  danou vztahem (3.5) pro  $c = 0$  a  $N = 50$ .



Obrázek 3.2: Proložení empirické distribuční funkce posloupnosti vlastních čísel. Lomená čára představuje empirickou distribuční funkci  $G_{50}(E)$  prvních 50 vlastních čísel  $\{E_j\}_{j=1}^{50}$  systému sedmi bodových interakcí v bodech určených (3.24) s parametry  $\alpha = \sqrt{3}$ ,  $\phi = 0$ . Tato čára je proložena funkcí  $\bar{G}_{50}(E)$ , které je dána vztahem (3.6) pro  $c = 0$  a  $N = 50$ .

### 3.2 Separování kořenů

V této části ukážeme, jakým způsobem je možné teoreticky separovat kořeny sekulární rovnice  $\zeta_P(k) = 0$  a na základě toho spočítat průměrnou hustotu stavů posloupnosti těchto kořenů. Prezentovaná teorie je obsažena v článcích [20] a [21] věnovaných spektrálním statistikám kvantových grafů.

Sekulární rovnici (3.2) si přepíšeme do následujícího tvaru

$$\cos(2k\pi) - \Phi(k) = 0, \quad (3.8)$$

kde

$$\Phi(k) = \cos(n\phi)(1 - \beta^2)^{\frac{n}{2}} - \beta^2 \sum_{k < l}^n \cos(2k(x_k - x_l + \pi)) - \beta^4 \dots \quad (3.9)$$

Obecný tvar funkce  $\Phi(k)$  je v souladu s oběma články

$$\Phi(k) = \sum_{i=1}^M a_i \cos(\omega_i k - \pi \gamma_i). \quad (3.10)$$

V případě, že při vyjádření (3.10), platí (tento případ nazveme regulárním případem)

$$\sum_{i=1}^M |a_i| < 1, \quad (3.11)$$

můžeme explicitně periodicky separovat kořeny rovnice (3.8). Lze dokázat<sup>1</sup>, že v intervalu  $I_j = (\hat{k}_{j-1}, \hat{k}_j)$ , kde  $\hat{k}_j = j/2$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , potom leží právě jeden kořen  $k_j$ . Toto jinými slovy znamená, že empirická distribuční funkce  $F_N(k)$  posloupnosti  $\{k_j\}_{j=1}^N$  má v bodech  $\hat{k}_j$  průsečíky s přímkou

$$\bar{F}_N(k) = \frac{2}{N}k. \quad (3.12)$$

Tato přímka zřejmě představuje rozumné proložení empirické distribuční funkce a proto je průměrná hustota stavů rovna 2.

V našem případě můžeme podmínku (3.11) vyjádřit jako

$$(1 - \beta^2)^{\frac{n}{2}} + \sum_{k < l}^n \beta^2 + \sum_{k < l < m < p}^n \beta^4 + \dots < 1. \quad (3.13)$$

Bohužel pro většinu hodnot parametru  $\alpha$  není tato podmínka splněna. Evidentně například pokud  $\alpha = 1$  ( $\beta = 0$ ). Poznamenejme, že podmínka (3.13) nezávisí na  $\phi$ .

V článku [20] je popsán způsob, jak se s některými těmito případy vypořádat. Pokusíme se opět najít body  $\hat{k}_j$ , které tentokrát nebudou periodicky rozdělené, ale opět bude v intervalu  $I_j = (\hat{k}_{j-1}, \hat{k}_j)$  obsažen právě jeden kořen sekulární rovnice. Ukazuje se, že funkce  $\zeta_P(k)$  má v případě nedegenerovaného spektra mezi každými dvěma sousedními extrémy právě jeden kořen. Kořeny reprezentující degenerovanou vlastní hodnotu jsou zároveň extrémy. Jako separátory  $\hat{k}_j$  tedy využijeme extrémy funkce  $\zeta_P(k)$ .

Rovnice určující tyto extrémy je  $\zeta'_P(k) = 0$ . Explicitní vyjádření vyjádření této rovnosti v našem případě je

$$2\pi \sin(2k\pi) + \beta^2 \sum_{k < l}^n (2x_k - 2x_l + 2\pi) \sin(2k(x_k - x_l + \pi)) + \beta^4 \dots = 0. \quad (3.14)$$

<sup>1</sup>Viz Theorem T.2 v [21]



Po vydělení číslem  $2\pi$  spolu s faktem, že členy v argumentech  $\cos$  u  $\zeta_P(k)$  jsou v absolutní hodnotě menší než  $2\pi$ , můžeme tuto rovnici obecně zapsat jako

$$\sin(2k\pi) - \Phi^{(1)}(k) = 0, \quad (3.15)$$

kde

$$\Phi^{(1)}(k) = \sum_{i=2}^M a_i \epsilon_i \cos(\omega_i k - \pi \gamma_i)$$

a  $a_i$  jsou koeficienty z původního vyjádření (3.10) a  $e_i < 1$ .

Rovnice (3.15) představuje stejný typ jako (3.8) a pro její řešení platí vše výše uvedené. V tomto případě však máme větší šanci splnit podmínku regulárnosti, které je nyní

$$\sum_{i=2}^M |a_i \epsilon_i| < 1. \quad (3.16)$$

Pro náš konkrétní případ dostaneme

$$\sum_{k < l}^n \beta^2 \frac{|x_k - x_l + \pi|}{\pi} + \sum_{k < l < m < p}^n \beta^4 \frac{|x_k - x_l + x_m - x_p + \pi|}{\pi} + \dots < 1. \quad (3.17)$$

Tato podmínka zjevně platí pro  $\alpha \approx 1$ , kdy  $\beta \approx 0$ . V takovém případě můžeme periodicky separovat kořeny  $\zeta'_P(k)$ . Obdržíme tak body  $\hat{k}_j^{(1)} = j/2 + 1/4$ ,  $j = -1, 0, 1, \dots$ , mezi nimiž leží extrémy  $\hat{k}_j$  funkce  $\zeta_P(k)$ . Separátory kořenů sekulární rovnice jsou tedy  $\hat{k}_j \in (\hat{k}_{j-1}^{(1)}, \hat{k}_j^{(1)})$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Protože 0 je z vyjádření (3.14) vždy extrémem funkce  $\zeta_P(k)$ , určitě dostaneme  $\hat{k}_0 = 0$ .

Obecně můžeme shodnou úvahou postupovat opakovaně. Pro dané  $\alpha$  stačí nalézt  $m$  tak, že platí

$$\sum_{k < l}^n \beta^2 \frac{|x_k - x_l + \pi|^m}{\pi^m} + \sum_{k < l < m < p}^n \beta^4 \frac{|x_k - x_l + x_m - x_p + \pi|^m}{\pi^m} + \dots < 1. \quad (3.18)$$

Takové  $m$  zřejmě vždy existuje. Závislost levé strany této nerovnice na  $m$  je pro různé hodnoty  $\alpha$  a volbě (3.24) poloh bodových interakcí znázorněna na obrázku 3.3.

Ve finále dostaneme periodickou posloupnost bodů  $\hat{k}_j^{(m)} = j/2 + m/4$ ,  $j = -m, -m+1, \dots$ . Mezi body  $\hat{k}_{j-1}^{(m)}$  a  $\hat{k}_j^{(m)}$  leží vždy právě jeden  $\hat{k}_j^{(m-1)}$ , který představuje řešení rovnice  $\zeta_P^{(m)}(k) = 0$ , atd. až se dostaneme k separátorům kořenů  $\hat{k}_j$ . Zřejmě platí

$$k_j \in (\hat{k}_{j-1}, \hat{k}_j) \subset (\hat{k}_{j-2}^{(1)}, \hat{k}_j^{(1)}) \subset \dots \subset (\hat{k}_{j-m-1}^{(m)}, \hat{k}_j^{(m)}). \quad (3.19)$$

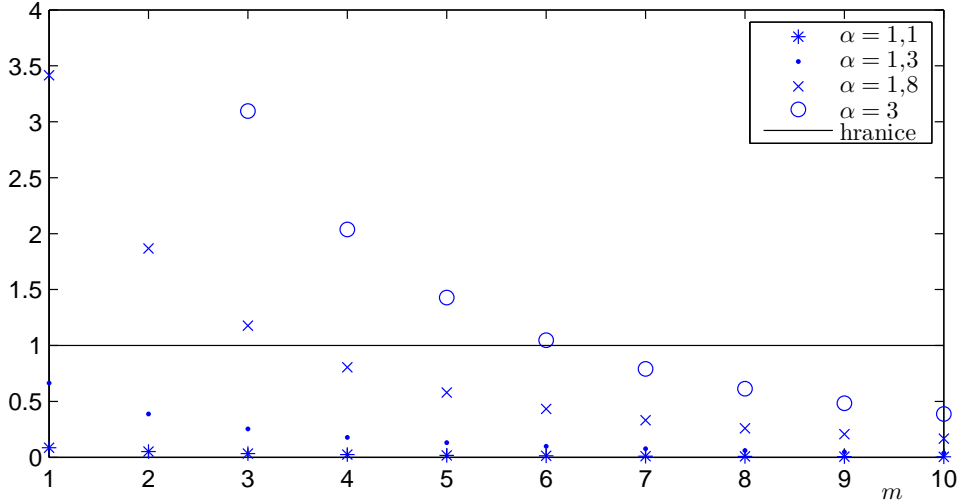
Z tohoto vyjádření je patrné, že maximální vzdálenost mezi dvěma sousedními kořeny  $k_j$  a  $k_{j+1}$  je rovna  $(m+1)/2$ . Protože 0 je stále extrémem funkce  $\zeta_P(k)$ , dostaneme  $\hat{k}_0 = 0$  a první nezáporný kořen  $k_1$  tedy leží v intervalu  $(0, \hat{k}_1^{(m)})$ . Ostatní kořeny leží zřejmě v intervalech  $(\hat{k}_{j-m-1}^{(m)}, \hat{k}_j^{(m)}) \cap \mathbb{R}_+$ .

Z vyjádření (3.19) je patrné, že se empirická distribuční funkce  $F_N(k)$  posloupnosti  $\{k_j\}_{j=1}^N$  nachází mezi přímkami

$$\overline{F}_N^{(1)}(k) = \frac{2}{N}k + \frac{m+1}{2N} \quad \text{a} \quad \overline{F}_N^{(2)}(k) = \frac{2}{N}k - \frac{m+1}{2N}. \quad (3.20)$$

Na základě teorie čísel by se dalo ukázat, že při vyjádření

$$k_j = \frac{j}{2} - \frac{1}{4} + \delta_j, \quad \delta_j \in (-(m+1)/4, (m+1)/4), \quad (3.21)$$



Obrázek 3.3: Závislost výrazu na levé straně nerovnosti (3.18) na  $m$  v případě sedmi bodových interakcí lokalizovaných v bodech (3.24) pro různé parametry  $\alpha$ .

kořenů  $k_j$  je střední hodnota rozdělení posloupnosti  $\{\delta_j\}_{j=1}^{+\infty}$  rovna 0. Z toho plyne, že nejhodnější proložení empirické distribuční funkce posloupnosti  $\{k_j\}_{j=1}^N$  je reprezentováno přímkou

$$\bar{F}_N(k) = \frac{2}{N}k. \quad (3.22)$$

To znamená, že posloupnost  $\{k_j\}_{j=1}^{+\infty}$  má konstantní hustotu stavů rovnu 2. Toto je konzistentní s faktem, že v případě konstantní průměrné hustoty  $\bar{\sigma}(k) = \sigma_0$  je její převrácená hodnota rovna průměrné vzdálenosti mezi sousedními členy posloupnosti  $\{k_j\}_{j=1}^{+\infty}$ :

$$\frac{1}{\sigma_0} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} (k_{j+1} - k_j) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{k_N - k_1}{N-1}. \quad (3.23)$$

Jestliže platí (3.19), můžeme použít vyjádření (3.21). Po dosazení do (3.23) dostaneme

$$\frac{1}{\sigma_0} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\frac{N}{2} - \frac{1}{4} + \delta_j - k_1}{N-1} = \frac{1}{2}.$$

### 3.3 Numerické výpočty

V této části budeme prezentovat výsledky, které jsme obdrželi numerickým řešením sekulární rovnice. Všechny numerické výpočty jsme prováděli v programu MATLAB.

Pro většinu výpočtů jsme polohy  $n$  bodových interakcí volili tak, aby vzdálenost mezi sousedními body  $x_{i+1} - x_i$  byla úměrná druhé odmocnině z  $i$ -tého prvočísla  $p_i$ . Při označení  $p_0 = 1$  jsme konkrétně brali

$$x_i = \frac{2\pi \sum_{j=0}^{i-1} \sqrt{p_j}}{\sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{p_j}} - \frac{\pi}{\sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{p_j}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.24)$$

Prvky  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{p_{n-1}}, \pi$  jsou pro každé  $n \in \mathbb{N}$  racionálně nezávislá čísla. Z toho plyne, že  $x_k, k = 1, \dots, n$  určené vztahem (3.24) spolu s  $\pi$ , tvoří množinu racionálně nezávislých iracionálních čísel.

Zkoumali jsme také případy jiných voleb pozic  $x_i$  bodových interakcí při zachování podmínky racionální nezávislosti a iracionality. Ukazuje se, že při totožných hodnotách parametrů  $n$ ,  $\alpha$  a  $\phi$  zůstávají statistické charakteristiky stejné jako ve výše uvedeném případě. Proto zde budeme uvádět především výsledky odpovídající této volbě pozic bodových interakcí. Pokud v následující analýze nebude výslovně uvedeno jiné rozložení bodových interakcí, použili jsme právě volbu (3.24).

Pro každý výběr parametrů  $\alpha$  a  $\phi$  jsme spočetli prvních  $N$  členů posloupnosti  $\{k_j\}_{j=1}^N$ . U této posloupnosti nejprve určíme následující:

- Na základě vztahu (3.21) sestrojíme posloupnost  $\{d_j\}_{j=1}^N$ , která vyjadřuje odchylku od rovnoměrného rozdělení. Zobrazíme rozdělení  $d_j$  a spočítáme jeho střední hodnotu.
- Zobrazíme rozdělení normovaných vzdáleností mezi sousedními členy posloupnosti. To znamená rozdělení posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  dané vztahem

$$s_j = 2(k_{j+1} - k_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.25)$$

Faktor 2 představuje vydělení průměrnou vzdáleností mezi sousedními členy, což je ekvivalentní vynásobení průměrnou hustotou stavů  $\sigma_0 = 2$ .

Rozdělení posloupnosti většinou zobrazujeme pomocí histogramu. Jestliže body  $\tilde{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  tvoří okraje intervalů, jejichž sjednocení obsahuje všechny hodnoty posloupnosti  $\{x_j\}_{j=1}^N$ , tak histogram zavedeme jako funkci  $h_N(x)$  danou vztahem

$$h_N(x) = \frac{1}{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i} \int_{\tilde{x}_i}^{\tilde{x}_{i+1}} f_N(t) dt, \quad x \in (\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}),$$

kde  $f_N(x)$  je empirická hustota rozdělení posloupnosti  $\{x_j\}_{j=1}^N$  určená vztahem (3.4).

Uvažujme nyní triviální případ  $\phi = \frac{m\pi}{n}$ , kde  $m \in \{0, \dots, 2n-1\}$  a  $\alpha = 1$ . V takovém případě je kladné spektrum degenerované. Pro  $m$  sudé nebo  $m = 0$  navíc 0 náleží do spektra. Posloupnost  $\{k_j\}$  potom vypadá

$$k_1 = 0, \quad k_{2j} = k_{2j+1} = j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Pro  $m$  liché má posloupnost  $\{k_j\}$  následující tvar

$$k_{2j-1} = k_{2j} = j - \frac{1}{2}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Příslušná posloupnost  $\{d_j\}$  je vždy oscilující. Pro libovolná  $m$  můžeme její členy vyjádřit jako

$$d_j = \frac{(-1)^{j+m}}{4}.$$

S rostoucím  $\alpha$  dochází k rozštěpení příslušných degenerovaných hladin. Ukazuje se, že toto štěpení má zajímavé statistické vlastnosti. Z posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  vybereme členy s lichými indexy pro  $m$  liché resp. sudými pro  $m$  sudé nebo 0. Tyto členy představují právě vzdálenosti mezi sousedními členy  $k_j$  a  $k_{j+1}$ , které byly pro  $\alpha = 1$  totožné. Tuto vybranou posloupnost označme jako  $\{s_{n(i)}\}_{i=1}^M$ . Pro  $m$  sudé nebo 0 je zřejmě  $n(i) = 2i$  a  $M = \lceil (N-1)/2 \rceil$ , pro  $m$  liché  $n(i) = 2i-1$  a  $M = \lfloor N/2 \rfloor$ , kde  $\lceil a \rceil$  značí celou část čísla  $a$ . Z této posloupnosti vytvoříme normovanou posloupnost  $\{\tilde{s}_i\}_{i=1}^M$ ,

$$\tilde{s}_i = \frac{M}{\sum_{j=1}^M s_{n(j)}} s_{n(i)}, \quad i = 1, \dots, M, \quad (3.26)$$

která má střední hodnotu rovnou 1.

Pro výše uvedené hodnoty parametru  $\phi$  budeme zkoumat rozdělení vybrané posloupnosti  $\{\tilde{s}_j\}_{j=1}^M$ . Toto rozdělení budeme porovnávat se statistikou level spacing gaussovského ortogonálního souboru náhodných matic. Vizuální porovnání provádíme proložení histogramu křivkou  $f_W(s)$  reprezentující hustotu pravděpodobnosti Wignerova rozdělení

$$f_W(s) = \frac{\pi s}{2} e^{-s^2\pi/4}. \quad (3.27)$$

Wignerovo rozdělení představuje pouze aproximaci skutečného rozdělení level spacing. V souladu s dodatkem B.2.3 vyneseme pro porovnání do stejného grafu také několik tabulkových hodnot skutečného rozdělení. Tyto hodnoty jsou v grafech vyznačeny symbolem  $*$ .

Kvalitativní porovnání provedeme výpočtem odchylek empirické distribuční funkce od distribuční funkce statistiky level spacing a její aproximace dané Wignerovým rozdělením. Empirická distribuční funkce  $F_N(s)$  posloupnosti  $\{\tilde{s}_j\}_{j=1}^M$  je dána vztahem (3.4). Distribuční funkci statistiky level spacing dostatečně přesně aproximujeme funkcí  $F_{\text{GOE}}(s)$  určenou výrazem (B.60). Distribuční funkce Wignerova rozdělení je

$$F_W(s) = 1 - e^{-s^2\pi/4}.$$

Příslušné odchylky definujeme vztahy

$$\Delta F = \int_0^{+\infty} (F_N(s) - F_{\text{GOE}}(s))^2 ds, \quad (3.28)$$

$$\Delta F_W = \int_0^{+\infty} (F_N(s) - F_W(s))^2 ds. \quad (3.29)$$

Při námi použité aproximaci distribuční funkce  $F_{\text{GOE}}(s)$  je odchylka mezi Wignerovým a přesným rozdělením rovna

$$\int_0^{+\infty} (F_{\text{GOE}}(s) - F_W(s))^2 ds = 3,9280 \cdot 10^{-5}.$$

### 3.3.1 Výsledky

Grafy sestavené z provedených výpočtů se nacházejí v příloze D. Vypočtené hodnoty průměru  $\bar{d}$  a odchylek  $\Delta F$  a  $\Delta F_W$  jsou uvedeny v tabulce 3.1. Na obrázcích D.1 až D.3 jsou vyneseny příklady rozdělení posloupnosti  $\{d_j\}_{j=1}^N$ , na obrázcích D.4 až D.8 jsou vyneseny rozdělení posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  a na obrázcích D.9 až D.13 jsou vyneseny rozdělení posloupnosti  $\{\tilde{s}_j\}_{j=1}^M$ .

Je patrné, že rozdělení  $d_j$  je vždy symetrické a střední hodnota  $\bar{d}$  se blíží k nule přibližně jako  $1/N$ . Rozdělení posloupnosti vzdáleností rozštěpených hodnot se pro hodnoty parametru  $\phi = 0$  a  $\alpha \sim 1$  velmi podobá rozdělení statistiky level spacing gaussovského ortogonálního souboru náhodných matic. Efekt, kdy dochází k odpuzování energetických hladin tímto způsobem, bývá typický pro kvantové chaotické systémy. V našem systému se tento efekt projevuje pouze odpuzováním hladin, které byly v nepřítomnosti interakce ( $\alpha = 1$ ) degenerované. Je vhodné si uvědomit, že na základě výsledků z části (3.2) existuje jistá maximální hodnota posloupnosti  $\{\tilde{s}_j\}_{j=1}^M$ . To znamená, že rozdělení této posloupnosti nemůže nikdy přesně odpovídat teorii náhodných matic, která předpovídá nenulovou pravděpodobnost výskytu libovolně velkých vzdáleností sousedních hodnot.

Pro hodnoty  $\alpha$  velmi blízké 1 jsme pozorovali, že rozdělení posloupnosti  $\{\tilde{s}_j\}_{j=1}^M$  je blíže Wignerovu rozdělení, než skutečnému rozdělení statistiky level spacing gaussovského ortogonálního souboru,  $\Delta F_W < \Delta F$ . S rostoucí hodnotou parametru  $\alpha$  dochází k zmenšování odchylky od skutečné statistiky level spacing a naopak k

Tabulka 3.1: Shrnutí numerických výsledků pro různé hodnoty parametrů systému.

$n$	$\alpha$	$\phi$	$N$	$\bar{d}$	$\Delta F$	$\Delta F_W$
5	$\sqrt{3}$	0	$5 \cdot 10^6$	$1,94 \cdot 10^{-8}$	$7,2639 \cdot 10^{-5}$	$3,1026 \cdot 10^{-5}$
7	0,2	0	$1 \cdot 10^5$	$1,69 \cdot 10^{-5}$	$7,2937 \cdot 10^{-3}$	$8,3671 \cdot 10^{-3}$
7	1,3	0	$1 \cdot 10^5$	$2,37 \cdot 10^{-6}$	$2,0731 \cdot 10^{-4}$	$7,1989 \cdot 10^{-5}$
7	1,5	0	$1 \cdot 10^5$	$4,06 \cdot 10^{-6}$	$9,9608 \cdot 10^{-5}$	$1,8456 \cdot 10^{-5}$
7	$\sqrt{3}$	0	$1 \cdot 10^6$	$2,78 \cdot 10^{-7}$	$1,2172 \cdot 10^{-5}$	$1,0967 \cdot 10^{-5}$
7	1,8	0	$1 \cdot 10^5$	$6,40 \cdot 10^{-6}$	$3,3802 \cdot 10^{-6}$	$3,1630 \cdot 10^{-5}$
7	1,9	0	$1 \cdot 10^5$	$7,10 \cdot 10^{-6}$	$9,5572 \cdot 10^{-6}$	$7,8929 \cdot 10^{-5}$
9	1,001	0	$5 \cdot 10^5$	$8,31 \cdot 10^{-9}$	$2,1317 \cdot 10^{-4}$	$7,5005 \cdot 10^{-5}$
9	1,1	0	$1 \cdot 10^6$	$1,15 \cdot 10^{-7}$	$2,0637 \cdot 10^{-4}$	$7,0923 \cdot 10^{-5}$
9	1,3	0	$1 \cdot 10^5$	$3,07 \cdot 10^{-6}$	$1,5171 \cdot 10^{-4}$	$4,0382 \cdot 10^{-5}$
9	1,6	0	$1 \cdot 10^5$	$5,50 \cdot 10^{-6}$	$2,7098 \cdot 10^{-5}$	$2,7266 \cdot 10^{-6}$
9	$\sqrt{3}$	0	$2 \cdot 10^6$	$1,93 \cdot 10^{-7}$	$3,6103 \cdot 10^{-7}$	$3,4998 \cdot 10^{-5}$
9	1,9	0	$1 \cdot 10^5$	$7,08 \cdot 10^{-6}$	$3,6626 \cdot 10^{-5}$	$1,4456 \cdot 10^{-4}$
9	2,5	0	$1 \cdot 10^5$	$8,81 \cdot 10^{-6}$	$9,1707 \cdot 10^{-4}$	$1,3229 \cdot 10^{-3}$
9	3	0	$1 \cdot 10^5$	$9,56 \cdot 10^{-6}$	$2,3766 \cdot 10^{-3}$	$3,0036 \cdot 10^{-3}$
9	4	0	$1 \cdot 10^5$	$1,03 \cdot 10^{-5}$	$5,8905 \cdot 10^{-3}$	$6,8457 \cdot 10^{-3}$
9	5	0	$1 \cdot 10^6$	$5,85 \cdot 10^{-7}$	$8,4164 \cdot 10^{-3}$	$9,5472 \cdot 10^{-3}$
9	10	0	$2 \cdot 10^6$	$1,18 \cdot 10^{-7}$	$1,8263 \cdot 10^{-2}$	$1,9890 \cdot 10^{-2}$
12	$\sqrt{3}$	0	$1 \cdot 10^6$	$8,09 \cdot 10^{-7}$	$1,9796 \cdot 10^{-5}$	$1,1215 \cdot 10^{-4}$
47	1,001	0	$1 \cdot 10^5$	$1,04 \cdot 10^{-8}$	$4,8006 \cdot 10^{-5}$	$2,4145 \cdot 10^{-6}$
47	1,01	0	$1 \cdot 10^5$	$2,41 \cdot 10^{-6}$	$4,2014 \cdot 10^{-5}$	$3,0285 \cdot 10^{-6}$
47	1,5	0	$1 \cdot 10^5$	$9,39 \cdot 10^{-5}$	$9,5234 \cdot 10^{-4}$	$1,3667 \cdot 10^{-3}$

zvětšování odchylky od Wignerova rozdělení. Pro jistou hodnotu  $\alpha$  se tento proces zastaví a obě odchylky začnou narůstat. Pro větší hodnoty se začnou smazávat rozdíly mezi vzdálenostmi odpovídajícími původně stejným degenerovaným hladinám a vzdálenostmi mezi sousedními původně různými degenerovanými hladinami.

