České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Diplomová práce

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Hledání plochých souřadnic σ-modelů

Miroslav Turek

Katedra fyziky
Akademický rok: 2004/2005
Školitel: Prof.RNDr Ladislav Hlavatý, DrSc., FJFI ČVUT

V Praze 27. března 2005

Obsah

Úvod

Tato diplomová práce se zabývá hledáním takových transformací souřadnic, kterými se metrický tenzor určitých σ-modelů převede na triviálně plochý tvar (t.j. má tvar Eukleidova metrického tenzoru respektive tvar Minkowského metrického tenzoru). Práce navazuje na články L.Šnobla a L.Hlavatýho, [1] a [2] ve kterých je spočten explicitní tvar metrických tenzorů σ-modelů vyhovujících tzv. $\beta-$rovnicím s nulovým dilatonem.Ukazuje se že metrický tenzor těchto modelů má nulový tenzor křivosti. V první kapitole je podán seznam základních pojmů jakož i stručně naznačena konstrukce σ-modelů, kterou jsem se důkladněji zabýval ve výzkumném úkolu [3]. Druhá kapitola je věnována potřebným geometrickým pojmům. Ve třetí kapitole je podrobněji rozebráno téma mé diplomové práce, jakož i zkoumané metody řešení. V páté kapitole jsou pak napočítány příslušné ploché souřadnice [1] vybraných modelů. Modely zkoumané v této kapitole jsou řešením tzv. β-rovnic. V šesté a sedmé kapitole jsou pak vypočteny ploché souřadnice a obecné tvary dilatonových polí modelů získaných metodou tzv. PLT-duality. V závěru jsou pak zhrnuty a diskutovány nabyté výsledky. Nakonec je připojen dodatek ve kterém je dán seznam Lieových algeber a jejich komutačních relací, kterými je určen rozklad Drinfeldovy dvojice příslušných σ-modelů.

[1] t.j. souřadnice ve kterých již mají jejich metrické tenzory triviálně plochý tvar

Kapitola 1

Základní pojmy a konstrukce σ-modelů

Základním pojmem pro konstrukci duálních σ-modelů je Drinfeldova dvojice. Drinfeldova dvojice je souvislá Lieova grupa D jejíž Lieova algebra $\mathcal{D}$ je vybavena symetrickou ad-invariantní nedegenerovanou bilineární formou $\langle .,. \rangle$ vzhledem k níž je možno tuto algebru rozložit do dvojice maximálních izotropních podalgeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$. Pak nosná množina algebry $\mathcal{D}$ je lineární prostor, který je roven direktnímu součtu nosných množin (lineárních prostorů) podalgeber $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$. Získaná trojice $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ se nazývá Maninova trojice. σ-modely jsou dány Lagrangiánem

$$L = F_{ij}(y)\partial_- y^i \partial_+ y^j, \qquad i,j = 1,\ldots,n = dim\mathcal{G} \tag{1.1}$$

který může být také psán pomocí pravoinvariantních polí[1] jako

$$L = E_{ab}(g)(\partial_- g g^{-1})^a (\partial_+ g g^{-1})^b, \qquad g \in G \tag{1.2}$$

kde

$$E(g) = (E_0^{-1} + \Pi(g))^{-1}, \qquad \Pi(g) = b(g)a(g)^{-1} = -\Pi(g)^t. \tag{1.3}$$

Matice $a(g)$,$b(g)$,$d(g)$ jsou $n \times n$ adjungované reprezentace grupy G na $\mathcal{D}$ v bázi $(X_i, \tilde{X}^j)$[2]

$$Ad(g)^t = \begin{pmatrix} a(g) & 0 \\ b(g) & d(g) \end{pmatrix},$$

[1] G,$\tilde{G}$ jsou podgrupy grupy D jejichž algebry jsou $\mathcal{G}$,$\tilde{\mathcal{G}}$. Celá konstrukce je obecně povolena pouze lokálně v okolí jednotkového prvku grupy

