ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

INTEGRABILNÍ SYSTÉMY
A POVRCHY S KONSTANTNÍ KŘIVOSTÍ

Lenka Kučerová

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

5. června 2006

Poděkování: Ráda bych poděkovala Prof. RNDr. L. Hlavatému, DrSc. za podporu při psaní práce, konzultace a pomoc při vyjasňování pojmů, jenž se v práci vyskytují. Dále mé poděkování patří všem, kteří mi s prací jakkoli pomohli.

Prohlášení: Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.
Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze, dne 5.června 2006 . . . .

Název práce: Integrabilní systémy a povrchy s konstantní křivostí

Autor: Lenka Kučerová

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Cílem práce bylo poskytnout stručný souhrn výsledků diferenciální geometrie ploch asociovaných s klasickými integrabilními parciálními diferenciálními rovnicemi. V první části je odvozena sine-Gordonova rovnice zavedením hlavních souřadnic na površích s konstantní negativní skalární křivostí, zatímco Liouvillova rovnice se objeví užitím konformních souřadnic. Na konci je ukázáno, že řešení obou rovnic lze získat lokálně izometrickými vnořeními do Lobačevského roviny. Další kapitola zavádí kvaternionový popis, ze kterého vyplynou standardní Laxovy konexe. Kapitola 3 jich následně využívá pro reprezentaci nulové křivosti. Společný výraz pro obecná řešení je nalezen díky Lie-Bäcklundově transformaci mezi Liouvillovou a sine-Gordonovou rovnicí. Posléze jsou odvozeny speciální solitonové povrchy. Výčet zahrnuje Diniho pseudosféru, NLS povrch a také izometrická vnoření do Lobačevského roviny, která odpovídají N-solitonovému řešení sine-Gordonovy rovnice. Sym-Tafelova formule je zmíněna jako způsob jak konstruovat solitonové povrchy.

Klíčová slova: Liouville, sine-Gordon, reprezentace nulové křivosti, Bäcklundova transformace, solitonový povrch

Title: Integrable systems and surfaces with constant curvature

Author: Lenka Kučerová

Abstract: The aim of this thesis was to provide a brief summary of results in differential geometry of surfaces related to classical integrable partial differential equations. In the first part, the sine-Gordon equation is obtained on surfaces of constant negative scalar curvature by the usage of principal curvature coordinates, while the Liouville one appears by the adoption of conformal coordinates. At the end, it is shown that the solutions of both equations can be expressed by local isometric immersions in the Lobachevskian plane. The next chapter introduces the quaternionic description from which standard Lax connexions arise. This induces the implementation of the zero curvature representation in section 3. A common expression for general solutions is found due to a Lie-Bäcklund transformation between Liouville and sine-Gordon. Finally, special soliton surfaces are derived. The listing contains a pseudosphere of Dini, an NLS surface and also isometric immersions in the Lobachevskian plane, which correspond to N-soliton solution of the sine-Gordon. The Sym-Tafel relation is mentioned as a way of how to construct soliton surfaces.

Key words: Liouville, sine-Gordon, zero curvature representation, Bäcklund transformation, soliton surface

Obsah

Úvod

Mnoho rovnic, které dnes nazýváme integrabilní, bylo studováno v diferenciální geometrii již v 19. století při popisu povrchů s danými podmínkami na jejich křivost. Příklady zahrnují minimální povrchy, povrchy s konstantní střední resp. s konstantní Gaussovou křivostí. V té době byly objeveny některé vlastnosti těchto rovnic, zejména pak takové, jež mají geometrickou interpretaci (např. existence Bäcklundovy transformace). Klasickým geometrům se podařilo podat detailní popis jen speciálních řešení, splňujících dodatečné podmínky (např. řešení, která odpovídají rotačním povrchům).

Značný pokrok v řešení nelineárních parciálních diferenciálních rovnic přinesla teorie solitonů, která vznikla v 60. letech. Vyjdeme-li od klíčového pojmu této teorie, Laxovské reprezentace nelineární rovnice

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = [A, B],$$

kde $A(\lambda) = \frac{\partial}{\partial x} + C(\lambda)$ zde považujeme za maticový diferenciální operátor prvního řádu a $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ za maticové operátory nultého řádu, můžeme Laxovu rovnost zapsat

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + C, \frac{\partial}{\partial t} + B\right] = 0. \tag{0.1}$$

Jsou-li $\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x} + C$, $\nabla_2 = \frac{\partial}{\partial t} + B$ kovariantní derivace v příslušných směrech, získáme za příslušných předpokladů rovnici pro nulovou křivost na varietě s konexí ∇ závisející na spektrálním parametru λ

$$F_{12} = [\nabla_1, \nabla_2] = 0. \tag{0.2}$$

Tato rovnice reprezentace nulové křivosti vyjadřuje podmínku kompatibility přeurčeného systému pro paralelní přenos vektoru resp. matice neznámých funkcí proměnných x, t

$$\begin{aligned} \nabla_1 \Phi &= 0, \\ \nabla_2 \Phi &= 0. \end{aligned} \tag{0.3}$$

V diferenciální geometrii ploch má tvar (0.3) systém Gauss-Weingartenových rovnic (A.1) pro pohyblivou triádu. Rovnici (0.2) tudíž odpovídají Gauss-Codazziho rovnice. Proto se zde budu zabývat souvislostmi nejznámějších integrabilních soustav a diferenciální geometrie ploch.

1 Odvození solitonových rovnic z diferenciální geometrie

1.1 Klasický výsledek díky hlavním souřadnicím

Definice 1.1 *Nechť zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^3$ z oblasti $U \subset \mathbb{R}^2$ je parametrizace povrchu M. Řekneme, že povrch je parametrizován souřadnicemi hlavních křivostí, pokud pro normálový a tečné vektory platí $f_{x_1}.f_{x_2} = 0$, $f_{x_1,x_2}.n = 0$, tj. pokud f_{x_1}, f_{x_2} jsou ortogonální a jsou vlastní vektory lineárního Weingartenova zobrazení $-dn \circ (df_u)^{-1} : T_u f \to T_u f$. To nastává právě když I a II fundamentální forma má v těchto souřadnicích tvar*

$$I = ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2,\ II = h_{11}dx_1^2 + h_{22}dx_2^2. \tag{1.1}$$

Pozn. 1.2 *Pro jednoduchost budeme dále používat pouze stručné označení hlavní souřadnice.*

Věta 1.3 *Nechť zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^3$ je parametrizace povrchu M a $p_0 \in M$ značí bod, v němž jsou vlastní čísla Weingartenova zobrazení různá $\lambda_1(p_0) \neq \lambda_2(p_0)$. Pak existují otevřené okolí $U_0 \subset U$, $p_0 \in U_0$, okolí $U_1 \subset \mathbb{R}^2$ a difeomorfismus $h : U_1 \to U_0$, takový že $F = f \circ h : U_1 \to \mathbb{R}^3$ je parametrizace hlavními souřadnicemi, tj. platí rovnice (1.1).*

Důkaz: Zvolme pevný bod p_0 na povrchu. Množina všech regulárních transformací souřadnic indukuje v bodě p_0 množinu všech regulárních lineárních transformací diferenciálů. Dále se využije faktu, že každou symetrickou kvadratickou formu lze regulární lineární transformací převést na normální tvar, ve kterém jsou na diagonále $\pm 1, 0$ a všude jinde 0. Tato transformace je pro neplochý prostor nutně pouze lokální. Tím máme zajištěn diagonální tvar metriky. II formu lze diagonalizovat díky tomu, že její vlastní čísla jsou různá. □

Věta 1.4 *Nechť $f(x_1, x_2)$ je lokální parametrizace hlavními souřadnicemi povrchu M v $\mathbb{R}^3$ s I a II formou danou (1.1) a označme $A_1 = \sqrt{g_{11}}, A_2 = \sqrt{g_{22}}$. Pak systém Gauss-Codazziho rovnic se redukuje na*

$$\begin{aligned} \Big(\frac{(A_1)_{x_2}}{A_2}\Big)_{x_2} + \Big(\frac{(A_2)_{x_1}}{A_1}\Big)_{x_1} &= -\frac{h_{11}h_{22}}{A_1 A_2}, \\ \Big(\frac{h_{11}}{A_1}\Big)_{x_2} &= \frac{h_{22}(A_1)_{x_2}}{(A_2)^2}, \\ \Big(\frac{h_{22}}{A_2}\Big)_{x_1} &= \frac{h_{11}(A_2)_{x_1}}{(A_1)^2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Důkaz: Je-li povrch parametrizován hlavními souřadnicemi, tvoří

$$e_1 = \frac{f_{x_1}}{A_1},\ e_2 = \frac{f_{x_2}}{A_2},\ e_3 = n$$

ortonormální triádu. Gauss-Codazziho rovnice lze maticově zapsat jako

$$P^1_{x_2} - P^2_{x_1} = [P^1, P^2], \tag{1.3}$$

což jsou podmínky kompatibility pro soustavu

$$(e_i)_{x_1} = \sum_j P^1_{ji} e_j, \quad (e_i)_{x_2} = \sum_j P^2_{ji} e_j,$$

neboli maticově

$$\begin{aligned} (e_1, e_2, e_3)_{x_1} &= (e_1, e_2, e_3)P^1, \\ (e_1, e_2, e_3)_{x_2} &= (e_1, e_2, e_3)P^2. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Platí $P^1_{ji} = (e_i)_{x_1} \cdot e_j, \quad P^2_{ji} = (e_i)_{x_2} \cdot e_j$.

Jelikož $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, je $P^k_{ij} + P^k_{ji} = 0$, tj. P^k jsou antisymetrické matice.

$[P^1, P^2]$ je také antisymetrická:

$$[P^1, P^2]^T = (P^1 P^2 - P^2 P^1)^T = (-P^2)(-P^1) - (-P^1)(-P^2) = -[P^1, P^2].$$

Proto stačí spočítat členy $12, 13, 23$ matic $P^1, P^2,\ [P^1, P^2]$.

$$P^1_{21} = (e_1)_{x_1} \cdot e_2 = \left(\frac{f_{x_1}}{A_1}\right)_{x_1} \cdot \frac{f_{x_2}}{A_2} = \left(\frac{f_{x_1 x_1}}{A_1} - \frac{f_{x_1}(A_1)_{x_1}}{(A_1)^2}\right) \cdot \frac{f_{x_2}}{A_2}.$$

Ale $f_{x_1} \cdot f_{x_2} = 0$ a

$$\begin{aligned} f_{x_1 x_1} \cdot f_{x_2} &= (f_{x_1} \cdot f_{x_2})_{x_1} - f_{x_1} \cdot f_{x_1 x_2} = \\ &= 0 - \frac{1}{2}(f_{x_1} \cdot f_{x_1})_{x_2} = -\frac{1}{2}((A_1)^2)_{x_2} = -A_1 (A_1)_{x_2}. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice pro P^1_{21} získáme

$$P^1_{21} = -\frac{(A_1)_{x_2}}{A_2}.$$

Dále určíme

$$P^1_{31} = (e_1)_{x_1} \cdot e_3 = -e_1 \cdot (e_3)_{x_1} = -\frac{f_{x_1}}{A_1} \cdot n_{x_1} = \frac{h_{11}}{A_2}.$$

Analogicky zjistíme P^1_{23}, P^2_{ij}, takže

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(A_1)_{x_2}}{A_2} & -\frac{h_{11}}{A_1} \\ -\frac{(A_1)_{x_2}}{A_2} & 0 & 0 \\ \frac{h_{11}}{A_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(A_2)_{x_1}}{A_1} & 0 \\ \frac{(A_2)_{x_1}}{A_1} & 0 & -\frac{h_{22}}{A_2} \\ 0 & \frac{h_{22}}{A_2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Dosazením (1.5) do (1.3) a výpočtem členů 12, 13, 23 matice $[P^1, P^2]$ přijdeme k hledaným třem Gauss-Codazziho rovnicím. □

Nechť $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizuje povrch, jehož Gaussova křivost je $K = \lambda_1\lambda_2 \equiv -1$. Pro vlastní čísla Weingartenova zobrazení odtud $\lambda_1 = -\frac{1}{\lambda_2} \neq 0$. Pak lze klást $\lambda_1 = \operatorname{tg} q,\ \lambda_2 = -\operatorname{cotg} q$, $q \in (0, \frac{\pi}{2})$. Díky větám (1.3), (1.4) můžeme předpokládat, že je povrch *lokálně* parametrizován hlavními souřadnicemi, platí rovnice (1.1) a Gauss-Codazziho systém (GC) má tvar (1.2). Pro vlastní čísla máme

$$\lambda_1 = \frac{h_{11}}{(A_1)^2},\ \lambda_2 = \frac{h_{22}}{(A_2)^2},\ \text{kde}\, A_1 = \sqrt{g_{11}},\ A_2 = \sqrt{g_{22}}.$$

$g_{ii},\ h_{ii}$ značí koeficienty I, II formy. Tedy

$$\frac{h_{11}}{A_1} = A_1 \operatorname{tg} q,\ \frac{h_{22}}{A_2} = -A_2 \operatorname{cotg} q. \tag{1.6}$$

Dosazením (1.6) do soustavy (1.2) dostaneme

$$\begin{gathered}(A_1 \operatorname{tg} q)_{x_2} = -\operatorname{cotg} q\ (A_1)_{x_2}, \\ (-A_2 \operatorname{cotg} q)_{x_1} = \operatorname{tg} q\ (A_2)_{x_1},\end{gathered}$$

neboli

$$\begin{gathered}(\operatorname{tg} q + \operatorname{cotg} q)(A_1)_{x_2} = -A_1(\cos^2 q)^{-1}\, q_{x_2}, \\ (\operatorname{tg} q + \operatorname{cotg} q)(A_2)_{x_1} = -A_2(\sin^2 q)^{-1}\, q_{x_1},\end{gathered}$$

takže

$$\frac{(A_1)_{x_2}}{A_1} = -\frac{\sin q}{\cos q}\, q_{x_2}, \quad \frac{(A_2)_{x_1}}{A_2} = -\frac{\cos q}{\sin q}\, q_{x_1}.$$

Integrací odtud

$$(\ln A_1)_{x_2} = (\ln \cos q)_{x_2},\ (\ln A_2)_{x_1} = (\ln \sin q)_{x_1},$$

a tudíž existují $c_1(x_1), c_2(x_2)$, pro něž

$$A_1 = e^{c_1(x_1)} \cos q,\ A_2 = e^{c_2(x_2)} \sin q.$$

Vždy $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, neboť $q \in (0, \frac{\pi}{2})$, což souhlasí s pozitivní definitností metriky. Provedeme-li transformaci souřadnic $(\widetilde{x}_1(x_1)), \widetilde{x}_2(x_2))$ tak, aby

$$\frac{d\widetilde{x}_1}{dx_1} = e^{c_1(x_1)},\ \frac{d\widetilde{x}_2}{dx_2} = e^{c_2(x_2)},$$

bude $\|f_{\widetilde{x}_1}\| = \cos q$ a $\|f_{\widetilde{x}_2}\| = \sin q$. To platí, jelikož

$$\frac{\partial f}{\partial \widetilde{x}_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \widetilde{x}_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} e^{-c_1(x_1)}, \tag{1.7}$$

přičemž $e_1 = \frac{f_{x_1}}{A_1}$, $e_2 = \frac{f_{x_2}}{A_2}$, $e_3 = n$ tvoří ortonormální triádu. Z rovnice (1.7) navíc vidíme, že $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ rovněž parametrizuje povrch hlavními souřadnicemi a II forma v $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ má vyjádření

$$\widetilde{h}_{11} = (\widetilde{A}_1)^2\ \operatorname{tg} q = \sin q\ \cos q,\ \widetilde{h}_{22} = -(\widetilde{A}_2)^2\ \operatorname{cotg} q = -\sin q\ \cos q,$$

kde

$$(\widetilde{A}_1)^2 = \cos^2 q,\ (\widetilde{A}_2)^2 = \sin^2 q.$$

Tím přicházíme k tvrzení:

Věta 1.5 *Nechť M je povrch v $\mathbb{R}^3$ s Gaussovou křivostí $K = -1$ konstantní. Pak existují lokální hlavní souřadnice x_1, x_2, ve kterých*

$$I = \cos^2 q\, dx_1^2 + \sin^2 q\, dx_2^2,\ II = \sin q\, \cos q\, (dx_1^2 - dx_2^2).$$

$2q$ má význam úhlu mezi asymptotickými směry. (GC)*-systém se redukuje na sine-Gordonovu rovnici*

$$q_{x_1x_1} - q_{x_2x_2} = \sin q\, \cos q. \tag{1.8}$$

Důkaz: Zbývá dopočítat (GC) rovnice a úhel mezi asymptotickými směry. Dosadíme $\widetilde{h}_{11}, \widetilde{h}_{22}$, $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ do (1.2). První rovnice přímočaře dává (1.8) a druhé dvě rovnice jsou splněny identicky. Z tvaru II formy je vidět, že $f_{x_1} \pm f_{x_2}$ jsou asymptotické směry. Ověříme-li jednotkovost $f_{x_1} \pm f_{x_2}$, plyne z

$$(f_{x_1} + f_{x_2}) \cdot (f_{x_1} - f_{x_2}) = \cos^2 q - \sin^2 q = \cos(2q),$$

že úhel mezi asymptotickými směry je $2q$. □

Mějme matice P^1, P^2 jako v důkazu věty (1.4), dosazením $\widetilde{h}_{11}$, $\widetilde{h}_{22}$, $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$ získáme matice, které odpovídají maticím konexí B, C z (0.1)

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0 & -q_{x_2} & -\sin q \\ q_{x_2} & 0 & 0 \\ \sin q & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & -q_{x_1} & 0 \\ q_{x_1} & 0 & \cos q \\ 0 & -\cos q & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Přejděme nyní k souřadnicím $x_1 = x_+ + x_-, x_2 = x_+ - x_-$. Pak $f_+ = f_{x_1} + f_{x_2}$, $f_- = f_{x_1} - f_{x_2}$. Přímý výpočet ukazuje, že

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_+^2 + 2\cos\psi\, dx_+ dx_- + dx_-^2, \\ II &= 2\sin\psi\, dx_+ dx_-, \end{aligned} \tag{1.10}$$

přičemž $\psi = 2q$. Sine-Gordonova rovnice nabývá standardní podoby

$$\partial_+ \partial_- \psi = \sin\, \psi. \tag{1.11}$$

Definice 1.6 *Souřadnice, jejichž I forma je $ds^2 = \lambda^2 dx_+^2 + 2\cos\psi\, dx_+ dx_- + \lambda^{-2} dx_-^2$ se zvou speciální Čebyševovy souřadnice. ψ má význam úhlu mezi parametrickými křivkami. Obecné Čebyševovy souřadnice splňují podmínku $g_{11,2} = g_{22,1} = 0$ nebo ekvivalentně pro Christoffelovy symboly* $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = 0$.