Hodnota parametru  $\alpha$ , na které dochází k výše popsanému obratu, nejspíše závisí na počtu bodových interakcí. Nejvíce simulací jsme prováděli pro devět interakcí a v tomto případě byla spočtená odchylka  $\Delta F$  nejmenší pro  $\alpha = \sqrt{3}$ .

Z tvaru okrajových podmínek (2.6) je zřejmé, že pro  $\alpha \rightarrow +\infty$  (podobně  $\alpha \rightarrow 0$ , přičemž spektra se mění stejně) dochází ke vzniku Neumannových podmínek na jednom konci a Dirichletových podmínek na druhém konci každého z intervalů  $(x_k, x_{k+1})$ . To znamená, že jednotlivé úseky mezi interakcemi se separují do nezávislých podsystémů a celkové spektrum je potom tvořeno sjednocením spekter těchto podsystémů.

Z obrázků D.7 a D.8 je patrné, že v případě kdy je pro  $\alpha = 1$  spektrum nede-  
generované, vykazuje rozdělení sousedních vzdáleností vlastnosti odlišné od teorie  
náhodných matic.

### 3.4 Poruchový výpočet

Zabýváme se nyní případem  $\alpha \approx 1$  a  $\phi = 0$ . Ukážeme způsob, jakým je možno  
dospět k výsledkům pro rozdělení vzdáleností původně degenerovaných hodnot,  
které jsme vysledovali na základě numerických výpočtů.

Uvažujme malou poruchu  $\delta \ll 1$ , o kterou se  $\alpha$  liší od 1.

$$\alpha = 1 - \delta$$

Na základě vztahu mezi  $\alpha$  a  $\beta$  dostaneme

$$\beta = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \delta \frac{2 - \delta^2}{2 + 2\delta - \delta^2} \approx \delta.$$

Můžeme tedy zkusit poruchově řešit rovnici (2.25) rozvojem v proměnné  $\beta$ . Budeme předpokládat řešení ve tvaru

$$\kappa_j = j + \beta\lambda_j, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (3.30)$$

Po dosazení dostaneme

$$\cos(2j\pi + 2\pi\beta\lambda_j) - (1 - \beta^2)^{\frac{n}{2}} + \beta^2 \sum_{k < l}^n \cos(2j(x_k - x_l + \pi) + 2\beta\lambda_j(\dots)) + \beta^4 \dots = 0.$$

Kosinus součtu rozepíšeme podle vztahu  $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$  a s využitím periodicity upravíme na

$$\begin{aligned} \cos(2\pi\beta\lambda_j) - (1 - \beta^2)^{\frac{n}{2}} + \beta^2 \sum_{k < l}^n \cos(2j(x_k - x_l)) \cos(2\beta\lambda_j(x_k - x_l + \pi)) - \\ - \beta^2 \sum_{k < l}^n \sin(2j(x_k - x_l)) \sin(2\beta\lambda_j(x_k - x_l + \pi)) + \beta^4 \dots = 0. \end{aligned}$$

Nyní provedeme rozvoj funkcí, v jejichž argumentech vystupuje  $\beta$  podle následujících vztahů platných v okolí 0:

$$\begin{aligned} (1 + x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 + \dots, \\ \sin(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \dots, \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Rovnost přejde na

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4\pi^2\beta^2\lambda_j^2}{2} + \dots - 1 + \frac{n}{2}\beta^2 + \beta^2 \sum_{k < l}^n \cos(2j(x_k - x_l)) \left( 1 - \frac{4\beta^2\lambda_j^2(x_k - x_l + \pi)^2}{2} + \dots \right) - \\ - \beta^2 \sum_{k < l}^n \sin(2j(x_k - x_l)) (2\beta\lambda_j(x_k - x_l + \pi) - \dots) + \beta^4 \dots = 0. \end{aligned}$$

Absolutní členy se odečtou. Porovnáním koeficientů u  $\beta^2$  obdržíme rovnici

$$-2\pi^2\lambda_j^2 + \frac{n}{2} + \sum_{k < l}^n \cos(2j(x_k - x_l)) = 0.$$

Po úpravě dostáváme kvadratickou rovnici určující  $\lambda_j$  do 2. řádu v  $\beta$

$$\lambda_j^2 = \frac{n}{4\pi^2} + \sum_{k < l}^n \frac{1}{2\pi^2} \cos(2j(x_k - x_l)).$$

Uvážíme-li, že kosinus je sudá funkce můžeme předchozí výsledek přepsat do tvaru

$$\lambda_j^2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k, l=1}^n \cos(2j(x_k - x_l)). \quad (3.31)$$

Podívejme se, jestli je pravá strana nezáporná a rovnice má řešení. Opět roze-  
píšeme kosinus součtu,

$$\lambda_j^2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k,l=1}^n \cos(2jx_k) \cos(2jx_l) + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k,l=1}^n \sin(2jx_k) \sin(2jx_l).$$

Dvojné sumy můžeme vyjádřit pomocí součinu sum a získat vztah

$$\lambda_j^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left( \sum_{k=1}^n \cos(2jx_k) \right)^2 + \frac{1}{4\pi^2} \left( \sum_{k=1}^n \sin(2jx_k) \right)^2. \quad (3.32)$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že můžeme odmocnit a obdržet tak pro každé  $j$  dva  
reálné kořeny této rovnosti. Maximální hodnota  $\lambda_j$  je omezena číslem  $\frac{n}{\sqrt{2}\pi}$ . Řešení  
rovnice (3.32) můžeme zapsat jako

$$\lambda_j^\pm = \pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left( \sum_{k=1}^n \cos(2jx_k) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n \sin(2jx_k) \right)^2}. \quad (3.33)$$

Posloupnost  $\{k_j\}_{j=1}^{+\infty}$  řešení sekulární rovnice  $\zeta_P(k) = 0$  je zřejmě v následujícím  
vztahu s posloupností  $\{\kappa_j\}_{j=1}^{+\infty}$ :

$$k_1 = |\beta| \frac{n}{2\pi}, \quad k_{2j} = j + |\beta| \lambda_j^-, \quad k_{2j+1} = j + |\beta| \lambda_j^+. \quad (3.34)$$

Prvky posloupnosti vzdáleností  $\{\tilde{s}_j\}$  mezi sousedními členy původně degenero-  
vaných hodnot jsou tedy

$$\tilde{s}_j = C(k_{2j+1} - k_{2j}) = 2C |\beta| \lambda_j^+,$$

kde  $C$  je příslušná normovací konstanta. Toto můžeme po dosazení z (3.33) zapsat  
jako

$$\tilde{s}_j \sim y_j \equiv \sqrt{\frac{2}{n}} \sqrt{\left( \sum_{k=1}^n \cos(2jx_k) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n \sin(2jx_k) \right)^2}. \quad (3.35)$$

Budeme se zabývat rozdělením posloupnosti  $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$ . Polohy bodových interakcí  
 $x_i$  spolu s číslem  $\pi$  jsou iracionální racionálně nezávislá čísla. To znamená, že  $x_i/\pi$   
jsou racionálně nezávislá iracionální čísla. Vzhledem k periodicitě funkce kosinus  
můžeme napsat

$$\cos(2kx_i) = \cos(2kx_i \bmod 2\pi) = \cos(2\pi((kx_i/\pi) \bmod 1)), \quad (3.36)$$

kde funkce  $\bmod$  značí zbytek po celočíselném dělení. Konkrétně platí  $x \bmod 1 =$   
 $x - [x]$ , kde  $[x]$  je celá část  $x$ .

Studium rozdělení posloupností typu  $a_n \bmod 1$  se zabývá teorie rovnoměrných  
rozdělení modulo 1 (uniform distribution modulo one) jejíž výsledky jsou shrnuty  
například v knize [12]. Lze ukázat<sup>2</sup>, že pro  $\theta$  iracionální je posloupnost  $(\theta k) \bmod 1$   
rovnoměrně rozdělená v intervalu  $[0, 1)$ . Členy posloupnosti se tedy chovají jako rea-  
lizace náhodné veličiny s hustotou pravděpodobnosti rovnou charakteristické funkci  
 $\chi_{[0,1)}(x)$  intervalu  $[0, 1)$ .

Protože  $x_i/\pi$  jsou iracionální čísla, je posloupnost  $(2\pi((kx_i/\pi) \bmod 1))$  pro  
každé  $i = 1, \dots, n$  rovnoměrně rozdělená v intervalu  $[0, 2\pi)$  s hustotou rozdělení

<sup>2</sup>Viz kapitola 1: Příklad 2.1 v [12]

$\chi_{[0,2\pi)}(x)/2\pi$ . S využitím rovnosti (3.36) a využitím věty (C.1.2) zjistíme, že je rozdělení posloupnosti  $\{\cos(2kx_i)\}_{k=1}^{+\infty}$  charakterizováno hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 1), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1). \end{cases}$$

Úplně stejné rozdělení má zřejmě posloupnost  $\{\sin(2kx_i)\}_{k=1}^{+\infty}$ . Střední hodnota tohoto rozdělení je zřejmě 0. Rozptyl snadno určíme jako  $1/2$ .

Protože  $x_i/\pi$  a 1 jsou racionálně nezávislá čísla, platí podle příkladu 6.3 v kapitole 1 knihy [12], že posloupnost  $\{(jx_1/\pi, jx_2/\pi, \dots, jx_n/\pi)\}_{j=1}^{+\infty}$  v  $\mathbb{R}^n$  je rovnoměrně rozdělena v  $n$  rozměrném intervalu  $[0, 1) \times [0, 1) \times \dots \times [0, 1)$ . Z toho plyne, že posloupnosti  $\cos(2jx_k)$  můžeme brát jako statisticky nezávislé.

Rozdělení posloupnosti součtů  $\{\sum_{k=1}^n \cos(2jx_k)\}_j$  normované faktorem  $\sqrt{2}/\sqrt{n}$  potom podle centrálního limitního teoremu C.3.1 z teorie pravděpodobnosti konverguje s rostoucím  $n$  k normálnímu rozdělení. Stejně tak rozdělení součtů  $\{\sum_{k=1}^n \sin(2jx_k)\}_j$ .

V případě že by tyto dvě posloupnosti byly statisticky nezávislé, pak by měla posloupnost  $\{y_j\}_j$  pro dostatečně vysoká  $n$  rozdělení dané odmocninou ze součtu dvou čtverců veličin s normálním rozdělením. Toto rozdělení je podle definice C.2.2 rozdělení  $\chi$  s parametrem  $r = 2$ . Posloupnost  $\{\sqrt{2/\pi}y_j\}_{j=1}^{+\infty}$  by potom měla právě Wignerovo rozdělení.

Ačkoli je předpoklad nezávislosti zjevně nesprávný, je předpovězené chování dostatečně robustní a zůstává ve velmi přesné platnosti již pro relativně nízká  $n$ , což potvrzují provedené numerické výpočty. Hodnoty vypočtených odchylek  $\Delta F_W$  rozdělení prvních 500000 členů posloupnosti  $\{\sqrt{2/\pi}y_j\}_{j=1}^{+\infty}$  pro různá  $n$  jsou uvedeny v tabulce 3.2.

Tabulka 3.2: Odchylky  $\Delta F_W$ , určené vztahem (3.29), prvních 500000 členů posloupnosti  $\{\sqrt{2/\pi}y_j\}_{j=1}^{+\infty}$  od Wignerova rozdělení.

$n$	$\Delta F_W$
2	0,0133
3	0,0022
4	$8,961 \cdot 10^{-4}$
5	$4,729 \cdot 10^{-4}$
10	$1,065 \cdot 10^{-4}$
20	$2,448 \cdot 10^{-5}$
50	$3,113 \cdot 10^{-6}$

Přesné rozdělení posloupnosti  $\{\sqrt{2/\pi}y_j\}_{j=1}^{+\infty}$  pro každé  $n$  bychom teoreticky mohli určit na základě věty (C.1.2). Výpočet je však velmi komplikovaný.

### 3.5 Porovnání s modelem na úsečce

Pro porovnání se podívejme na spektrum systému na úsečce při stejných parametrech  $\alpha$  a  $\phi$  bodových interakcí lokalizovaných ve stejných bodech jako u modelu na kružnici. Zajímají nás statistické vlastnosti, a proto vynecháváme zápornou část spektra, která obsahuje pouze konečný počet prvků.

Sekulární rovnice  $\zeta_D(k) = 0$ , daná vztahem (2.45), je stejného typu jako u modelu na kružnici. Proto můžeme na základě stejných úvah jako v části 3.2 ukázat, že posloupnost kořenů sekulární rovnice má konstantní hustotu stavů rovnu 2. Nejvhodnější proložení empirické distribuční funkce posloupnosti  $\{k_j\}_{j=1}^N$  je v tomto



případě reprezentováno přímkou

$$\bar{F}_N(k) = \frac{2}{N}k - \frac{1}{2N}. \quad (3.37)$$

To znamená, že při studiu statistických vlastností spektra se můžeme opět ekvivalentně zabývat posloupností  $\{k_j\}_{j=1}^{+\infty}$  kladných kořenů rovnice  $\zeta_D(k) = 0$ . Kořeny  $k_j$  můžeme opět vyjádřit pomocí posloupnosti  $\{d_j\}$  se střední hodnotou rovnou 0 jako

$$k_j = \frac{j}{2} + \delta_j, \quad \delta_j \in (-(m+1)/4, (m+1)/4), \quad (3.38)$$

kde  $m$  charakterizuje splnění podmínky analogické k (3.18). Pro model na úsečce přechází do tvaru

$$\sum_k^n \beta \frac{|x_k - \pi|^m}{\pi^m} + \sum_{k<l}^n \beta^2 \frac{|x_k - x_l + \pi|^m}{\pi^m} + \dots < 1. \quad (3.39)$$

Vlastní hodnoty jsou vždy nedegenerované a spektrum nezávisí na parametru  $\phi$ . V případě  $\alpha = 0$  dostaneme  $k_j = j/2$ . Posloupnost  $\{d_j\}_{j=1}^{+\infty}$  je potom konstantně rovná 0.

Podívejme se na výsledky, které jsme získali numerickým výpočtem pro několik vybraných hodnot  $\alpha$ . Polohy  $n$  bodových interakcí  $x_i$  jsme volili totožně s modelem na kružnici vztahem (3.24).

Opět se zaměříme na rozdělení posloupnosti  $\{d_j\}_{j=1}^N$  určené vztahem (3.38) a posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  dané jako

$$s_j = 2(k_{j+1} - k_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.40)$$

Na obrázcích D.14 a D.15 v příloze D jsou zobrazeny ukázky rozdělení  $\{d_j\}_{j=1}^N$ . Na obrázcích D.16 až D.18 jsou potom rozdělení posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  pro různé parametry  $\alpha$  a  $n$  systému, proložené hustotou pravděpodobnosti Wignerova rozdělení.

Z uvedených výsledků se zdá předpoklad nulové střední hodnoty posloupnosti  $\{d_j\}_{j=1}^N$  a tedy konstantní hustoty stavů opět správný. Je také patrné, že rozdělení posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  je jiné než u modelu na kružnici a neodpovídá teorii náhodných matic.

Tento rozdíl je zjevně způsoben neexistencí degenerovaných energetických hladin při nulové interakci. Degenerace hladin u systému na kružnici bez interakce vzniká v důsledku rotační symetrie. Systém na úsečce této symetrii nepodléhá.



# Závěr

V této práci jsme se zabývali speciálním typem bodových interakcí v jednorozměrném kvantovém systému na intervalu  $(0, 2\pi)$ . Po zavedení jedné bodové interakce na kružnici jsme představili speciální typ bodové interakce, určený třídou škálově nezávislých okrajových podmínek.

Dále jsme zkonstruovali model několika bodových interakcí tohoto typu na kružnici, resp. na úsečce. U modelu na kružnici byly kraje intervalu  $(0, 2\pi)$  propojené periodickými okrajovými podmínkami, u modelu na úsečce potom Dirichletovými okrajovými podmínkami.

Potom jsme zkoumali spektra těchto dvou systémů. Ukázali jsme, že oba dva systémy mají čistě bodové spektrum maximálně dvojnásobně degenerované. Pomocí metody matic navázání jsme dokázali explicitně napsat sekulární rovnice určující vlastní čísla obou systémů.

V poslední kapitole jsme se zabývali porovnáním statistických vlastností spektra modelu na kružnici s předpovědi teorie náhodných matic. Připomněli jsme teorii, ze které plyne, že kořeny sekulární rovnice mají konstantní lokální hustotu stavů rovnou 2. Tento fakt znamená, že unfoldované hodnoty energie jsou rovny dvojnásobku hodnot kořenů sekulární rovnice. Numericky jsme spočetli a analyzovali prvních několik stovek tisíc členů posloupnosti kořenů sekulární rovnice pro různé hodnoty parametrů interakce  $\alpha$  a  $\phi$ . Ukazuje se, že rozdělení vzdálenosti původně degenerovaných vlastních hodnot, resp. odpovídajících kořenů sekulární rovnice, se pro malé hodnoty parametru interakce  $\alpha$  velmi blíží rozdělení vzdáleností sousedních vlastních čísel gaussovského ortogonálního souboru náhodných matic (GOE). Pro  $\alpha \rightarrow 1$  se rozdělení přibližuje k Wignerovu rozdělení, které představuje velmi dobrou aproximaci rozdělení statistiky level spacing a zároveň přesné rozdělení vzdáleností sousedních vlastních čísel souboru ortogonálních matic  $2 \times 2$ . Odpovídající odchylky pro různé numerické experimenty jsou uvedeny v tabulce 3.1.

Pro hodnoty parametru  $\alpha \rightarrow 1$ , kdy jsme na numerických výsledcích pozorovali největší přiblížení k Wignerovu rozdělení, jsme provedli poruchový výpočet do druhého řádu v  $\beta = (1 - \alpha^2)/(1 + \alpha^2)$ . Výsledky tohoto výpočtu opět ukazují na oprávněnost úvahy o shodě s Wignerovým rozdělení. Analyticky korektní výsledek se nám však získat nepodařilo.

Pro porovnání jsme se zabývali také případy, kdy hodnota parametru  $\phi$  neumožňuje pro  $\alpha = 1$  vznik degenerovaných hladin a spektrem modelu na přímce, které je vždy nedegenerované. Zde jsou numericky získané statistiky odlišné od teorie náhodných matic.

Při rozštěpování původně degenerovaných hladin, kdy dochází k porušení rotační symetrie systému, se objevuje odpuzování sousedních původně degenerovaných vlastních hodnot typické pro chaotické systémy. Při větších poruchách se toto chování opět ztrácí.

Důležitou vlastností tohoto modelu je jeho řešitelnost. Jsme schopni spočítat libovolně mnoho vlastních čísel s libovolnou přesností a provést tak podrobné porovnání s teorií náhodných matic. U kvantově chaotických systémů je podobně přesné porovnání neproveditelné.



## Příloha A

# Neomezené operátory na Hilbertově prostoru

V této kapitole shrneme některé poznatky z teorie neomezených operátorů na Hilbertově prostoru. Budeme se zabývat především teorií samosdružených rozšíření symetrických operátorů. Konstrukci samosdružených rozšíření ukážeme v kontextu okrajových podmínek tak, jak je provedena v [7]. Tento způsob je v případě diferenciálních operátorů vhodnější než obvyklý přístup končící určením definičního oboru symetrických (samosdružených) rozšíření pomocí defektních podprostorů (např. [10], [6]). Většinu vyslovených tvrzení nebudeme dokazovat, pouze odkážeme na odpovídající tvrzení v klasické literatuře.

### A.1 Úvod

Mějme Hilbertův prostor  $\mathcal{H}$  se skalárním součinem  $(x, y)$ , který uvažujeme lineární v pravém a antilineární v levém argumentu. Definiční obor lineárního operátoru  $T : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$  značíme symbolem  $D(T)$  a obor hodnot symbolem  $\text{Ran } T$ . Jádru operátoru  $T$ , neboli množinu  $\{x \mid x \in D(T), Tx = 0\}$ , značíme symbolem  $\text{Ker } T$ . Jednotkový operátor značíme symbolem  $I$ . Dále se budeme zabývat především operátory, jejichž definiční obor je hustá podmnožina  $\mathcal{H}$  a platí tedy  $\overline{D(T)} = \mathcal{H}$ . Takovéto operátory nazýváme **hustě definované**. Množinu všech hustě definovaných operátorů na  $\mathcal{H}$  značíme symbolem  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Symbolem  $\overline{M}$  jsme označili uzávěr množiny  $M \subset \mathcal{H}$  vzhledem k topologii na  $\mathcal{H}$  indukované skalárním součinem. Ortogonální doplněk množiny  $M$  je tvořen vektory v  $\mathcal{H}$ , které jsou kolmé na všechny vektory v  $M$ , a značíme ho symbolem  $M^\perp$ .

Operátory  $T$  a  $U$  se rovnají (značíme  $T = U$ ) právě, když  $D(T) = D(U)$  a  $Tx = Ux$  pro všechna  $x \in D(T)$ . Operátor  $T$  je **zúžením** operátoru  $U$  (značíme  $T \subseteq U$ ) právě, když  $D(T) \subseteq D(U)$  a  $Tx = Ux$  pro všechna  $x \in D(T)$ . Rozšíření je definováno analogicky. Omezenost operátoru zavádíme standardním způsobem, tzn. operátor  $T$  se nazývá **omezený**, pokud je  $\sup \|Tx\|$  přes všechna  $x \in D(T)$ ,  $\|x\| = 1$  konečné, v opačném případě se nazývá **neomezený**. Množinu všech omezených operátorů definovaných na celém  $\mathcal{H}$  značíme symbolem  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . **Graf**  $\Gamma(T)$  **operátoru**  $T$  je podmnožina  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  definovaná jako

$$\Gamma(T) = \{[x, Tx] \mid x \in D(T)\}.$$

Množina  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  tvoří Hilbertův prostor vzhledem k skalárnímu součinu

$$([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2).$$

$T$  se nazývá **uzavřený operátor** právě, když  $\Gamma(T)$  je uzavřená podmnožina  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ . Operátor se nazývá **uzavíratelný**, jestliže má uzavřené rozšíření. Nejmenší uzavřené rozšíření operátoru  $T$  se nazývá **uzávěr** a značí symbolem  $\bar{T}$ .