[2] t značí matici transponovanou

$$a(g)^{-1} = d(g)^t, \qquad b(g)^t a(g) = -a(g)^t b(g). \tag{1.4}$$

Ze vztahů (1.1) a (1.2) plyne, že

$$F_{ij}(y) = e_i^a(g(y))E_{ab}(g(y))e_j^b(g(y)) \tag{1.5}$$

kde $e_i^a(g(y))$ jsou komponenty pravoinvariantních forem (vielbeinů) $e_i^a(g(y)) = ((dg)_i.g^{-1})^a$ a y^i jsou lokální souřadnice prvku $g \in G$. Kovariantní tenzorové pole F na G je tak určeno rozkladem $\mathcal{D} = (\mathcal{G}|\tilde{\mathcal{G}})$ a konstantní maticí E_0 a může být chápáno jako součet metrického tenzoru G_{ij} (symetrická část) a torzního potenciálu B_{ij} (antisymetrická část) jež definují geometrické vlastnosti variety G.

Kapitola 2

Geometrické pojmy

Nechť G je diferencovatelná varieta s metrickým tenzorem g.Metrický tenzor g je symetrické kovariantní tenzorové pole druhého řádu, které se transformuje podle vztahu

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}g_{kl} \tag{2.1}$$

kde $x'^i = x'^i(x^k)$ jsou nové souřadnice variety G.
Dalším důležitým geometrickým objektem diferencovatelné variety je afinní konexe. Ta se pro pseudoriemannovské variety dá vyjádřit pomocí metrického tenzoru vztahem

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{li}\Big(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l}\Big). \tag{2.2}$$

Afinni konexe se pak transformuje podle pravidla

$$\Gamma'^i_{jk} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\Gamma^l_{mn} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^j \partial x'^k}. \tag{2.3}$$

Pomocí afinní konexe můžeme definovat Riemannův tenzor

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial y^k} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{lm} - \Gamma^m_{lk}\Gamma^i_{jm}, \tag{2.4}$$

Ricciho tenzor R_{jl} a skalární křivost R

$$\begin{aligned} R_{jl} &= R^i_{jil} \\ R &= g^{jl}R_{jl}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Kontravariantní tenzorové pole g^{jl} souvisí s metrickým tenzorem dle vztahu

$$g^{jl}g_{lk} = \delta^j_k \tag{2.6}$$

kde δ_k^j je Kronekerův tenzor. Nakonec definujme ještě tenzor torze

$$H_{ijk} = \partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki} + \partial_k B_{ij}, \tag{2.7}$$

kde

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} - F_{ji}). \tag{2.8}$$

Kapitola 3

Rozbor řešené úlohy

Kvantové σ-modely jsou definovány tenzorovým polem F a dilatonovým polem Φ, které splňují tzv. β-rovnice

$$
\begin{aligned}
0 &= R_{ij} - \nabla_i \nabla_j \Phi - \frac{1}{4} H_{imn} H_j^{mn}, && (3.1)\\
0 &= \nabla^k \Phi H_{kij} + \nabla^k H_{kij}, && (3.2)\\
0 &= R - 2\nabla_k \nabla^k \Phi - \nabla_k \Phi \nabla^k \Phi - \frac{1}{12} H_{kmn} H^{kmn} && (3.3)
\end{aligned}
$$

kde kovariantní derivace ∇_k, Ricciho tenzor R_{ij} a Gaussova křivost R jsou vypočteny z metrického tenzoru

$$G_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ji}), \tag{3.4}$$

pomocí kterého se také snižují a zvyšují indexy. Tenzor H je torzní tenzor, který je definován vztahem (2.7). V pracech [1] a [2] byly hledány třídimenzionální σ-modely splňující tyto rovnice. Pro Drinfeldovy dvojice $DD(x|1)$, kde $x = 2, 3, 4, 5, 6_0, 7_0$ byla nalezena řešení β-rovnic pro něž je dilatonové pole Φ konstantní a metrický tenzor má tvar