Důležitá vlastnost pseudosférických povrchů je, že asymptotické souřadnice splývají s Čebyševovými. Jako důsledek předchozího a základní věty teorie ploch (Bonnet) máme tvrzení

Věta 1.7 *Nechť ψ je libovolné řešení sine-Gordonovy rovnice* (1.11) *různé od $n\pi$. Potom existuje až na izometrii jednoznačně určený pseudosférický povrch s Gaussovou křivostí $K \equiv -1$ v $\mathbb{R}^3$ s I, II formou definovanou rovnicemi* (1.10).

Řešením $\psi = n\pi$ přiřazujeme množinu přímek v $\mathbb{R}^3$.

Pozn. 1.8 *Stejně lze postupovat i pro povrch s kladnou konstantní K, který neobsahuje kruhové body. Je-li $K = 1 = \lambda_1\lambda_2$, položíme $\lambda_1 = \mathrm{tgh}\, q, \lambda_2 = \mathrm{cotgh}\, q$. Odtud $ds^2 = \sinh^2 q\, dx_1^2 + \cosh^2 q\, dx_2^2$, $dl^2 = \sinh q\, \cosh q (dx_1^2 + dx_2^2)$. Gauss-Codazziho rovnice dávají eliptickou sinh-Gordonovu rovnici*

$$q_{x_{11}} + q_{x_{22}} = \sinh q \cosh q.$$

1.2 Užití konformních souřadnic

Souřadnicové výpočty se značně zjednoduší zavedením komplexní proměnné. Nechť $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

Definice 1.9 *Komplexní funkci $f(z, \bar{z}) = f(u, v)$, $z = u+iv$, zveme komplexně analytickou, pokud $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$.*

Pozn. 1.10 *Definice je ekvivalentní splnění Cauchy-Riemannových podmínek.*

Definice 1.11 *Má-li metrika na 2-dimenzionálním povrchu tvar*

$$ds^2 = h(u, v)(du^2 + dv^2) = h(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z}, \text{ kde } h(u, v) = h(z, \bar{z}) > 0, \tag{1.12}$$

určují u, v resp. $z, \bar{z}$ konformní souřadnice.

Lemma 1.12 *Nechť jsou na povrchu zvoleny konformní souřadnice. Změny souřadnic, které zachovávají konformní tvar metriky, jsou právě takové, že $z = z(w, \overline{w})$ je komplexně analytická funkce nebo složení komplexně analytické funkce s komplexním sdružením, což je komplexně analytická funkce v $\bar{z}$.*

Věta 1.13 *Mějme povrch vnořený do $\mathbb{R}^3$ s indukovanou Riemanovou metrikou*

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j. \tag{1.13}$$

Nechť $g_{ij}(x_1, x_2)$ jsou reálně analytické funkce a $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$. Potom existují konformní souřadnice u, v tak, že metrika je formy (1.12).

Důkaz: Pravou stranu rovnice (1.13) upravíme na součin a získáme

$$ds^2 = (\sqrt{g_{11}}dx_1 + \frac{g_{12} + i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}}dx_2)(\sqrt{g_{11}}dx_1 + \frac{g_{12} - i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}}dx_2),$$

což snadno ověříme roznásobením. Konformní souřadnice $u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)$ existují, pokud lze nalézt integrující faktor $\lambda(x_1, x_2)$, aby platilo

$$\begin{aligned} \lambda(\sqrt{g_{11}}dx_1 + \frac{g_{12} + i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}}dx_2) &= du + idv, \\ \bar{\lambda}(\sqrt{g_{11}}dx_1 + \frac{g_{12} - i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}}dx_2) &= du - idv. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Znásobením obou rovnic $ds^2 = |\lambda|^{-2}(du^2 + dv^2)$, tj. $h(u, v) = |\lambda|^{-2}$. Druhá rovnice soustavy (1.14) vznikne komplexním sdružením první, takže stačí řešit

$$\lambda(\sqrt{g_{11}}dx_1 + \frac{g_{12} + i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}}dx_2) = (\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial v}{\partial x_1})dx_1 + (\frac{\partial u}{\partial x_2} + i\frac{\partial v}{\partial x_2})dx_2,$$

neboli

$$\lambda\sqrt{g_{11}} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \lambda\frac{g_{12} + i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + i\frac{\partial v}{\partial x_2}. \tag{1.15}$$

Vyloučením λ přijdeme ke vztahu

$$(g_{12} + i\sqrt{g})(\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial v}{\partial x_1}) = g_{11}(\frac{\partial u}{\partial x_2} + i\frac{\partial v}{\partial x_2}), \tag{1.16}$$

který je ekvivalentní soustavě

$$g_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \sqrt{g}\frac{\partial v}{\partial x_1} = g_{11}\frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \sqrt{g}\frac{\partial u}{\partial x_1} + g_{12}\frac{\partial v}{\partial x_1} = g_{11}\frac{\partial v}{\partial x_2}. \tag{1.17}$$

Z rovnice (1.17) vyjádříme

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{g_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1} - g_{11}\frac{\partial u}{\partial x_2}}{\sqrt{g}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{g_{22}\frac{\partial u}{\partial x_1} - g_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}}{\sqrt{g}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{g_{11}\frac{\partial v}{\partial x_2} - g_{12}\frac{\partial v}{\partial x_1}}{\sqrt{g}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{g_{12}\frac{\partial v}{\partial x_2} - g_{22}\frac{\partial v}{\partial x_1}}{\sqrt{g}}. \tag{1.18}$$

Rovnosti v pravém sloupci se získají z (1.17) dosazením z levého sloupce. Spojitost druhých parciálních derivací u, v dává jejich záměnnost a tedy z (1.18) plyne nutnost splnění soustavy $Lu = 0,\ Lv = 0$, kde diferenciální operátor L je definován

$$L = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{g_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} - g_{11}\frac{\partial}{\partial x_2}}{\sqrt{g}}\right] + \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{g_{12}\frac{\partial}{\partial x_2} - g_{22}\frac{\partial}{\partial x_1}}{\sqrt{g}}\right]. \tag{1.19}$$

L říkáme Laplace-Beltramiho operátor a je zobecněním Laplaciánu na variety. Z teorie parciálních diferenciálních rovnic pro Laplace-Beltramiho rovnici $Lf = 0$ (Bel) plyne, že jsou-li g_{11}, g_{12}, g_{22} reálně analytické na U, má soustava (Bel) na U řešení u, v, které je bijekcí $(x_1, x_2) \to (u, v)$. Řeší-li u, v (Bel), pak má řešení (1.18), které určuje $grad\, u,\ grad\, v$ a tím i λ díky (1.15), což dokončuje důkaz. □

Věta 1.14 *Nechť u, v jsou konformní souřadnice na povrchu v $\mathbb{R}^3$. V tom případě je Gaussova křivost dána*

$$K = -\frac{2}{h(u,v)} \triangle \ln h(u,v). \tag{1.20}$$

$\triangle$ značí Laplaceův operátor.

Důkaz vynecháme, neboť v další kapitole spočítáme snáze skalární křivost R a užijeme vztah $R = 2K$, viz. větu (A.4). Přejdeme-li ke konformním souřadnicím $z, \bar{z}$, najdeme pro K

$$K = -\frac{2}{h(z,\bar{z})}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln h(z,\bar{z}). \tag{1.21}$$

Protože $h(z,\bar{z}) > 0$, lze položit $h(z,\bar{z}) = e^{\varphi(z,\bar{z})}$. Na povrchu s křivostí $K \equiv -1$ tímto z (1.21), resp. (1.20) získáme Liouvillovy rovnice

$$\triangle\varphi(u,v) = \frac{1}{2}e^{\varphi(u,v)}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{2}e^{\varphi(z,\bar{z})}, \tag{1.22}$$

které patří do (GC) systému, spolu s rovnicí pro derivaci střední křivosti a jejím komplexním sdružením.

Pozn. 1.15 *Jelikož pro střední křivost v příp. konformních souřadnic máme $H = \frac{h_{11}+h_{22}}{2h(z,\bar{z})}$, můžeme na minimálním povrchu $H \equiv 0$, který neobsahuje planární body, zvolit tzv. izotermální souřadnice. V nich je tedy metrika konformní a II forma je dána $II = -du^2 + dv^2$. Hopfův diferenciál je v tomto případě reálný. Pro Gaussovu křivost platí $K = -e^{-2\varphi(u,v)}$ a φ splňuje Liouvillovu rovnici $\triangle\varphi = \frac{1}{2}e^{-\varphi}$. Ta je zároveň Gaussovou rovnicí. Codazziho rovnice jsou splněny automaticky díky volbě I, II formy, a proto každé řešení Liouvillovy rovnice určuje minimální povrch až na izometrii jednoznačně.*

1.3 Řešení Liouvillovy a sine-Gordonovy rovnice pomocí vnoření do Lobačevského roviny

Nejprve dokážeme rovnosti (1.21), (1.22) přes Riemannovu geometrii. Zároveň získáme ještě jednou rovnici (1.11) jiným postupem, protože přitom obdržíme vztahy, které budeme používat později. Metrika konformních souřadnic vyhovuje Čebyševově podmínce $\partial_i g_{jj} = 0, \quad i,j = 1,2$. Protože torze Levi-Civitovy konexe je nulová, platí $\nabla_1\partial_2 = \nabla_2\partial_1$. Z čehož dále, využitím identity platné pro libovolná hladká vektorová pole na varietě s Levi-Civitovou konexí $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$:

$$X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >,$$

plyne $< \nabla_1\partial_2, \partial_2 > + < \partial_2, \nabla_1\partial_2 > = \partial_1 < \partial_2, \partial_2 > = \partial_1 g_{22} = 0$. Obdobně pro ostatní skalární součiny, tudíž $\nabla_i\partial_j = 0$ pro $i \neq j$. Pomocí vzorce $\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}\sum_k g^{lk}(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$ potom vyjádříme

$$\begin{aligned}\nabla_1\partial_1 &= \frac{1}{g}(-g_{12}\partial_1 g_{12}\partial_1 + g_{11}\partial_1 g_{12}\partial_2),\\ \nabla_2\partial_2 &= \frac{1}{g}(g_{22}\partial_2 g_{12}\partial_1 - g_{12}\partial_2 g_{12}\partial_2),\end{aligned}$$

kde $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. Proto

$$R_{1212} = \partial_1\partial_2 g_{12} + \frac{g_{12}}{g}\partial_1 g_{12}\partial_2 g_{12}.$$

Skalární křivost R je díky symetriím Riemannova tenzoru rovna $R = \frac{2}{g}R_{1212}$. Dosadíme-li do této rovnosti konformní metriku $g_{12} = \frac{1}{2}e^{\varphi(z,\bar{z})}, g_{11} = g_{22} = 0$, získáme

$$R = -4e^{-\varphi(z,\bar{z})}\partial\bar{\partial}\varphi(z,\bar{z}),$$

což užitím věty (A.4) dává vzorec (1.20). Volbou g_{ij} ze speciální Čebyševovy metriky, vyjde

$$R = -2\frac{\partial_+\partial_-\psi}{\sin\psi}.$$

Fixováním $R \equiv -2$ obdržíme kýžené rovnice (1.22), (1.11).

Dále využijeme existence privilegovaných povrchů mezi všemi s konstantní Gaussovou křivostí:

Věta 1.16 *Povrch v $\mathbb{R}^3$ s metrikou* (1.12) *a konstantní Gaussovou křivostí K je lokálně izometrický*

i) sféře pro $K > 0$,

ii) rovině pro $K = 0$,

iii) Lobačevského rovině $\mathbb{H}$ pro $K < 0$.

Důkaz: Z (1.21) pro K konstantní dostáváme

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{K}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\right) = e^{-\varphi}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^2\partial\bar{z}} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\right)\\ &= e^{-\varphi}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right),\end{aligned}$$

takže funkce $\partial^2\varphi/\partial z^2 - \frac{1}{2}(\partial\varphi/\partial z)^2 = \psi(z)$ je analytická. Komplexně analytickou transformací souřadnic $z = f(\xi)$ se metrika změní na

$$ds^2 = g(z,\bar{z})\left|\frac{df}{d\xi}\right|^2 d\xi d\bar{\xi} = \widetilde{g}(\xi,\bar{\xi})\, d\xi d\bar{\xi},$$

přičemž $g(z,\bar{z}) = e^{\varphi(z,\bar{z})}$. Zavedeme-li $\widetilde{\varphi}(\xi,\bar{\xi})$ jako $\widetilde{g}(\xi,\bar{\xi}) = e^{\widetilde{\varphi}}$, platí

$$\widetilde{\varphi}(\xi,\bar{\xi}) = \varphi(z,\bar{z}) + \ln\frac{df}{d\xi} + \ln\frac{d\bar{f}}{d\bar{\xi}}. \tag{1.23}$$

$\widetilde{\psi}$ definujeme stejně jako ψ, a tedy je rovněž komplexně analytická. Přímým výpočtem ověříme:

$$\widetilde{\psi}(\xi) = \psi(z)(f')^2 + \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2, \quad \text{kde } f' = \frac{df}{d\xi}.$$

Křivost je konstantní právě, když $\widetilde{\psi} \equiv 0$, proto hledáme f tak, aby splňovalo diferenciální rovnici

$$\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = -\psi(f(\xi))(f')^2.$$

Z teorie diferenciálních rovnic vyplývá existence analytického řešení. Zvolme tedy takové f, pak

$$\frac{\partial^2 e^{-\widetilde{\varphi}/2}}{\partial\xi^2} = -\frac{1}{2}e^{-\widetilde{\varphi}/2}\left(\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial\xi^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\xi}\right)^2\right) = 0.$$

Vztah dává pro $\xi = u + iv$ ekvivalentní soustavu

$$\frac{\partial^2 e^{-\widetilde{\varphi}/2}}{\partial u\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 e^{-\widetilde{\varphi}/2}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 e^{-\widetilde{\varphi}/2}}{\partial v^2}. \tag{1.24}$$

Řešení systému (1.24) je $e^{-\widetilde{\varphi}/2} = a(u^2+v^2) + b_1 u + b_2 v + c = a\xi\bar{\xi} + b\xi + \bar{b}\bar{\xi} + c$; $a, c \in \mathbb{R}$. Tím přicházíme k vyjádření pro metriku

$$ds^2 = \frac{d\xi d\bar{\xi}}{(a\xi\bar{\xi} + b\xi + \bar{b}\bar{\xi} + c)^2}. \tag{1.25}$$

Ze vzorce (1.21) dostaneme $K = 4(ac - b\bar{b})$. Lineárně lomenou transformací převedeme metriku (1.25) na tvar

i) $\dfrac{4R^4 dz d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$, pro $K = 4(ac - b\bar{b}) > 0$;

ii) $dz d\bar{z}$, pro $K = 4(ac - b\bar{b}) = 0$;

iii) $\dfrac{4R^4 dz d\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$, pro $K = 4(ac - b\bar{b}) < 0$,

v čemž poznáváme metriku sféry (B.1), roviny a Lobačevského roviny (B.3). □

Pro Lobačevského metriku (B.4) na $\mathbb{H}$ je $e^{\varphi(w,\overline{w})} = -4/(w-\overline{w})^2$ řešení Liouvillovy rovnice (1.22). V případě obecného pseudosférického povrchu M s konformními resp. Čebyševovými souřadnicemi izometrická vnoření do $\mathbb{H}$ rovněž dávají řešení rovnic (1.22), resp. (1.11). Z lemmatu (1.12) plyne, že pro Liouvillův případ musí být w holomorfní či antiholomorfní funkcí z. Volme například $w = w(z)$, $\overline{w} = \overline{w}(\bar{z})$. Pak indukovaná metrika na M je dána

$$\begin{gathered} ds^2 = e^{\varphi(z,\bar{z})} dz d\bar{z}, \\ e^{\varphi(z,\bar{z})} = -4\frac{\partial w \bar{\partial}\overline{w}}{(w-\overline{w})^2}, \quad \bar{\partial} w = \partial\overline{w} = 0, \end{gathered} \tag{1.26}$$

což je známá Liouvillova formule pro obecná řešení (1.22). Můžeme si všimnout invariance Liouvillovy rovnice vůči změně souřadnic (1.23). Předpokládáme-li, že pullback metriky (B.4) na pseudosférický povrch je Čebyševovská metrika (1.10) se souřadnicemi (x_+, x_-), dostaneme pro $w = w(x_+, x_-, \lambda), \overline{w} = \overline{w}(x_+, x_-, \lambda)$

$$\begin{aligned} e^{\pm i\psi} &= -4\frac{\partial_\pm w \partial_\mp \overline{w}}{(w-\overline{w})^2}, \\ \partial_\pm w \partial_\pm \overline{w} &= -\frac{\lambda^{\pm 2}}{4}(w-\overline{w})^2. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Užitím vzorců pro Levi-Civitovu konexi na Lobačevského rovině je možné se přesvědčit, že ψ dané podmínkami (1.27) skutečně řeší sine-Gordonovu rovnici (1.11). V části (3.2) dokážeme, že (1.27) dokonce popisuje všechna řešení této rovnice. Vnoření do $\mathbb{H}$ jsou definovány až na izometrie $\mathbb{H}$, vůči nimž jsou rovnice (1.26), (1.27) invariantní.