Pro uzavřený operátor  $T$  definujeme **resolventní množinu**  $\rho(T)$  jako množinu všech komplexních čísel  $\lambda$  takových, že operátor  $(\lambda I - T)$  je bijekce  $D(T)$  na  $\mathcal{H}$  a inverzní operátor  $(\lambda I - T)^{-1}$  je omezený. Pro  $\lambda \in \rho(T)$  zavádíme značení  $R(\lambda; T)$  pro operátor  $(\lambda I - T)^{-1}$ , který nazýváme **resolventou** operátoru  $T$ . **Spektrum**  $\sigma(T)$  operátoru  $T$  zavádíme jako doplněk resolventní množiny,  $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ . Ve standardním významu dále provádíme rozdělení  $\sigma(T)$  na **bodové spektrum**  $\sigma_p(T)$  ( $(\lambda I - T)$  není prosté), **spojité spektrum**  $\sigma_c(T)$  ( $\text{Ran}(\lambda I - T)$  je hustý v  $\mathcal{H}$ ) a **reziduální spektrum**  $\sigma_r(T)$  ( $\text{Ran}(\lambda I - T)$  není hustý v  $\mathcal{H}$ ). Elementy bodového spektra  $\sigma_p(T)$  nazýváme **vlastní čísla** a nenulové vektory z  $\text{Ker}(\lambda I - T)$  **vlastní vektory**. Je zřejmé, že spektrum můžeme zapsat jako sjednocení tří disjunktních množin:

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Základní vlastnosti resolventní množiny a resolventy můžeme shrnout do následující věty:

**Tvrzení A.1.1.** *Nechť  $T$  je uzavřený operátor. Potom resolventní množina  $\rho(T)$  je otevřená podmnožina komplexní roviny a resolventa  $R(\lambda; T)$  je analytická funkce v proměnné  $\lambda$ , která splňuje resolventní rovnost*

$$R(\lambda; T) - R(\mu; T) = (\mu - \lambda)R(\lambda; T)R(\mu; T),$$

kde  $\lambda, \mu \in \rho(T)$ .

*Důkaz.* Viz Lemma XII.1.3 v [7], Theorem VIII.2 v [9]. □

Pro hustě definovaný lineární operátor  $T$  na Hilbertově prostoru  $\mathcal{H}$  zavádíme operátor  $T^*$  následujícím způsobem. Označme jako  $D(T^*)$  množinu

$$D(T^*) = \{x \in \mathcal{H} \mid \exists z \in \mathcal{H}, (x, Ty) = (z, y), \forall y \in D(T)\}. \quad (\text{A.1})$$

Pro  $x \in D(T^*)$  definujeme  $T^*x = z$ . Lineární operátor  $T^*$  nazýváme **sdužený operátor** k operátoru  $T$ . Následující věta shrnuje některé vlastnosti sdužených operátorů.

**Tvrzení A.1.2.** *Nechť  $T$  je hustě definovaný lineární operátor. Potom*

- (a)  $T^*$  je uzavřený.
- (b) Pokud  $T^{-1}$  existuje a je hustě definován, pak existuje  $i(T^*)^{-1}$  a platí  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .
- (c)  $\text{Ker } T^* = (\text{Ran } T)^\perp$
- (d) Nechť  $S$  je hustě definovaný operátor takový, že  $S \subseteq T$ . Potom platí  $T^* \subseteq S^*$ .
- (e) Nechť  $S$  je omezený operátor a  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Potom  $(\alpha T + S)^* = \bar{\alpha}T^* + S^*$ .

*Důkaz.* Viz Lemma XII.1.6 a XII.4.1 v [7], Theorem VIII.1 v [9], Tvrzení 7.1.2 a 7.1.3 v [6]. □

Úvodní část zakončíme definicí symetrického a samosduženého operátoru. Hustě definovaný lineární operátor  $T$  na Hilbertově prostoru  $\mathcal{H}$  se nazývá **symetrický**, jestliže  $T \subseteq T^*$ . Operátor  $T$  je tedy symetrický právě tehdy, když platí  $(Tx, y) = (x, Ty)$  pro všechna  $x, y \in D(T)$ . Symetrický operátor se nazývá **samosdužený**, jestliže  $T = T^*$ .

Samosdružený operátor je tedy uzavřený. Symetrický operátor  $T$  nazýváme operátorem **v podstatě samosdruženým**, jestliže  $\bar{T}$  je samosdružený. Pro úplnost ještě uvedme definici **normálního** operátoru. Je to takový hustě definovaný uzavřený operátor  $T$ , který splňuje  $T^*T = TT^*$ . Je zřejmé, že každý samosdružený operátor je normální.

Na závěr úvodní části připomeneme ještě dva typy operátorů. Lineární operátor  $T$  definovaný na celém Hilbertově prostoru  $\mathcal{H}$  je **kompaktní**, jestliže obraz  $\{Tx_n\}$  libovolné omezené posloupnosti  $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$  obsahuje konvergentní podposloupnost.

Příkladem kompaktních operátorů jsou tzv. Hilbert-Schmidtovy operátory. Omezený operátor  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  se nazývá **Hilbert-Schmidtův**, jestliže v  $\mathcal{H}$  existuje ortonormální báze  $\mathcal{E}(T) \equiv \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  taková, že  $\sum_{k=1}^{\infty} \|Tx_k\|^2 < \infty$ .

**Věta A.1.3.** *Každý Hilbert-Schmidtův operátor je kompaktní.*

*Důkaz.* Viz Theorem VI.22 v [9], Věta 6.3.2 v [6]. □

V případě Hilbertova prostoru  $L^2(M, d\mu)$ , kde  $(M, \mu)$  je prostor s mírou, platí následující věta

**Věta A.1.4.** *Nechť  $(M, \mu)$  je prostor s mírou. Potom operátor  $T$  na prostoru  $L^2(M, d\mu)$  je Hilbert-Schmidtův právě tehdy, když existuje funkce*

$$K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$$

*tak, že pro všechna  $f \in L^2(M, d\mu)$  platí*

$$(Tf)(x) = \int K(x, y)f(y)d\mu(y).$$

*Navíc*

$$\|T\|^2 = \int |K(x, y)|^2 d\mu(x)d\mu(y).$$

*Důkaz.* Viz Theorem VI.23 v [9], Věta 6.3.6 v [6]. □

## A.2 Spektrální teorie

Nejprve si ukážeme dvě důležité vlastnosti spektra kompaktních operátorů.

**Věta A.2.1.** *(Riesz-Schauder) Nechť  $T$  je kompaktní operátor na  $\mathcal{H}$ . Potom*

- (a) *Každý nenulový bod spektra  $\lambda \in \sigma(T)$  je vlastní číslo,  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ , konečné násobnosti,  $\text{Dim}(\text{Ker}(\lambda I - T)) < \infty$ .*
- (b) *Spektrum má nejvýše jeden hromadný bod  $\lambda = 0$  a to pouze v případě, že dimenze  $\mathcal{H}$  je nekonečná.*
- (c) *Množina vlastních čísel je nejvýše spočetná,  $\sigma_p(T) = \{\lambda_k\}_{k=1}^N$ ,  $N \leq +\infty$ , a lze vždy docílit toho, aby  $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ ,  $k = 1, \dots$  a pokud  $N = +\infty$ , potom  $\lambda_k \rightarrow 0$ .*

*Důkaz.* Viz Theorem VI.15 v [9], Věta 6.2.2 v [6], Theorem III.6.26 v [8]. □

**Věta A.2.2.** *(Hilbert-Schmidt) Nechť  $T$  je kompaktní operátor na  $\mathcal{H}$ . Potom existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory operátoru  $T$ .*

*Důkaz.* Viz Theorem VI.16 v [9], Věta 6.2.4 v [6]. □

Pokud existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory operátoru  $T$ , říkáme, že  $T$  má **čistě bodové spektrum**.

Nyní se budeme zabývat vlastnostmi spektra normálních operátorů. Standardní analýzou<sup>1</sup> lze ukázat, že reziduální část spektra normálního operátoru  $T$  je prázdná,  $\sigma_r(T) = \emptyset$ . V případě samosdružených operátorů platí

**Věta A.2.3.** *Spektrum samosdruženého operátoru  $T$  je reálné a resolventa je normální operátor, kde  $R(\lambda; T)^* = R(\bar{\lambda}; T)$  a*

$$\|R(\lambda; T)\| \leq |\operatorname{Im}(\lambda)|^{-1}, \quad \operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$$

*Důkaz.* Viz Theorem XII.2.3 v [7], Věta 7.3.5 a Důsledek 7.3.6 v [6]. □

Pro uzavřené operátory zavedeme ještě jednu podmnožinu spektra, kterou nazýváme **esenciálním spektrem**, značíme  $\sigma_e(T)$ , a je tvořena takovými  $\lambda \in \mathbb{C}$ , že  $\operatorname{Ran}(\lambda I - T)$  není uzavřený. Ekvivalentně to znamená, že existuje posloupnost jednotkových vektorů  $x_n \in D(T)$ , z níž nelze vybrat konvergentní posloupnost a přitom  $(T - \lambda)x_n \rightarrow 0$ . Platí následující tvrzení.

**Tvrzení A.2.4.** *Nechť  $T$  je uzavřený operátor. Potom platí*

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_e(T) \\ \sigma_c(T) &= \sigma_e(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)) \end{aligned}$$

*Důkaz.* Viz Tvrzení 7.2.8 v [6]. □

Z definice je zřejmé, že pokud je  $\lambda$  vlastním číslem operátoru  $T$ , tak  $\lambda$  náleží do esenciálního spektra  $\sigma_e(T)$  právě tehdy, když násobnost  $\lambda$  je nekonečná, tj  $\dim(\operatorname{Ker}(\lambda I - T)) = \infty$ .

**Věta A.2.5.** *Esenciální spektrum samosdruženého operátoru  $T$  je tvořeno hromadnými body  $\sigma(T)$  a vlastními čísly nekonečné násobnosti.*

*Důkaz.* Viz Theorem XIII.6.5 v [7], Věta 10.4.6 v [6]. □

Buď  $T$  samosdružený operátor. Množinu  $\sigma(T) \setminus \sigma_e(T)$  nazýváme **diskrétním spektrem** a značíme  $\sigma_d(T)$ . Diskrétní spektrum je tedy tvořeno právě vlastními čísly konečné násobnosti. Jestliže  $\sigma_e(T) = \emptyset$ , říkáme, že samosdružený operátor  $T$  má **čistě diskrétní spektrum**. Ze spektrální teorie<sup>2</sup> plyne, že  $\sigma_e(T) = \emptyset$  implikuje existenci ortonormální báze tvořené vlastními vektory, takže každý operátor s čistě diskrétním spektrem má čistě bodové spektrum.

Uvažujme normální operátor  $T$  s kompaktní resolventou  $R(\lambda; T)$  v bodě  $\lambda \in \rho(T)$ . Resolventa  $R(\zeta; T)$  má tedy (viz A.2.1) spektrum tvořené vlastními čísly  $\mu_k$  konečné násobnosti a v případě, že  $T$  je neomezený, také číslem  $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$ . Lze ukázat<sup>3</sup>, že nenulové body spektra  $\mu$  resolventy  $R(\zeta; T)$  souvisejí jednoznačně s body spektra  $\lambda$  operátoru  $T$  vztahem  $\mu = (\zeta - \lambda)^{-1}$ . To tedy znamená, že spektrum  $T$  je tvořeno pouze vlastními čísly  $\lambda_k$ , přičemž  $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ . Z toho plyne  $\sigma_e(T) = \emptyset$ .

**Věta A.2.6.** *Nechť  $T$  je uzavřený operátor na  $\mathcal{H}$  takový, že resolventa  $R(\zeta; T)$  existuje a je kompaktní pro nějaké  $\zeta$ . Potom je spektrum  $T$  tvořeno pouze vlastními čísly konečné násobnosti a  $R(\zeta; T)$  je kompaktní pro všechny  $\zeta \in \rho(T)$ .*

*Důkaz.* Viz Theorem III.6.29 v [8]. □

Další vlastnosti a kritéria pro operátory s kompaktní resolventou jsou rozebírány například v kapitole XIII.14 v [11] nebo v části III-§6.8 v [8].

<sup>1</sup>kapitola 7.3 v [6]

<sup>2</sup>kapitola 10 (10.4.7) v [6] nebo kapitola XII.2 v [7]

<sup>3</sup>Příklad 7.3.7 v [6] nebo části III-§6.8 a V-§3.8 v [8]



### A.3 Rozšíření symetrických operátorů

V této části shrneme výsledky obecné teorie rozšíření symetrických operátorů. Pro každé symetrické (samosdružené) rozšíření  $S$  symetrického operátoru  $T$  platí v důsledku Tvzení A.1.2 vztah

$$T \subseteq S \subseteq S^* \subseteq T^*.$$

Obecné symetrické rozšíření symetrického operátoru  $T$  tedy získáme zúžením  $T^*$  na nějakou vhodně zvolenou podmnožinu  $D(T^*)$ .

Zabýváme se nyní uzavřeností symetrických rozšíření.

**Tvrzení A.3.1.** *Nechť  $T$  je hustě definovaný lineární operátor. Potom*

- (a)  $T$  je uzavíratelný právě, když  $D(T^*)$  je hustý v  $\mathcal{H}$ . V kladném případě platí  $\overline{T} = T^{**}$ .
- (b) Když  $T$  je uzavíratelný, pak  $(\overline{T})^* = T^*$ .

*Důkaz.* Viz Lemma XII.4.8 v [7], Theorem VIII.1 v [9], Tvzení 7.2.4 v [6].  $\square$

Symetrický operátor  $T$  je vždy uzavíratelný, protože  $D(T^*) \supset D(T)$  je hustý v  $\mathcal{H}$ , přičemž platí vztah

$$T \subseteq \overline{T} = T^{**} \subseteq T^*. \quad (\text{A.2})$$

V případě, že  $T$  je samosdružený, dostáváme

$$T = T^{**} = T^*. \quad (\text{A.3})$$

Na základě podobných úvah lze ukázat<sup>4</sup>, že symetrický operátor  $T$  a jeho uzávěr mají stejná uzavřená rozšíření. Při hledání samosdruženého rozšíření symetrického operátoru  $T$  tedy můžeme ekvivalentně vycházet ze symetrických rozšíření  $T$  i  $\overline{T}$ .

Standardní analýza symetrických rozšíření zavádí pojem **defektních podprostorů**, který označuje množiny  $\mathcal{K}_+$  a  $\mathcal{K}_-$  definované následujícím způsobem:

$$\mathcal{K}_+ = \{x \in D(T^*) \mid T^*x = ix\} = \text{Ker}(T^* - iI),$$

$$\mathcal{K}_- = \{x \in D(T^*) \mid T^*x = -ix\} = \text{Ker}(T^* + iI).$$

Čísla  $n_+$  a  $n_-$  označující dimenze defektních podprostorů  $\mathcal{K}_+$  a  $\mathcal{K}_-$  se nazývají **indexy defektu** operátoru  $T$ .

Na lineárním prostoru  $D(T^*)$  definujeme seskvilineární formy:

$$(x, y)^* = (x, y) + (T^*x, T^*y),$$

$$\{x, y\} = -i[(T^*x, y) - (x, T^*y)]$$

Forma  $(x, y)^*$  reprezentuje skalární součin zděděný z  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  při identifikaci  $D(T^*)$  s  $\Gamma(T^*)$  pomocí zobrazení  $x \leftrightarrow [x, T^*x]$ . Protože  $\Gamma(T^*)$  je uzavřený v  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ , tvoří  $D(T^*)$  se skalárním součinem  $(x, y)^*$  Hilbertův prostor.

Podprostor  $D$  prostoru  $D(T^*)$  nazveme **symetrický**, jestliže  $\{x, y\} = 0$  pro každé  $x, y \in D$ . Důležitost tohoto pojmu a struktury Hilbertova prostoru na  $D(T^*)$  ukazuje následující lemma.

**Lemma A.3.2.** *Nechť  $T$  je symetrický operátor. Potom platí*

- (a) *Obecné symetrické rozšíření operátoru  $T$  je dáno zúžením  $T^*$  na symetrický podprostor  $D$  prostoru  $D(T^*)$ , který zahrnuje  $D(T)$ .*

<sup>4</sup>Lemma XII.4.8 v [7]

- (b) zúžení  $S$  operátoru  $T^*$  je uzavřený operátor právě tehdy, když jeho definiční obor  $D(S)$  je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru  $D(T^*)$  (ve smyslu topologie indukované  $(x, y)^*$ ).
- (c)  $D(\overline{T})$ ,  $\mathcal{K}_+$  a  $\mathcal{K}_-$  jsou uzavřené vzájemně ortogonální podprostory Hilbertova prostoru  $D(T^*)$  a platí

$$D(T^*) = D(T) \oplus \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-.$$

- (d) Existuje jednoznačný vztah (bijekce) mezi uzavřenými symetrickými podprostory  $\mathcal{G}$  Hilbertova prostoru  $D(T^*)$ , které zahrnují  $D(\overline{T})$  a uzavřenými symetrickými podprostory  $\mathcal{G}_1$  prostoru  $\mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-$ , určený vztahem  $\mathcal{G} = D(\overline{T}) \oplus \mathcal{G}_1$ .

Důkaz. Viz Lemma XII.4.3-11 v [7], Lemma na str. 138 v [10].  $\square$

Pojmy uzavřenosti a ortogonality v předchozím lemmatu jsou užity ve smyslu skalárního součinu  $(x, y)^*$ .

Obyčejně bývá hledání obecného uzavřeného symetrického rozšíření operátoru  $T$  zakončeno následující větou a jejím důsledkem. Ještě před jejím vyslovením je vhodné zavést pojem izometrického operátoru. Lineární operátor  $U$  na  $\mathcal{H}$  se nazývá **izometrický**, jestliže je definován na celém  $\mathcal{H}$  a  $\|Ux\| = \|x\|$  pro všechna  $x \in \mathcal{H}$ . Operátor  $V$  se nazývá **parciální izometrií**, jestliže jeho zúžení na uzavřený podprostor  $(\text{Ker } V)^\perp$  je izometrický operátor.

**Věta A.3.3.** *Buď  $T$  uzavřený symetrický operátor. Uzavřená symetrická rozšíření  $T$  jsou ve vzájemně jednoznačném vztahu s množinou parciálních izometrií (vzhledem ke skalárnímu součinu na  $\mathcal{H}$ ) podprostoru  $\mathcal{I}$  prostoru  $\mathcal{K}_+$  do  $\mathcal{K}_-$ . Pokud  $U$  je taková izometrie ( $U: \mathcal{I} \mapsto \mathcal{K}_-$ ,  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}_+$ ), pak je příslušné uzavřené symetrické rozšíření  $T_U$  definováno na množině*

$$D(T_U) = \{x + y_+ + Uy_+ | x \in D(T), y_+ \in \mathcal{I}\}$$

vztahem

$$T_U(x + y_+ + Uy_+) = Tx + iy_+ - iUy_+.$$

Jestliže je dimenze podprostoru  $\mathcal{I}$  konečná, jsou indexy defektu operátoru  $T_U$  rovny

$$n_\pm(T_U) = n_\pm(T) - \dim(\mathcal{I}).$$

Důkaz. Viz Theorem X.2 v [10], Věta 8.3.2 v [6].  $\square$

**Důsledek A.3.4.** *Nechť  $T$  je uzavřený symetrický operátor s indexy defektu  $n_+$  a  $n_-$ . Potom platí*

- (a)  $T$  je samosdružený právě tehdy, když  $n_+ = n_- = 0$ .
- (b)  $T$  má samosdružené rozšíření právě tehdy, když  $n_+ = n_-$ . Množina všech samosdružených rozšíření  $T$  je ve vzájemně jednoznačném vztahu s množinou parciálních izometrií  $\mathcal{K}_+$  na  $\mathcal{K}_-$ .
- (c) Jestliže buď  $n_+ = 0 \neq n_-$  nebo  $n_- = 0 \neq n_+$ , pak  $T$  nemá žádné netriviální symetrická rozšíření.

Před tím, než se začneme zabývat určováním definičního oboru symetrických rozšíření pomocí okrajových podmínek, uvedeme ještě jednu užitečnou definici a tvrzení.

**Definice A.3.5.** Zobrazení  $C: \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$  splňující vztahy  $C(\alpha x + y) = \overline{\alpha}Cx + Cy$ ,  $(Cx, Cy) = (y, x)$  pro všechna  $x, y \in \mathcal{H}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  a  $C^2 = I$  nazýváme **operátor konjugace**.

**Věta A.3.6.** *Nechť  $T$  je symetrický operátor, který komutuje s operátorem konjugace  $C$ . Potom  $T$  má stejné indexy defektu, a tudíž existuje samosdružené rozšíření.*

*Důkaz.* Viz Theorem XII.4.18 v [7], Theorem X.3 v [10].  $\square$

Indexy defektu operátoru jsme zavedli jako dimenze vlastních podprostorů příslušejících vlastním číslům  $i$  a  $-i$ . Vzhledem k aplikaci teorie samosdružených rozšíření na diferenciální operátory, je užitečné uvést následující větu, která rozšiřuje pojem indexů defektu.

**Věta A.3.7.** *Buď  $T$  symetrický operátor a pro každé komplexní číslo  $\lambda$  označme  $\mathcal{M}_\lambda = \{x \in D(T^*) \mid T^*x = \lambda x\}$ . Jestliže  $\text{Im } \lambda > 0$ , pak se dimenze  $\mathcal{M}_\lambda$  rovná indexu defektu  $n_+$ . Navíc, v případě, že  $n_+$  je konečné číslo, existuje třída funkcí  $\{\varphi_i(\lambda)\}$ ,  $i = 1, \dots, n_+$  komplexní proměnné s hodnotami v  $\mathcal{H}$  definovaných a analytických pro  $\text{Im } \lambda > 0$  takových, že pro každé  $\lambda$  tvoří vektory  $\varphi_i(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, n_+$  bázi podprostoru  $\mathcal{M}_\lambda$ . Analogické tvrzení platí pro  $\lambda$  v dolní komplexní polorovině a  $n_-$ .*

*Důkaz.* Viz Theorem XII.4.19 v [7].  $\square$

Dále se budeme zabývat případem, kdy oba indexy defektu symetrického operátoru  $T$  jsou konečné. Zavedeme si abstraktní pojem okrajové hodnoty (boundary value), který později v teorii diferenciálních operátorů nabude očekávaného významu.

**Definice A.3.8.** Buď  $T$  symetrický operátor s konečnými indexy defektu  $n_+$  a  $n_-$ . **Okrajovou hodnotou** operátoru  $T$  nazýváme spojitý lineární funkcionál na Hilbertově prostoru  $D(T^*)$ , do jehož jádra patří  $D(T)$ . Množina  $n_+ + n_-$  lineárně nezávislých okrajových hodnot operátoru  $T$  se nazývá **úplnou**.

Následující lemma ukazuje, že seskvilineární forma  $\{x, y\}$  na  $D(T^*)$  může být jednoznačně vyjádřena pomocí libovolné úplné množiny okrajových hodnot.

**Lemma A.3.9.** *Nechť  $T$  je symetrický operátor s konečnými indexy defektu a  $A_1, \dots, A_p$  je nějaká úplná množina okrajových hodnot  $T$ . Potom seskvilineární forma  $\{x, y\}$  může být jednoznačně vyjádřena vztahem*

$$\{x, y\} = \sum_{i,j=1}^p \alpha_{ij} A_i(x) \overline{A_j(y)}, \quad x, y \in D(T^*),$$

kde komplexní koeficienty splňují  $\alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}}$ .

*Důkaz.* Lemma XII.4.23 v [7].  $\square$

Poznamenejme, že symbolem  $\overline{A(x)}$  máme na mysli komplexní sdružení.

**Definice A.3.10.** Nechť  $B$  je okrajová hodnota operátoru  $T$ . Rovnice  $B(x) = 0$  se nazývá **okrajovou podmínkou** (boundary condition). Množina okrajových podmínek  $B_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  se nazývá **lineárně nezávislá**, jestliže jsou okrajové hodnoty  $B_1, \dots, B_k$  lineárně nezávislé. Množina okrajových podmínek  $B_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  je **symetrická**, jestliže pro každé  $x, y \in D(T^*)$  rovnice  $B_i(x) = B_i(y) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  implikují  $\{x, y\} = 0$ . Dvě množiny okrajových podmínek jsou **ekvivalentní**, jestliže lineární obaly příslušných množin okrajových hodnot tvoří stejný podprostor duálního prostoru k  $D(T^*)$ .