(2|1)

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ u & q & g + uy_2 \\ v & g + uy_2 & r + 2vy_2 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

(3|1)

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} p & u + ze^{-2y_1} & -u + ze^{-2y_1} \\ u + ze^{-2y_1} & q & -q \\ -u + ze^{-2y_1} & -q & q \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

(4|1)

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} p & (vy_1+u)e^{-y_1} & ve^{-y_1} \\ (vy_1+u)e^{-y_1} & qe^{-2y_1} & 0 \\ ve^{-y_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$(5|1)$

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} p & ue^{-y_1} & ve^{-y_1} \\ ue^{-y_1} & \frac{g^2}{r}e^{-2y_1} & ge^{-2y_1} \\ ve^{-y_1} & ge^{-2y_1} & re^{-2y_1} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$(6_0|1)$

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} p & 0 & v+py_2 \\ 0 & -p & g-py_1 \\ v+py_2 & g-py_1 & r+2gy_1+2vy_2+p(y_2^2-y_1^2) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$(7_0|1)$

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} p & 0 & z+py_2 \\ 0 & p & g-py_1 \\ z+py_2 & g-py_1 & r+2gy_1+2zy_2+p(y_1^2+y_2^2) \end{pmatrix} . \quad (3.10)$$

Pro Drinfeldovy dvojice $DD(1|6_0)$, $DD(5ii|6_0)$ byla řešení β-rovnic nalezena pomocí tzv. PLT-duality. Metrický tenzor a dilatonové pole mají tvar

$(1|6_0)$

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{k^2qy_1{}^2}{(1+2ky_1+k^2(y_1{}^2-y_2{}^2))} & \frac{k^2qy_1y_2}{(1+2ky_1+k^2(y_1{}^2-y_2{}^2))} & -\frac{k(1+ky_1)}{(1+2ky_1+k^2(y_1{}^2-y_2{}^2))} \\ \frac{k^2qy_1y_2}{(1+2ky_1+k^2(y_1{}^2-y_2{}^2))} & \frac{q(-1+k^2y_2{}^2)}{(-1-2ky_1+k^2(-y_1{}^2+y_2{}^2))} & \frac{k^2y_2}{(1+2ky_1+k^2(y_1{}^2-y_2{}^2))} \\ -\frac{k(1+ky_1)}{(1+2ky_1+k^2(y_1{}^2-y_2{}^2))} & \frac{k^2y_2}{(1+2ky_1+k^2(y_1{}^2-y_2{}^2))} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\Phi = \ln|(1+k(y_1-y_2))(1+k(y_1+y_2))| + C \quad (3.12)$$

$(5ii|6_0)$

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33}. \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$\Phi = \ln\left|(1+w)e^{-(y_1+y_2)} + w(1-2e^{-y_2})\right| + \ln\left|(w-1)e^{y_1+y_2} - w\right| + C \quad (3.14)$$

kde[1]

$$
\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{(e^{-(y_1+y_2)} + 2e^{y_1+y_2} + e^{3(y_1+y_2)} - 4e^{-y_1} + 4e^{3y_1+y_2} - 4e^{3y_1+2y_2})(q(w^2-1))}{(-4+(-4+4e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)} \\
G_{21} &= -\frac{(2e^{y_1} - e^{-(y_1+y_2)} + 2e^{3y_1+2y_2} - 2e^{y_1+y_2} - e^{3(y_1+y_2)})(q(w^2-1))}{(-4+(-4+4e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)} \\
&- \frac{(2e^{-y_2} - 4e^{2y_1} + 2e^{2y_1+y_2})(qw^2)}{(-4+(-4+4e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)} \\
G_{31} &= \frac{(2e^{2y_1+y_2} - e^{2(y_1+y_2)})(w(1-w)) + w(1+w)}{(-2+(-2+2e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)} \\
G_{22} &= \frac{(4e^{-y_2} - 4e^{y_1-y_2} + 4e^{2y_1+y_2})(qw^2)}{(-4+(-4+4e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)} \\
&+ \frac{(2e^{y_1+y_2} + e^{3(y_1+y_2)} + e^{-(y_1+y_2)})(q(1-w^2))}{(-4+(-4+4e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)} \\
G_{32} &= \frac{e^{2(y_1+y_2)}w(w-1) - 4w^2e^{y_1} + w(1+w)}{(-2+(-2+2e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)} \\
G_{33} &= 0
\end{aligned}
$$