2 2x2 maticová reprezentace

2.1 Diferenciální rovnice pro povrchy s konformní parametrizací

Mějme parametrizaci $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ povrchu M a nechť metrika na M je konformní, tj. tvaru (1.12). Souřadnice $z, \bar{z}$ probíhají oblast $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$. Díky konformnosti parametrizace platí pro skalární součiny $< F_z, F_z >=< F_{\bar{z}}, F_{\bar{z}} >= 0,\ < F_z, F_{\bar{z}} >= \frac{1}{2}e^{\varphi}$, přičemž $< a, b >= \bar{a}_i b_i$. $\{F_z, F_{\bar{z}}, N\}$ tvoří pohyblivou triádu na M, kde N značí jednotkový normálový vektor. Jsou splněny Gauss-Weingartenovy rovnice (GW) viz. appendix, které v této notaci mají tvar:

$$\begin{gathered} \sigma_z = \mathcal{U}\sigma,\ \sigma_{\bar{z}} = \mathcal{V}\sigma,\ \sigma = (F_z, F_{\bar{z}}, N)^T, \\ \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \partial\varphi & 0 & Q \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}He^{\varphi} \\ -H & -2e^{-\varphi}Q & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}He^{\varphi} \\ 0 & \bar{\partial}\varphi & \bar{Q} \\ -2e^{-\varphi}\bar{Q} & -H & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

kde $Q =< F_{zz}, N >,\ < F_{z,\bar{z}}, N >= \frac{1}{2}He^{\varphi}$.

Dále máme pro $< II(dx, dy)^T, (dx, dy)^T >= - < dF, dN >$

$$II = \begin{pmatrix} Q + \bar{Q} + He^{\varphi} & i(Q - \bar{Q}) \\ i(Q - \bar{Q}) & -(Q + \bar{Q}) + He^{\varphi} \end{pmatrix},$$

křivosti $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(II \cdot I^{-1}),\ K = \det(II \cdot I^{-1}) = H^2 - 4Q\bar{Q}e^{-2\varphi}$. Pro $K = -1$ tudíž platí $4Q\bar{Q}e^{-2\varphi} - 1 = H^2$. Gauss-Codazziho rovnice (GC)

$$\mathcal{U}_{\bar{z}} - \mathcal{V}_z = [\mathcal{U}, \mathcal{V}], \tag{2.2}$$

nabývají formy

$$\varphi_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}H^2e^{\varphi} - 2Q\bar{Q}e^{-\varphi} = 0,\ Q_{\bar{z}} = \frac{1}{2}H_z e^{\varphi},\ \bar{Q}_z = \frac{1}{2}H_{\bar{z}}e^{\varphi}.$$

2.2 Popis pomocí kvaternionů

Označme $\mathbf{H}$ algebru kvaternionů s bazí $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ a $\mathbf{H}_*$ budiž multiplikativní grupa $\mathbf{H}\setminus\{0\}$. Platí $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$. S touto bazí spojujeme Pauliho matice σ_α :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\mathbf{i},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\mathbf{j},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\mathbf{k}.$$

Prostor $\mathbb{R}^3$ identifikujeme s prostorem imaginárních kvaternionů $\mathrm{Im}\,\mathbf{H}$

$$X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \longleftrightarrow \quad X = -i\sum_{\alpha=1}^{3} X_\alpha \sigma_\alpha \in \mathrm{Im}\,\mathbf{H}.$$

Skalární součin v $\mathrm{Im}\,\mathbf{H}$ je definován $< X, Y >= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}XY$. Matice získané tímto ztotožněním z F, N označíme opět F, N. $\Phi \in \mathbf{H}_*$ nazvěme kvaternion, jenž transformuje bázi $\{\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ na bázi $\{F_x, F_y, N\}$. Kvaternion Φ musí mít tvar

$$\Phi = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 \neq 0.$$

Tedy $F_x = \frac{1}{2}e^{\varphi/2}\Phi^{-1}\mathbf{j}\Phi,\ F_y = \frac{1}{2}e^{\varphi/2}\Phi^{-1}\mathbf{i}\Phi,\ N = \Phi^{-1}\mathbf{k}\Phi$. Pak

$$F_z = -ie^{\varphi/2}\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Phi,\ F_{\bar{z}} = -ie^{\varphi/2}\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi. \tag{2.3}$$

Kvaternion Φ splňuje diferenciální rovnice, které odvodíme z podmínek kompatibility $F_{z\bar{z}} = F_{\bar{z}z}$, přičemž zavedeme

$$U = \Phi_z\Phi^{-1}, \quad V = \Phi_{\bar{z}}\Phi^{-1} : \tag{2.4}$$

$$-ie^{\varphi/2}\frac{\bar{\partial}\varphi}{2}\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Phi - ie^{\varphi/2}\Phi^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V\right]\Phi =$$

$$= -ie^{\varphi/2}\frac{\partial\varphi}{2}\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi - ie^{\varphi/2}\Phi^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, U\right]\Phi.$$

Maticová rovnice ve složkách dává $\bar{\partial}\varphi = 2(V_{11} - V_{22})$, $\partial\varphi = 2(U_{22} - U_{11})$, $U_{21} = -V_{12}$. Protože z (2.1) plyne

$$F_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}He^{\varphi}N, \quad F_{zz} = \partial\varphi F_z + QN, \quad F_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\partial}\varphi F_{\bar{z}} + \bar{Q}N,$$

získáme z výrazů (2.3) derivováním jednotlivé složky

$$\begin{aligned} F_{z\bar{z}} = \tfrac{1}{2}He^{\varphi}N &\longrightarrow U_{21} = -V_{12} = \tfrac{1}{2}He^{-\varphi/2}, \\ F_{zz} = \partial\varphi F_z + QN &\longrightarrow U_{12} = -Qe^{\varphi/2}, \\ F_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\partial}\varphi F_{\bar{z}} + \bar{Q}N &\longrightarrow V_{21} = \bar{Q}e^{\varphi/2}. \end{aligned}$$

Nyní zbývá spočítat diagonální koeficienty U, V. Kvaternion Φ máme určen až na násobení skalárním faktorem. Jelikož grupa izometrií $\mathbb{H}$ je $SL(2, \mathbb{R})$, budeme požadovat, aby konexe U, V ležely v $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, tj. byly bezstopé.

Věta 2.1 *Kvaternion* Φ *splňuje rovnice* (2.4)*, kde* U, V *mají tvar*

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\varphi}{4} & -Qe^{\varphi/2} \\ \frac{1}{2}He^{-\varphi/2} & \frac{\partial\varphi}{4} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\partial}\varphi}{4} & -\frac{1}{2}He^{-\varphi/2} \\ \bar{Q}e^{\varphi/2} & -\frac{\bar{\partial}\varphi}{4} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Lemma 2.2 Φ *řeší Diracovu rovnici*

$$e^{-\varphi/2}\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix}\Phi = \frac{1}{2}H\Phi.$$

Důkaz: Po přenásobení rovnice Φ^{-1} a vyderivování, získáme rovnice pro U_{21}, V_{12} a jejich komplexní sdružení. □

Pro minimální povrchy $H = 0$ vyjde v těchto souřadnicích $Q = -\frac{e^{\varphi}}{2}$. Gaussova rovnice je Liouvillova ve shodě s pozn. (1.15). V U, V poznáváme standardní Liouvillovy laxovské konexe.

2.3 CMC povrchy

Je-li střední křivost H konstantní, získáme z (GC) systému rovnice

$$\varphi_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}H^2 e^{\varphi} - 2Q\bar{Q}e^{-\varphi} = 0,\ Q_{\bar{z}} = 0.$$

Ty jsou invariantní vůči transformaci $Q \to Q^t = \lambda Q,\ \lambda = e^{2it}$, kde $t \in \mathbb{R}$ se říká parametr deformace. Tato transformace nemění metriku ani střední a Gaussovu křivost $K = -2(\partial\bar{\partial}\varphi)e^{-\varphi}$. Tudíž se navíc zachovávají i obě hlavní křivosti. V okolí bodu $Q \neq 0$ lze konformní změnou souřadnic $z = \tilde{z}(z)$ lokálně normalizovat $Q =< F_{z,\bar{z}}, N >$ na $H/2$. V této parametrizaci rozpoznáváme v systému (2.6), získaném z (2.5) dosazením $Q \to Q^t$, Laxovu reprezentaci pro eliptickou sinh-Gordonovu rovnici, která je první z (GC) systému:

$$\partial\bar{\partial}\varphi + H\sinh\varphi = 0.$$

Druhá rovnost z (GC) je splněna identicky. V části (4.3) ukážeme, že při znalosti $\Phi(z, \bar{z}, \lambda)$ pro všechna $\lambda = e^{2it}$, lze (GW) explicitně vyřešit, přičemž integrace vzhledem k $z, \bar{z}$ se nahradí derivací dle t :

Věta 2.3 *Nechť $\Phi(z, \bar{z}, \lambda = e^{2it})$ je řešení systému*

$$\Phi_z = U(\lambda)\Phi, \quad \Phi_{\bar{z}} = V(\lambda)\Phi,$$
$$U = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\varphi}{4} & -\lambda Q e^{\varphi/2} \\ \frac{1}{2}He^{-\varphi/2} & \frac{\partial\varphi}{4} \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\partial}\varphi}{4} & -\frac{1}{2}He^{-\varphi/2} \\ \frac{1}{\lambda}\bar{Q}e^{\varphi/2} & -\frac{\bar{\partial}\varphi}{4} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Pak F, N definované vzorci

$$F = -\frac{1}{H}(\Phi^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\Phi - i\Phi^{-1}\sigma_3\Phi), \quad N = -i\Phi^{-1}\sigma_3\Phi \tag{2.7}$$

popisují CMC povrch s metrikou e^{φ}, střední křivostí H a $Q^t = e^{2it}Q$, které je Hopfovým diferenciálem. Obráceně je-li F konformní parametrizace CMC povrchu s metrikou e^{φ}, H a Q^t, pak je F dáno rovnicí (2.7)*, kde Φ řeší soustavu* (2.6).

Pozn. k důkazu: Vzorce (2.7) plynou z části (4.3). Obrácená implikace v tvrzení plyne z výše uvedené konstrukce. F, N mají vskutku hodnoty v $\mathrm{Im}\,\mathbf{H}$ a proto mohou být ztotožněny s vektory v $\mathbb{R}^3$. Systém (2.6) je kvaternionová reprezentace pro pohyblivou triádu s Hopfovým diferenciálem λQ. Diferencováním (2.7) dostaneme vyjádření (2.3). □

Pozn. 2.4 *Povrchy paralelní k CMC povrchu ležící v normálovém směru ve vzdálenosti* $1/(2H)$ *a* $1/H$ *mají po řadě konstantní Gaussovu a střední křivost.*

2.4 Povrchy s konstantní Gaussovou křivostí

Vypočteme Laxovy konexe analogicky části (2.2). Ukázali jsme, že na povrchu s negativní Gaussovou křivostí lze zvolit souřadnice tak, že I, II forma mají tvar

$$I = A^2dx^2 + 2AB\cos\psi\, dxdy + B^2dy^2,$$
$$II = 2AB\tfrac{\sin\psi}{\rho}\, dxdy.$$

Předpokládejme, že A, B jsou nenulové, $A = \|F_x\|, B = \|F_y\|$ a $K = -\frac{1}{\rho^2},\ \rho > 0$. Nechť $\Phi \in SU(2)$ je jednotkový kvaternion, který převádí bázi $\{A(\mathbf{i}\cos\frac{\psi}{2} + \mathbf{j}\sin\frac{\psi}{2}),\ B(\mathbf{i}\cos\frac{\psi}{2} - \mathbf{j}\sin\frac{\psi}{2}),\ \mathbf{k}\}$ na bázi $\{F_x, F_y, N\}$:

$$\begin{aligned} F_x &= -iA\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\psi/2} \\ e^{i\psi/2} & 0 \end{pmatrix}\Phi, \\ F_y &= -iB\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi/2} \\ e^{-i\psi/2} & 0 \end{pmatrix}\Phi, \\ N &= -i\Phi^{-1}\sigma_3\Phi. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Lineární diferenciální rovnice pro Φ získáme zavedením matic

$$U = \Phi_x \Phi^{-1}, \quad V = \Phi_y \Phi^{-1}, \tag{2.9}$$

které leží v prostoru $\operatorname{Im}\mathbf{H}$. Protože $F_{xx} \perp N, F_{yy} \perp N$, dostáváme podmínky

$$0 = < F_x, N_x > = \frac{A}{2} \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\psi/2} \\ e^{i\psi/2} & 0 \end{pmatrix} [\sigma_3, U] \right),$$
$$0 = < F_y, N_y > = \frac{B}{2} \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi/2} \\ e^{-i\psi/2} & 0 \end{pmatrix} [\sigma_3, V] \right).$$

Při výpočtu skalárních součinů prostřední členy vymizí, neboť mají nulovou stopu. Rovnice dávají $U_{21} = e^{i\psi} U_{12}, V_{21} = e^{-i\psi} V_{12}$, tj. U, V jsou tvaru:

$$U = -iu_3 \sigma_3 - \frac{ia}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\psi/2} \\ e^{i\psi/2} & 0 \end{pmatrix},$$
$$V = -iv_3 \sigma_3 + \frac{ib}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi/2} \\ e^{-i\psi/2} & 0. \end{pmatrix}.$$

Koeficienty úměrnosti a, b určíme ze vztahů $< F_x, N_y > = < F_y, N_x > = -\frac{AB \sin\psi}{\rho}$. Odtud jsou nediagonální členy $a = \frac{A}{\rho}$, $b = \frac{B}{\rho}$. K výpočtu $u_3, v_3 \in \mathbb{R}$ užijeme podmínku kompatibility $F_{xy} = F_{yx}$, z níž plyne

$$\begin{aligned} u_3 &= u - \frac{\psi_x}{4}, \quad u = \frac{B_x \cos\psi - A_y}{2B \sin\psi}, \\ v_3 &= v + \frac{\psi_y}{4}, \quad v = \frac{B_x - A_y \cos\psi}{2A \sin\psi}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Diagonální část podmínky kompatibility pro (2.9) dává Gaussovu rovnici $\psi_{xy} + 2v_x - 2u_y - ab \sin\psi = 0$, z nediagonální máme

$$u = \frac{a_y + b_x \cos\psi}{2b \sin\psi}, \quad v = -\frac{b_x + a_y \cos\psi}{2a \sin\psi}. \tag{2.11}$$

Srovnáním (2.10) s (2.11) získáme Codazziho rovnice

$$a_y + \frac{\rho_y}{2\rho} a - \frac{\rho_x}{2\rho} b \cos\psi = 0, \quad b_x + \frac{\rho_x}{2\rho} b - \frac{\rho_y}{2\rho} a \cos\psi = 0 \tag{2.12}$$

a vyjádření pro u, v

$$u = -\frac{\rho_y a}{4\rho b} \sin\psi, \quad v = -\frac{\rho_x b}{4\rho a} \sin\psi. \tag{2.13}$$

Pro povrch s ρ konstantní se (GC) zjednoduší na $\psi_{xy} - ab \sin\psi = 0$, $a_y = b_x = 0$. Zároveň $u = v = 0$. Tyto rovnice jsou invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci $a \to \lambda a$, $b \to b/\lambda$, kde $\lambda \in \mathbb{R} \backslash 0$. Tedy každý takový povrch má 1-parametrickou grupu transformací zachovávající II, K a ψ. Stejně jako v případě CMC povrchů, znalost $\Phi(x, y, \lambda)$ pro všechna $\lambda = e^t$ postačuje k explicitnímu řešení (GW), přičemž integrace vzhledem k x, y se nahradí derivací dle t :

Věta 2.5 *Nechť $\Phi(x, y, \lambda = e^t) \in SU(2)$ je řešení (2.9), s U, V*

$$U = \begin{pmatrix} \frac{i\psi_x}{4} & -\frac{ia}{2} \lambda e^{-i\psi/2} \\ -\frac{ia}{2} \lambda e^{i\psi/2} & -\frac{i\psi_x}{4} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -\frac{i\psi_y}{4} & \frac{ib}{2\lambda} e^{i\psi/2} \\ \frac{ib}{2\lambda} e^{-i\psi/2} & \frac{i\psi_y}{4} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Pak F, N definované $F = 2\rho \Phi^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \Phi$, $N = -i\Phi^{-1} \sigma_3 \Phi$ popisují povrch s konstantní negativní Gaussovou křivostí. Fundamentální formy jsou tvaru

$$\begin{aligned} I &= \rho^2 (\lambda^2 a^2 dx^2 + 2ab \cos\psi dx dy + \lambda^{-2} b^2 dy^2), \\ II &= 2\rho ab \sin\psi dx dy. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Povrch s konst. negativní Gaussovou křivostí v asymptotických souřadnicích s I, II tvaru (2.15) je popsán výše uvedenou rovnicí pro F, N, přičemž Φ řeší systém (2.14).