Poslední definicí této kapitoly bude definice sdružených okrajových podmínek.

**Definice A.3.11.** Nechť  $T$  je symetrický operátor s konečnými indexy defektu  $n_+$  a  $n_-$ . Nechť  $A_1, \dots, A_p$  je úplná množina okrajových hodnot operátoru  $T$  a  $\{x, y\} = \sum_{i,j=1}^p \alpha_{ij} A_i(x) \overline{A_j(y)}$  je vyjádření z Lemma A.3.9. Nechť

$$B_j = \sum_{i=1}^p \beta_{ij} A_i, \quad j = 1, \dots, s \quad (\text{A.4})$$

je dále libovolná množina (libovolná lineární kombinace) okrajových hodnot operátoru  $T$ . Bázi řešení systému lineárních rovnic  $\sum_{i=1}^p \beta_{ij} \xi_i = 0$ ,  $j = 1, \dots, s$  označme  $\xi_i^{(m)}$ ,  $m = 1, \dots, t$ . Potom množinu okrajových podmínek

$$\sum_{i,j=1}^p \alpha_{ij} \overline{\xi_j^{(m)}} A_i(y) = 0, \quad m = 1, \dots, t$$

nazýváme množinou **sdužených** okrajových podmínek k podmínkám určeným množinou (A.4).

Pomocí sdužených okrajových podmínek můžeme určit definiční obor sduženého operátoru k nějakému symetrickému rozšíření operátoru  $T$ .

**Věta A.3.12.** Nechť  $T$  je symetrický operátor s konečnými indexy defektu a  $T_1$  je zúžení operátoru  $T^*$  na podprostor prostoru  $D(T^*)$  určený konečným počtem okrajových podmínek  $B_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Potom  $T_1^*$  je zúžení operátoru  $T^*$  na podprostor prostoru  $D(T^*)$ , který je určen množinou sdužených okrajových podmínek.

*Důkaz.* Viz Theorem XII.4.28 v [7]. □

Tuto část zakončíme určením definičních oborů samosdužených rozšíření.

**Věta A.3.13.** Nechť  $T$  je symetrický operátor s konečnými stejnými indexy defektu  $n = n_+ = n_-$ . Potom zúžení  $T^*$  na podprostor  $D(T^*)$  určené symetrickou množinou  $n$  lineárně nezávislých okrajových podmínek je samosduženým rozšířením operátoru  $T$ . Navíc platí, že každé samosdužené rozšíření lze takto určit.

*Důkaz.* Viz Theorem XII.4.30 v [7]. □

Nyní ukážeme možné explicitní vyjádření obecných podmínek určujících samosdužená rozšíření.

**Věta A.3.14.** Nechť  $T$  je symetrický operátor s konečnými stejnými indexy defektu  $n = n_+ = n_-$ . Nechť  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  je ortonormální báze defektního podprostoru  $\mathcal{K}_+$  a  $\psi_1, \dots, \psi_n$  je ortonormální báze  $\mathcal{K}_-$ . Nechť dále  $B_i(x) = (x, \varphi_i)^*$  a  $C_i(x) = (x, \psi_i)^*$  pro  $x \in D(T^*)$  a  $1 \leq i \leq n$ . Potom každé samosdužené rozšíření operátoru  $T$  je zúžení  $T^*$  na podprostor prostoru  $D(T^*)$  určený okrajovými podmínkami

$$B_i(x) - \sum_{j=1}^n \theta_{ij} C_j(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

kde komplexní koeficienty  $\theta_{ij}$  splňují podmínku  $\sum_{j=1}^n \theta_{ij} \overline{\theta_{kj}} = \delta_{ik}$ . Navíc každé zúžení  $T^*$  tohoto typu je samosduženým rozšířením  $T$ .

*Důkaz.* Viz Theorem XII.4.31 v [7]. □

Podmínka pro koeficienty  $\theta_{ij}$  je ekvivalentní požadavku unitárnosti matice  $(\theta_{ij})$ . Na závěr si ukážeme důležitý vztah spekter samosdužených rozšíření symetrických operátorů.

**Věta A.3.15.** *Nechť  $T$  je uzavřený symetrický operátor s konečnými stejnými indexy defektu  $n = n_+ = n_-$  a  $T_1$  je jeho uzavřené symetrické rozšíření,  $T \subseteq T_1$ . Potom  $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_p(T_1)$  a  $\sigma_e(T) = \sigma_e(T_1)$ .*

*Navíc jestliže  $\lambda \in \sigma_p(T_1)$  s konečnou násobností  $m_{T_1}(\lambda) = \dim(\text{Ker}(\lambda I - T)) < \infty$ , pak  $m_{T_1}(\lambda) \leq m_T(\lambda) + n$ , kde  $m_T(\lambda) = 0$  v případě, že  $\lambda$  není vlastním číslem operátoru  $T$ .*

*Důkaz.* Viz Věta 8.4.3 a Tvrzení 8.4.1 v [6]. □

## A.4 Diferenciální operátory

V této části shrneme poznatky o samosdružených rozšířeních diferenciálních operátorů a některých vlastnostech týkajících se jejich spekter. Pomocí pojmu formálního diferenciálního operátoru se dostaneme k definici diferenciálního operátoru na Hilbertově prostoru  $L^2(I)$ , kde písmenem  $I$  budeme v celé části rozumět interval  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

**Definice A.4.1. Formální diferenciální operátor  $n$ -tého řádu** na intervalu  $I$  je reprezentován výrazem

$$\tau = a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t),$$

kde koeficienty  $a_k$  jsou komplexní funkce reálné proměnné patřící do  $C^\infty(I)$ , přičemž  $a_n$  je na  $I$  nenulový.

Symbolem  $A^n(I)$  označme prostor všech funkcí  $f : I \mapsto \mathbb{C}$ , které mají  $(n-1)$  spojitých derivací na  $I$  a pro které je navíc  $f^{(n-1)}$  absolutně spojitá na každém kompaktním podintervalu intervalu  $I$ .

Pro funkci  $f \in A^n(I)$  tedy  $f^{(n)}$  existuje skoro všude na  $I$  a je integrovatelná na každém kompaktním intervalu  $J \subseteq I$ . Jestliže  $I$  je kompaktní interval (tzn  $I = [a, b]$ ) a  $f \in A^n(I)$ , tak  $f^{(k)}$  pro každé  $k = 1, \dots, n-1$  je spojitá zleva resp. zprava v bodě  $a$  resp.  $b$ .

Pro formální diferenciální operátor  $n$ -tého řádu  $\tau$  na intervalu  $I$  a  $f \in A^n(I)$  je výraz  $\tau f$  dobře definován v následujícím smyslu:

$$(\tau f)(t) = a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} f(t) + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t) + \dots + a_0(t) f(t).$$

Funkce  $\tau f$  je definována skoro všude na  $I$  a integrovatelná na každém kompaktním podintervalu intervalu  $I$ .

Následující věta řeší otázku existence a jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic zadaným pomocí formálního diferenciálního operátoru.

**Věta A.4.2.** *Nechť  $\tau$  je formální diferenciální operátor  $n$ -tého řádu na intervalu  $I$  a  $g$  je komplexní měřitelná funkce integrovatelná na každém kompaktním podintervalu intervalu  $I$ . Nechť dále  $t_0 \in I$  a  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  je libovolná  $n$ -tice komplexních čísel. Potom existuje právě jedna  $f \in A^n(I)$  tak že  $\tau f = g$  a*

$$\frac{d^i}{dt^i} f(t_0) = c_i, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

*Důkaz.* Viz Theorem XIII.1.3 v [7]. □

**Důsledek A.4.3.** *Jestliže  $g \in C^k(I)$ , potom  $f \in C^{n+k}(I)$ . Speciálně všechna řešení rovnice  $(\tau - \lambda)f = 0$  pro libovolné  $\lambda \in \mathbb{C}$  náleží do  $C^\infty(I)$ .*

*Důkaz.* Viz Corollary XIII.1.4 v [7], nebo kapitola IX.6 (Theorem IX.24-26) v [10]. □

Z předcházející věty a důsledku vyplývá, že množina všech řešení homogenní rovnice  $\tau f = 0$  na  $I$  je ekvivalentní množině všech komplexních  $n$ -tic a tvoří  $n$  rozměrný lineární vektorový podprostor prostoru  $C^\infty(I)$ .

**Definice A.4.4.** Necht  $\tau$  je formální diferenciální operátor  $n$ -tého řádu na intervalu  $I$ . Formální diferenciální operátor  $\tau^*$  definovaný vztahem

$$\tau^* = \sum_{j=0}^n b_j(t) \frac{d^j}{dt^j}, \quad (\text{A.5})$$

s koeficienty

$$b_j(t) = \sum_{k=j}^n (-1)^k \binom{k}{j} \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} \overline{a_k(t)}$$

nazýváme **formálně sdruženým** operátorem k  $\tau$ . Pokud  $\tau = \tau^*$  nazýváme  $\tau$  **formálně samosdruženým**.

Seskvilineární formu  $F_t(f, g)$  na nějakém podprostoru  $C^{n-1}(I)$  definovanou vztahem

$$F_t(f, g) = \sum_{j,k=0}^{n-1} F_t^{jk}(\tau) \overline{f^{(j)}(t)} g^{(k)}(t),$$

kde  $F_t^{jk}(\tau)$  značí matici  $n \times n$  s indexy  $j, k = 0, \dots, n-1$  danou vztahem

$$F_t^{jk}(\tau) = \sum_{i=k}^{n-j-1} (-1)^i \binom{i}{k} \frac{d^{i-k}}{dt^{i-k}} \overline{a_{j+i+1}(t)}, \quad j+k \leq n-1,$$

$$F_t^{jk}(\tau) = 0, \quad j+k > n-1,$$

nazýváme **okrajovou formou** operátoru  $\tau$  v bodě  $t \in I$ .

Uvažujme uzavřený interval  $I = [a, b]$  a  $f, g \in C^n(I)$ . Potom můžeme napsat

$$\int_a^b \overline{(\tau f)(t)} g(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_a^b \overline{a_k(t)} \left[ \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right] g(t) dt.$$

Provedeme integraci per partes a použijeme Leibnitzovo pravidlo pro derivování složené funkce. Po několika úpravách se dostaneme k vyjádření

$$\int_a^b \overline{(\tau f)(t)} g(t) dt = \int_a^b \overline{f(t)} (\tau^* g)(t) dt + F_b(f, g) - F_a(f, g). \quad (\text{A.6})$$

Pokud chceme definovat diferenciální operátor na  $L^2(I)$  musíme nejprve zvolit vhodný definiční obor pro formální diferenciální výraz.

**Definice A.4.5.** Necht  $\tau$  je formální diferenciální operátor  $n$ -tého řádu na intervalu  $I$ . Označme  $H^n(I)$  množinu všech funkcí  $f \in A^n(I)$  takových, že  $f$  a  $f^{(n)}$  náležejí do  $L^2(I)$ . Dále označme  $H_0^n(I)$  množinu všech funkcí z  $H^n(I)$  s kompaktním nosičem.

Z vlastností koeficientů  $\tau$  je zřejmé, že pro  $f \in H^n(I)$  je  $\tau f \in L^2(I)$ . Platnost formule (A.6) lze na kompaktním intervalu  $I$  snadno rozšířit<sup>5</sup> pro  $f, g \in H^n(I)$ . Tato formule potom bývá pro operátory druhého řádu nazývána Lagrangeovou formulí<sup>6</sup>.

<sup>5</sup>Theorem XIII.2.4 (Green's formula) v [7].

<sup>6</sup>Lemma 8.5.1 (Lagrangeova formule) v [6].

**Definice A.4.6.** Pro formální diferenciální operátor  $\tau$  řádu  $n$  definujeme operátory  $T_0(\tau)$  a  $T_1(\tau)$  na  $L^2(I)$  následujícím způsobem

$$\begin{aligned} D(T_0(\tau)) &= H_0^n(I), & T_0(\tau)f &= \tau f, & f &\in D(T_0(\tau)), \\ D(T_1(\tau)) &= H^n(I), & T_1(\tau)f &= \tau f, & f &\in D(T_1(\tau)) \end{aligned}$$

Operátory  $T_0(\tau)$  a  $T_1(\tau)$  jsou kromě triviálního případu neomezené hustě definované operátory, pro které platí,  $T_0(\tau) \subset T_1(\tau)$ .

Otázku sdruženého operátoru k  $T_0(\tau)$  řeší následující věta

**Věta A.4.7.** *Nechť  $\tau$  je formální diferenciální operátor  $n$ -tého řádu na intervalu  $I$ . Potom  $T_1(\tau) = T_0(\tau^*)^*$ .*

*Důkaz.* Viz Theorem XIII.2.10 v [7]. □

Z A.1.2 plyne, že  $T_1(\tau)$  je uzavřený operátor a  $T_0(\tau)$  je uzavíratelný. Dále jestliže  $\tau$  je formálně samosdružený, tak  $T_0(\tau) \subset T_1(\tau) = T_0(\tau)^*$ , což znamená, že  $T_0(\tau)$  je symetrický. Z definice snadno určíme defektní podprostory operátoru  $T_0(\tau)$  a spolu s důsledky věty A.4.2 také omezení pro indexy defektu. Získané výsledky shrneme do následujícího tvrzení.

**Tvrzení A.4.8.** *Jestliže formální diferenciální operátor  $n$ -tého řádu  $\tau$  je formálně samosdružený, pak  $T_0(\tau)$  je symetrický. Navíc jsou defektní podprostory  $\mathcal{K}_+$  a  $\mathcal{K}_-$  operátoru  $T_0(\tau)$  plně tvořeny těmi řešeními diferenciálních rovnic  $(\tau - i)f = 0$  a  $(\tau + i)f = 0$ , které náležejí do  $L^2(I)$ , a indexy defektu jsou menší nebo rovné  $n$ .*

Pro konečný uzavřený interval  $I$  je  $C^\infty(I) \subset L^2(I)$ . To znamená:

**Důsledek A.4.9.** *Jestliže formální diferenciální operátor  $n$ -tého řádu  $\tau$  je formálně samosdružený a  $I$  je omezený uzavřený interval, potom indexy defektu operátoru  $T_0(\tau)$  jsou rovny  $n_+ = n_- = n$ .*

Dále se budeme zabývat teorií samosdružených rozšíření s využitím okrajových podmínek. Mějme formální diferenciální operátor  $\tau$  na intervalu  $I$  s krajními body  $a$  a  $b$ . Protože  $T_1(\tau)$  je uzavřený, můžeme  $D(T_1(\tau))$  uvažovat jako Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$(f, g)^* = (f, g) + (T_1(\tau)f, T_1(\tau)g).$$

Okrajové hodnoty jsme zavedli v A.3.8 pro symetrické operátory. Tuto definici nyní trochu rozšíříme.

**Definice A.4.10.** Spojitý lineární funkcionál  $A$  na  $D(T_1(\tau))$ , který je nulový na  $D(T_0(\tau))$ , nazýváme **okrajovou hodnotou** pro  $\tau$ . Jestliže  $A(f) = 0$  pro každou funkci  $f \in D(T_1(\tau))$ , která je nulová na nějakém okolí bodu  $a$ , pak  $A$  nazýváme **okrajovou hodnotou v bodě  $a$** .

Okrajová podmínka v bodě  $b$  je definována analogicky. Další pojmy jako úplná množina okrajových hodnot, okrajová podmínka, lineární nezávislost okrajových podmínek, symetričnost a ekvivalence množiny okrajových podmínek definujeme shodně s definicí A.3.8 a A.3.10. **Úplná množina okrajových hodnot v  $a$**  je maximální lineárně nezávislé množina okrajových hodnot v  $a$ .

Jestliže  $\tau$  je formálně samosdružený, pak definice okrajové hodnoty pro  $\tau$  splývá s definicí okrajové hodnoty operátoru  $T_0(\tau)$ .

**Věta A.4.11.** *Prostor okrajových hodnot pro  $\tau$  je direktním součtem prostoru okrajových hodnot pro  $\tau$  v bodě  $a$  a prostoru okrajových hodnot pro  $\tau$  v bodě  $b$ , kde  $a$  a  $b$  jsou krajní body intervalu  $I$ .*

*Důkaz.* Viz Theorem XIII.2.19 v [7]. □

**Tvrzení A.4.12.** *Nechť  $\tau$  je formální diferenciální operátor  $n$ -tého řádu definovaný na intervalu  $I$  s krajními body  $a$  a  $b$ . Potom  $\tau$  má nejvýše  $n$  lineárně nezávislých okrajových hodnot v bodě  $a$ . Jestliže  $a \in I$ , pak funkcionály  $A_i(f) = f^{(i)}(a)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , tvoří úplnou množinu okrajových hodnot pro  $\tau$  v bodě  $a$ .*

*Důkaz.* Viz Corollary XIII.2.22 a 23 v [7]. □

Následující věta uvádí obecný tvar okrajové hodnoty operátoru  $\tau$ .

**Věta A.4.13.** *Nechť  $\tau$  je formální diferenciální operátor  $n$ -tého řádu definovaný na intervalu  $I$  s krajními body  $a$  a  $b$ . Nechť  $w_i, i = 0, \dots, n-1$  je množina funkcí takových, že*

$$B(f) = \lim_{t \rightarrow a} \sum_{i=0}^{n-1} w_i(t) f^{(i)}(t)$$

*existuje pro všechny  $f \in D(T_1(\tau))$ . Potom  $B$  je okrajová hodnota pro  $\tau$  v bodě  $a$ . Naopak každá okrajová hodnota pro  $\tau$  v bodě  $a$  může být vyjádřena v tomto tvaru.*

*Důkaz.* Viz Theorem XIII.2.27 v [7]. □

Ve větě A.4.11 jsme ukázali, že každá okrajová hodnota může být vyjádřena jako součet okrajové hodnoty v bodě  $a$  a okrajové hodnoty v bodě  $b$ . Poslední větou jsme určili obecný tvar okrajových hodnot. Nyní se zabývejme okrajovými podmínkami.

**Definice A.4.14.** Okrajová podmínka pro  $\tau$  ve tvaru  $B(f) = 0$  se nazývá **okrajovou podmínkou v bodě  $a$**  právě, když  $B$  je okrajová hodnota pro  $\tau$  v bodě  $a$ .

Jestliže okrajová podmínka  $B(f) = 0$  není okrajovou podmínkou v bodě  $a$  ani v bodě  $b$ , tak je v důsledku věty A.4.11 ekvivalentní rovnosti  $B_1(f) = B_2(f)$ , kde  $B_1$  resp.  $B_2$  jsou nenulové okrajové hodnoty v bodě  $a$  resp.  $b$ . Takovou okrajovou podmínku potom nazýváme **smíšenou**. V opačném případě používáme pojem **separované** okrajové podmínky.

V případě, že  $\tau$  je formálně samosdružený, známe podle tvrzení A.4.8 a jeho důsledku indexy defektu a vyjádření defektních podprostorů symetrického operátoru  $T_0(\tau)$ . Na základě vět A.3.12, A.3.13 a A.3.14 z předchozí kapitoly můžeme explicitně určit všechna symetrická (samosdružená) rozšíření operátoru  $T_0(\tau)$  a jejich sdružení.

Na závěr zkoumejme rozdíl mezi případy omezených intervalů  $(a, b)$  a  $[a, b]$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Je zřejmé, že prostory  $L^2(a, b)$  a  $L^2[a, b]$  jsou ekvivalentní, protože množina bodů  $\{a, b\}$  představuje množinu Lebesgueovy míry 0.

**Lemma A.4.15.** *Nechť  $f \in H^n(a, b)$ . Potom funkci  $f$  můžeme vhodně dodefinovat v bodech  $a$  a  $b$  tak, aby  $f \in H^n[a, b]$ .*

*Důkaz.* Funkce  $f$  splňuje  $f \in L^2(a, b)$ ,  $f \in A^n(a, b)$  a  $f^{(n)} \in L^2(a, b)$ .  $f$  má tedy na  $(a, b)$   $n-1$  spojitých derivací a  $n$ -tá derivace existuje skoro všude, přičemž z absolutní spojitosti  $f^{(n-1)}$  plyne, že  $f^{(n-1)}$  může být vyjádřena jako integrál ze svojí derivace,

$$f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(c) = \int_c^x f^{(n)}(t) dt, \quad c \in (a, b), \quad x \geq c.$$

Protože  $f^{(n)}(t) \in L^2(a, b)$  a  $(a, b)$  je omezený interval, tak z Hölderovy nerovnosti  $f^{(n)}(t) \in L^1(a, b)$ . To znamená, že

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f^{(n-1)}(x) = \int_c^b f^{(n)}(t) dt + f^{(n-1)}(c)$$



limita existuje a je konečná. Podobně postupujeme i v bodě  $a$ . Můžeme tedy  $f^{(n-1)}(x)$  spojitě dodefinovat v bodech  $a$  a  $b$ . Je zřejmé, že  $f^{(n-1)}(x)$  je nyní absolutně spojitá na  $[a, b]$ . Protože také  $f^{(n-1)}(x) \in C[a, b]$ , dostáváme  $f^{(n-1)}(x) \in L^2[a, b]$ . Podobnou analýzou se dostaneme až k tomu, že všechny nižší derivace  $f$  včetně samotné funkce  $f$  lze spojitě dodefinovat v bodech  $a$  a  $b$ . To v důsledku standardní analýzy (Darbouxova věta) znamená, že  $f$  má  $n - 1$  spojitých derivací na  $[a, b]$ . Protože  $f, f^{(n)} \in L^2[a, b]$  tak  $f \in H^n[a, b]$ .  $\square$

Uvažujme formální diferenciální operátor  $n$ -tého řádu  $\tau$  na intervalu  $[a, b]$ . Pro takovýto operátor platí výše uvedená teorie na intervalu  $(a, b)$  ve stejném tvaru jako v případě intervalu  $[a, b]$ , kde hodnotami v bodech  $a$  a  $b$  u výrazů vystupujících v uvedených tvrzeních myslíme příslušné jednostranné limity. Navíc ve větě A.4.2 může být  $t_0 \in \{a, b\}$  a počáteční podmínky se potom vztahují na limity v krajním bodě  $t_0$ .

## A.5 Spektra diferenciálních operátorů

Nejprve se budeme zabývat resolventou diferenciálních operátorů. Uvažujme formální diferenciální operátor  $n$ -tého řádu  $\tau$  na intervalu  $I$ . Symbolem  $T$  značíme operátor získaný z  $\tau$  přidáním okrajových podmínek  $\{B_i\}$  tzn., který vznikne zúžením operátoru  $T_1(\tau)$  na podprostor  $D(T_1(\tau))$  určený podmínkami  $B_i(f) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , kde  $B_i$  je libovolná (i prázdná) množina  $k$  lineárně nezávislých okrajových hodnot.

**Lemma A.5.1.** *Sdružení  $T^*$  operátoru  $T$  je dáno zúžením  $T_1(\tau^*)$  určeným množinou sdružených okrajových podmínek (viz. A.3.11)  $B_i^*(f) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k^*$ .*

*Důkaz.* Viz Lemma XIII.3.3 v [7].  $\square$

Je zřejmé, že každou množinu okrajových podmínek  $B_i(f) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  můžeme rozdělit na 3 části:

$$[B_1, \dots, B_k] = [C_1, \dots, C_\mu] \cup [D_1, \dots, D_\nu] \cup [E_1, \dots, E_\omega],$$

kde  $C_i$ ,  $D_i$  a  $E_i$  jsou okrajové podmínky v  $a$ ,  $b$  a smíšené podmínky. Následující věta určuje resolventu operátoru  $T$ .