Výpočtem Riemannova tenzoru křivosti těchto modelů zjistíme, že modely jsou zkonstruovány na plochých varietách (t.j Riemannův tenzor je nulový). To ovšem také znamená, že jejich metrický tenzor lze v principu převést na konstantní diagonální tvar. Konstantní diagonální forma má již na své diagonále pouze plus nebo mínus jedničky. Konstantní diagonální tvar metrického tenzoru je pak velmi výhodný při řešení rovnic, protože rovnice ve kterých se vyskytuje kovariantní derivace se značně zjednoduší. K převedení metrického tenzoru na kanonický tvar lze použít více postupů. Zkoumal jsem následující

1. Komutace jednoparametrických podgrup.
2. Řešení transformačních vztahů pro složky metrického tenzoru.
3. Řešení transformačních vztahů pro složky afnní konexe.

[1] Z důvodů symetrie metrického tenzoru $G(y)_{ij}$ uvádíme pouze dolní trojúhelníkovou část.

První způsob je založen na faktu, že zkoumané σ-modely jsou konstruovány na varietách, které mají strukturu Lieovy grupy. Užité Lieovy grupy jsou řešitelné a tudíž jejich libovolný prvek lze získat součinem jednoparametrických podgrup (v daném pořadí)[2] odpovídajících jednotlivým generátorům Lieových algeber těchto Lieových grup. Tedy libovolný prvek můžeme zapsat ve tvaru

$$g = e^{y^1 X_1} e^{y^2 X_2} e^{y^3 X_3}, \quad X_1, X_2, X_3 \text{ jsou generátory příslušné Lieovy algebry.} \tag{3.15}$$

Pořadí však není určeno jednoznačně, a součinem jednoparametrických podgrup v obráceném pořadí dostaneme jiný ekvivalentní popis prvků dané variety

$$g = e^{x^1 X_3} e^{x^2 X_2} e^{x^3 X_1}. \tag{3.16}$$

Je totiž možné, že opačné pořadí podgrup v daném vyjádření prvku g nám dá souřadnicový popis variety, ve kterém již bude metrický tenzor konstantní diagonální formou, nebo bude mít jeho forma alespoň jednoduší tvar. Tedy pokud bychom byli schopni převést pomocí komutačních relací příslušné algebry nové vyjadření prvku g v původní tvar (3.15), tedy

$$g = e^{y^1(x^1,x^2,x^3) X_1} e^{y^2(x^1,x^2,x^3) X_2} e^{y^3(x^1,x^2,x^3) X_3}. \tag{3.17}$$

Našli bychom tím transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1(x^1, x^2, x^3) \\ y^2 &= y^2(x^1, x^2, x^3) \\ y^3 &= y^3(x^1, x^2, x^3), \end{aligned} \tag{3.18}$$

která by nám původní metrický tenzor (t.j ten který byl zkonstruován na základě původního souřadnicového popisu dané variety) převedla na konstantní diagonální resp. jednoduší tvar. U modelů $(7_0|1)$ a $(6_0|1)$ bylo zjištěno, že součinem jednoparametrických podgrup v pořadí daném (3.16) dostaneme takový souřadnicový popis, který vede na konstantní tvar metrického tenzoru. U ostatních modelů to už pravda není, a nový tvar není ani jednodušší. Bohužel ani u modelů $(7_0|1)$ a $(6_0|1)$ nebylo možné najít transformaci (3.18). Problém je zde v tom, že při prokomutování jednotlivých členů dostaneme kromě správného pořadí jednoparametrických podgrup ještě nekonečnou řadu v generátorech dané algebry, kterou se mi nepodařilo sečíst.