Pozn. k důkazu: F, N leží v $\mathrm{Im}\,\mathbf{H}$. Diferencováním vzorců pro F, N určíme

$$F_x = 2\rho\Phi^{-1}\frac{\partial U}{\partial t}\Phi, \quad F_y = 2\rho\Phi^{-1}\frac{\partial V}{\partial t}\Phi,$$

které souhlasí s (2.8). □

Výpočet pro povrchy s $K > 0$ konstantní je paralelní.

Pozn. 2.6 2x2 *reprezentaci pro* $K < 0$ *lze získat z matic* (1.9) *jejich přetransfomováním do souřadnic* (2.15)*:*

$$\widetilde{P}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -q_x & 0 \\ q_x & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin q \\ 0 & 0 & \cos q \\ \sin q & -\cos q & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

$\widetilde{P}^1$, $\widetilde{P}^2$ *jsou ortogonální stejně jako řešení lineárního problému* Φ. *Uvážíme reprezentaci* $SO(3)$:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$[L_1, L_2] = L_3, \; [L_2, L_3] = L_1, \; [L_3, L_1] = L_2.$$

Pak

$$\begin{aligned} \widetilde{P}^1 &= q_x L_3 + L_1 \\ \widetilde{P}^2 &= -\cos q L_1 - \sin q L_2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Jelikož pro Pauliho matice σ_i *platí až na násobek* $2i$ *stejné komutační relace jako pro* L_i, *je Lieova algebra generovaná* $[L_1, L_2, L_3]$ *izomorfní* $[e_1, e_2, e_3]$, *kde* $e_i = \sigma_i/2i$. *Tedy má smysl definovat*

$$\begin{aligned} \widetilde{P}^1 &= q_x e_3 + e_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -q_x & -1 \\ -1 & q_x \end{pmatrix}, \\ \widetilde{P}^2 &= -\cos q e_1 - \sin q e_2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-iq} \\ e^{iq} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Kalibrační transformací přejdou konexe na standardní tvar (2.14).

3 Vlastnosti Liouvillovy a sine-Gordonovy rovnice

3.1 Společný tvar pro řešení

Díky reprezentaci nulové křivosti $F_{\alpha_1\alpha_2} = [\nabla_{\alpha_1}, \nabla_{\alpha_2}] = 0$, existuje řešení lineárního problému $\nabla_{\alpha_i}\theta = (\partial_{\alpha_i} + A_{\alpha_i})\theta = 0$ viz. (0.2), (0.3), přičemž $i \in \{1, 2\}$, $\alpha_i \in \{z, \bar{z}\}$, resp. $\{x_+, x_-\}$. Teorie parciálních diferenciálních rovnic dává za daných předpokladů jednoznačnost řešení. Pro Liouvillovu rovnici (1.22) je A_z, $A_{\bar{z}}$ dáno (2.5) dosazením $Q = \frac{e^\varphi}{2}, H = 0$:

$$A_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{2} & e^{\varphi/2} \\ 0 & -\frac{\partial\varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad A_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{\bar{\partial}\varphi}{2} & 0 \\ e^{\varphi/2} & \frac{\bar{\partial}\varphi}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Pro sine-Gordonův případ je dáno $A_+ = V$, $A_- = U$ z (2.14), kde $a = b = i$, $\lambda = \widetilde{\lambda}^{-1}$, $x_+ = -y$, $x_- = -x$:

$$A_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{i\psi_+}{2} & \lambda e^{i\psi/2} \\ \lambda e^{-i\psi/2} & -i\frac{\psi_+}{2} \end{pmatrix}, \quad A_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\frac{\psi_-}{2} & \frac{1}{\lambda}e^{-i\psi/2} \\ \frac{1}{\lambda}e^{i\psi/2} & i\frac{\psi_-}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Ukážeme, že z $A_{\alpha_i} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, vyplývá $\partial_{\alpha_i}\det\theta = 0$. Vyjdeme z identity $(\ln\det\theta)_{,\alpha_i} = \mathrm{tr}(\theta_{,\alpha_i}\theta^{-1})$, jež platí pro libovolnou nedegenerovanou matici $\theta(\alpha_1,\alpha_2)$. Protože $\theta_{,\alpha_i} = -A_{\alpha_i}\theta$ a $\mathrm{tr}A_{\alpha_i} = 0$, je důkaz hotov.

Zavedeme-li $A(\theta) = \frac{\theta_{12}}{\theta_{11}}$, $B(\theta) = \frac{\theta_{22}}{\theta_{21}}$, přejdou rovnice (0.3) na tvar

$$\begin{aligned} \partial A &= -e^{\varphi/2}\frac{\det\theta}{2\theta_{11}^2}, \quad \partial B = 0, \\ \bar\partial A &= 0, \qquad\qquad \bar\partial B = e^{\varphi/2}\frac{\det\theta}{2\theta_{21}^2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Liouvillovské pole lze vyjádřit pomocí A, B

$$e^{\varphi(z,\bar z)} = -4\frac{\partial A(z)\bar\partial B(\bar z)}{(A(z)-B(\bar z))^2}. \tag{3.4}$$

Pro rovnici (1.11) vypočteme podobně

$$\partial_\pm A = -\lambda^{\pm1}e^{\pm i\psi/2}\frac{\det\theta}{2\theta_{11}^2}, \quad \partial_\pm B = \lambda^{\pm1}e^{\mp i\psi/2}\frac{\det\theta}{2\theta_{21}^2}. \tag{3.5}$$

Sine-Gordonovo pole je dáno

$$\begin{aligned} e^{\pm i\psi(x_+,x_-)} &= -4\frac{\partial_\pm A\partial_\mp B}{(A-B)^2}, \\ \partial_\pm A\partial_\pm B &= -\frac{\lambda^{\pm2}}{4}(A-B)^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Lze rovněž ověřit, že ψ zadané (3.6) splňuje sine-Gordonovu rovnici, tj. podmínka (3.6) je pro tvar řešení postačující. Vskutku, vyjdeme-li od vztahu (3.6), vezmeme-li v úvahu definici $A(\theta), B(\theta)$ a vztah $A - B = -\frac{\det\theta}{\theta_{11}\theta_{21}}$, pak θ řeší lineární problém a tedy platí rovnice reprezentace nulové křivosti. Výrazy pro derivace A, B se podobají vzorcům pro derivace w, které vychází při dokazování, že ψ dané (1.27) řeší sine-Gordonovu rovnici. Tam je k ověření potřeba Lobačevského konexe, zde se vystačí s reprezentací nulové křivosti. Nutnost podmínky (3.6) na tvar řešení plyne z existence Lie-Bäcklundovy transformace mezi Liouvillovou a sine-Gordonovou rovnicí, jež je dokázána v sekci (3.4). Tato převádí řešení Liouvillovského lineárního problému na sine-Gordonův a naopak, tudíž převádí i A, B a obecnost (3.4) pokládáme za známou.

Výraz (3.4) a první rovnost (3.6) jsou společné a jsou zobecněním geometrických řešení (1.26), (1.27). A, B jsou v obou případech omezeny dodatečnou podmínkou, holomorfností resp. druhou rovnicí (3.6).

3.2 Symetrie

Symetrie rovnic (3.4), (3.6) nám umožní dokázat obecnost (1.27), (1.26). Levé translace $\theta \to \theta^g = g\theta$ působící na řešení lineárního problému indukují kalibrační transformace $A_{\alpha_i} \to A^g_{\alpha_i} = -(\partial_{\alpha_i}g)g^{-1} + gA_{\alpha_i}g^{-1}$. Funkce A, B zůstávají invariantní při levých posunech diagonálními prvky $g \in SL(2)$. Násobení zprava $\theta \to \theta g$, $g \in GL(2)$ lineární soustavu nemění. Rovnice (3.4), (3.6) jsou zachovávány Möbiovými transformacemi

$$A \to \frac{\alpha A + \beta}{\gamma A + \delta}, \quad B \to \frac{\alpha B + \beta}{\gamma B + \delta}, \quad g = \begin{pmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

které jsou indukovány pravými posuny θg.

Konexe A_{α_i} vyjádříme v následující reprezentaci $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$[H, E^\pm] = \pm 2E^\pm, \quad [E^+, E^-] = H,$$

$$A_z = \partial\Phi + \tfrac{1}{2}e^{\mathrm{ad}\Phi}E^+,\ A_{\bar z} = -\bar\partial\Phi + \tfrac{1}{2}e^{-\mathrm{ad}\Phi}E^-,\ \Phi = \tfrac{1}{4}\varphi H,$$
$$A_\pm = \pm i\partial_\pm\Psi + \tfrac{1}{2}e^{\pm i\mathrm{ad}\Psi}\mathcal{E}_\pm,\ \Psi = \tfrac{1}{4}\psi H,\ \mathcal{E}_\pm = \lambda^{\pm 1}(E^+ + E^-).$$

Lieova algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ má involutivní automorfismus $\Pi H = -H$, $\Pi E^\pm = E^\mp$, jenž je v naší reprezentaci implementován prvkem σ

$$\Pi X = \sigma X \sigma, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}). \tag{3.8}$$

Využijeme podmínku reálnosti $\varphi \in \mathbb{R} \iff \bar A_z = \Pi A_z,\ \bar A_{\bar z} = \Pi A_z$, která dává relace

$$\bar A_z = \sigma A_{\bar z}\sigma,\ \bar A_{\bar z} = \sigma A_z \sigma.$$

Stejně $\psi \in \mathbb{R} \iff \bar A_\pm(\lambda) = \Pi A_\pm(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$ a odtud

$$\bar A_\pm = \sigma A_\pm \sigma.$$

Díky těmto vztahům platí: řeší-li θ lineární problém s maticí A_{α_i}, pak jej řeší i $\sigma\bar\theta$. Z jednoznačnosti řešení (0.3) získáme konjugační pravidlo $\bar\theta = \sigma\theta C,\ C\bar C = 1,\ C$ je konstantní a je určeno počátečními podmínkami.

Předpokládejme nejprve, že v bodě P je dána podmínka $\theta(P) = \mathbb{I}$. Pak $C = \sigma$ a tudíž $\bar A = \frac{1}{B}$. Jelikož $A - B = -\frac{\det\theta}{\theta_{11}\theta_{21}}$ a nyní $\det\theta \equiv 1$, náleží A jednotkovému disku $\mathbb{D}$. Dosadíme-li podmínku $\bar A = \frac{1}{B}$ do rovnice (3.4), přijdeme k metrice (B.3). Za druhé zvolme počáteční podmínku

$$\widehat\theta = \Gamma, \quad \Gamma = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Z rovnosti $\Gamma^{-1}\sigma\bar\Gamma = 1$ plyne $\bar{\widehat\theta} = \sigma\widehat\theta$ a dále $\bar{\widehat A} = \widehat B$. Použijeme-li $\widehat\theta = \theta\Gamma$ ve výrazu (3.7), dostaneme s využitím konjugačních vztahů pro $\bar A, \bar{\widehat A}$

$$\widehat A = -i\frac{A+1}{A-1}, \quad |A|^2 < 1. \tag{3.9}$$

To je izomorfismus, který převádí $\mathbb{D}$ na $\mathbb{H}$. Jelikož v předchozí části jsme odůvodnili obecnost řešení (3.4), (3.6), ukázali jsme, jak jsme předjímali v části (1.3), že také geometrické vzorce (1.26), (1.27) zajišťují obecná řešení těchto rovnic.

3.3 Auto-Bäcklundova transformace pro Liouvillovu rovnici

Pro Liouvillovu rovnici je auto-Bäcklundova transformace známá již dlouho a je tvaru

$$\begin{aligned}
&\partial\varphi - \partial\widehat\varphi = \bar\mu e^{\frac{1}{2}(\varphi+\widehat\varphi)}, \\
&\bar\partial\varphi + \bar\partial\widehat\varphi = \frac{2}{\bar\mu}\sinh\left(\frac{\varphi-\widehat\varphi}{2}\right) - 2\frac{\bar\partial\bar\mu}{\bar\mu}, \\
&\bar\partial\mu = \partial\bar\mu = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Transformace je konformní, je-li μ konstanta. Tato transformace indukuje kalibrační transformaci Laxových konexí. Zavedeme-li

$$A = A_z dz + A_{\bar z} d\bar z,$$

máme

$$\widehat{A}(\widehat{\varphi}) = -d\theta_{\pm}.\theta_{\pm}^{-1} + \theta_{\pm}A(\varphi)\theta_{\pm}^{-1}, \tag{3.11}$$

přičemž $\theta_{\pm}$ jsou dány

$$\theta_{-}(\mu) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{4}(\widehat{\varphi}-\varphi)} & 0 \\ \bar{\mu}e^{\frac{1}{4}(\widehat{\varphi}+\varphi)} & e^{\frac{1}{4}(\varphi-\widehat{\varphi})} \end{pmatrix}, \quad \theta_{+}(\mu) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{4}(\varphi-\widehat{\varphi})} & \mu e^{\frac{1}{4}(\widehat{\varphi}+\varphi)} \\ 0 & e^{\frac{1}{4}(\widehat{\varphi}-\varphi)} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Pro Liouvillovu rovnici platí nelineární superpoziční princip: vyjdeme-li od řešení φ přes konstanty μ_1, μ_2 k φ_1, φ_2 a pak obráceně, získáme vztah

$$\tanh(\frac{\varphi_3 - \varphi}{2}) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\tanh(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}). \tag{3.13}$$

Tento teorém permutability umožňuje vypočítat rekurzívně posloupnost řešení Liouvillovy rovnice. Matice $g = \theta_{-}^{-1}\theta_{+}$ splňuje rovnost $dg = -[A, g]$.

$$g = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}(\varphi-\widehat{\varphi})} & \mu e^{\frac{1}{2}\varphi} \\ -\bar{\mu}e^{\frac{1}{2}\varphi} & e^{\frac{1}{2}(\widehat{\varphi}-\varphi)} - |\mu|^2 e^{\frac{1}{2}(\widehat{\varphi}+\varphi)} \end{pmatrix}$$

Jelikož $d_i \mathrm{tr} g = 0$, lze psát

$$\mathrm{tr}g = 2\cosh(\frac{\varphi - \widehat{\varphi}}{2}) - |\mu|^2 e^{\frac{1}{2}(\widehat{\varphi}+\varphi)} = 2\alpha \tag{3.14}$$

Vyřešením kvadratické rovnice

$$e^{\frac{1}{2}(\varphi-\widehat{\varphi})} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1 + |\mu|^2 e^{\varphi}}$$
$$e^{\frac{1}{2}(\widehat{\varphi}-\varphi)} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1 + |\mu|^2 e^{\widehat{\varphi}}}.$$

Vložíme-li do těchto vztahů řešení Liouvillovy rovnice tvaru

$$e^{\varphi} = 4\frac{\partial w \bar{\partial}\bar{w}}{(1 - w\bar{w})^2}, \tag{3.15}$$

získáme při označení $\sinh\theta = \sqrt{\alpha^2 - 1}$,

$$e^{\widehat{\varphi}} = 4\frac{\alpha^2 - 1}{\mu\bar{\mu}}.\frac{w\bar{w}e^{\mp\theta}}{(1 - w\bar{w}e^{\mp\theta})^2}.$$

Bäcklundova transformace zároveň zachovává

$$T = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \partial^2\varphi = \widehat{T}.$$

3.4 Vzájemná Bäcklundova transformace

Poněvadž skalární křivost zůstává invariantní při změně souřadnic $(z, \bar{z}) \leftrightarrow (x_{+}, x_{-})$, která dává

$$\frac{\partial_{+}\partial_{-}\psi}{\sin\psi} = 2e^{-\varphi}\partial\bar{\partial}\varphi = -\frac{R}{2},$$

lze očekávat existenci Lie-Bäcklundovy transformace (BT) mezi sine-Gordonovou (1.11) a Liouvillovou rovnicí (1.22).

Uvažme proto transformaci $(x_{+}, x_{-}) \leftrightarrow (z, \bar{z})$ Čebyševových souřadnic na konformní. Z důkazu věty (1.13) víme, že $z(x_{+}, x_{-})$, $\bar{z}(x_{+}, x_{-})$ obecně splňují Laplace-Beltramiho rovnici (Bel),

kde je L dáno (1.19). Odvodíme její konkrétní tvar pro Čebyševovu metriku:
Vyjdeme z rovnosti $\partial_+ z = \lambda^2 e^{i\psi}\partial_- z$. Identita $1 \mp i \operatorname{cotg}\psi = \mp i \frac{e^{\pm i\psi}}{\sin\psi}$ umožňuje tento vztah zapsat

$$\partial_\pm z = \mp i \left(\operatorname{cotg}\psi \partial_\pm - \frac{\lambda^{\pm 2}}{\sin\psi}\partial_\mp \right) z.$$

Podmínka integrability toho systému dává pro Laplace-Beltramiho operátor

$$\begin{gathered} Lz = L\bar{z} = 0, \\ L = \lambda^{-2}\partial_+ \left(\tfrac{1}{\sin\psi}\partial_+\right) + \lambda^2 \partial_- \left(\tfrac{1}{\sin\psi}\partial_-\right) - \partial_+(\operatorname{cotg}\psi \partial_-) - \partial_-(\operatorname{cotg}\psi\partial_+), \end{gathered} \tag{3.16}$$

což je operátor zobecněný Laplace Δ násobený faktorem $-\sin\psi$. Lie-Bäcklundovu transformaci bychom tudíž mohli získat vyřešením Laplace-Beltramiho rovnice. Protože se jedná o komplikovanou parciální diferenciální rovnici 2.řádu, využijeme toho, že postačuje pracovat s Jacobiho maticí transformace $z(x_+, x_-)$, $\bar{z}(x_+, x_-)$, která se ukazuje být určena řešeními φ, ψ a odpovídajícími lineárními problémy.