**Věta A.5.2.** *Bud'  $\tau$  formální diferenciální operátor a bud'  $T$  hustě definovaný operátor získaný z  $\tau$  přidáním  $\{B_i\}$  okrajových podmínek. Necht' jsou množiny okrajových podmínek určující  $T$  a  $T^*$  rozděleny do 3 podmnožin, viz předchozí odstavce. Pro každé  $\lambda \in \rho(T)$  necht'  $\varphi_i(\cdot, \lambda)$ ,  $1 \leq i \leq u$ ;  $(\varphi_i^*(\cdot, \bar{\lambda}))$ ,  $1 \leq i \leq u^*$  resp.  $\psi_i(\cdot, \lambda)$ ,  $1 \leq i \leq v$ ;  $(\psi_i^*(\cdot, \bar{\lambda}))$ ,  $1 \leq i \leq v^*$  jsou báze prostorů řešení rovnic  $(\tau - \lambda)\sigma = 0$ ;  $((\tau - \lambda)\sigma = 0)$ , které jsou kvadraticky integrovatelné v okolí bodů  $a$  resp.  $b$  a splňují okrajové podmínky  $C_i$  resp.  $D_i$ ,  $(C_i^*$  resp.  $D_i^*)$  v bodech  $a$  resp.  $b$ . Potom resolventa  $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1}$  je integrální operátor daný vztahem*

$$(R(\lambda; T)f)(t) = \int_I K(t, s; \lambda) f(s) ds, \quad f \in L^2(I),$$

kde jádro  $K$  je určeno vztahem

$$\begin{aligned} K(t, s; \lambda) &= \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^{u^*} \gamma_{ij}(\lambda) \psi_i(t; \lambda) \overline{\varphi_j^*(s; \bar{\lambda})}, & s < t, \\ &= \sum_{i=1}^u \sum_{j=1}^{v^*} \gamma'_{ij}(\lambda) \varphi_i(t; \lambda) \overline{\psi_j^*(s; \bar{\lambda})}, & s > t, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

a pro každé  $c \in I$  splňuje  $K(\cdot, c)$  okrajové podmínky určující  $T$ . Funkce  $\gamma_{ij}$  a  $\gamma'_{ij}$  jsou jednoznačně určeny smíšenými okrajovými podmínkami  $E_i$  určujícími  $T$  a následující soustavou tzv. skokových rovnic:

$$\begin{aligned} K^{(i)}(c, c+0) - K^{(i)}(c, c-0) &= 0, & 0 \leq i \leq n-2, \\ K^{(n-1)}(c, c+0) - K^{(n-1)}(c, c-0) &= (-1)^n (\overline{a_n(c)})^{-1}. \end{aligned}$$

*Důkaz.* Viz Corollary XIII.3.12 in [7]. □

V některých případech je resolventa diferenciálního operátoru kompaktní operátor (Hilbert-Schmidtův). Uvedeme si kritérium určující dva tyto případy.

**Věta A.5.3.** *Nechť  $\tau$  je formálně samosdružený formální diferenciální operátor řádu  $n$  na intervalu  $I$ . Nechť dále  $T$  je samosdružené rozšíření symetrického operátoru  $T_0(\tau)$ . Resolventa  $R(\lambda; T)$  je kompaktní pro každé  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , jestliže platí alespoň jedna z podmínek:*

- (a) Interval  $I$  je kompaktní,
- (b) Indexy defektu operátoru  $T_0(\tau)$  jsou rovny řádu operátoru  $\tau$ .

*Důkaz.* Viz Theorem XIII.4.1 in [7]. □

Následující věta ukazuje základní vlastnosti spektra operátoru s kompaktní resolventou.

**Věta A.5.4.** *Nechť  $\tau$  je formálně samosdružený formální diferenciální operátor řádu  $n$ . Nechť dále  $T$  je samosdružené rozšíření symetrického operátoru  $T_0(\tau)$  takové, že  $R(\lambda; T)$  je kompaktní pro  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Potom*

- (a) spektrum  $\sigma(T)$  je posloupnost bodů na reálné ose bez hromadných hodnot,
- (b) každé  $\lambda \in \sigma(T)$  náleží do bodového spektra operátoru  $T$ . Navíc  $\dim(\text{Ker}(\lambda I - T)) \leq n$ .
- (c) existuje úplná ortonormální množina  $\{\varphi_m\}$  tvořená vlastními vektory operátoru  $T$ . Jestliže  $\varphi$  je vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu  $\lambda$ , tak potom  $\varphi \in C^\infty(I)$  a  $\varphi$  je řešením rovnice  $\tau\varphi - \lambda\varphi = 0$ .

*Důkaz.* Viz Theorem XIII.4.2 in [7]. □

Znamená to tedy, že operátor  $T$  má čistě diskrétní spektrum.

## A.6 Kreinova formule

Pomocí Kreinovy formule můžeme určit resolventy samosdružených rozšíření daného symetrického operátoru. Následující úvahy jsou volně převzaty z [4] část VIII. 106.

Nechť  $T_1$  a  $T_2$  jsou dvě samosdružená rozšíření symetrického operátoru  $T$  se stejnými konečnými indexy defektu  $n = n_+ = n_-$ . Operátor  $S$ , který splňuje

$$T_1 \supset S, \quad T_2 \supset S,$$

nazýváme **společnou částí operátorů**  $T_1$  a  $T_2$ . Zřejmě existuje operátor, který je maximální společnou částí operátorů  $T_1$  a  $T_2$ , tzn je rozšířením libovolné společné části  $T_1$  a  $T_2$ . Takový maximální operátor  $S$  je rozšířením operátoru  $T$ , ( $T \subseteq S$ ), přičemž může být s  $T$  totožný. Jestliže maximální společnou část operátorů  $T_1$  a  $T_2$  je operátor  $T$ , říkáme, že rozšíření  $T_1$  a  $T_2$  jsou **vzájemně prostá**.

Zjevně platí, že rozšíření  $T_1$  a  $T_2$  jsou vzájemně prostá právě tehdy, když  $D(T) = D(T_1) \cap D(T_2)$ . Jestliže označíme číslem  $p$  maximální počet lineárně nezávislých vektorů z  $D(T_1) \cap D(T_2)$ , které nejsou v  $D(T)$ , lze ukázat<sup>7</sup>, že maximální společná část  $T_0$  operátorů  $T_1$  a  $T_2$  má indexy defektu rovné  $n-p$ . V takovém případě můžeme na operátory  $T_1$  a  $T_2$  nahlížet jako na vzájemně prostá samosdružená rozšíření symetrického operátoru  $T_0$ .

Nyní se budeme snažit nalézt vztah mezi resolventami dvou samosdružených rozšíření operátoru  $T$ . Nechť  $S_0$  je pevně zvolené samosdružené rozšíření a  $S$  je libovolné samosdružené rozšíření operátoru  $T$ . Nechť  $R(\lambda; S_0)$  a  $R(\lambda; S)$  jsou jejich resolventy pro  $\lambda \in \rho(S_0) \cap \rho(S)$ ,  $\text{Im} \lambda \neq 0$ .

Na operátory  $S_0$  a  $S$  budeme vždy nahlížet jako na vzájemně prostá samosdružená rozšíření jejich maximální společné části  $T_0$ , s indexy defektu  $m = m_+ = m_-$ ,  $0 \leq m \leq n$ , kde  $n$  je hodnota indexů defektu  $T$ .

Označme  $\mathcal{N}_\lambda = \text{Ran}(\bar{\lambda}I - T_0)$  a jeho ortogonální doplněk  $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^\perp$ . Z věty A.1.2 plyne, že  $\text{Ran}(\bar{\lambda}I - T_0)^\perp = \text{Ker}(\lambda I - T_0^*)$  a definice  $\mathcal{M}_\lambda$  se tedy shoduje se zavedením stejného symbolu ve větě A.3.7.

Pro libovolné  $y \in \mathcal{N}_\lambda$  platí

$$\begin{aligned} ([R(\lambda; S_0) - R(\lambda; S)]x, y) &= (x, [R(\lambda; S_0) - R(\lambda; S)]^*y) = \\ &= (x, [R(\bar{\lambda}; S_0) - R(\bar{\lambda}; S)]y) = (x, 0) = 0 \end{aligned}$$

Pro rozdíl resolvent tak dostáváme

$$(R(\lambda; S_0) - R(\lambda; S))x \begin{cases} = 0 & \text{pro } x \in \mathcal{N}_\lambda, \\ \in \mathcal{M}_\lambda & \text{pro } x \in \mathcal{M}_\lambda. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Nechť  $\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_m(\lambda)$  je libovolná báze prostoru  $\mathcal{M}_\lambda$  a  $\varphi_1(\bar{\lambda}), \dots, \varphi_m(\bar{\lambda})$  báze prostoru  $\mathcal{M}_{\bar{\lambda}}$ . Ze vztahu (A.8) plyne pro každé  $x \in \mathcal{H}$

$$(R(\lambda; S_0) - R(\lambda; S))x = \sum_{k=1}^m c_k(x) \varphi_k(\lambda). \quad (\text{A.9})$$

Protože koeficienty  $c_k(x)$  jsou zjevně nezávislé lineární funkcionály, můžeme je vyjádřit pomocí Riezsovy věty<sup>8</sup> jako

$$c_k(x) = (\psi_k(\lambda), x), \quad k = 1, \dots, m.$$

Pro každé  $x \in \mathcal{M}_\lambda^\perp$  v důsledku (A.8) a lineární nezávislosti platí

$$(\psi_k(\lambda), x) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

To znamená, že  $\psi_k(\lambda) \in \mathcal{M}_{\bar{\lambda}}$  pro  $k = 1, \dots, m$ . Nyní vyjádříme vektory  $\psi_k(\lambda)$  jako lineární kombinaci bazických vektorů  $\varphi_k(\bar{\lambda})$

$$\psi_k(\lambda) = \sum_{i=1}^m \overline{\gamma_{ik}(\lambda)} \varphi_i(\bar{\lambda}), \quad k = 1, \dots, m.$$

Po dosazení dostaneme

$$(R(\lambda; S_0) - R(\lambda; S))x = \sum_{i,k=1}^m \gamma_{ik}(\lambda) (\varphi_i(\bar{\lambda}), x) \varphi_k(\lambda). \quad (\text{A.10})$$

Maticová funkce  $\mathbf{\Gamma}(\lambda) \equiv (\gamma_{ik}(\lambda))$ , definovaná na množině  $(\rho(S_0) \cap \rho(S)) \setminus \mathbb{R}$ , je regulární, tj.  $\det(\mathbf{\Gamma}) \neq 0$ . Kdyby existoval bod  $\lambda_0$  tak, že  $\det(\mathbf{\Gamma}) = 0$ , pak by

<sup>7</sup>Úvaha se opírá o rozklad A.3.2 c) a o fakt, že  $T_1$  a  $T_2$  jsou samosdružené operátory.

<sup>8</sup>Věta 4.2.5 v [6]

vektory  $\psi_k(\lambda_0)$  byly lineárně závislé. Existoval by tedy nenulový vektor  $\psi \in \mathcal{M}_{\lambda_0}$  kolmý na všechny  $\psi_k(\lambda_0)$ . Z (A.8) potom dostáváme  $(R(\lambda; S_0) - R(\lambda; S))\psi = 0$ , což implikuje  $\psi \in \text{Ker}(\lambda I - T^*)$  a tedy  $\psi \notin D(T_0)$ . To je spor se vzájemnou prostotou operátorů  $S_0$  a  $S$  jako rozšíření  $T_0$ .

Následující věta shrnuje předchozí úvahy a rozšiřuje je o analytičnost v  $\lambda$ .

**Věta A.6.1.** *Nechť  $S_0$  a  $S$  jsou samosdružená rozšíření operátoru  $T$ . Pro  $\lambda \in \rho(S_0) \cap \rho(S)$ ,  $\text{Im} \lambda \neq 0$  je vztah mezi jejich resolventami určen operátorovým výrazem*

$$R(\lambda; S) = R(\lambda; S_0) - \sum_{i,k=1}^m \gamma_{ik}(\lambda) (\varphi_i(\bar{\lambda}), \cdot) \varphi_k(\lambda), \quad (\text{A.11})$$

který se nazývá **Kreinova formule**. Vektory  $\varphi_i(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, m$  mohou být zvoleny jako analytické funkce komplexní proměnné s hodnotami v  $\mathcal{H}$ .

Buď libovolné pevné  $\lambda_0 \in \rho(S_0) \cap \rho(S)$  a  $\varphi_1(\lambda_0), \dots, \varphi_m(\lambda_0)$  je libovolná báze prostoru  $\mathcal{M}_{\lambda_0}$ . Potom vektory  $\varphi_i(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, m$  určené pro obecné  $\lambda \in \rho(S_0)$  vztahem

$$\varphi_k(\lambda) = \varphi_k(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda; S_0)\varphi_k(\lambda_0), \quad k = 1, \dots, m,$$

jsou analytickými funkcemi s hodnotami v  $\mathcal{H}$ . Maticová funkce  $\mathbf{\Gamma}(\lambda) \equiv (\gamma_{ik}(\lambda))$  příslušející tomuto výběru vektorů je určena vztahem

$$\mathbf{\Gamma}^{-1}(\lambda) = \mathbf{\Gamma}^{-1}(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)(\varphi_k(\bar{\lambda}), \varphi_j(\lambda_0))_{j,k=1}^m.$$

*Důkaz.* Viz podkapitola VIII.106 v [4], appendix A v [5]. □

# Příloha B

## Teorie náhodných matic

V této kapitole zopakujeme některé základní výsledky teorie gaussovských souborů náhodných matic.

### B.1 Klasické Gaussovské soubory

V kvantové mechanice jsou energie kvantového systému popsány vlastními čísly Hamiltonova operátoru  $H$ , který je samosdruženým operátorem. V libovolné bázi  $\{\psi_i\}$  příslušného Hilbertova prostoru můžeme tento Hamiltonián reprezentovat pomocí maticových elementů

$$H_{ij} = \langle \psi_i, H\psi_j \rangle. \quad (\text{B.1})$$

Hilbertův prostor je obecně nekonečněrozměrný a proto  $H$  je vlastně nekonečněrozměrná hermitovská matice.

Pokud Hamiltonián komutuje s nějakým operátorem  $A$  (jsou kompatibilní), a platí tedy  $[H, A] = 0$ , potom lze zvolit bázi tvořenou vlastními vektory operátoru  $A$ , ve které je  $H$  blokově diagonální a každý blok odpovídá nějakému kvantovému číslu pozorovatelné  $A$ .

V případě složitých systémů samozřejmě Hamiltonián neznáme a budeme tedy předpokládat, že jeho maticové elementy jsou náhodné veličiny. Předpokládejme dále, že vždy máme k dispozici nějakou pozorovatelnou  $A$  a k ní příslušnou bázi z vlastních vektorů, ve které je každý blok konečněrozměrná matice  $N \times N$ . Zúžíme tedy naši pozornost na jeden z těchto bloků tzn. na hermitovské matice s diskrétním spektrem, kde  $N$  je pevně dané přirozené číslo (většina výsledků je potom interpretována ve smyslu  $N \rightarrow \infty$ ).

#### B.1.1 Time-reversal

Kvantový systém je time-reversal invariantní, pokud pro každé řešení Schrödingery rovnice  $\psi(x, t)$  existuje řešení  $\psi'(x, t')$ , kde  $t' = -t$  a  $\psi'$  je jednoznačně určeno  $\psi$ . Tato operace je realizována tzv. time-reversal operátorem.

Obecně můžeme time-reversal operátor definovat jako nějaký antiunitární operátor  $T$ . Systém je potom time-reversal invariantní (má time-reversal symetrii) právě, když hamiltonián komutuje s  $T$ . Podmínka antiunitarity

$$(T\psi, T\varphi) = (\varphi, \psi). \quad (\text{B.2})$$

Je známo, že každý antiunitární operátor může být napsán ve formě

$$T = KC, \quad (\text{B.3})$$

kde  $K$  je unitární operátor a  $C$  je operátor komplexního sdružení.

Jak je ukázáno v [1], [2], pro různé time-reversal invariantní fyzikální systémy je forma operátoru  $T$  dále omezena.

- Pro systémy se sudým počtem částic se spinem  $1/2$  nebo pro bezspinové částice platí

$$T^2 = 1 \quad (\text{B.4})$$

V tomto případě náleží maticové reprezentace Hamiltoniánu do **ortogonálního** souboru, B.1.2.

- Pro systémy s lichým počtem částic se spinem  $1/2$  platí

$$T^2 = -1. \quad (\text{B.5})$$

Lze ukázat, že v tomto případě je spektrum Hamiltoniánu dvojnásobně degenerované (Kramerova degenerace). Jestliže má nyní systém ještě rotační symetrii, potom lze Hamiltonián reprezentovat opět maticemi z **ortogonálního** souboru, B.1.2.

- V případě, že systém nemá žádné rotační symetrie a je pouze time-reversal invariantní platí

$$T^2 = -1, \quad T = \mathbf{Z}_{2N}C, \quad (\text{B.6})$$

kde  $\mathbf{Z}_{2N}$  je matice  $2N \times 2N$ ,

$$\mathbf{Z}_{2N} = \mathbf{1}_N \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Hamiltonián lze reprezentovat maticemi ze **symplektického** souboru, B.1.3.

- V případě systému bez time-reversal invariance přísluší maticové reprezentace do **unitárního** souboru, B.1.4.

## B.1.2 Ortogonální soubor

Nejprve uvedme jednoduché tvrzení, jehož důkaz je např. v části 2.5 v [2].

**Tvrzení B.1.1.** *Nechť  $H$  je Hamiltonián kvantového systému, který je invariantní vzhledem k time-reversal symetrii  $T$ , kde  $T$  je antiunitární operátor s vlastností  $T^2 = 1$ . Potom existuje  $T$  invariantní ortonormální báze (nezávislá na  $H$ ), ve které je maticová reprezentace  $H$  reálná.*

Z tohoto tvrzení plyne, že matice reprezentující Hamiltonián systému, který podléhá dané symetrii, musí být reálné symetrické. Přípustné kanonické transformace potom tvoří grupu  $O(N)$  reálných ortogonálních matic. Tvrzení se stejným důsledkem lze dokázat také pro případ  $T^2 = -1$  a rotační symetrie.

Nyní tedy zadefinujme první ze souborů náhodných matic. Označme množinu všech reálných symetrických matic rozměru  $N \times N$  symbolem  $T_{1G}$ .

**Definice B.1.2.** Gausovský ortogonální soubor (GOE)  $E_{1G}$  je tvořen reálnými symetrickými maticemi  $\mathbf{X} \in T_{1G}$ , jejichž diagonální  $x_{jj}$ ,  $j \in \hat{N}$  resp. nediagonální elementy  $x_{jk}$ ,  $j < k$ ,  $j, k \in \hat{N}$ , jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením

$$x_{jj} \sim N(0, 1) \text{ resp. } x_{jk} \sim N(0, 1/2). \quad (\text{B.8})$$

Označením  $N(\mu, \sigma^2)$  máme na mysli náhodnou veličinu s normálním rozdělením zavedeným v dodatku C.2.1.

Hustota sdružené distribuční funkce pro náhodné matice, kterou budeme někdy zkráceně označovat jako j.p.d.f. (joint probability distribution function), z ortogonálního souboru je tedy

$$f(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_{jj}^2/2} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_{jk}^2}, \quad (\text{B.9})$$

z čehož drobnou úpravou dostáváme

$$f(\mathbf{X}) = C_{N1} e^{-\sum_{j,k=1}^N x_{jk}^2/2} = C_{N1} e^{-(1/2)\text{tr}\mathbf{X}^2}, \quad (\text{B.10})$$

kde  $C_{N1}$  je normalizační konstanta.

Ortogonalní soubor  $E_{1G}$  (podobně i ostatní soubory) tvoří prostor všech reálných symetrických matic  $T_{1G}$ , na kterém je definována pravděpodobnostní míra  $\mu$

$$d\mu(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})(d\mathbf{X}), \quad (\text{B.11})$$

s objemovým elementem  $(d\mathbf{X}) = \prod_{j \leq k} dx_{jk}$ , kde  $x_{jk}$  označuje elementy matice  $\mathbf{X}$ . Platí tedy  $E_{1G} \equiv (T_{1G}, \mu)$ .

### B.1.3 Symplektický soubor

Uvažujme nyní, že systém je time-reversal invariantní a platí  $T^2 = -1$  a  $T = \mathbf{Z}_{2N}C$ , kde  $\mathbf{Z}_{2N}$  má formu uvedenou vztahem (B.7). Zavedme si novou transformaci matice  $\mathbf{X}$  rozměru  $2N \times 2N$

$$\mathbf{X}^D = \mathbf{Z}_{2N}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}_{2N}^{-1} \quad (\text{B.12})$$

**Definice B.1.3.** Matici  $\mathbf{X}$  nazveme self-duální, jestliže platí  $\mathbf{X}^D = \mathbf{X}$

Matice  $2N \times 2N$  reprezentující Hamiltonián (Kramerovsky degenerovaný), který komutuje s time-reversal operátorem v uvažovaném tvaru, je self-duální

$$\mathbf{H} = T\mathbf{H}T^{-1} = \mathbf{Z}_{2N}C\mathbf{H}C^{-1}\mathbf{Z}_{2N}^{-1} = \mathbf{Z}_{2N}\overline{\mathbf{H}}\mathbf{Z}_{2N}^{-1} = \mathbf{Z}_{2N}\mathbf{H}^T\mathbf{Z}_{2N}^{-1}. \quad (\text{B.13})$$

Využili jsme hermitovosti matice  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger = \overline{\mathbf{H}}^T$ , kde  $\overline{\mathbf{H}}$  označuje komplexní sdružení matice  $\mathbf{H}$ . Na takovou matici můžeme nahlížet jako na matici  $N \times N$  skládající se z bloků  $2 \times 2$  tvaru

$$\begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

kde  $a, b, c, d$  jsou reálná čísla. Matice tohoto typu představují reprezentaci algebry quaternionů a proto je nazýváme *real quaternion*.

Quaterniony tvoří reálnou 4 rozměrnou asociativní algebru s bází  $1, e_1, e_2, e_3$  a násobením definovaným vztahy

$$1^2 = 1, \quad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1e_2e_3 = -1. \quad (\text{B.15})$$

V maticové reprezentaci báze vektorům přísluší matice

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

Matice (B.14) tedy představuje quaternion  $\mathbf{q} = a + be_1 + ce_2 + de_3$ . Zavedeme ještě tzv. duální quaternion  $\overline{\mathbf{q}} = a - be_1 - ce_2 - de_3$  (odpovídá hermitovskému sdružení

u matic reprezentace) a normu quaternionu  $|\mathbf{q}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}$ . V dalším textu budeme složky quaternionu  $\mathbf{q}$  značit  $q^{(\lambda)}$ ,  $\lambda = 0, 1, 2, 3$ .

Z přechozích úvah plyne, že matici reprezentující Hamiltonián systému můžeme považovat za matici  $N \times N$ , jejíž prvky jsou reálné quaterniony. Každý element takové matice  $\mathbf{H}$  je obecně určen čtyřmi reálnými čísly  $h_{jk}^{(\lambda)}$ ,  $\lambda = 0, 1, 2, 3$ . Ve skutečnosti se počet nezávislých parametrů snižuje požadavkem hermitovosti matice  $\mathbf{H}$ . Množinu všech self-duálních hermitovských matic (s quaternion real elementy) označme  $T_{4G}$ .

Nyní se budeme zajímat, jaká podmnožina unitárních matic tvoří kanonické transformace zachovávající quaternionovou strukturu. Lze ukázat, že matice, které tuto strukturu zachovávají, komutují s  $T$  i  $\mathbf{Z}_{2N}$  a platí  $\mathbf{U}^D = \mathbf{U}^{-1}$ . Výsledné matice potom tvoří symplektickou grupu  $Sp(N)$ . Podrobnosti jsou uvedeny v [1].

Nyní již můžeme definovat symplektický soubor.