Druhý způsob je založen na využití transformačního vztahu pro složky metrického tenzoru

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl} \tag{3.19}$$

[2] více o rozkladu řešitelných Lieových grup v [5]

kde $x'^i = x'^i(x^k)$ jsou nové souřadnice dané variety. Pokud za nový tvar metrického tenzoru zvolíme konstantní diagonální, dají nám tyto transformační vztahy systém parciálních diferenciálních rovnic pro $x^i = x^i(x'^k)$, jehož řešením bude hledaná transformace. Teorie systémů parciálních diferenciálních rovnic nám však nedává návod jejich řešení a již v nejjednoduších případech jsou systémy rovnic natolik složité, že jejich obecné řešení je v podstatě nemožné.

Třetí a poslední způsob řešení daného problému, kterým jsem se zabýval je využití transformačních vztahů pro složky afinní konexe

$$\Gamma'^i_{jk} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\Gamma^l_{mn} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^j \partial x'^k} \tag{3.20}$$

V plochých souřadnicích (x^i) budou složky affiní konexe Γ^l_{mn} nulové

$$\Gamma'^i_{jk} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^j \partial x'^k} \tag{3.21}$$

Užitím jednoduchého vztahu

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} = \delta^i_k \tag{3.22}$$

snadno odvodíme vztah

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} = \Gamma'^l_{jk}\frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \tag{3.23}$$

Poslední vztah vede také na systém parciálních diferenciálních rovnic. Rovnice jsou ale lineární a navíc rozseparované vzhledem k novým hledaným souřadnicím x^i. Tento postup se tedy nakonec stal klíčovým v hledání transformací, které převádí daný obecný metrický tenzor v konstantní tvar. Konstantní formu metrického tenzoru už jednoduše, procedůrami lineární algebry, převedeme na konstantní diagonální tvar.

Kapitola 4

Diagonalizace metriky

4.1 Diagonalizace metriky modelu $(6_0|1)$

Obecný tvar metriky tohoto modelu je

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} p & 0 & v + py_2 \\ 0 & -p & g - py_1 \\ v + py_2 & g - py_1 & r + 2gy_1 + 2vy_2 + p(y_2^2 - y_1^2) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

Nenulové složky affiní konexe jsou

$$\begin{array}{lll} \Gamma^1_{23} = 1 & \Gamma^1_{32} = 1 & \Gamma^1_{33} = \dfrac{-g + py_1}{p} \\ \Gamma^2_{13} = 1 & \Gamma^2_{31} = 1 & \Gamma^2_{33} = \dfrac{v + py_2}{p} \end{array} \tag{4.2}$$

Rovnice (3.23) mají tedy tvar

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1 \partial y_1} = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1 \partial y_2} = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1 \partial y_3} = \frac{\partial \xi}{\partial y_2}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_2 \partial y_2} = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_2 \partial y_3} = \frac{\partial \xi}{\partial y_1}, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_3 \partial y_3} = \left(\frac{-g + py_1}{p}\right) \frac{\partial \xi}{\partial y_1} + \left(\frac{v + py_2}{p}\right) \frac{\partial \xi}{\partial y_2}. \tag{4.8}$$

Nyní přistoupíme k řešení systému parciálních diferenciálních rovnic (4.3)-(4.8). Z rovnice (4.3) plyne, že nová souřadnice ξ je lineární v y_1

$$\xi = f(y_2, y_3)y_1 + h(y_2, y_3) \tag{4.9}$$

Dosazením vztahu (4.9) do rovnice (4.4) dostaneme podmínku na funkci f

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0 \\ & \Rightarrow \quad f = f(y_3) \\ & \Rightarrow \quad \xi = f(y_3)y_1 + h(y_2, y_3). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Tvar souřadnice ξ (4.10) dosadíme do rovnice (4.6). To vede na rovnici pro funkci h