Zvolme $\theta(z,\bar{z})$, $T(x_+, x_-, \lambda)$ řešení lineárních problémů k (1.22), (1.11) splňující počáteční podmínku $\theta(0,0) = T(0,0,\lambda) = \Gamma$. V předchozí části jsme ukázali, že $u(\theta) = A(\theta)$, $\bar{u}(\theta) = B(\theta)$ i $u(T) = A(T)$, $\bar{u}(T) = B(T)$ leží v $\mathbb{H}$. θ, T jsou určeny až na násobení zprava prvky grupy $SL(2,\mathbb{R})$, které indukuje Möbiovy transformace $u, \bar{u}$, viz. (3.7). Vůči nim jsou rovnice (3.3), (3.5) invariantní. Proto můžeme požadovat

$$u(\theta) = \frac{\alpha u(T) + \beta}{\gamma u(T) + \delta},\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{3.17}$$

Specielně lze klást $u(\theta) = u(T)$. Použijeme-li tento vztah, definici A, B a relaci $\overline{\widehat{A}} = \widehat{B}$ přijdeme s uvážením, že $\det\theta = \det T = -\frac{i}{2}$ k rovnosti

$$\theta_{11}\theta_{21} = t_{11}t_{21} = \frac{i}{2(u-\bar{u})}. \tag{3.18}$$

Protože zároveň platí identity $\bar{\theta}_{1i} = \theta_{2i}$, $\bar{t}_{1i} = t_{2i}$, zjišťujeme, že následující podíly jsou čisté fáze

$$e^{i\omega} = \frac{\theta_{11}}{t_{11}},\ e^{-i\omega} = \frac{\theta_{21}}{t_{21}},\ \omega \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

Dosazením $u(\theta) = u(T)$ do (3.3), (3.5) získáme transformační relace

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}(z,\bar{z})}{\mathcal{D}(x_+,x_-)} &= e^{-\frac{\varphi}{2}} \begin{pmatrix} \lambda e^{i\frac{\psi}{2}+2i\omega} & \lambda^{-1}e^{-i\frac{\psi}{2}+2i\omega} \\ \lambda e^{-i\frac{\psi}{2}-2i\omega} & \lambda^{-1}e^{i\frac{\psi}{2}-2i\omega} \end{pmatrix}, \\ \frac{\mathcal{D}(x_+,x_-)}{\mathcal{D}(z,\bar{z})} &= \frac{e^{\frac{\varphi}{2}}}{2i\sin\psi} \begin{pmatrix} \lambda^{-1}e^{i\frac{\psi}{2}+2i\omega} & -\lambda^{-1}e^{-i\frac{\psi}{2}+2i\omega} \\ -\lambda e^{-i\frac{\psi}{2}-2i\omega} & \lambda e^{i\frac{\psi}{2}+2i\omega} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Předpokládáme, že tyto matice nejsou degenerované, tj. $\mathcal{J} = \det\frac{\mathcal{D}(z,\bar{z})}{\mathcal{D}(x_+,x_-)} = 2ie^{-\varphi}\sin\psi \neq 0$, a proto $\psi \neq 0 (\operatorname{mod}\pi)$. Z (3.20) plyne: $(z,\bar{z})$ jsou konformní souřadnice na M právě když (x_+,x_-) jsou Čebyševovy souřadnice na témž povrchu. Dále vidíme, že transformace $(x_+,x_-) \leftrightarrow (z,\bar{z})$ je určena řešeními φ, ψ až na libovolný fázový faktor ω. Máme-li transformaci $z(x_+,x_-), \bar{z}(x_+,x_-)$ jednou danou, splňuje ω parciální diferenciální rovnice, které odvodíme níže.
Nyní ukážeme, že (3.20) zadává Lie-Bäcklundovu transformaci mezi řešeními lineárních problémů k (1.22) a (1.11). Zavedeme vektory

$$v = \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix},$$

pro které platí podmínky (3.18), (3.19).

Věta 3.1 *Je-li v řešení lineárního problému $\partial v + A_z v = 0$, $\bar\partial v + A_{\bar z} v = 0$ a změna souřadnic $(z,\bar z) \leftrightarrow (x_+, x_-)$ je definována pomocí* (3.20)*, pak je w je řešení systému $\partial_\pm w + A_\pm w = 0$. Odtud ψ řeší sine-Gordonovu rovnici.*

Důkaz: Vyjdeme z identit $\partial_+ z \partial_+ \bar z = \lambda^2 e^{-\varphi}$, $\partial_- z \partial_- \bar z = \lambda^{-2} e^{-\varphi}$, jež se získají z (3.20). První rovnost derivujeme dle x_- a druhou dle x_+, přitom využijeme $\partial_+\partial_- z = \partial_-\partial_+ z$ a přijdeme k lineární soustavě

$$(\partial_+\partial_-\bar z, \partial_+\partial_- z) \cdot \frac{\mathcal{D}(z,\bar z)}{\mathcal{D}(x_+,x_-)} = -e^{-\varphi} \begin{pmatrix} \lambda^2 \partial_-\varphi \\ \lambda^{-2}\partial_+\varphi \end{pmatrix}.$$

Její řešení je z Cramerova pravidla jednoznačně dáno

$$\begin{aligned} \partial_+\partial_- z &= \frac{ie^{-\frac{\varphi}{2} - i\frac{\psi}{2} + 2i\omega}}{2\lambda \sin\psi} (e^{i\psi}\partial_+\varphi - \lambda^2 \partial_-\varphi), \\ \partial_+\partial_- \bar z &= -\frac{ie^{-\frac{\varphi}{2} - i\frac{\psi}{2} - 2i\omega}}{2\lambda \sin\psi} (e^{-i\psi}\partial_+\varphi - \lambda^2 \partial_-\varphi). \end{aligned} \tag{3.21}$$

K výpočtu $\partial_\pm\partial_\mp z$, $\partial_\pm\partial_\mp \bar z$ jsme nepoužili lineární systém (a tedy ani fázový faktor ω). Nyní odvodíme tyto vztahy znovu přes lineární problém pro v a výsledky potom porovnáme. Z lineární úlohy a dále z (3.20), (3.18), (3.19) vyjádříme výrazy

$$\partial_\pm \ln\theta_{11} = \pm\frac{i}{4}\left(\operatorname{cotg}\psi\partial_\pm\varphi - \frac{\lambda^{\pm 2}}{\sin\psi}\partial_\mp\varphi\right) - \frac{\lambda^{\pm 1} e^{\pm i\frac{\psi}{2}} t_{21}}{2t_{11}}.$$

Derivaci $\partial_\pm \ln\theta_{21}$ obdržíme komplexním sdružením. Vezmeme-li v úvahu tyto vztahy a derivujeme-li $\frac{\mathcal{D}(z,\bar z)}{\mathcal{D}(x_+,x_-)}$ dle $x_\pm$, odvodíme

$$\begin{aligned} \partial_\pm\partial_\mp z &= \lambda^{\mp 1} e^{-\frac{\varphi}{2} \mp i\frac{\psi}{2} + 2i\omega} \left(\pm i \frac{e^{\pm i\psi}}{2\sin\psi}\partial_\pm\varphi \mp i\frac{\lambda^{\pm 2}}{2\sin\psi}\partial_\mp\varphi - 2\frac{\mathcal{D}_\pm t_{11}}{t_{11}}\right), \\ \partial_\pm\partial_\mp \bar z &= \lambda^{\mp 1} e^{-\frac{\varphi}{2} \mp i\frac{\psi}{2} - 2i\omega} \left(\mp i \frac{e^{\mp i\psi}}{2\sin\psi}\partial_\pm\varphi \pm i\frac{\lambda^{\pm 2}}{2\sin\psi}\partial_\mp\varphi - 2\frac{\mathcal{D}_\pm t_{21}}{t_{21}}\right). \end{aligned} \tag{3.22}$$

$\mathcal{D}_\pm$ jsou kovariantní derivace sine-Gordonova modelu, $\mathcal{D}_\pm t_{ij} = (\mathcal{D}_\pm T)_{ij}$. Jelikož $\bar{\mathcal{D}}_\pm t_{11} = \mathcal{D}_\pm t_{21}$, jsou uvedené rovnice komplexně sdružené. Porovnáme-li vztahy (3.21) a (3.22), zjišťujeme, že $\mathcal{D}_+ t_{11} = \mathcal{D}_- t_{21} = 0$. Odtud w splňuje sine-Gordonův lineární problém a ψ je řešení (1.11). □
Obráceně platí:

Věta 3.2 *Je-li w řešení lineárního problému $\partial_\pm w + A_\pm w = 0$ a změna souřadnic $(z,\bar z) \leftrightarrow (x_+,x_-)$ je definována pomocí (3.20), pak je v je řešení systému $\partial v + A_z v = 0$, $\bar\partial v + A_{\bar z} v = 0$. Proto φ řeší Liouvillovu rovnici.*

Důkaz již pouze naznačíme. Rovnice (3.21) byly odvozeny z (3.20), bez užití lineárních problémů. Vztahy (3.22) lze spočíst z (3.20) za použití lineárního problému pro w. Důsledkem jsou výrazy pro $\partial_\pm \ln\theta_{11}$ a jejich komplexní protějšky. Do těchto vzorců dosadíme identitu odvozenou z (3.20)

$$\operatorname{cotg}\psi\partial_\pm\varphi - \frac{\lambda^{\pm 2}}{\sin\psi}\partial_\mp\varphi = \pm i\lambda^{\pm 1} e^{-\frac{\varphi}{2}} (e^{\pm i\frac{\psi}{2} + 2i\omega}\partial\varphi - e^{\mp i\frac{\psi}{2} - 2i\omega}\bar\partial\varphi)$$

a dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \partial_\pm \ln\theta_{11} &= -\frac{\lambda^{\pm 1} e^{-\frac{\varphi}{2}}}{4} (e^{\pm i\frac{\psi}{2} + 2i\omega}\partial\varphi - e^{\mp i\frac{\psi}{2} - 2i\omega}\bar\partial\varphi) - \frac{\lambda^{\pm 1} e^{\pm i\frac{\psi}{2}}}{2} \frac{t_{21}}{t_{11}}, \\ \partial_\pm \ln\theta_{21} &= \frac{\lambda^{\pm 1} e^{-\frac{\varphi}{2}}}{4} (e^{\pm i\frac{\psi}{2} + 2i\omega}\partial\varphi - e^{\mp i\frac{\psi}{2} - 2i\omega}\bar\partial\varphi) - \frac{\lambda^{\pm 1} e^{\pm i\frac{\psi}{2}}}{2} \frac{t_{11}}{t_{21}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

(3.23) umožňují spočítat $\mathcal{D}_z v$, $\mathcal{D}_{\bar z} v$, přičemž $\mathcal{D}_i$ značí kovariantní derivace příslušné k Liouvillově konexi. Díky (3.20), vyjde $\mathcal{D}_z v = 0$, $\mathcal{D}_{\bar z} v = 0$ a tedy lineární problém pro v i (1.22) jsou splněny.□

Pozn. 3.3 *Bäcklundovy transformace tvoří Lieovu grupu. Našli jsme jeden její prvek indukovaný (3.20). To, že leží ve stejné komponentě souvislosti jako jednotka, plyne z existence spojité deformace mezi Liouvillovým a sine-Gordonovým modelem.*

Pro ω platí následující rovnice $i\partial_\pm\omega = \pm\frac{i}{4}\partial_\pm\psi - \frac{1}{4}(\partial_\pm z\partial\varphi - \partial_\pm\bar{z}\bar{\partial}\varphi)$. Při jejím odvození jsme užili (3.20) a (3.21) ve tvaru $\partial_+\partial_- z = -\partial_+ z\partial_- z\partial\varphi$. Bäcklundovu transformaci lze rovněž získat přejdeme-li od Liouvillovy konexe difeomorfní transformací $(z,\bar{z}) \leftrightarrow (x_+, x_-)$ k 1-formě $\mathbb{D}_\pm = \partial_\pm + U_\pm$, kde $U_\pm = \partial_\pm z A_z + \partial_\pm \bar{z} A_{\bar{z}}$. Křivost je 2-forma a proto $\mathbb{F}_{+-} = [\mathbb{D}_+, \mathbb{D}_-]$ a $\mathbb{F}_{z\bar{z}} = [\mathbb{D}_z, \mathbb{D}_{\bar{z}}]$ jsou svázány vztahem $F_{z\bar{z}} = \det\frac{\mathcal{D}(z,\bar{z})}{\mathcal{D}(x_+,x_-)}\mathbb{F}_{+-}$. Označme $g = e^{i\omega H}$, kde H je matice definovaná v sekci (3.2) a uvažme kalibrační transformaci $\mathbb{D}_\pm \to \mathbb{D}^g_\pm = g^{-1}\mathbb{D}_\pm g$. Pak $\mathbb{D}^g_\pm$ je sine-Gordonova konexe, pokud je $(z,\bar{z}) \leftrightarrow (x_+,x_-)$ dána (3.20) a ω splňuje výše uvedenou rovnici.

4 Solitonové povrchy

4.1 Povrchy vnořené do $\mathbb{R}^3$

Geometricky Bäcklundova transformace (BT) představuje konstrukci, při které bodu P původního povrchu Σ přiřadíme P' z Σ', tak že PP' je konst. délky a leží v tečné rovině τ_P k Σ i v $\tau'_{P'}$ tečné k Σ'. Současně požadujeme, aby $\angle(\tau,\tau') = \zeta = konst.$ Obecně tangenciální podmínka dává $\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r} + m\boldsymbol{N'} \times \boldsymbol{N}$. Pro pseudosférický povrch vznikne transformací povrch se stejnou křivostí a tudíž můžeme na Σ i Σ' uvažovat asymptotické souřadnice. Z těchto podmínek v případě sine-Gordonovy rovnice, dále jen (sG), nalezneme standardní tvar její auto-Bäcklundovy transformace. Pro $\boldsymbol{r'}$ následně vyjde (viz. [5])

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r} + \frac{L}{\sin\omega}\left[\sin\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)\boldsymbol{r}_u + \sin\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)\boldsymbol{r}_v\right], \tag{4.1}$$

kde $L = \rho\sin\zeta$. Bäcklundovsky transformované řešení (sG) rovnice ω' vznikne z ω pomocí Bäcklundova parametru β, který je s ζ spjat vztahem $\beta = \mathrm{tg}(\zeta/2)$. Přechodem k hlavním souřadnicím pak

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r} + L\left[\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\boldsymbol{r}_x - \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\boldsymbol{r}_y\right], \quad \theta = 2\omega,\ \theta' = 2\omega'. \tag{4.2}$$

Díky (4.2) snadno spočteme 2-solitonový (sG)-povrch, když za $\boldsymbol{r}$ vezmeme polohový vektor Diniho pseudosféry, jež odpovídá pohyblivému 1-solitonu pro (sG):

$$\boldsymbol{r}(x,y) = \begin{pmatrix} \rho\sin\zeta\,\mathrm{sech}\,\chi\cos\left(\frac{y}{\rho}\right) \\ \rho\sin\zeta\,\mathrm{sech}\,\chi\sin\left(\frac{y}{\rho}\right) \\ \chi - \rho\sin\zeta\tanh\chi \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

kde $\chi = \dfrac{x - y\cos\zeta}{\rho\sin\zeta}$. Diniho pseudosféra je příklad helikoidu, plochy vzniklé rotací kolem osy křivky, která je současně posouvána paralelně s osou rotace přičemž poměr rychlosti translace a rotace zůstává konstantní, takže její parametrické rovnice získáme snadno ze známého stacionárního 1-solitonového povrchu. V ten (4.3) přechází pro $\zeta = \pi/2$. V (4.2) je tedy θ' 2-solitonové řešení určené z nelineárního superpozičního principu

$$\theta' = \pm 2\arctan\left[\frac{\sin\left(\frac{\zeta_2+\zeta_1}{2}\right)\sinh\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\zeta_2-\zeta_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right)}\right], \tag{4.4}$$

kde $\theta_i = 2\arctan\exp\chi_i$ jsou výchozí řešení (sG) odpovídající (4.3) a v (4.2) je $\theta = \theta_1$. Spec. lze z (4.2) volbou Bäcklundova parametru $\beta_1 = c + id = \bar{\beta}_2$ určit povrchy příslušné k periodickým 2-solitonům (tzv. *breathers*).