**Definice B.1.4.** Gaussovský symplektický soubor (GSE)  $E_{4G}$  je tvořen self-duálními hermitovskými maticemi  $\mathbf{X} \in T_{4G}$ , jejichž diagonální elementy (reálné)  $x_{jj} = x_{jj}^{(0)}$ ,  $j \in \hat{N}$  resp. složky nediagonálních elementů  $x_{jk} = x_{jk}^{(0)} + \sum_{\lambda=1}^3 x_{jk}^{(\lambda)} e_\lambda$ ,  $j < k$ ,  $j, k \in \hat{N}$ , jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením

$$x_{jj}^{(0)} \sim N(0, 1) \text{ resp. } x_{jk}^{(\lambda)} \sim N(0, 1/2), \quad (\text{B.17})$$

pro  $\lambda \in 1, 2, 3$

J.p.d.f pro všechny prvky symplektického souboru je tedy

$$f(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x_{jj}^{(0)})^2/2} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{\pi^2} e^{-\sum_{\lambda=0}^3 (x_{jk}^{(\lambda)})^2}, \quad (\text{B.18})$$

což lze přepsat s využitím normy quaternionu jako

$$f(\mathbf{X}) = C_{N4} e^{-\sum_{j,k=1}^N |x_{jk}|^2/2} = C_{N4} e^{-(1/2)\text{tr}\mathbf{X}^2}, \quad (\text{B.19})$$

kde  $C_{N4}$  je normalizační konstanta. Míra prostoru  $E_{4G}$  je definována vztahem (B.11) pro objemový element  $(d\mathbf{X}) = \prod_{j \leq k} dx_{jk}^{(0)} \prod_{\lambda=1}^3 \prod_{j < k} dx_{jk}^{(\lambda)}$ .

### B.1.4 Unitární soubor

V případě, že systém nemá time-reversal symetrii, nelze reprezentaci Hamiltoniánu, kterou obecně tvoří hermitovské matice, nikterak zúžit na reálné nebo self-dual matice. Kanonické transformace v tomto případě tvoří grupa unitárních matic  $U(N)$ . Označme  $T_{2G}$  množinu všech hermitovských matic rozměru  $N \times N$ .

**Definice B.1.5.** Gaussovský unitární soubor (GUE)  $E_{2G}$  je tvořen Hermitovskými maticemi  $\mathbf{X} \in T_{2G}$ , jejichž diagonální  $x_{jj}$ ,  $j \in \hat{N}$  elementy (reálné) resp. nediagonální elementy  $x_{jk} = x_{jk}^{(0)} + ix_{jk}^{(1)}$ ,  $j < k$ ,  $j, k \in \hat{N}$ , jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením

$$x_{jj} \sim N(0, 1) \text{ resp. } x_{jk}^{(0)}, x_{jk}^{(1)} \sim N(0, 1/2). \quad (\text{B.20})$$

J.p.d.f pro všechny prvky unitárního souboru je tedy

$$f(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_{jj}^2/2} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{\pi} e^{-[(x_{jk}^{(0)})^2 + (x_{jk}^{(1)})^2]}. \quad (\text{B.21})$$



Po úpravě  $|x_{jk}|^2 = (x_{jk}^{(0)})^2 + (x_{jk}^{(1)})^2$  dostaneme

$$f(\mathbf{X}) = C_{N2} e^{-\sum_{j,k=1}^N |x_{jk}|^2/2} = C_{N2} e^{-(1/2)\text{tr}\mathbf{X}^2}, \quad (\text{B.22})$$

kde  $C_{N2}$  je normalizační konstanta. Míra prostoru  $E_{2G}$  je definována vztahem (B.11) pro objemový element  $(d\mathbf{X}) = \prod_{j \leq k} dx_{jk}^{(0)} \prod_{j < k} dx_{jk}^{(1)}$ , kde  $x_{jk}^{(0)}$  resp.  $x_{jk}^{(1)}$  označuje reálné resp. komplexní části elementů matice  $\mathbf{X}$ .

### B.1.5 Standardní definice gaussovských souborů

V literatuře obvykle bývají gaussovské soubory definovány daleko obecnějším způsobem, který teprve po několika dalších krocích obsahuje naše definice jako speciální případy. Pro zajímavost zde tento způsob uvedeme.

**Definice B.1.6.** Gaussovský ortogonální soubor  $E_{1G}$  je definován na prostoru reálných symetrických matic  $T_{1G}$  následujícími dvěma požadavky:

1. Pravděpodobnostní míra na  $E_{1G}$  je invariantní vůči ortogonálním transformacím

$$d\mu(\mathbf{H}) = d\mu(\mathbf{Q}^T \mathbf{H} \mathbf{Q}), \quad \mathbf{Q} \in O(N). \quad (\text{B.23})$$

2. Elementy  $h_{jk}$  matice  $\mathbf{H}$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny.

**Definice B.1.7.** Gaussovský symplektický soubor  $E_{4G}$  je definován na prostoru self-duálních (quaternion real) matic  $T_{4G}$  následujícími požadavky:

1. Pravděpodobnostní míra na  $E_{4G}$  je invariantní vůči symplektickým transformacím

$$d\mu(\mathbf{H}) = d\mu(\mathbf{S}^D \mathbf{H} \mathbf{S}), \quad \mathbf{S} \in Sp(N). \quad (\text{B.24})$$

2. Elementy  $h_{jk}^{(\lambda)}$ ,  $\lambda = 0, 1, 2, 3$  matice  $\mathbf{H}$  jsou nezávislé veličiny.

**Definice B.1.8.** Gaussovský unitární soubor  $E_{2G}$  je definován na prostoru hermitovských matic  $T_{2G}$  následujícími požadavky:

1. Pravděpodobnostní míra na  $E_{2G}$  je invariantní vůči unitárním transformacím

$$d\mu(\mathbf{H}) = d\mu(\mathbf{U}^\dagger \mathbf{H} \mathbf{U}), \quad \mathbf{U} \in U(N). \quad (\text{B.25})$$

2. Elementy  $h_{jk}^{(0)}$ ,  $h_{jk}^{(1)}$  matice  $\mathbf{H}$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny.

Podmínku nezávislosti elementů příslušných matic lze vyjádřit požadavkem rozložitelnosti sdružené hustoty distribuční funkce  $f(\mathbf{H})$  na součin funkcí závislých pouze na elementech matice  $\mathbf{H}$ . Například u ortogonálního souboru je to tedy

$$f(\mathbf{H}) = \prod_{j \leq k} f_{jk}(h_{jk}). \quad (\text{B.26})$$

Obvykle se nyní dokazuje následující věta.

**Věta B.1.9.** V případě všech tří gaussovských souborů je forma  $f(\mathbf{H})$  automaticky omezena na

$$f(\mathbf{H}) = \exp(-a \text{tr} \mathbf{H}^2 + b \text{tr} \mathbf{H} + c), \quad (\text{B.27})$$

kde  $a, b, c$  jsou reálná čísla přičemž  $a$  je pozitivní.

*Důkaz.* Viz Theorem 2.6.3 v [1]. □

Z této věty plyne, že námi definované gaussovské soubory (B.1.2, B.1.4, B.1.5) splňují požadavky definic (B.1.6, B.1.7, B.1.8), a jsou jejich speciálním případem pro  $a = 1/2$ ,  $b = c = 0$ .

### B.1.6 Rozdělení vlastních čísel

Nejprve rozebereme nejjednodušší případ ortogonálního souboru matic  $2 \times 2$ . Hustota sdružené distribuční funkce tohoto souboru je dána vztahem (B.10). Snadno vyřešíme charakteristickou rovnici určující vlastní čísla  $\lambda_+, \lambda_-$  reálné symetrické matice  $\mathbf{X} = (x_{ij})$  a získáme vyjádření

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(x_{11} + x_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(x_{11} - x_{22})^2 + 4x_{12}^2}. \quad (\text{B.28})$$

Každá reálná symetrická matice  $\mathbf{X}$  může být diagonalizována reálnou ortogonální maticí  $\mathbf{Q}$ ,

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \mathbf{Q}. \quad (\text{B.29})$$

Nejjednodušší ortogonální transformaci diagonalizující  $\mathbf{X}$  můžeme vyjádřit maticí

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

kde  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Vztah mezi vlastními čísly, elementy matice  $\mathbf{X}$  a parametrem  $\theta$  je z (B.29) zřejmé

$$\begin{aligned} x_{11} &= \lambda_+ \cos^2 \theta + \lambda_- \sin^2 \theta, \\ x_{22} &= \lambda_+ \sin^2 \theta + \lambda_- \cos^2 \theta, \\ x_{12} &= (\lambda_+ - \lambda_-) \cos \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

Jakobián transformace  $x_{ij} \rightarrow \lambda_{\pm}, \theta$  je roven

$$J(\lambda, \theta) = \left| \frac{\partial(x_{11}, x_{12}, x_{22})}{\partial(\lambda_+, \lambda_-, \theta)} \right| = \lambda_+ - \lambda_-. \quad (\text{B.30})$$

Vyjádření požadovaného j.p.d.f. vlastních čísel matic  $2 \times 2$  z ortogonálního souboru je v důsledku věty C.1.2 dáno vztahem

$$f_1(\lambda_+, \lambda_-) = C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}(\lambda_+^2 + \lambda_-^2)\right) |\lambda_+ - \lambda_-|, \quad (\text{B.31})$$

kde  $C_1$  je normalizační konstanta. Podobným postupem jako u ortogonálního souboru se určí j.p.d.f. vlastních čísel i u symplektického (diagonalizace unitární maticí s quaternion real elementy) a unitárního souboru (diagonalizace unitární maticí) matic  $2 \times 2$ . Výsledný vztah pro všechny soubory můžeme zapsat jako

$$f_{\beta}(\lambda_+, \lambda_-) = C_{\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}(\lambda_+^2 + \lambda_-^2)\right) |\lambda_+ - \lambda_-|^{\beta}, \quad (\text{B.32})$$

kde  $\beta = 1$  pro ortogonální soubor,  $\beta = 2$  pro unitární soubor a  $\beta = 4$  pro symplektický soubor.

Velmi podobným, pouze poněkud pracnějším, způsobem lze určit hustotu sdružené distribuční funkce gaussovských souborů pro obecné  $N$ . Výsledné rozdělení pro všechny 3 gaussovské soubory shrnuje následující věta:

**Věta B.1.10.** *Hustota sdružené distribuční funkce vlastních čísel matic z gaussovského ortogonálního, gaussovského unitárního nebo gaussovského symplektického souboru je dána vztahem*

$$f_{N\beta}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = C_{N\beta} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \lambda_j^2\right) \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^{\beta}, \quad (\text{B.33})$$

kde  $\beta = 1$  pro ortogonální soubor,  $\beta = 2$  pro unitární soubor a  $\beta = 4$  pro symplektický soubor. Konstanta  $C_{N\beta}$ , která je určena normalizační podmínkou

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{N\beta}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda_1 \dots d\lambda_N = 1, \quad (\text{B.34})$$

nabývá hodnoty

$$C_{N\beta} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(1 + \frac{\beta}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\beta}{2}j)}. \quad (\text{B.35})$$

Důkaz. Viz Theorem 3.3.1 v [1].  $\square$

## B.2 Statistiky rozdělení vlastních čísel

Pokud o nějakém systému tvrdíme, že jeho chování je v souladu s teorií náhodných matic, znamená to, že nějaká jeho charakterizující veličina (energetické spektrum, polohy částic apod.) vykazuje stejné statistické vlastnosti jako vlastní čísla náhodných matic. Posuzování shody těchto komplikovaných statistických vlastností obvykle převádíme na posuzování shody jednodušších odvozených vlastností, nejčastěji středních hodnot jistých funkcí – statistik. V této části nejprve zavedeme pojem  $n$ -bodové korelační funkce, hustoty stavů a objasníme pojem unfoldingu. Nakonec se seznámíme se statistikou level spacing a uvedeme její výsledky pro klasické gaussovské soubory.

### B.2.1 $n$ -bodová korelační funkce

Nechť  $-\infty < x_1, \dots, x_N < \infty$  označuje pozice  $N$  čísel na reálné ose odpovídajících realizaci nějakého souboru charakterizovaného hustotou sdružené distribuční funkce, nezávislé na indexování,

$$f_N(x_1, \dots, x_N). \quad (\text{B.36})$$

Souborový průměr funkce  $g_N(x_1, \dots, x_N)$  značíme  $\langle g_N \rangle$  a definujeme standardně vztahem

$$\langle g_N \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g_N(x_1, \dots, x_N) f_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N.$$

Statistické vlastnosti rozdělení čísel  $x_i$  bývají obvykle charakterizovány pomocí  $n$ -bodových **korelačních funkcí**

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_N(x_1, \dots, x_N) dx_{n+1} \dots dx_N, \quad (\text{B.37})$$

kteří udávají hustotu pravděpodobnosti nalezení hodnoty okolo každého bodu  $x_1, \dots, x_n$ , přičemž zbývající hodnoty nejsou sledovány. Je zřejmé, že sousední funkce jsou vzájemně svázány vztahem

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{N-n} \int_{-\infty}^{\infty} R_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_{n+1}. \quad (\text{B.38})$$

Ujasníme si interpretaci  $n$ -bodových korelačních funkcí. Zavedme pojem **empirické hustoty stavů** (empirical density of levels), která přísluší dané realizaci souboru

$$\hat{\sigma}_N(x) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i). \quad (\text{B.39})$$

Počet hodnot, které patří do podmnožiny  $B \in \mathbb{R}$ , je tedy dán výrazem  $\int_B \hat{\sigma}_N(x) dx$ .

Průměr empirické hustoty stavů přes celý soubor se nazývá **hustota stavů** (level density),  $\sigma_N(x) = \langle \hat{\sigma}_N(x) \rangle$ . Vzhledem k symetrii  $f_N(x_1, \dots, x_N)$  vůči permutaci argumentu platí

$$\sigma_N(x) = N \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x, x_2, \dots, x_N) dx_2 \dots dx_N \quad (\text{B.40})$$

a hustota stavů je zřejmě rovna 1-bodové korelační funkci:  $R_1(x) = \sigma_N(x)$ . Průměrný počet hodnot ležících v  $B$  je tedy  $\int_B \sigma_N(x) dx = \int_B R_1(x) dx$ . Podobně lze ukázat, že průměrný počet dvojic v množině  $B$  je dán jako

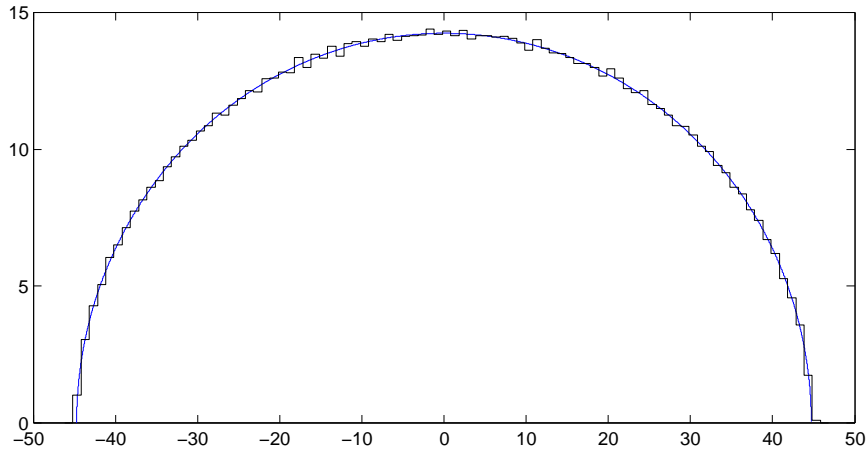
$$\int_B \int_B R_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (\text{B.41})$$

kde každý pár je započítán dvakrát.

Nyní se budeme zabývat případem, kdy hodnoty  $x_1, \dots, x_N$  jsou vlastní čísla nějakého souboru náhodných matic. Hustota distribuční funkce je tedy dána vztahem (B.33). Hustota stavů a do jisté míry i ostatní  $n$ -bodové distribuční funkce byly exaktně spočteny pro případ  $\beta = 1, 2, 4$ . Na tyto výpočty se s výhodou využívá metody ortogonálních polynomů ( $\beta = 2$ ), resp. tzv. skew-ortogonálních polynomů ( $\beta = 1, 4$ ). Tyto metody lze najít prakticky v každé knize o náhodných maticích ([1]). Lze ukázat, že hustota stavů v limitě  $N \rightarrow \infty$  je popsána vztahem nazývaným Wigner semi-circle law

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(2N - x^2)^{1/2}, & |x| \leq (2N)^{1/2}, \\ 0, & |x| > (2N)^{1/2}. \end{cases} \quad (\text{B.42})$$

Na obrázku B.1 je porovnání numericky získaných rozdělení s (B.42). Vidíme, že v prvním přiblížení rozdělení vyhovují Wignerovu zákonu.



Obrázek B.1: Ukázka platnosti Wignerova zákona. Hladká čára reprezentuje vztah (B.42), zatímco schodovitá funkce odpovídá průměrné empirické hustotě stavů pro 100 matic  $1000 \times 1000$  z ortogonálního souboru.

## B.2.2 Unfolding

Výsledky teorie náhodných matic, které se běžně uvádějí v explicitní formě, jsou vždy v jednotkách lokální hustoty stavů. Důvodem je předpoklad, že globální statistické vlastnosti, které představuje například hustota stavů, závisí na konkrétním

systému, zatímco ty lokální jsou univerzální. V důsledku to znamená, že všechny statistiky, které chceme použít ke srovnání s teorií, je nutné počítat na souborech, které mají hustotu stavů rovnu 1.

Uvedeme si nyní způsob, jak toho docílit. Označme  $x_1, \dots, x_N$  hodnoty příslušející realizaci nějakého souboru. Nejjednodušší situace nastává, když dopředu známe analytický tvar hustoty stavů nebo alespoň známe hustotu sdružené distribuční funkce  $f_N(x_1, \dots, x_N)$  a umíme tedy (obecně pouze numericky) hustotu stavů vypočítat z výrazu (B.40). Hustota stavů  $\sigma_N(x)$  je až na faktor  $N$  stejná jako hustota pravděpodobnosti  $f_N(x)$  nalezení nějaké hodnoty na pozici  $x$ ,

$$f_N(x) = \frac{1}{N} \sigma_N(x). \quad (\text{B.43})$$

Z hustoty pravděpodobnosti můžeme určit distribuční funkci  $F(x)$  a použít tvrzení C.1.1 z dodatku. Provedeme následující přeskálování bodů  $x_i$

$$y_i = NF(x_i). \quad (\text{B.44})$$

Je zřejmé, že tyto veličiny mají hustotu stavů rovnu jedné,  $\sigma_N(y) = 1$ , a střední hodnotu (ve smyslu celého souboru) rovnu  $N/2$ .

Nyní se zabýváme případem, kdy hustotu stavů obecně neznáme a máme k dispozici pouze empirickou hustotu stavů odpovídající jedné realizaci. Pokusíme se extrahovat průměrnou hustotu pravděpodobnosti nalezení hodnoty na pozici  $x$  (resp. průměrnou hustotu stavů). Uvažujme interval  $\Delta x = [x - \Delta/2, x + \Delta/2]$  a označme  $\Delta N$  počet hodnot ležících v tomto intervalu. Průměrnou hustotu pravděpodobnosti definujeme jako

$$\bar{f}_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\Delta N}{\Delta x}. \quad (\text{B.45})$$

Nyní je třeba zvolit velikost intervalu  $\Delta x$  takovou, aby obsahoval dostatečné množství hodnot a odstranil se tak vliv lokálních fluktuací na průměrnou hustotu pravděpodobnosti. Na druhou stranu, musí být infinitesimální vzhledem k rozměrům, na kterých se  $\bar{f}(x)$  mění systematicky. Celkově tedy požadujeme

$$N \gg \Delta N \gg 1. \quad (\text{B.46})$$

V praxi se využívá poněkud jiná metoda. Distribuční funkce odpovídající empirické hustotě pravděpodobnosti je

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta(x - x_i), \quad (\text{B.47})$$

kde  $\theta$  je Heavisidova funkce. Nyní se provede proložení těchto „schodů“ hladkou funkcí  $\bar{F}_N(x)$ , např. metodou nejmenších čtverců. Tuto funkci následně považujeme za distribuční funkci a její derivaci za průměrnou hustotu pravděpodobnosti,  $\bar{f}_N(x) = \bar{F}'_N(x)$ . Unfolding provedeme stejně jako v prvním případě přeskálováním podle vztahu (B.44).

Legitimita předchozích úvah plyne z tzv. ergodického chování vlastních čísel souborů náhodných matic. Zjednodušeně lze říci, že lokální střední hodnoty v rámci jedné realizace (spektrální střední hodnoty) jsou v limitě  $N \rightarrow \infty$  rovny souborovým středním hodnotám. Z toho plyne, že veškeré statistiky můžeme počítat na jedné dostatečně velké (ve smyslu  $N$ ) realizaci a potom je porovnávat s výsledky teorie náhodných matic získanými ze souborových průměrů. Důkaz ergodického chování pro hustotu stavů je naznačen v [2].

### B.2.3 Level spacing

Nejčastěji srovnávanou veličinou je tzv. level spacing neboli rozdělení vzdáleností mezi sousedními hodnotami. Předpokládejme, že hodnoty  $\{x_i\}$  jsou označeny ve vzestupném pořadí,  $x_1 \leq \dots \leq x_N$ . Nechť  $S_1, S_2, \dots$  jsou vzdálenosti mezi sousedními body,  $S_i = x_{i+1} - x_i$ . Uvažujme opět interval  $\Delta x$  o délce  $\Delta$  v němž leží  $\Delta N$  hodnot, splňující podmínku (B.46). Tuto podmínku můžeme přeformulovat na tvar

$$L \gg \Delta \gg D, \quad (\text{B.48})$$

kde  $L$  značí velikost spektra hodnot  $x_i$  a  $D$  je střední vzdálenost mezi sousedními hodnotami v intervalu  $\Delta x$ . Uvažujme nyní pouze body  $x_k$  z intervalu  $\Delta x$ . Střední hodnota  $D$  příslušných  $s_k$  je zřejmě rovna převrácené hodnotě průměrné hustoty stavů

$$D = \bar{\sigma}(x)^{-1} = \frac{\Delta N}{\Delta x}. \quad (\text{B.49})$$

Definujme relativní vzdálenosti jako  $s_k = S_k/D$ . Je zřejmé, že v případě unfoldovaných hodnot je  $D = 1$  pro celý soubor a  $s_i = S_i$ . Poznamenejme, že střední hodnota relativních vzdáleností je vždy rovna 1.

Čísla  $s_i$  se nazývají level spacings. Hustota pravděpodobnosti  $f(s)$  určuje rozdělení těchto vzdáleností a je tedy souborovým průměrem všech empirických hustot  $\hat{f}(s)$  definovaných jako pravděpodobnost, že nějaké  $s_j$  má hodnotu  $s$ . Pro unfoldovaný soubor jehož jedna realizace obsahuje  $N$  hodnot  $\{x_i\}$  označených ve vzestupném pořadí můžeme hustotu pravděpodobnosti statistiky level spacing vyjádřit vztahem

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{N-1} \delta(s - |x_{i+1} - x_i|) f_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N. \quad (\text{B.50})$$

Odvodíme si nyní tvar  $p(s)$  pro případ nekorelovaného Poissonovského spektra. Uvažujme případ unfoldovaného souboru. Pravděpodobnost, že  $x_i$  bude ležet mezi  $x$  a  $x+dx$  je nezávislá na  $x$  a je rovna  $\sigma dx$ , kde  $\sigma = D^{-1}$  je průměrné množství hodnot v jednotkovém intervalu. Pravděpodobnost výskytu vzdálenosti  $s$  je, v případě, že máme hodnotu v bodě  $x$ , rovna pravděpodobnosti, že v intervalu  $(x, x+s)$  neleží žádná hodnota a že je alespoň jedna hodnota v  $(x+s, x+s+dx)$ . Rozdělme interval  $(x, x+s)$  na  $m$  stejných částí  $(x+(i-1)s/m, x+is/m)$  pro  $i = 1, \dots, m$ . V důsledku nezávislosti jednotlivých hodnot  $x_i$  je pravděpodobnost, že v intervalu  $(x, x+s)$  neleží žádná hodnota, rovna součinu pravděpodobností výskytu 0 hodnot ve všech  $m$  částech. Pro velké  $m$  je  $s/m$  dostatečně malé a výslednou pravděpodobnost můžeme zapsat ve tvaru  $(1 - \sigma s/m)^m$ . V limitě  $m \rightarrow \infty$  platí

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \sigma \frac{s}{m}\right)^m = e^{-\sigma s}. \quad (\text{B.51})$$

Navíc pravděpodobnost výskytu hodnoty v intervalu  $(x+s, x+s+dx)$  je  $\sigma dx$ . Celkově tedy s využitím  $\sigma = 1$  platí

$$f_0(s) ds = e^{-s} ds. \quad (\text{B.52})$$

Tento vztah tedy popisuje hustotu pravděpodobnosti statistiky level spacing pro poissonovský soubor.