Další povrchy

Pro odvození dalších povrchů souvisejících s nelineárními rovnicemi představíme odlišný způsob, jímž lze přijít k sine-Gordonově rovnici. Da Rios v roce 1906 nalezl solitonové rovnice v časovém vývoji křivosti a torze neroztažitelného vířícího vlákna v nestlačitelné kapalině. Nechť tedy $\boldsymbol{r}(s,t)$ je polohový vektor časově se vyvíjející křivky. Pak tečný vektor $\boldsymbol{t}$, normála $\boldsymbol{n}$ a binormála $\boldsymbol{b}$ splňují Frenetovy formule

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_s &= \kappa \boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{b}_s &= -\tau \boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}_s &= \tau \boldsymbol{b} - \kappa \boldsymbol{t}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde s je parametrizace obloukem a κ, τ je křivost a torze. Čas t v této soustavě vystupuje pouze jako parametr. Požadujeme-li v každém okamžiku ortonormalitu pohyblivé triády, musí platit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_t &= \alpha \boldsymbol{n} + \beta \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{b}_t &= -\beta \boldsymbol{t} - \gamma \boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}_t &= -\alpha \boldsymbol{t} + \gamma \boldsymbol{b}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Neroztažitelnost vlákna dává záměnnost druhých derivací $\boldsymbol{t}_{st} = \boldsymbol{t}_{ts}$ atd. Odtud získáme

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \beta\tau + \kappa_t, \\ \beta_s &= -\alpha\tau + \gamma\kappa, \\ \gamma_s &= \tau_t - \beta\kappa. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Z (4.7) vyplývá $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)_s = 2(\alpha\kappa_t + \gamma\tau_t)$. Nechť je nejprve torze konst. $\tau_t = 0$ a $\alpha = 0$, pak $\beta^2 + \gamma^2 = \delta^2(t)$ a lze položit $\beta = \delta(t)\sin\sigma$, $\gamma = \delta(t)\cos\sigma$. Podmínky kompatibility (4.7) se redukují na

$$\sigma_{st} = -\delta(t)\tau(s)\sin\sigma, \tag{4.8}$$

kde $\kappa = \sigma_s$. Volbou $\tau = 1/\rho = \text{konst.}, \delta = -1/\rho$, se (4.8) stává (sG) rovnicí a (4.5),(4.6) je její lineární reprezentace odpovídající (2.16). Křivka o konst. torzi spojená se (sG) rovnicí se pohybuje po pseudosférickém povrchu, přičemž v každém čase je na něm asymptotickou křivkou. Sledujeme-li vývoj jedné asympt. křivky dle druhého parametru pro 2-solitonové řešení, vidíme křivku s dvěma lokalizovanými smyčkami, které přes sebe projdou nezměněny až na fázový posuv. Rychlost $\boldsymbol{r}_t$ je v tomto příp. dána $\boldsymbol{r}_t = \cos\sigma \boldsymbol{t} - \sin\sigma \boldsymbol{n}$.

Druhá možnost konst. křivosti $\kappa_t = 0, \gamma = 0$ vede opět na (sG) rovnici $\sigma_{st} = \frac{1}{\rho^2}\sin\sigma$ s lineární reprezentací odpovídající (2.16). Řešení (4.7) je

$$\alpha = -\frac{\cos\sigma}{\rho}, \beta = \frac{\sin\sigma}{\rho}, \kappa = 1/\rho, \tau = \sigma_s.$$

Nicméně $\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{N} = -1 \neq 0$, kde $\boldsymbol{N}$ je normálový vektor povrchu, takže křivka neleží na příslušném pseudosférickém povrchu.

Pohybem křivky o nulové torzi nyní přijdeme k rovnici označované mKdV: Rozložíme-li rychlost

$$\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{t} + \mu \boldsymbol{n} + \nu \boldsymbol{b},$$

dává podmínka $\boldsymbol{r}_{st} = \boldsymbol{r}_{ts}$ rovnost $\lambda_s \boldsymbol{t} + \lambda\kappa \boldsymbol{n} + \mu_s \boldsymbol{n} + \mu(\tau \boldsymbol{b} - \kappa \boldsymbol{t}) + \nu_s \boldsymbol{b} - \nu\tau \boldsymbol{n} = \alpha \boldsymbol{n} + \beta \boldsymbol{b}$. Odtud

$$\begin{aligned} \lambda_s - \mu\kappa &= 0 \\ \lambda\kappa + \mu_s - \nu\tau &= \alpha \\ \mu\tau + \nu_s &= \beta \end{aligned} \tag{4.9}$$

a dosazením do (4.7)

$$\begin{aligned} \kappa_t &= (\lambda\kappa + \mu_s - \nu\tau)_s - (\mu\tau + \nu_s)\tau \\ \tau_t &= \gamma_s + (\mu\tau + \nu_s)\kappa, \end{aligned}$$

kde $\gamma = \frac{1}{\kappa}[(\mu\tau + \nu_s)_s + \tau(\lambda\kappa + \mu_s - \nu\tau)]$. Pro křivku s $\tau = 0$ pohybující se tak, že $\mu = -\kappa_s$, vyjde z (4.9) $\lambda = -\frac{\kappa^2}{2} + c_1(t)$. Protože c_1 je libovolná, položme $c_1 = 0$, pak z (4.9) vyjádříme $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{-\kappa_{ss} - \frac{\kappa^3}{2}, \nu_s, \frac{\nu_{ss}}{\kappa}\}, \{\lambda, \mu, \nu\} = \{-\frac{\kappa^2}{2}, -\kappa_s, \nu\}$. Z výrazu pro κ_t obdržíme

$$\kappa_t + \kappa_{sss} + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_s = 0 \quad \text{(mKdV)}.$$

Přejdeme-li od mKdV např. k potenciálové mKdV, lze z její lineární reprezentace snadno určit polohový vektor *pseudosférického* povrchu odpovídajícího 1-solitonovému řešení této rovnice. Výsledek lze nalézt v [5].

Hasimoto zkoumal binormálový pohyb vířícího vlákna omezeného podmínkou $\boldsymbol{r}_t = \kappa\boldsymbol{b}$. V označení z předchozího odstavce tedy $\{\lambda, \mu, nu\} = \{0, 0, \kappa\}$ a (4.9) dávají

$$\alpha = -\kappa\tau, \quad \beta = \kappa.$$

Z podmínek kompatibility pro (4.7)

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\kappa_{ss} - \kappa\tau^2}{\kappa} \\ \kappa_t &= -2\kappa_s\tau - \kappa\tau_s \\ \tau_t &= \left(-\tau^2 + \frac{\kappa_{ss}}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2}\right)_s. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Zaveďme nyní tzv. Hasimotovu transformaci:

$$q = \kappa e^{i\sigma}, \qquad \sigma = \int_{s_0}^{s} \tau(s^*, t)ds^*.$$

Pak užitím (4.10) zjistíme, že

$$\begin{aligned} q_t &= \left[\kappa_t + i\kappa\left(-\tau^2 + \frac{\kappa_{ss}}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2} - T(t)\right)\right]e^{i\sigma}, \\ q|q|^2 &= \kappa^3 e^{i\sigma}, \\ q_{ss} &= (\kappa_{ss} + 2i\kappa_s\tau + i\kappa\tau_s - \kappa\tau^2)e^{i\sigma}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

kde $T(t) = \left(-\tau^2 + \frac{\kappa_{ss}}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2}\right)\Big|_{s_0}$. Zkombinováním rovnic (4.11) vyjádříme

$$q_t = i\left[q_{ss} + \frac{1}{2}q|q|^2 - T(t)q\right]. \tag{4.12}$$

Zavedeme-li $q^* = q\exp\left(i\int_0^t T(t^*)dt^*\right)$, nalezneme nelineární Schrödingerovu rovnici

$$iq_t^* + q_{ss}^* + \frac{1}{2}|q^*|q^* = 0 \qquad \text{(NLS)} \tag{4.13}$$

Je-li $T(t) = 0$, neohvězdičkovaná verze (NLS) připouští lin. reprezentaci odpovídající (4.5), (4.6). Díky $\boldsymbol{r}_t = \kappa\boldsymbol{b}$ máme $I = d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_s ds + \boldsymbol{r}_t dt)\cdot(\boldsymbol{r}_s ds + \boldsymbol{r}_t dt) = ds^2 + \kappa^2 dt^2$, a podobně $II = -d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{t}ds + \kappa\boldsymbol{b}dt)\cdot(\boldsymbol{n}_s ds + \boldsymbol{n}_t dt) = -\kappa ds^2 + 2\kappa\tau ds dt + (\kappa_{ss} - \kappa\tau^2)dt^2$, v čemž jsme využili $\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{r}_t}{|\boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{r}_t|} = \frac{\boldsymbol{t} \times \kappa\boldsymbol{b}}{\kappa} = -\boldsymbol{n}$. Odtud určíme Gaussovu křivost $K = -\frac{\kappa_{ss}}{\kappa}$. Rovnice $(4.10)_{2,3}$ jsou invariantní vůči transformaci

$$\begin{aligned} \kappa \to \kappa^* = \kappa, &\qquad \tau \to \tau^* = \tau + \lambda \\ s \to s^* = s + 2\lambda t, &\qquad t \to t^* = t. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Zároveň $\boldsymbol{r}_t$ přejde v $\boldsymbol{r}_{t^*} = \kappa^* \boldsymbol{b} - 2\lambda \boldsymbol{t}$. V lineární reprezentaci se objeví spektrální parametr:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_{s^*} &= \begin{pmatrix} 0 & \kappa^* & 0 \\ -\kappa^* & 0 & \tau^* - \lambda \\ 0 & -\tau^* + \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_{t^*} &= \begin{pmatrix} 0 & -\kappa^*(\tau^* + \lambda) & \kappa^*_{s^*} \\ \kappa^*(\tau^* + \lambda) & 0 & \Xi \\ -\kappa^*_{s^*} & -\Xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

kde $\Xi = \dfrac{\kappa^*_{s^*s^*}}{\kappa^*} - t^{*^2} + \lambda^2$. Analogicky části (2) se získá standardní AKNS reprezentace pro NLS.

Hasimotovy povrchy popisují např. časový vývoj kouřového kroužku. Zajímají nás parametrické rovnice 1-solitonového NLS povrchu. Vlna se šíří konst. rychlostí c podél vlákna, které zůstává rovné pro $s \to \infty$ tj. $\kappa \to_{s\to\infty} 0$. Hledáme řešení $\kappa = \kappa(\xi), \tau = \tau(\xi)$ rovnic $(4.10)_{2,3}$, přičemž $\xi = s - ct$. Substitucí se systém transformuje na

$$c\kappa^{'} = 2\kappa^{'}\tau + \kappa\tau^{'} \tag{4.16}$$

$$-c\tau^{'} = \left[-\tau^2 + \frac{\kappa^{"}}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2} \right]^{'}. \tag{4.17}$$

Integrací (4.16) s využitím okrajových podmínek a s předpokladem omezenosti τ pro $s \to \infty$ odvodíme $(c - 2\tau)\kappa^2 = 0$, což vyloučením triviálního příp. $\kappa = 0$, dává $\tau = \frac{c}{2} = \tau_0 = konst$. Pro hyperbolický NLS povrch je $\frac{\kappa^{"}}{\kappa} > 0$ a tudíž z (4.17) zbývá

$$\frac{\kappa^{"}}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2} = \epsilon^2.$$

Obecné řešení této rovnice lze vyjádřit pomocí eliptických funkcí. Doplněním okrajových podmínek určíme řešení

$$\kappa = 2\epsilon \,\mathrm{sech}(\epsilon\xi),$$

tj.

$$q = 2\epsilon \,\mathrm{sech}[\epsilon(s - 2\tau_0 t)] \exp[i\tau_0(s - s_0)] \tag{4.18}$$

řeší (4.12) s $T(t) = -\tau_0^2 + \epsilon^2$. 1-soliton k NLS (4.13) je dán

$$q^* = 2\epsilon \,\mathrm{sech}[\epsilon(s - 2\tau_0 t)] \exp i[\tau_0(s - s_0) + (\epsilon^2 - \tau_0^2)t].$$

Metodou popsanou v 4.3 lze k (4.18) určit

$$\boldsymbol{r}(s,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{s}{2} - \dfrac{\epsilon}{\epsilon^2 + \tau_0^2} \tanh(\epsilon\xi) \\ -\dfrac{\epsilon}{\epsilon^2 + \tau_0^2} \,\mathrm{sech}(\epsilon\xi) \cos[\tau_0 s + (\epsilon^2 - \tau_0^2)t] \\ -\dfrac{\epsilon}{\epsilon^2 + \tau_0^2} \,\mathrm{sech}(\epsilon\xi) \sin[\tau_0 s + (\epsilon^2 - \tau_0^2)t] \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Existuje řada solitonových povrchů, jež lze zkoumat podobnými metodami. Uveďme např. rodiny Bonetových povrchů se stejnou střední křivostí, Bianchiho povrchy s harmonickou inverzí Gaussovy křivosti $\partial_1\partial_2(1/\sqrt{K}) = 0$, povrchy s harmonickou inverzí střední křivosti $\partial_z\partial_{\bar{z}}(1/H) = 0$, povrchy asociované s vlnovou rovnicí $(\ln h)_{\alpha\beta} = h - h^{-2}$, jimiž se poprvé zabýval Tzitzeica, atd. Pro AKNS systémy lze odvodit obecný vzorec N-solitonového povrchu získaný opakovanou aplikací (BT), uveden je např. v [6], podrobnosti pak lze nalézt v [7]. Výpočet pro konkrétní povrchy je ale někdy komplikovaný už pro $N = 2$. Proto se opět vrátíme k vnořením do Lobačevského roviny, kde vzorce vychází jednodušeji.

4.2 N-solitonový povrch v Lobačevského rovině

Pro (sG) případ odvodíme rovnice vnoření N-solitonového povrchu do $\mathbb{H}$. Přijměme pro jednoduchost značení $f(x) = f(x_+, x_-)$, $f(0,0) = 0$ pro libovolnou funkci x_+, x_-. Využijeme, že (3.6) popisuje obecná řešení (sG) rovnice, přičemž vnoření do $\mathbb{H}$ jsou určena vzorcem (3.9). Poněvadž $A = A(\theta)$, potřebujeme znát maticové řešení příslušného lineárního problému, které navíc splňuje konjugační pravidlo $\overline{\widehat{\theta}} = \sigma\widehat{\theta}$. Takové řešení lze získat z řešení vektorového všimneme-li si symetrie Laxovy konexe $A_\pm(x, -\lambda) = HA_\pm(x, \lambda)H$. Odtud je-li $w(x, \lambda)$ vektorové řešení lineárního problému, je jím i vektor $Hw(x, \lambda)$ a tudíž maticové řešení lze zapsat

$$W(x, \lambda) = (w(x, \lambda), Hw(x, -\lambda)). \tag{4.20}$$

Jelikož $w(x, \lambda), Hw(x, -\lambda)$ jsou lineárně nezávislé, lze je vzít za fundamentální systém lineární úlohy. K určení N-solitonového řešení je třeba vzít hodnoty $\lambda = \mu_1, \dots, \mu_N$, pro které je matice W degenerovaná. Stupeň degenerace odpovídá solitonovému číslu. Jedno z fundamentálních řešení lineárního problému je

$$w_N(x, \lambda) = e(x, -\lambda)e^{i\psi(x)} \begin{pmatrix} \Pi_{j=1}^N(\lambda + \epsilon_{1j}(x)) \\ \Pi_{j=1}^N(\lambda + \epsilon_{2j}(x)) \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

kde $e(x, \lambda) = \exp\{\frac{1}{2}(\lambda x_+ + \lambda^{-1}x_-)\}$. Zároveň ψ a ϵ_{kj} musí splňovat

$$\begin{aligned} i\partial_+\psi &= \textstyle\sum_{i=1}^N(\partial_+\epsilon_{1i} - \partial_+\epsilon_{2i}) \\ e^{i\psi} &= \textstyle\prod_{i=1}^N \dfrac{\epsilon_{2i}}{\epsilon_{1i}}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Podrobnější výpočet je uveden v článku *E. Date: Osaka Journal of Mathematics **19** (1982; 125-158)*, který se mi bohužel nepodařilo získat. Podmínky degenerace znamenají existenci konstant c_j, $j = 1, \dots, N$ tak, že platí

$$w(x, \mu_j) = c_j Hw(x, -\mu_j), \tag{4.23}$$

složkově

$$w_k(x, \mu_j) = (-1)^{k-1}c_j w_k(x, -\mu_j), \; k = 1, 2, \; j = 1..N. \tag{4.24}$$

Dosazením (4.21) do (4.24) dostaneme relaci

$$\prod_{l=1}^N \frac{\epsilon_{kl} + \mu_j}{\epsilon_{kl} - \mu_j} = (-1)^{k-1}c_j e^2(x, \mu_j), \; k = 1, 2, \; j = 1, \cdots, N. \tag{4.25}$$

Užitím (4.25) se ověří konzistentnost (4.22). Pro (4.21) má soustava degeneračních podmínek (4.23) kladených na W jediné řešení.

Z podmínky reálnosti ψ tvaru $\bar{A}_\pm(\lambda) = \sigma A_\pm(\lambda)\sigma$ uvedené v části (3.2) vyplývá $w(x, \lambda) = \sigma\bar{w}(x, \bar{\lambda})$. Srovnáním s (4.24), (4.21) nalezneme konjugační pravidla

$$\bar{\mu}_j = \mu_{\pi(j)}, \; \bar{c}_j = -c_{\pi(j)}, \; \bar{\epsilon}_{1j} = \epsilon_{2\pi'(j)}, \; j = 1, \cdots, N, \tag{4.26}$$

přičemž π, π' jsou dvě ne nutně stejné involutivní permutace $\hat{N}$. Matice (4.20) je tudíž následující

$$\begin{aligned} W_N(x, \lambda) &= e^{i\psi} \begin{pmatrix} \prod_{l=1}^N(\epsilon_l(x) + \lambda)e(-\lambda) & \prod_{l=1}^N(\epsilon_l(x) - \lambda)e(\lambda) \\ \prod_{l=1}^N(\bar{\epsilon}_l(x) + \lambda)e(-\lambda) & -\prod_{l=1}^N(\bar{\epsilon}_l(x) - \lambda)e(-\lambda) \end{pmatrix} \\ \epsilon_l(x) &= \epsilon_{1l}(x). \end{aligned} \tag{4.27}$$

K normalizovanému řešení přijdeme přenásobením $W_N^{-1}(0,\lambda):\ T_N(x,\lambda) = W_N(x,\lambda)W_N^{-1}(0,\lambda) =$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \exp\{\frac{i}{4}(\psi_N(x)-\psi_N(0))\}X_N(\lambda) & \exp\{\frac{i}{4}(\psi_N(x)+\psi_N(0))\}Y_N(\lambda) \\ \exp\{-\frac{i}{4}(\psi_N(x)+\psi_N(0))\}\bar{Y}_N(\bar{\lambda}) & \exp\{-\frac{i}{4}(\psi_N(x)-\psi_N(0))\}\bar{X}_N(\bar{\lambda}) \end{pmatrix} \\
X_N &= \frac{\Pi_{l=1}^N(\lambda+\epsilon_l(x))(\lambda-\bar{\epsilon}_l(0))e(-\lambda)+(\lambda\leftrightarrow-\lambda)}{2\Pi_{l=1}^N(\lambda^2-\mu_l^2)}) \\
Y_N &= \frac{\Pi_{l=1}^N(\lambda+\epsilon_l(x))(\lambda-\epsilon_l(0))e(-\lambda)+(\lambda\leftrightarrow-\lambda)}{2\Pi_{l=1}^N(\lambda^2-\mu_l^2)},
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

ψ_N značí N-solitonové řešení (sG). Z matice T_N vyjádříme A, o kterém jsme v sekci (3.2) ukázali, že $A \in \mathbb{D}$. Izomorfismus (3.9) mezi $\mathbb{D} \leftrightarrow \mathbb{H}$ zajišťuje hledané vnoření

$$
u_N(x,\lambda) = i\frac{X_N(x,\lambda)+\exp\{i\frac{\psi_N(0)}{2}\}Y_N(x,\lambda)}{X_N(x,\lambda)-\exp\{i\frac{\psi_N(0)}{2}\}Y_N(x,\lambda)} \tag{4.29}
$$

Z (4.29) se snadno získá 1-solitonový povrch v $\mathbb{H}$. Dále vidíme, že vakuovému řešení $\psi \equiv 0$ odpovídají geodetiky v $\mathbb{H}$.