Podívejme se na výpočet hustoty pravděpodobnosti statistiky level spacing pro gaussovské soubory náhodných matic. Nejprve se budeme zabývat soubory matic  $2 \times 2$ . Ze vztahu (B.32) plyne

$$f_\beta(s) = C_\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s - |\lambda_+ - \lambda_-|) \exp\left(-\frac{1}{2}(\lambda_+^2 + \lambda_-^2)\right) |\lambda_+ - \lambda_-|^\beta d\lambda_+ d\lambda_-. \quad (\text{B.53})$$

Po triviální integraci dostaneme  $f_\beta(s) = C_\beta 4\pi s^\beta \exp(-s^2/4)$  pro  $s > 0$  jinak 0. Nyní využijeme faktu, že střední hodnota sousedních vzdáleností u unfoldovaného souboru je rovna 1,

$$\int_0^{+\infty} s f_\beta(s) ds = 1,$$

a vztahu pro normalizaci hustoty pravděpodobnosti,

$$\int_0^{+\infty} f_\beta(s) ds = 1.$$

Celkově tak dostaneme hustotu pravděpodobnosti statistiky level spacing pro gaussovské soubory náhodných matic  $2 \times 2$  jako

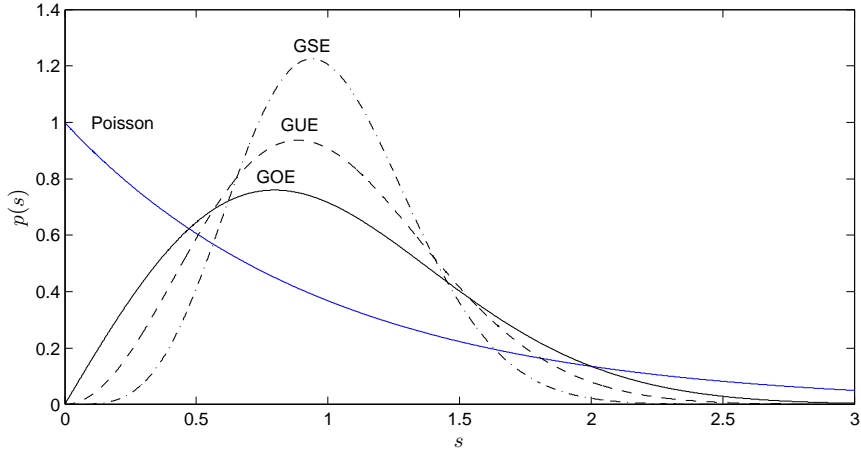
$$f_{W_1}(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right), \quad \beta = 1, \quad (\text{B.54})$$

$$f_{W_2}(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right), \quad \beta = 2, \quad (\text{B.55})$$

$$f_{W_4}(s) = \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi} s^2\right), \quad \beta = 4. \quad (\text{B.56})$$

Rozdělení s hustotami pravděpodobnosti, které jsou dané těmito vztahy, budeme nazývat **Wignerova rozdělení**. Pokud budeme mluvit o Wignerovu rozdělení bez bližšího určení máme na mysli případ ortogonálního souboru ( $\beta = 1$ ). Hustotu pravděpodobnosti tohoto rozdělení označíme  $f_W(s) \equiv f_{W_1}(s)$ .

Nejdůležitější statistikou level spacing je asymptotické rozdělení  $f_\beta(s)$  v limitě  $N \rightarrow +\infty$ . Pod termínem statistika level spacing gaussovských souborů náhodných matic vždy myslíme právě toto rozdělení. Několik přesných hodnot hustoty pravděpodobnosti převzatých z [2] je uvedeno v tabulce B.1. Explicitní vztah analogický výrazům pro Wignerovo rozdělení zatím nebyl nalezen. Ukazuje se však, že výrazy (B.54), (B.55) a (B.56) představují dostatečně přesnou aproximaci skutečného rozdělení. Na obrázku B.2 je zobrazen level spacing pro poissonovský, ortogonální, unitární a symplektický soubor.



Obrázek B.2: Level-spacing pro poissonovský, ortogonální (GOE), unitární (GUE) a symplektický (GSE) soubor.

V případech, kdy kvalita experimentálních výsledků vyžaduje srovnání přímo se skutečným rozdělením, se používají pokročilejší aproximativní vyjádření. Pro malé

hodnoty  $s \lesssim 1,8$  můžeme skutečnou hustotu pravděpodobnosti  $f_\beta(s)$  rozvinout do Taylorovy řady se středem v 0. Naopak pro velké hodnoty parametru  $s \gtrsim 1,7$  existuje Dysonovo asymptotické vyjádření.

Uvedeme zde explicitní vyjádření pouze pro ortogonální soubor, přičemž hustotu pravděpodobnosti označíme  $f_{\text{GOE}}(s)$ . Taylorův rozvoj je dána vztahem

$$f_{\text{GOE}}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k s^k. \quad (\text{B.57})$$

Prvních 42 koeficientů  $p_k$ , které jsme převzali z knihy [2], je uvedeno v tabulce B.2.

Tabulka B.1: Numerické hodnoty rozdělení level spacing ortogonálního souboru převzaté z [1].

$s$	$f_{\text{GOE}}(s)$	$s$	$f_{\text{GOE}}(s)$
0,064	0,10431	1,401	0,45891
0,127	0,20620	1,528	0,37514
0,191	0,30346	1,655	0,29791
0,255	0,39414	1,783	0,23010
0,318	0,47657	1,910	0,17304
0,382	0,54944	2,037	0,12679
0,446	0,61178	2,165	0,09058
0,509	0,66294	2,292	0,06314
0,573	0,70266	2,419	0,04295
0,637	0,73095	2,546	0,02853
0,764	0,75476	2,674	0,01851
0,891	0,73965	2,801	0,01173
1,019	0,69349	2,928	0,00727
1,146	0,62542	3,056	0,00440
1,273	0,54452	3,183	0,00261

Dysonovo asymptotické vyjádření je

$$f_{\text{GOE}}^{as}(s) = \frac{\partial^2 E_{\text{GOE}}^{as}(s)}{\partial s^2}, \quad E_{\text{GOE}}^{as}(s) = 2^{\frac{3}{8}} e^B (\pi s + 1)^{-\frac{1}{8}} e^{-s^2 \frac{\pi^2}{16} - s \frac{\pi}{4}}, \quad (\text{B.58})$$

kde  $B = \frac{1}{24} \ln 2 + \frac{3}{2} \zeta'(-1)$  a  $\zeta(x)$  je Riemannova zeta funkce.

Tyto dvě funkce se k sobě nejvíce přibližují v bodě 2,6488. Proto budeme při numerických výpočtech přesné rozdělení statistiky level spacing ortogonálního souboru aproximovat následující funkcí:

$$f_{\text{GOE}}(s) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{42} p_k s^k, & s \in [0, 2,6488], \\ f_{\text{GOE}}^{as}(s), & s \in [2,6488, +\infty), \\ 0, & s \in (-\infty, 0). \end{cases} \quad (\text{B.59})$$

Distribuční funkce je standardně určena integrálem z hustoty pravděpodobnosti jako

$$F_{\text{GOE}}(s) = \int_0^s f_{\text{GOE}}(t) dt. \quad (\text{B.60})$$



Tabulka B.2: Taylorovy koeficienty  $p_k$  rozdělení level spacing ortogonálního souboru převzaté z [2].

$k$	$p_k$	$k$	$p_k$
1	1,64493407	22	$-2,6365437 \cdot 10^{-9}$
2	0,00000000	23	$4,1366745 \cdot 10^{-10}$
3	-1,62348485	24	$1,3268190 \cdot 10^{-10}$
4	$3,6077441 \cdot 10^{-1}$	25	$-2,6832852 \cdot 10^{-11}$
5	$5,7225547 \cdot 10^{-1}$	26	$-5,8466725 \cdot 10^{-12}$
6	$-2,0346861 \cdot 10^{-1}$	27	$1,4984853 \cdot 10^{-12}$
7	$-1,0459139 \cdot 10^{-1}$	28	$2,2679440 \cdot 10^{-13}$
8	$5,1996863 \cdot 10^{-2}$	29	$-7,3871101 \cdot 10^{-14}$
9	$1,1730404 \cdot 10^{-2}$	30	$-7,7606149 \cdot 10^{-15}$
10	$-8,4012045 \cdot 10^{-3}$	31	$3,2799913 \cdot 10^{-15}$
11	$-8,9057276 \cdot 10^{-4}$	32	$2,3256905 \cdot 10^{-16}$
12	$1,0192294 \cdot 10^{-3}$	33	$-1,3336114 \cdot 10^{-16}$
13	$4,3354994 \cdot 10^{-5}$	34	$-5,9064987 \cdot 10^{-18}$
14	$-1,0269378 \cdot 10^{-4}$	35	$5,0305714 \cdot 10^{-18}$
15	$1,4456928 \cdot 10^{-7}$	36	$1,1235768 \cdot 10^{-19}$
16	$8,9788109 \cdot 10^{-6}$	37	$-1,7770689 \cdot 10^{-19}$
17	$-3,5907897 \cdot 10^{-7}$	38	$-5,5843340 \cdot 10^{-22}$
18	$-6,8613431 \cdot 10^{-7}$	39	$5,9124699 \cdot 10^{-21}$
19	$5,3373192 \cdot 10^{-8}$	40	$-8,6112533 \cdot 10^{-23}$
20	$4,5633878 \cdot 10^{-8}$	41	$-1,8575824 \cdot 10^{-22}$
21	$-5,3051943 \cdot 10^{-9}$	42	$5,8771977 \cdot 10^{-24}$



# Příloha C

## Teorie pravděpodobnosti

Všechny zde uvedené věty a tvrzení patří do standardní teorie pravděpodobnosti. Příslušnou teorii včetně důkazů je možno najít například v knize [13].

### C.1 Transformace náhodné veličiny

Nechť  $X$  je jednorozměrná náhodná veličina s distribuční funkcí  $F(x) = P[X \leq x]$  a hustotou pravděpodobnosti  $f$ , která je s  $F$  svázána vztahem

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (\text{C.1})$$

Nechť  $g$  je borelovsky měřitelná invertibilní funkce, označme  $T = g^{-1}$ . Distribuční funkce náhodné veličiny  $g(X)$  je potom

$$F_g(x) = P[g(X) \leq x] = P[X \leq g^{-1}(x)] = F(T(x)). \quad (\text{C.2})$$

Je-li funkce  $T$  diferencovatelná, potom má  $g(X)$  hustotu

$$f_g(x) = \frac{d}{dx} F_g(x) = \frac{d}{dx} P[g(X) \leq x] = f(T(x)) |T'(x)|. \quad (\text{C.3})$$

**Tvrzení C.1.1.** *Nechť  $X$  je veličina s distribuční funkcí  $F(x)$  a hustotou pravděpodobnosti  $f(x)$ . Potom  $F(X)$  je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením.*

*Důkaz.* Položme  $g(x) = F(x)$ . Z předchozích úvah plyne

$$F_g(x) = F(T(x)) = F \circ F^{-1}(x) = id(x) = x, x \in [0, 1]. \quad (\text{C.4})$$

□

Toto tvrzení je základem unfoldingu. Připomeneme pojem sdruženého absolutně spojitého rozdělení (SASR). Vícerozměrná náhodná veličina  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  má SASR právě tehdy, když existuje nezáporná borelovsky měřitelná funkce  $f_X$ , pro níž platí:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad F_X = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t) dt.$$

Rozdělení náhodné veličiny  $g(X)$  v případě, že nelze invertovat funkci  $g$ , můžeme určit pomocí následující věty:

**Věta C.1.2.** *Nechť  $X \sim \text{SASR}$  a  $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  buď borelovsky měřitelná. Potom  $Y = g(X)$  má také SASR a platí*

$$f_Y(y) = \frac{\partial^m}{\partial y_1 \dots \partial y_m} \left( \int_{B_y} f_X(x) dx \right),$$

kde  $B_y = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \leq y\}$ , za předpokladu, že derivace existuje. Pokud  $m = n$  a  $g$  je navíc regulární a prosté zobrazení definované na otevřené množině  $G$ , pro kterou platí  $\int_G f_X = 1$ , potom

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) |J_{g^{-1}}(y)| & y \in g(G), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

## C.2 Příklady rozdělení

### C.2.1 Normální rozdělení

Náhodná veličina  $X$  má normální rozdělení, které značíme  $N(\mu, \sigma^2)$ , se střední hodnotou  $\mu$  a rozptylem  $\sigma^2$ , pokud platí:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{C.5})$$

kde  $x, \mu \in \mathbb{R}$  a  $\sigma > 0$ .

### C.2.2 Rozdělení $\chi_r$

Toto rozdělení je také známé jako odmocnina z  $\chi_r^2$  rozdělení. V případě, že  $r$  je přirozené číslo, můžeme rozdělení  $\chi_r$  definovat jako  $\sqrt{\sum_1^r N(0, 1)^2}$ . Tuto definici můžeme rozšířit na libovolnou hodnotu parametru  $r$ .

Řekněme, že náhodná veličina  $X$  má rozdělení  $\chi_r$  s parametrem  $r \in \mathbb{R}$ , pokud platí:

$$f_X(x) = \frac{2^{1-\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})} x^{r-1} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (\text{C.6})$$

Střední hodnota  $\mu$  je dána vztahem

$$\mu = \sqrt{2} \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2})} \quad (\text{C.7})$$

a rozptyl  $\sigma^2$  vztahem

$$\sigma^2 = k - \mu^2. \quad (\text{C.8})$$

## C.3 Centrální limitní teorém

**Věta C.3.1.** *Nechť  $\{X_j\}_{j=1}^{+\infty}$  je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením. Střední hodnotu těchto veličin označme  $\mu$  a rozptyl  $\sigma^2$ . Dále označme  $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$  a  $\bar{X}_n = S_n/n$ . Nechť dále*

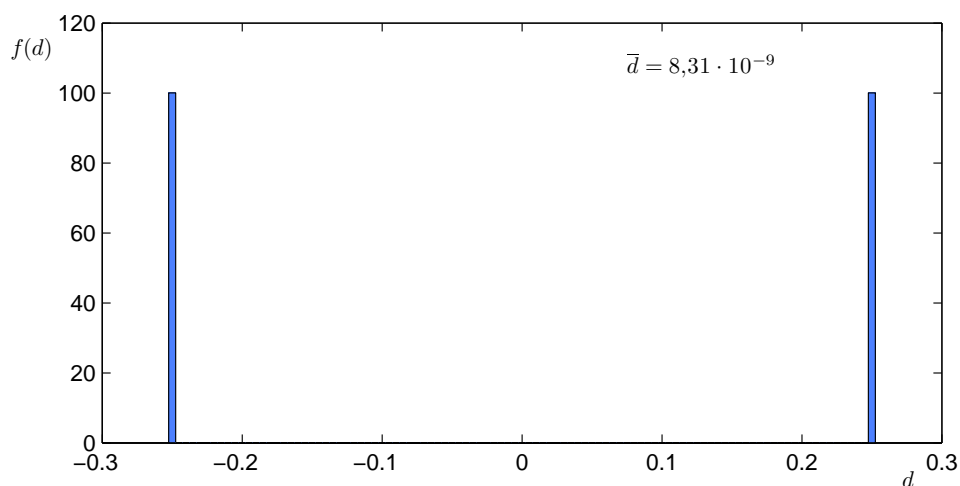
$$Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}.$$

Potom

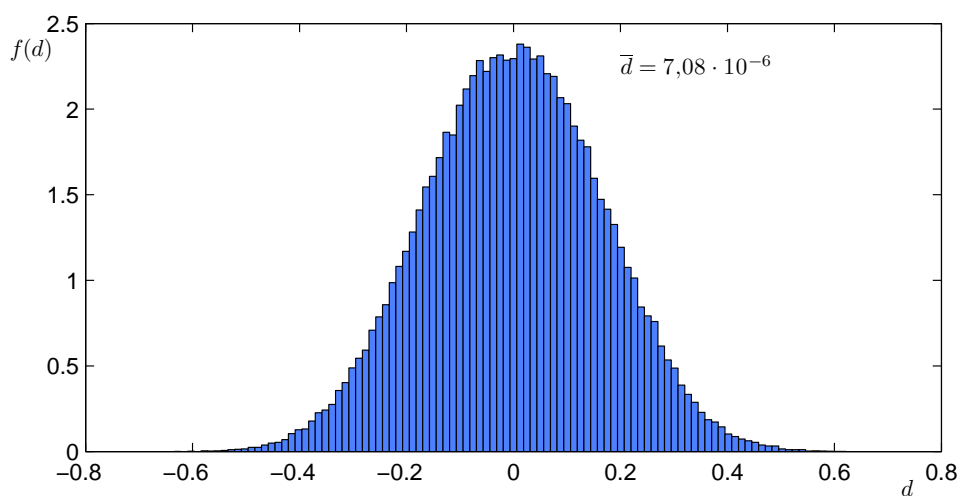
$$Y_n \rightarrow Y \sim N(0, 1).$$

## Příloha D

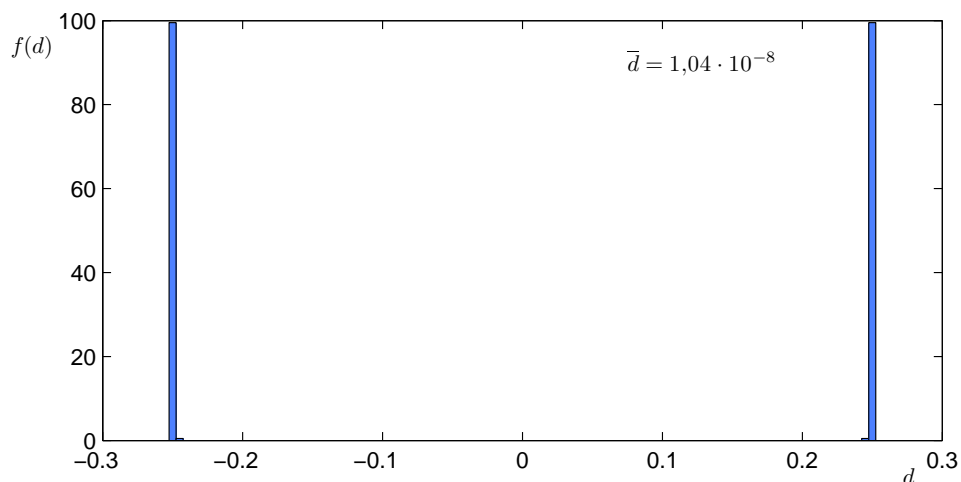
# Grafy numerických výsledků



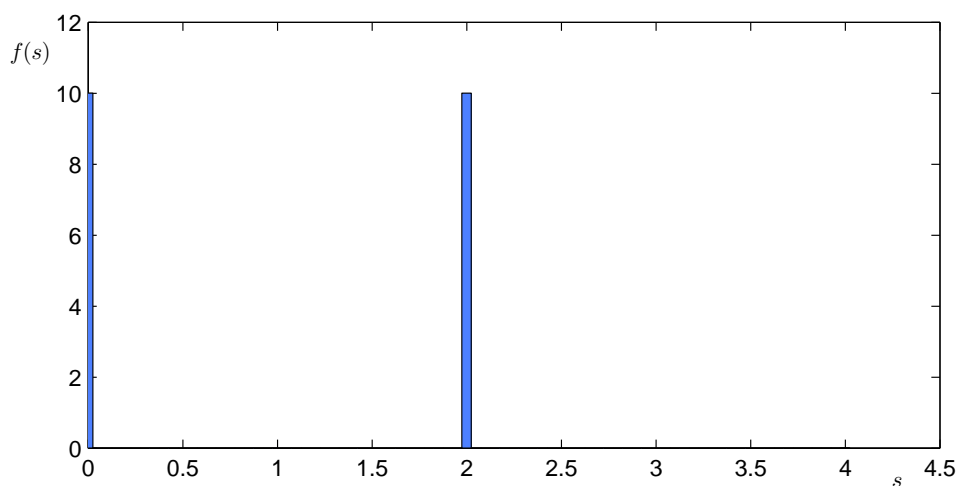
Obrázek D.1: Rozdělení posloupnosti  $\{d_j\}_{j=1}^N$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 1,001$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 5 \cdot 10^5$ , na kružnici.



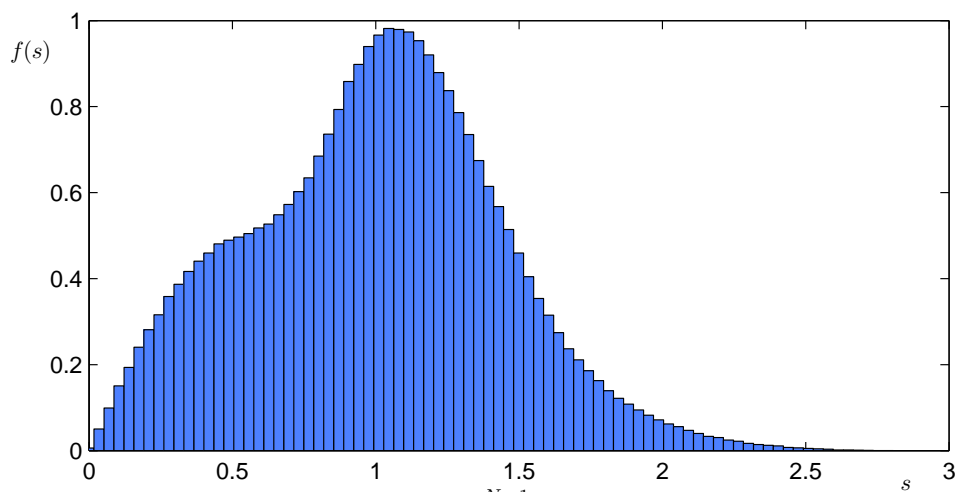
Obrázek D.2: Rozdělení posloupnosti  $\{d_j\}_{j=1}^N$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 1,9$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 1 \cdot 10^5$ , na kružnici.



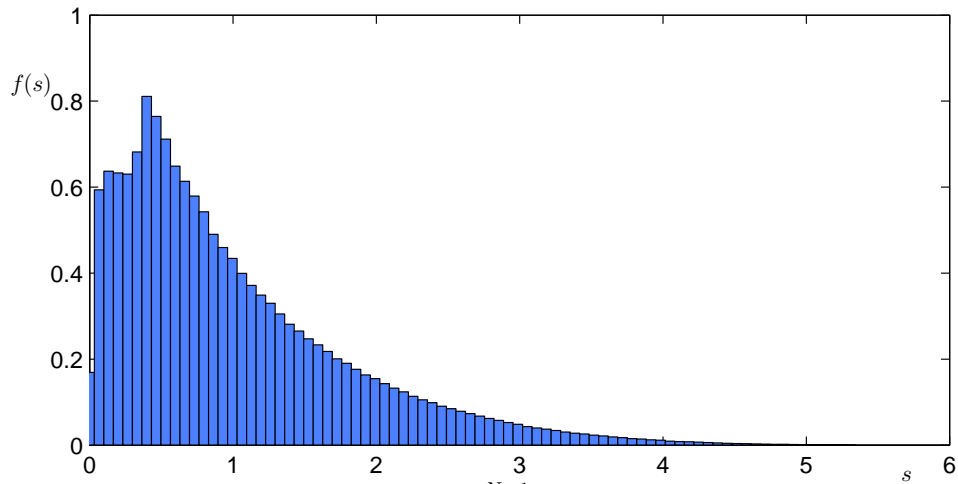
Obrázek D.3: Rozdělení posloupnosti  $\{d_j\}_{j=1}^N$  pro 47 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 1,001$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 1 \cdot 10^5$ , na kružnici.



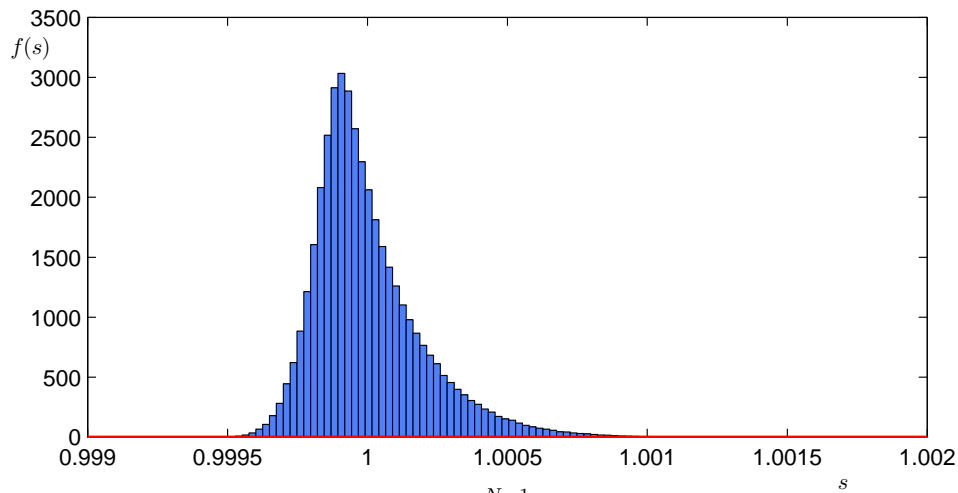
Obrázek D.4: Rozdělení posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 1,001$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 5 \cdot 10^5$ , na kružnici.



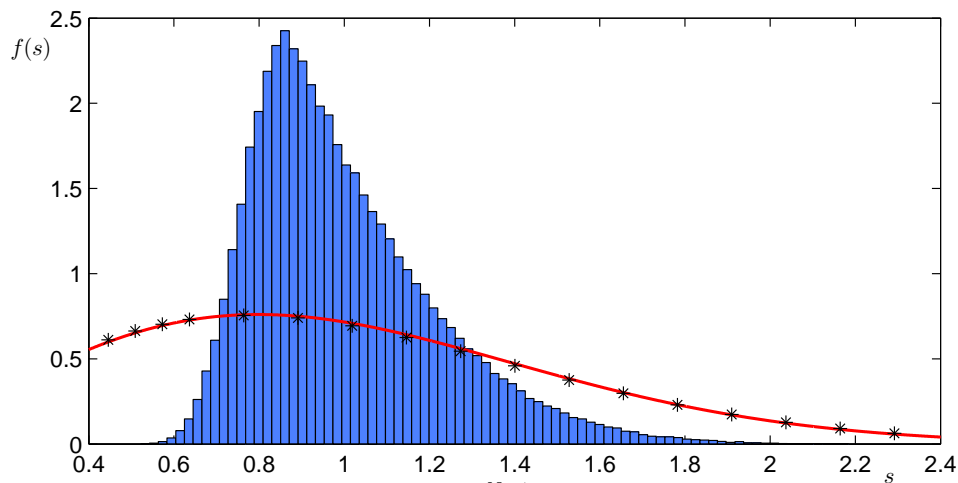
Obrázek D.5: Rozdělení posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = \sqrt{3}$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 2 \cdot 10^6$ , na kružnici.



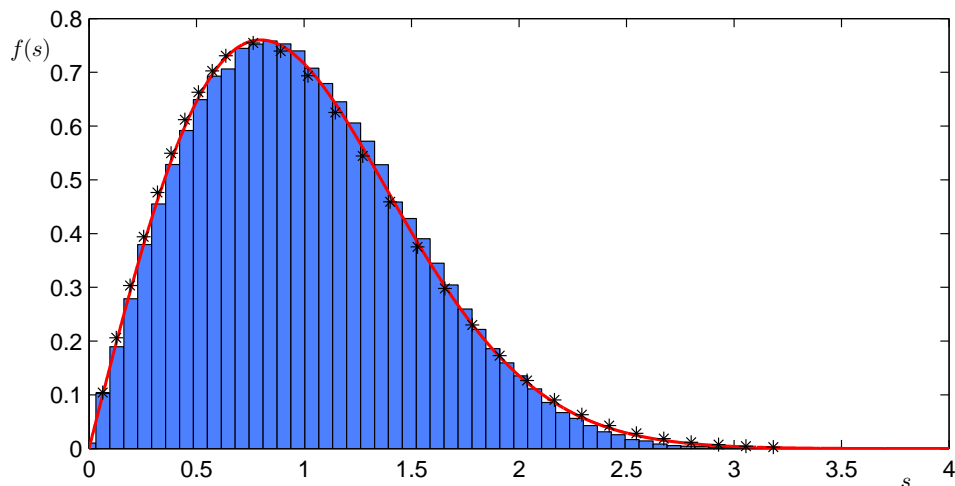
Obrázek D.6: Rozdělení posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 10$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 2 \cdot 10^6$ , na kružnici.



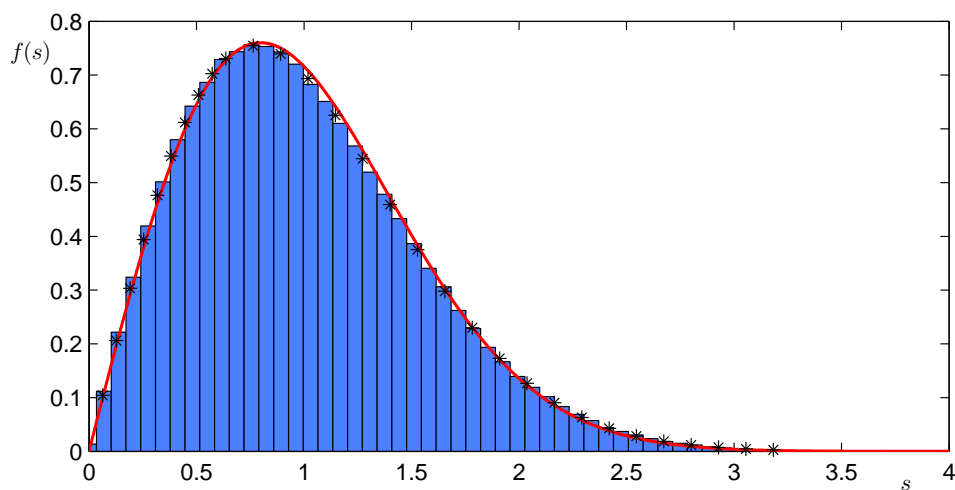
Obrázek D.7: Rozdělení posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 1,01$ ,  $\phi = \pi/18$ ,  $N = 5 \cdot 10^5$ , na kružnici.



Obrázek D.8: Rozdělení posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 1,5$ ,  $\phi = \pi/18$ ,  $N = 5 \cdot 10^5$ , na kružnici.

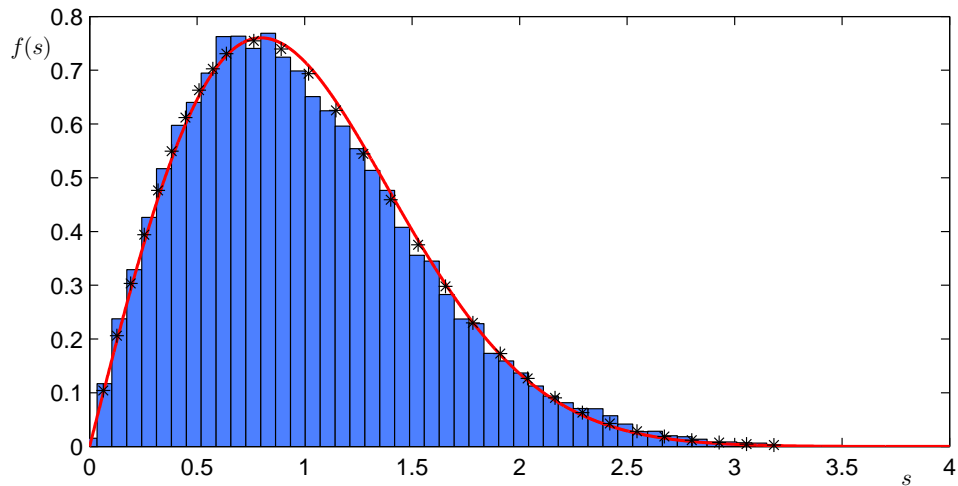


Obrázek D.9: Rozdělení posloupnosti  $\{\tilde{s}_j\}_{j=1}^M$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 1,001$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 5 \cdot 10^5$ , na kružnici.

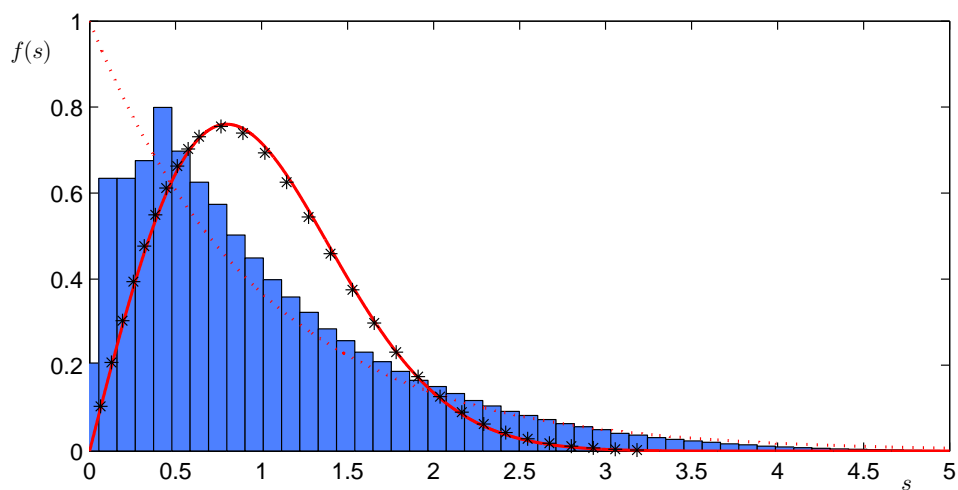


Obrázek D.10: Rozdělení posloupnosti  $\{\tilde{s}_j\}_{j=1}^M$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = \sqrt{3}$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 2 \cdot 10^6$ , na kružnici.

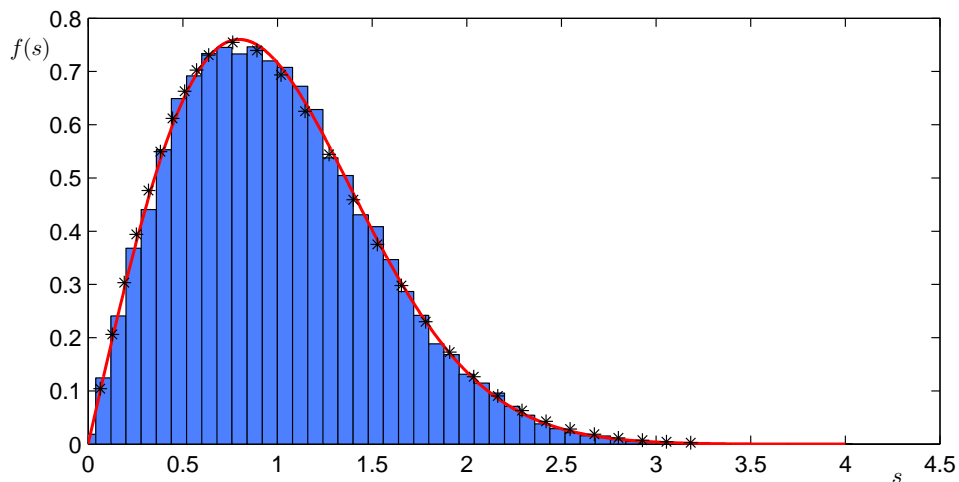




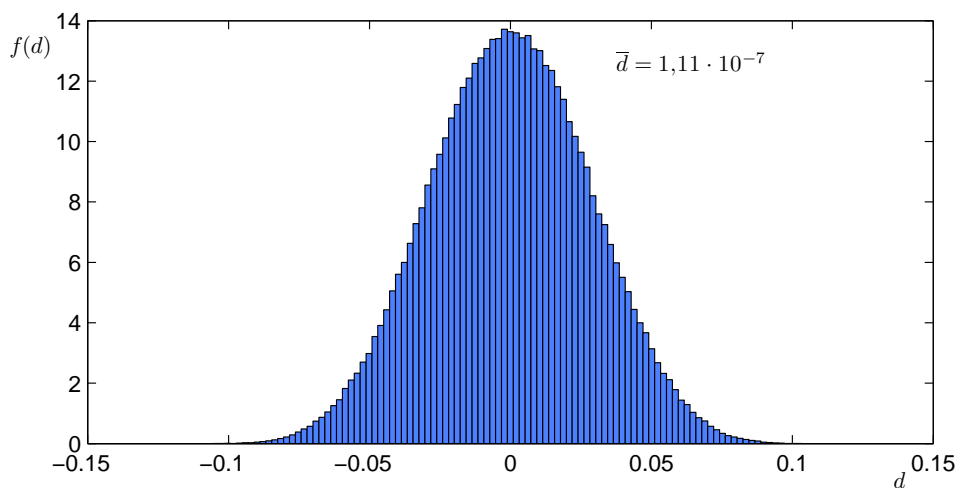
Obrázek D.11: Rozdělení posloupnosti  $\{\tilde{s}_j\}_{j=1}^M$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 1,9$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 1 \cdot 10^5$ , na kružnici.



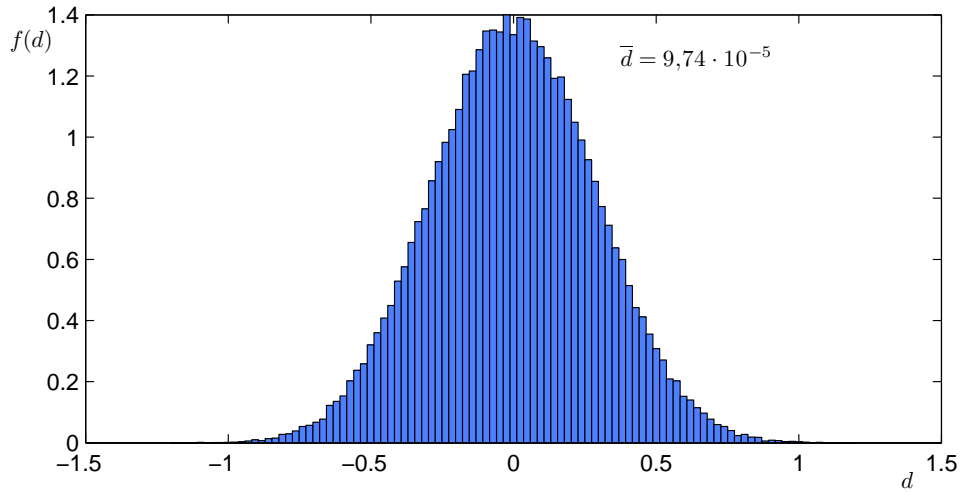
Obrázek D.12: Rozdělení posloupnosti  $\{\tilde{s}_j\}_{j=1}^M$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 10$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 2 \cdot 10^6$ , na kružnici. Tečkovaná čára odpovídá hustotě rozdělení Poissonova souboru.



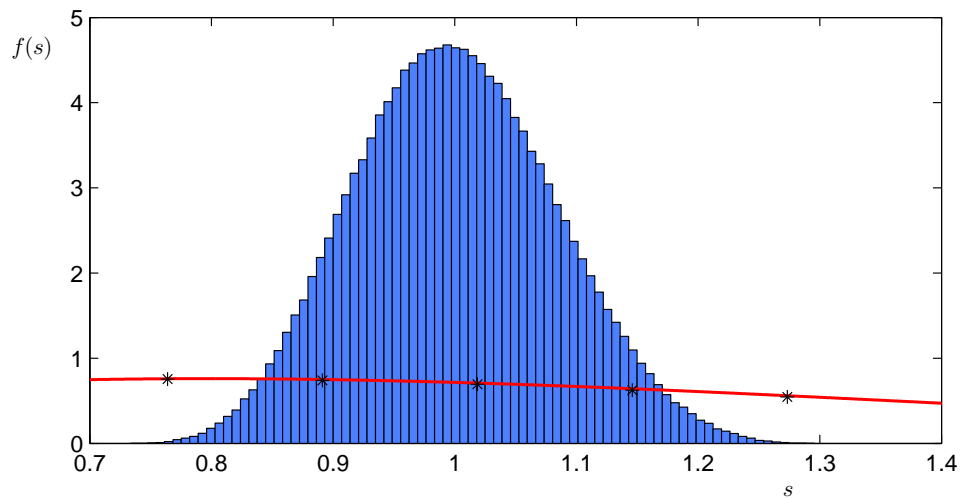
Obrázek D.13: Rozdělení posloupnosti  $\{\tilde{s}_j\}_{j=1}^M$  pro 47 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 1,001$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 1 \cdot 10^5$  na kružnici.



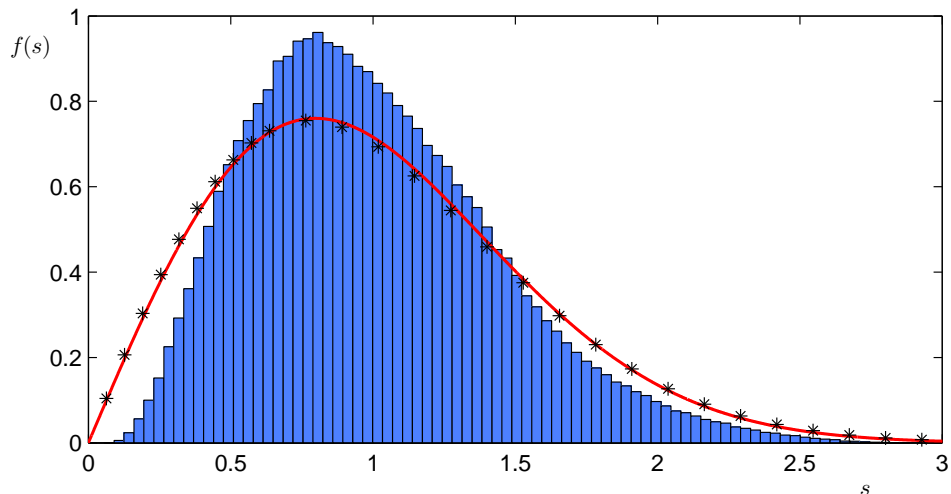
Obrázek D.14: Rozdělení posloupnosti  $\{d_j\}_{j=1}^N$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 1,1$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 5 \cdot 10^5$  na úsečce.



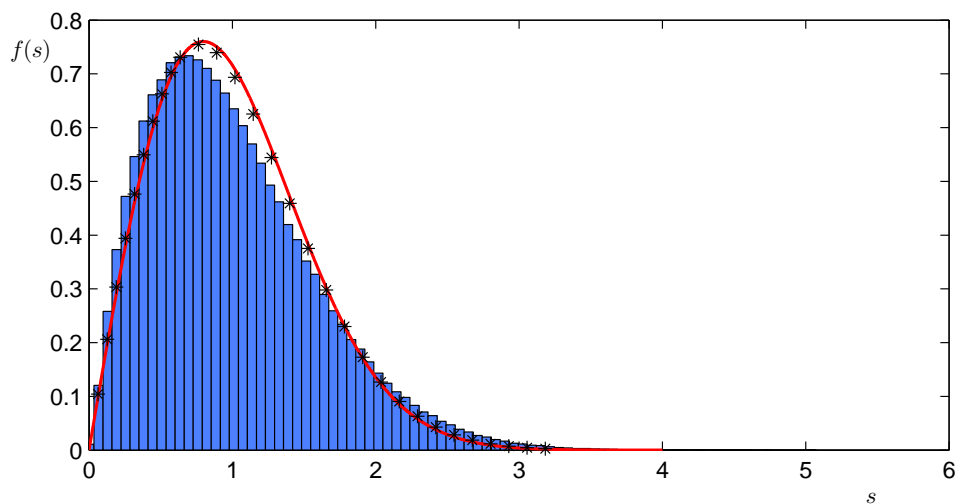
Obrázek D.15: Rozdělení posloupnosti  $\{d_j\}_{j=1}^N$  pro 26 bodových interakcí s parametry  $\alpha = \sqrt{3}$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 5 \cdot 10^5$  na úsečce.



Obrázek D.16: Rozdělení posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 1, 1$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 5 \cdot 10^5$  na úsečce.



Obrázek D.17: Rozdělení posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  pro 9 bodových interakcí s parametry  $\alpha = 1,8$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 5 \cdot 10^5$  na úsečce.



Obrázek D.18: Rozdělení posloupnosti  $\{s_j\}_{j=1}^{N-1}$  pro 26 bodových interakcí s parametry  $\alpha = \sqrt{3}$ ,  $\phi = 0$ ,  $N = 5 \cdot 10^5$  na úsečce.

# Literatura

- [1] MEHTA, M. L. *Random matrices*, Third Edition, San Diego: Elsevier, 2004
- [2] HAAKE, F. *Quantum signatures of chaos*, Berlin: Springer, 1992
- [3] STÖCKMANN, H-J. *Quantum chaos*, Cambridge: University press, 2000
- [4] AHIEZER, N. I., GLAZMAN, I. M. *The theory of linear operators on Hilbert space*, Moskva: NAUKA 1966
- [5] ALBEVERIO, S., GESZTESY, F., HØEGH-KROHN, R., HOLDEN, H. *Solvable Models in Quantum Mechanics*, New York: Springer, 1988
- [6] BLANK, J., EXNER, P., HAVLÍČEK, M. *Lineární Operátory v Kvantové Fyzice*, Praha: Karolinum, 1993
- [7] DUIFORD, N., SCHWARTZ, J. T. *Linear operators - Part II*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1964 (second printing)
- [8] KATO, T. *Perturbation Theory for Linear Operators*, Berlin: Springer, 1980
- [9] REED, M., SIMON, B. *Methods of modern mathematical physics, I Functional Analysis*, San Diego: Academic Press, 1980
- [10] REED, M., SIMON, B. *Methods of modern mathematical physics, II Fourier Analysis, Self-Adjointness*, San Diego: Academic Press, 1975
- [11] REED, M., SIMON, B. *Methods of modern mathematical physics, IV Analysis of Operators*, San Diego: Academic Press, 1978
- [12] KUIPERS, L., NIEDERREITER, H. *Uniform Distribution of Sequences*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1974
- [13] BILLINGSLEY, P. *Probability and measure*, Third Edition, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995
- [14] RUDIN, W. *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Praha: ACADEMIA, 2003
- [15] FYODOROV, Y. V. *Introduction to the Random Matrix Theory*, [arXiv.org: math-ph/0412017](https://arxiv.org/abs/math-ph/0412017)
- [16] BOHIGAS, O., GIANNONI, M. J., SCHMIT, C. *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws*, 1984, Physical Review Letters, vol. 52, n. 1
- [17] FÜLÖP, T., TSUITSUI, I. *A Free Particle on a Circle with Point Interaction*, [arXiv.org: quant-ph/9910062v1](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9910062v1), 1999
- [18] CHEON, T., FÜLÖP, T., TSUITSUI, I. *Symmetry, Duality and Anoholonomy of Point Interaction in One Dimension*, [arXiv.org: quant-ph/0008123v2](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0008123v2), 2000

- [19] FÜLÖP, T., TSUITSUI, I. *Irregular Dynamics in a Solvable One-Dimensional Quantum Graph*, [arXiv.org: quant-ph/0512239v2](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0512239v2), 2006
- [20] DABAGHIAN, YU., BLÜMEL, R. *Explicit Spectral formulas for scaling quantum graphs*, [arXiv.org: quant-ph/0310051v3](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0310051v3), 2004
- [21] BLÜMEL, R., DABAGHIAN, YU., JENSEN, R. V. *Mathematical Foundations of Regular Quantum Graphs*, [arXiv.org: quant-ph/0203126v1](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0203126v1), 2002
- [22] GNUTZMANN, S., SMILANSKY, U. *Quantum Graphs: Application to Quantum Chaos and Universal Spectral Statistics*, [arXiv.org: nlin.CD/0605028v2](https://arxiv.org/abs/nlin.CD/0605028v2), 2006
- [23] KOTTOS, T., SMILANSKY, U. *Periodic Orbit Theory and Spectral Statistics for Quantum Graphs*, [arXiv.org: chao-dyn/9812005v2](https://arxiv.org/abs/chao-dyn/9812005v2), 1998