4.3 O obecné metodě výpočtu solitonových povrchů

K odvození parametrických rovnic solitonové plochy je obvykle potřeba řešit (GW) systém. Jeho obtížnou integraci lze nahradit derivací dle spektrálního parametru. Tuto tzv. Sym-Tafelovu proceduru si ukážeme opět na případu pseudosférických povrchů. Předpokládejme I, II v asymptotických souřadnicích (1.10) a AKNS reprezentaci tvaru

$$
\begin{aligned}
\Phi_x &= G\widetilde{P}^1G^{-1}\Phi = \begin{pmatrix} i/2 & -\omega_x/2 \\ \omega_x/2 & -i/2 \end{pmatrix}\Phi, \\
\Phi_t &= G\widetilde{P}^2G^{-1}\Phi = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}\Phi,
\end{aligned}
$$

kterou získáme kalibrační transformací pro $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ z (2.18). Zároveň jsme přeznačili $q(x,t)$ na $\omega(x,t)$. Díky invarianci (sG) rovnice vůči Lorentzově transformaci obsahuje AKNS reprezentace spektrální parametr λ :

$$
\begin{aligned}
\Phi_x &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & \omega_x \\ -\omega_x & 0 \end{pmatrix} + i\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\Phi, \\
\Phi_t &= \frac{i}{2\lambda}\begin{pmatrix} -\cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}\Phi.
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

Přepíšeme-li soustavu (4.30) $\Phi_\mu = g_\mu\Phi,\ \mu = 1,2$ pomocí Pauliho matic σ_i, jsou g_μ dány

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \frac{i}{2}(\omega_{,1}\sigma_2 + \lambda\sigma_3), \\
g_2 &= \frac{i}{2\lambda}(\sin\omega\sigma_1 + \cos\omega\sigma_3).
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Podíváme-li se, jak vypadají derivace g_μ dle spektrálního parametru

$$
g_{1,\lambda} = \frac{i}{2}\sigma_3,\ g_{2,\lambda} = \frac{i}{2\lambda^2}(\sin\omega\sigma_1 - \cos\omega\sigma_3),
$$

zjistíme, že

$$
-2\mathrm{Tr}(g_{\mu,\lambda}g_{\nu,\lambda})dx^\mu dx^\nu|_{\lambda=1} = dx^2 + 2\cos\omega dxdt + dt^2. \tag{4.32}
$$

Srovnáním (4.32) a (1.10) pak vidíme

$$
I = -2\mathrm{Tr}(g_{\mu,\lambda}g_{\nu,\lambda})dx^\mu dx^\nu|_{\lambda=1}. \tag{4.33}
$$

Zároveň lze z polohového vektoru $\boldsymbol{r} = (X_1, X_2, X_3)$ vytvořit maticové $r = X_i e_i$, kde $e_i = \sigma_i/2i$. Pak I je dána

$$I = -2\mathrm{Tr}(r_{,\mu} r_{,\nu}) dx^\mu dx^\nu|_{\lambda=1}. \tag{4.34}$$

Stopa je invariant vůči podobným maticím, takže se nabízí položit ansatz

$$r_{,\mu} = G^{-1} g_{\mu,\lambda} G, \tag{4.35}$$

přičemž G je dosud neurčená kalibrační matice. Užití podmínek integrability pro AKNS systém $g_{1,2} - g_{2,1} + [g_1, g_2] = 0$ a rovnosti $r_{,12=}r_{,21}$ na (4.35) vede na komutační relaci

$$[G_{,1}G^{-1} - g_1 g_{2,\lambda}] = [G_{,2}G^{-1} - g_2 g_{1,\lambda}],$$

jež je splněna volbou $G = \Phi$. Zbývá tedy integrovat rovnice $r_{,\mu} = \Phi^{-1} g_{\mu,\lambda}\Phi,\ \mu = 1, 2$. Víme, že rovnice jsou kompatibilní a že zároveň $\Phi_{,\lambda\mu} = \Phi_{,\mu\lambda}$. Nahlédneme-li

$$(\Phi^{-1}\Phi_{,\lambda})_{,\mu} = -\Phi^{-1}\Phi_{,\mu}\Phi^{-1}\Phi_{,\lambda} + \Phi^{-1}\Phi_{,\lambda\mu} = -\Phi^{-1}g_\mu\Phi_{,\lambda} + \Phi^{-1}(g_{\mu,\lambda}\Phi + g_\mu\Phi_{,\lambda}) = \Phi^{-1}g_{\mu,\lambda}\Phi,$$

kde jsme použili rovnost $(\Phi^{-1})_\mu = -\Phi^{-1}\Phi_{,\mu}\Phi^{-1}$, odvodili jsme Sym-Tafelův vztah

$$r = \Phi^{-1}\Phi_{,\lambda}, \tag{4.36}$$

jenž určuje $\boldsymbol{r}$ až na posun v prostoru

$$\boldsymbol{r} = i\mathrm{Tr}(\Phi^{-1}\Phi_{,\lambda}\sigma). \tag{4.37}$$

Jako σ jsme označili $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$. V [5] je ukázáno, že II formu asociovanou s tímto $\boldsymbol{r}$ lze spočíst

$$II = -\frac{1}{\det^{\frac{1}{2}}[g_{1,\lambda}, g_{2,\lambda}]}\mathrm{tr}([g_{1,\lambda}, g_{2,\lambda}](g_{\mu,\nu,\lambda} + [g_{\mu,\lambda}, g_\nu]))dx^\mu dx^\nu. \tag{4.38}$$

II v našem případě odpovídá (1.10). Obecně rovnosti (4.33), (4.37) platí pro libovolnou $g_\mu \in su(2)$, splňující podmínku kompatibility odpovídajícího lineárního systému.

4.4 Bäcklundova transformace pro AKNS s $r = -\bar{q}$.

Výsledky předchozího odstavce nám umožní vyjádřit Bäcklundovu transformaci v $su(2)$ reprezentaci. Uvidíme, že pak je (BT) speciální případ maticové Darbouxovy transformace. Díky tomu nalezneme obecný tvar Bäcklundovy transformace pro třídu AKNS systémů s $r = -\bar{q}$. Při odvozování začneme opět s pseudosférickými povrchy. Uvažme AKNS reprezentaci tvaru (4.30) a Bäcklundovu transformaci

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + 2\frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2}\left(\frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}\boldsymbol{r}_x + \lambda^2\frac{\sin\varphi}{\sin\omega}\boldsymbol{r}_t\right), \tag{4.39}$$

kde úhel natočení řeší systém $\varphi_x = \omega_x + \mu\sin\varphi,\quad \varphi_t = \mu^{-1}\sin(\varphi - \omega),\ \mu = \beta\lambda$, β je Bäcklundův parametr. Převedeme ortonormální triádu v $\mathbb{R}^3$ na triádu v $su(2)$ generovanou Pauliho maticemi $e_i = \frac{\sigma_i}{2i}$. Z předchozí kapitoly víme, že $r_{,i} = \Phi^{-1}g_{i,\lambda}\Phi$, což v reprezentaci (4.30) dává

$$r_u = -t_3,\quad r_v = \lambda^{-2}(\sin\omega\ t_1 - \cos\omega\ t_3), \tag{4.40}$$

přičemž $t_i = \Phi^{-1}e_i\Phi$. Potom maticová verze (BT) vypadá následovně

$$r' = r + 2\frac{\mu}{\mu^2 + \lambda^2}(\sin\varphi\ t_1 - \cos\varphi\ t_3). \tag{4.41}$$

Matici r' lze zapsat ve tvaru odpovídajícím Sym-Tafelovu vzorci

$$\begin{aligned} r' &= r - \frac{i\mu}{\mu^2 + \lambda^2}\Phi^{-1}Q_0\Phi \\ &= \Phi^{-1}\Phi_\lambda + \Phi^{-1}Q^{-1}\Phi - \frac{\lambda}{\mu^2 + \lambda^2}\mathbb{I} \\ &= (pQ\Phi)^{-1}(pQ\Phi)_\lambda, \end{aligned} \tag{4.42}$$

kde

$$Q_0 = \begin{pmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \; Q = \lambda\mathbb{I} + i\mu Q_0, \; p = \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\lambda^2}}. \tag{4.43}$$

Ze Sym-Tafelova vzorce $r^{'} = \Phi^{'-1}\Phi^{'}_{\lambda}$ plyne

$$\Phi^{'} = pQ_1Q\Phi, \tag{4.44}$$

pro libovolnou matici Q_1 nezávislou na $\lambda, Q_1 \in su(2)$. Z (4.44) získáme invariantní transformaci sine-Gordonovy lineární reprezentace:

$$g_i^{'}P = Pg_i + P_{,i}, \; i = 1,2, \; P = Q_1Q. \tag{4.45}$$

Jelikož odpovídající řešení (sG) rovnice $\omega, \omega^{'}$ nezávisí na λ, dává poslední rovnost rozložením na mocniny v λ podmínky na Q_1. Pro $i = 1$ členy úměrné λ^2 určují, že $[\sigma_3, Q_1] = 0$, zatímco pro $i = 2$, mocniny λ^{-1} definují $Q_1 = \mathbb{I}$. Tím přicházíme k výsledku: Kalibrační transformace kvaternionu Φ je dána

$$\Phi \;\rightarrow\; \Phi^{'} = p(\lambda)\,(\lambda\mathbb{I} + i\mu Q_0)\Phi. \tag{4.46}$$

Faktor $p(\lambda)$ je normalizační a zajišťuje $\det\Phi^{'} = 1$. Tato transformace je speciální případ maticové Darbouxovy transformace.

Zavedením proměnné $\xi = \tan\frac{\varphi}{2}$, kde je ξ podílem $\xi = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$, přičemž $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$ řeší Laxův lineární problém s $\lambda = -i\mu$. Matice Q_0 je potom parametrizována

$$Q_0 = \frac{1}{\xi^2+1}\begin{pmatrix} \xi^2-1 & 2\xi \\ 2\xi & -(\xi^2-1) \end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

Tím přicházíme ke vztahu

$$Q_0 = \Psi\sigma_3\Psi^{-1}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & -\Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

a tudíž i k alternativnímu vyjádření pro matici polohového vektoru

$$r^{'} = r - \frac{i\mu}{\lambda^2+\mu^2}\Phi^{-1}\Psi\sigma_3\Psi^{-1}\Phi. \tag{4.49}$$

Analogicky se postupuje v případě NLS reprezentace. Bäcklundova transformace je dána

$$\boldsymbol{r}^{'} = \boldsymbol{r} + 2\frac{\mathrm{Im}(\lambda_0)}{|\lambda_0|^2}\left(\frac{|\widetilde{\xi}|^2-1}{|\widetilde{\xi}|^2+1}\boldsymbol{t} + \frac{2\mathrm{Re}(\widetilde{\xi})}{|\widetilde{\xi}|^2+1}\boldsymbol{n} + \frac{2\mathrm{Im}(\widetilde{\xi})}{|\widetilde{\xi}|^2+1}\boldsymbol{b}\right), \tag{4.50}$$

kde $\widetilde{\xi} = \xi e^{-i\int\tau ds}$, $\xi = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$, $\Phi|_{\lambda=\lambda_0} = (\Phi_1, \Phi_2)^T$, řeší standardní lineární úlohu asociovanou s NLS v bodě $\lambda = \lambda_0$, viz. (4.15):

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\lambda & q \\ -\bar{q} & -i\lambda \end{pmatrix}\Phi = g_1\Phi \\ \Phi_t &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i(\frac{1}{2}|q|^2-\lambda^2) & iq_x - \lambda q \\ iq_x + \lambda\bar{q} & -i(\frac{1}{2}|q|^2-\lambda^2) \end{pmatrix}\Phi = g_2\Phi. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Analogicky předchozímu postupu pro $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} r_x &= \Phi^{-1}g_{1,\lambda}\Phi = -t_3 \\ r_t &= \Phi^{-1}g_{2,\lambda}\Phi = \mathrm{Re}(q)t_2 + \mathrm{Im}(q)t_1, \\ t_i &= \Phi^{-1}e_i\Phi. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Pro $\boldsymbol{t},\boldsymbol{b},\boldsymbol{n} \in su(2) : \boldsymbol{t} = -t_3, \boldsymbol{b} = \cos(\int \tau ds)t_2 + \sin(\int \tau ds)t_1$, $\boldsymbol{n} = \sin(\int \tau ds)t_2 - \cos(\int \tau ds)t_1$, získáváme $su(2)$ verzi Bäcklundovy transformace pro r'

$$r' = r - 2\frac{\mathrm{Im}(\lambda_0)}{|\lambda_0|^2}\left(\frac{2\mathrm{Re}(\xi)}{|\xi|^2+1}t_1 - \frac{2\mathrm{Im}(\xi)}{|\xi|^2+1}t_2 + \frac{|\xi|^2-1}{|\xi|^2+1}t_3\right). \tag{4.53}$$

Výraz pro $\lambda \neq 0$ dostaneme ze symetrie lineární reprezentace vůči transformaci použité v (4.1)

$$s \to \ s^* = s + 2\lambda b, \quad b \to \ b^* = b, \quad q \to q^* = qe^{i\lambda(s+\lambda b)}. \tag{4.54}$$

Z hvězdičkované NLS reprezentace přicházíme k transformaci pro r'

$$r' = r - 2\frac{\mathrm{Im}(\lambda_0^*)}{|\lambda-\lambda_0^*|^2}\left(\frac{2\mathrm{Re}(\xi^*)}{|\xi^*|^2+1}t_1^* - \frac{2\mathrm{Im}(\xi^*)}{|\xi^*|^2+1}t_2^* + \frac{|\xi^*|^2-1}{|\xi^*|^2+1}t_3^*\right), \tag{4.55}$$

kde $\xi^* = e^{iz}\xi,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Zavedením matice

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Phi_1^* & -\bar{\Phi}_2^* \\ \Phi_2^* & \bar{\Phi}_1^* \end{pmatrix}, \tag{4.56}$$

zapíšeme vztah pro r' jako

$$r' = r + \frac{i\mathrm{Im}(\lambda_0^*)}{|\lambda-\lambda_0^*|^2}\Phi^{*-1}\Psi\sigma_3\Psi^{-1}\Phi^*, \tag{4.57}$$

který pro případ $q = \bar{q}$ přechází v (4.49). Dále odvodíme, že maticová transformace pro Φ^* je komplexní verze (4.46). Položme stejně jako v (4.48) $Q_0 = \Psi\sigma_3\Psi^{-1}$, kde Ψ je nyní dáno (4.56). Ze Sym-Tafelova vztahu vypočteme podobně předchozímu

$$\begin{aligned} r' &= r + \frac{i\mathrm{Im}(\lambda_0^*)}{|\lambda-\lambda_0^*|^2}\Phi^{*-1}Q_0\Phi^* = \\ &= \Phi^{*-1}\Phi^*_\lambda + \Phi^{*-1}[(\lambda - \mathrm{Re}(\lambda_0^*))\mathbb{I} - i\mathrm{Im}(\lambda_0^*)Q_0]^{-1}\Phi^* - \frac{\lambda - \mathrm{Re}(\lambda_0^*)}{|\lambda-\lambda_0^*|^2}\mathbb{I} \\ &= (pQ\Phi^*)^{-1}(pQ\Phi^*)_\lambda, \end{aligned} \tag{4.58}$$

přičemž $Q = (\lambda - \mathrm{Re}(\lambda_0^*))\mathbb{I} - i\mathrm{Im}(\lambda_0^*)Q_0, \quad p = |\lambda - \lambda_0^*|^{-1}$. Výsledek pro transformační vztah $\Phi^{*'}$ tudíž v souladu s (4.44) je

$$\Phi^{*'} = pQ_1Q\Phi^* \tag{4.59}$$

a lineární reprezentace se transformuje analogicky (4.45)

$$g_i^{*'}P = Pg_i^* + P_{,i}, \quad i = 1,2. \tag{4.60}$$

Přitom ovšem podmínky na Q_1 v $P = Q_1Q$, dávají $Q_1 = \mathrm{I}$. Tudíž souhrnně lze říci, že Bäcklundově transformaci povrchů pro AKNS třídu $r = -\bar{q}$ odpovídá maticová Darbouxova transformace tvaru

$$\Phi^{*'} = p[(\lambda - \mathrm{Re}(\lambda_0^*))\mathbb{I} - i\mathrm{Im}(\lambda_0^*)Q_0]\Phi^*. \tag{4.61}$$

Naopak platí

Věta 4.1 *Nechť $\Phi_{[1]}, \Phi_{[2]}$ jsou vektorová řešení, odpovídající $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 2x2 maticového systému*

$$\Phi_x = g(\lambda)\Phi, \quad \det\Phi = \mathrm{const} \neq 0. \tag{4.62}$$

Na $g(\lambda) \in su(2)$ klademe omezení, že je nejvýš Lawrentovsky polynomiální v λ.
Nechť dále $P(\lambda) = \lambda\mathbb{I} + P_0$, kde P_0 nezávisí na λ, je řešení lineárních algebraických rovnic

$$P(\lambda_1)\Phi_{[1]} = (\lambda_1\mathbb{I} + P_0)\Phi_{[1]} = 0, \tag{4.63}$$

$$P(\lambda_2)\Phi_{[2]} = (\lambda_2\mathbb{I} + P_0)\Phi_{[2]} = 0. \tag{4.64}$$

Potom Darbouxova transformace

$$\begin{aligned} \Phi \ &\rightarrow \Phi^{'} = P(\lambda)\Phi \\ g(\lambda) \ &\rightarrow \ g^{'}(\lambda) = P(\lambda)g(\lambda)P^{-1}(\lambda) + P_x(\lambda)P^{-1}(\lambda) \end{aligned} \tag{4.65}$$

zachovává polynomiální strukturu $g^{'}(\lambda)$, která rovněž leží v $su(2)$. Specielně Darbouxova maticová transformace zachovává tvar AKNS reprezentace pro $r = -\bar{q}$.

Důkaz pro stručnost vynecháme, ikdyž není složitý. Na závěr, v kontextu předchozích výpočtů, již můžeme uvést vzorec pro polohový vektor N-solitonového povrchu vnořeného do $\mathbb{R}^3$ pro AKNS systémy s $r = -\bar{q}$. V analogii s (4.55)

$$\boldsymbol{r}_N = \boldsymbol{r} + \sum_{k=1}^{N} d_k \left(\frac{2\mathrm{Re}\xi_k}{|\xi_k|^2+1}\boldsymbol{t_1} - \frac{2\mathrm{Im}(\xi_k)}{|\xi_k|^2+1}\boldsymbol{t_2} + \frac{|\xi_k|^2-1}{|\xi_k|^2+1}\boldsymbol{t_3} \right), \tag{4.66}$$

kde $d_k = \dfrac{\mathrm{Im}\lambda_k}{|\lambda-\lambda_k|^2}$, ξ_k parametrizují ortogonální projektory P_k : $\mathrm{Ran}P_{k+1} = \Phi_k^{-1}(\lambda)\Phi_k(\bar{\lambda}_k)p_k$, $p_k \in \mathbb{C}^2$.

5 Appendix

A Použité pojmy z diferenciální geometrie ploch

Věta A.1 *Nechť $f(u,v)$ zadává povrch M v $\mathbb{R}^3$. Je-li $p \in M$ nedegenerovaný bod, platí Gauss-Weingartenovy rovnice:*

$$\begin{aligned} f_{uu} &= \Gamma^1_{11}f_u + \Gamma^2_{11}f_v + h_{11}n, \\ f_{uv} &= \Gamma^1_{12}f_u + \Gamma^2_{12}f_v + h_{12}n, \\ f_{vv} &= \Gamma^1_{22}f_u + \Gamma^2_{22}f_v + h_{22}n; \\ n_u &= \frac{h_{12}g_{12} - h_{11}g_{22}}{g}f_u + \frac{h_{11}g_{12} - h_{12}g_{11}}{g}f_v, \\ n_v &= \frac{h_{22}g_{12} - h_{12}g_{22}}{g}f_u + \frac{h_{12}g_{12} - h_{22}g_{11}}{g}f_v, \end{aligned} \tag{A.1}$$

přitom g_{ij}, h_{ij} značí koeficienty I,II formy, $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ a n je normálový vektor k povrchu.

Podmínky kompatibility pro systém (A.1) dávají $(f_{uu})_v = (f_{uv})_u$, $(f_{uv})_v = (f_{vv})_u$, $n_{uv} = n_{vu}$, což jsou Gauss-Codazziho rovnice.

Definice A.2 *Pokud pro směr generovaný vektorem $X \in T_pM$ platí $II(X,X) = 0$, zveme jej asymptotický. Je-li na otevřené podmnožině U povrchu M, $K < 0$, existují v každém bodě z U právě dva asymptotické směry. Jsou to směry, ve kterých je hlavní křivost nulová. Souřadnice na M jsou asymptotické, pokud jejich parametrické křivky jsou integrální křivky k asymptotickým směrům. Souřadnice x_1, x_2 jsou asymptotické právě když $II = h_{12}(x_1,x_2)dx_1dx_2$.*

Definice A.3 *Pokud jsou v bodě p povrchu M hlavní křivostí shodné $\lambda_1 = \lambda_2$, je každý směr hlavním. Hopfův diferenciál je v tom případě nulový. Bod p potom nazýváme*

1. *planární pro $\lambda_1 = 0$,*
2. *kruhový pro $\lambda_1 \neq 0$.*

Věta A.4 *Pro 2-rozměrný povrch s indukovanou Riemannovou metrikou, který je vnořený do $\mathbb{R}^3$, je skalární křivost $R = 2K$, kde K je Gaussova křivost. K je tudíž vnitřní vlastnost plochy.*

Důkaz: Je-li p regulární bod na M, lze povrch v okolí bodu p popsat grafem funkce $z = f(x, y)$, přičemž podmínka na tečné vektory dává $\mathrm{grad} f|_p = 0$. Indukovanou metriku v okolí p lze psát ve tvaru

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial f}{\partial z^j}, z^1 = x, z^2 = y.$$

Díky $\mathrm{grad} f|_p = 0$ jsou v bodě p nulové i derivace $\frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k}$, $i, j, k = 1, 2$. Jimi jednoznačně určená konexe je v bodě p rovněž nula a ze vzorce pro Riemannův tenzor zůstává

$$-R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial z^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial z^l}.$$

Vyjádřením Christoffevých symbolů přes metrické koeficienty

$$R_{iqkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial z^q \partial z^k} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial z^i \partial z^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial z^q \partial z^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial z^i \partial z^k}\right).$$

Specielně dosadíme-li do

$$R_{1212} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2}\right),$$

ze vztahu pro metriku, tak s uvážením $\mathrm{grad} f|_p = 0$, získáme $R_{1212} = f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy} = K$. Skalární křivost se díky symetriím Riemanova tenzoru rovná $R = \frac{2}{g}R_{1212}$. Determinant g je v bodě p roven 1, čímž máme $R = 2K$ v bodě p. Jelikož R je skalár, platí rovnost pro libovolný bod povrchu. □

Definice A.5 *Hopfovým diferenciálem nazýváme zobrazení* $f(z)dz \otimes dz \in T^*M \otimes T^*M \otimes \mathbb{C}$, *které je invariantní vůči konformní změně souřadnic. Přitom* f *předpokládáme holomorfní na oblasti* $\Omega \subset \mathbb{C}$.

B Lobačevského rovina

Lobačevského geometrie se obvykle znázorňuje na hyperboloidu neboli pseudosféře. Proto nejprve připomenutí indukované metriky na sféře: Přejdeme ke sférickým souřadnicím

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dt^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Protože $r = R$ je konstantní, máme

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Užitím stereografické projekce π na rovinu získáme

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + u^2 + v^2)^2}(du^2 + dv^2) = \frac{4R^4}{(R^2 + |z|^2)^2} dz\, d\bar{z}, \tag{B.1}$$

což je metrika roviny přenásobená faktorem $h(u, v) = h(z, \bar{z})$, $z = u + iv$. Obraz $(u, v) = \pi(x, y, t)$.

Pro pseudosféru $t^2 - x^2 - y^2 = R^2$ budeme postupovat analogicky. Zavedeme pseudosférické souřadnice

$$\begin{aligned} t &= \rho\cosh\chi & -\infty < \rho < \infty,\\ x &= \rho\sinh\chi\cos\varphi & 0 \le \chi < \infty,\\ y &= \rho\sinh\chi\sin\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

Tedy $t^2 - x^2 - y^2 = \rho^2 \ge 0$, takže pseudosférické souřadnice lze přiřadit bodům uvnitř kužele $t^2 = x^2 + y^2$. Vyjma osy t vychází

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 = d\rho^2 - \rho^2[(d\chi)^2 + \sinh^2\chi (d\varphi)^2].$$

Omezíme-li se na horní hyperboloid $\rho = R$ konstantní, indukovaná metrika je dána

$$-ds^2 = R^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi d\varphi^2). \tag{B.2}$$

Opět zavedeme stereografickou projekci π, nyní na otevřený disk $u^2 + v^2 < R^2$. Póly tvoří body o souřadnicích $(\pm R, 0, 0)$. Leží-li vzor $P = (x, y, t)$ na horní pseudosféře, tj. $t > 0$, a označíme-li jeho vzor $\pi(P) = (u, v)$, platí

$$\frac{x}{u} = \frac{t+R}{R}, \quad \frac{y}{v} = \frac{t+R}{R},$$

tj.

$$x = u(1 + \frac{t}{R}), \quad y = v(1 + \frac{t}{R}).$$

Dosadíme-li za x, y do rovnice pseudosféry a vyřešíme-li kvadratickou rovnici pro $t > 0$, získáme

$$t = -R\left(1 + \frac{2R^2}{u^2 + v^2 - R^2}\right), \quad x = \frac{2R^2 u}{R^2 - u^2 - v^2}, \quad y = \frac{2R^2 v}{R^2 - u^2 - v^2}.$$

Vyjádření indukované metriky v proměnných u, v potom vypadá takto

$$ds^2 = -\frac{4R^4}{(R^2 - u^2 - v^2)^2}(du^2 + dv^2) = -\frac{4R^4}{(R^2 - |z|^2)^2} dz\, d\bar{z}. \tag{B.3}$$

(B.2) je Lobačevského metrika na horním dílu hyperboloidu a disk $u^2 + v^2 < R^2$ vybavený metrikou (B.3) zveme Poincarého model Lobačevského geometrie.

Další model Lobačevského geometrie získáme pomocí lineární lomené transformace

$$z = R\frac{R + iw}{R - iw},$$

která převádí horní komplexní polorovinu $\mathbb{H}$ na disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$. Je-li $z = u + iv$, $w = x + iy$, pullback metriky (B.3) má tvar

$$ds^2 = R^2\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = -\frac{4R^2}{(w - \overline{w})^2} dw\, d\overline{w}, \quad \operatorname{Im} w = y > 0. \tag{B.4}$$

$\mathbb{H}$ s touto metrikou se říká Kleinův model Lobačevského geometrie. Geodetiky na $\mathbb{H}$ tvoří polokružnice se středem na $y = 0$ a přímky kolmé k $y = 0$. Grupa izometrií Lobačevského roviny odpovídá Lorentzovým transformacím. Zavedením rapidity $\beta = \tanh\psi$ se lze přesvědčit, že je izomorfní

i) $SU(1, 1)$ pro Poincarého model,

ii) $SL(2, \mathbb{R})$ pro Kleinův model.

$SL(2, \mathbb{R})$ působí na $\mathbb{H}$ Möbiovou transformací

$$w \to \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

C AKNS systémy

2x2 reprezentace rovnic, kterými jsme se zde zabývali, patří do obecné třídy tzv. AKNS systémů. Pro ni je typické použití metody obráceného rozptylu. Prostorové derivace systému zadávají rozptylovou úlohu a jsou doplněny časovým vývojem tak, aby nelineární rovnice pro potenciály plynuly z podmínek kompatibility. Rozptylové a časové rovnice AKNS systému mají tvar

$$\begin{aligned} \widehat{L}v = \zeta v,\ \widehat{L} &= \begin{bmatrix} i\partial/\partial x & -iq \\ ir & -\partial/\partial x \end{bmatrix}, \\ \widehat{A}v = v_t, \qquad \widehat{A} &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{C.1}$$

přičemž A, B, C, q, r volíme tak, že $\zeta_t = 0$, $\widehat{L}_t = [\widehat{A}, \widehat{L}]$ představuje požadovaný pár evolučních rovnic $q_t = K_1[q, r]$, $r_t = K_2[q, r]$ ($K_i[q, r]$ značí funkcionály potenciálů q, r). Pro sine-Gordonovu rovnici máme $r = -q$, pro KdV $r = -1$, mKdV $r = \pm q$ a pro NLS $r = \pm \bar{q}$. Ukážeme, že všechny AKNS systémy reprezentují povrchy s konstantní negativní skalární křivostí. Rovnice (C.1) jsou ekvivalentní integrabilní soustavě Pfaffových forem

$$\mathrm{d}v - \Omega v = 0, \quad \mathrm{Tr}\,\Omega = 0, \tag{C.2}$$

kde $\mathrm{d}v = \partial_x v\,\mathrm{d}x + \partial_t v\,\mathrm{d}t$ a Ω tvoří matici 1-forem

$$\begin{pmatrix} -i\zeta\,\mathrm{d}x - A\,\mathrm{d}t & q\,\mathrm{d}x - B\,\mathrm{d}t \\ r\,\mathrm{d}x - C\,\mathrm{d}t & i\zeta\,\mathrm{d}x + A\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Podmínka integrability dává $0 = \mathrm{d}^2 v = \mathrm{d}\Omega\, v - \Omega \wedge \mathrm{d}v = (\mathrm{d}\Omega - \Omega \wedge \Omega)\, v$, tzn. že Laxova rovnost $\widehat{L}_t = [\widehat{A}, \widehat{L}]$ může být splněna, právě když vymizí matice 2-forem

$$\theta = \mathrm{d}\Omega - \Omega \wedge \Omega. \tag{C.3}$$

Protože (C.2) se zachovává při kalibrační transformaci

$$v \to v' = Bv \qquad \Omega \to \Omega' = \mathrm{d}BB^{-1} + B\Omega B^{-1} \qquad \theta \to \theta' = B\theta B^{-1}, \qquad \det B = 1,$$

není Ω určena jednoznačně.

Na pseudosférickém povrchu v $\mathbb{R}^3$ lze v každém bodě P zvolit ortonormální bázi tečné roviny $\{e_i \cdot e_j = \delta_{ij},\ e_1, e_2 \in T_P\}$. Pak platí

$$\mathrm{d}P = \sigma^1 e_1 + \sigma^2 e_2$$

a díky ortonormalitě

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e_1 &= \omega e_2, \\ \mathrm{d}e_2 &= -\omega e_1, \end{aligned}$$

přičemž σ^i jsou 1-formy a ω je 1-forma konexe. Z podmínky integrability $\mathrm{d}^2 P = 0$ nyní plyne

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^1 &= \omega \wedge \sigma^2, \\ \mathrm{d}\sigma^2 &= -\omega \wedge \sigma^1. \end{aligned}$$

Z podmínek integrability $d\omega$ musí být násobek $\sigma^1 \wedge \sigma^2$, jím je zadána Gaussova křivost K, tj. $\mathrm{d}\omega = -K\sigma^1 \wedge \sigma^2$. Pro $K \equiv -1$ např. volba Ω

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sigma^2 & \frac{1}{2}(\omega + \sigma^1) \\ \frac{1}{2}(-\omega + \sigma^1) & \frac{1}{2}\sigma^2 \end{pmatrix}$$

vyhovuje rovnici (C.3). Odtud každý AKNS systém může být reprezentován pseudosférickým povrchem vzhledem k metrice $\mathrm{d}s^2 = (\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2$.

Poznámka k použité literatuře

V části (1.1) jsem vyšla z knih [1]. Kapitola (1.2), důkaz věty (1.16) a appendix (B) jsou napsány podle [2]. Článek [3] dal vzniknout částem (1.3), (3), (4.2). Laxovy konexe v části (2) jsem spočítala díky článku [4] a také díky [5], kterou využívám rovněž v kapitolách (4.1),(4.3). V kapitole (4) dále čerpám z [6] a [7]. Další informace o solitonech se lze dozvědět v [8], na niž jsem se obracela při psaní appendixu (C).

Reference

[1] L. Bianchi: *Lezioni di Geometria Diferenziale*, vol. 1-3, Pisa, 1902;

[2] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov: *Modern Geometry – Methods and Applications*, Part I., Springer-Verlag New York, 1992;

[3] H. Belich, G. Cuba and R. Paunov: *Surfaces of Constant negative Scalar Curvature and the Correspondence between the Liouville and the sine-Gordon Equations*, solv-int 9909018;

[4] A. I. Bobenko: *Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases*, J. Harmonic Maps and Integrable Systems, Vieweg, 1994, 83-127;

[5] C. Rogers, W. K. Schief: *Bäcklund and Darboux Transformations*, Cambridge University Press, 2002;

[6] *Proceedings of First Non-Orthodox School on Nonlinearity and Geometry*, Editor: D. Wójcik, J. Cieśliński, Polish Scientific Publishers PWN, Warszawa, 1998;

[7] A. Sym: *Soliton Surfaces and Their Applications*, v R. Martini: Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems, Springer-Verlag, 1985;

[8] R. K. Bullough, P. J. Caudrey: *Solitons*, Topics in Current Physics, Springer Verlag, 1980.

[9] G. Cuba: *Aspectos algébricos e geométricos dos modelos de Toda*, Tese de Doutorado, CBPF, 2000.

[10] Q. Ovchinninkov: *Gallery of pseudospherical surfaces.*