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_2 \partial y_2} = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y_2 \partial y_2} = 0 \\ & \Rightarrow \quad h(y_2, y_3) = a(y_3)y_2 + b(y_3) \\ & \Rightarrow \quad \xi = f(y_3)y_1 + a(y_3)y_2 + b(y_3) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Vztah (4.11) dosadíme do rovnice (4.5), což vede na rovnici

$$\frac{df}{dy_3} = a(y_3) \quad \Rightarrow \quad \xi = f(y_3)y_1 + f'(y_3)y_2 + b(y_3) \tag{4.12}$$

Opět dosazením (4.12) do (4.7) máme

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d{y_3}^2} - f = 0 \quad & \Rightarrow \quad f(y_3) = ce^{y_3} + de^{-y_3} \\ & \Rightarrow \quad \xi = (ce^{y_3} + de^{-y_3})y_1 + (ce^{y_3} - de^{-y_3})y_2 + b(y_3) \end{aligned} \tag{4.13}$$

Nakonec rovnice (4.8) po dosazení (4.13) vede na rovnici pro neznámou funkci b

$$\begin{aligned} \frac{d^2 b}{d{y_3}^2} &= -\frac{g}{p}(ce^{y_3} + de^{-y_3}) + \frac{v}{p}(ce^{y_3} - de^{-y_3}) \\ \Rightarrow \ b(y_3) &= -\frac{g}{p}(ce^{y_3} + de^{-y_3}) + \frac{v}{p}(ce^{y_3} - de^{-y_3}) + my_3 + n \end{aligned} \tag{4.14}$$

Nyní již dosazením funkce b do (4.13) dostáváme obecné řešení systému rovnic (4.3)-(4.8)

$$\xi(y_1, y_2, y_3) = c(y_1+y_2)e^{y_3} + d(y_1-y_2)e^{-y_3} + \frac{c(v-g)}{p}e^{y_3} - \frac{d(v+g)}{p}e^{-y_3} + my_3 + n, \tag{4.15}$$

kde m, n, c, d jsou integrační konstanty. U dalších modelů už nebudeme podrobně popisovat řešení systému parciálních diferenciálních rovnic, obecné řešení se získá obdobným způsobem. Vzhledem k tomu, že transformační rovnice (3.23) jsou pro každou složku souřadnic stejné můžeme psát

$$
\begin{aligned}
\xi_1(y_1,y_2,y_3) &= c_1(y_1+y_2)e^{y_3} + d_1(y_1-y_2)e^{-y_3} + \frac{c_1(v-g)}{p}e^{y_3} - \frac{d_1(v+g)}{p}e^{-y_3} \\
&+ m_1 y_3 + n_1, \\
\xi_2(y_1,y_2,y_3) &= c_2(y_1+y_2)e^{y_3} + d_2(y_1-y_2)e^{-y_3} + \frac{c_2(v-g)}{p}e^{y_3} - \frac{d_2(v+g)}{p}e^{-y_3} \\
&+ m_2 y_3 + n_2, \\
\xi_3(y_1,y_2,y_3) &= c_3(y_1+y_2)e^{y_3} + d_3(y_1-y_2)e^{-y_3} + \frac{c_3(v-g)}{p}e^{y_3} - \frac{d_3(v+g)}{p}e^{-y_3} \\
&+ m_3 y_3 + n_3.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Integrační konstanty se určí z požadovaného tvaru konstantní metriky. Zvolíme-li například

$$\left[\frac{\partial \xi^k}{\partial y^i}\right]_{\vec{y}=\vec{0}} = \delta_i^k \quad \text{pak} \quad G(\xi) = G(\vec{y}=\vec{0}) \tag{4.17}$$

Výsledné řešení má pak tvar

$$
\begin{aligned}
&\xi_1(y_1,y_2,y_3) = y_1\cosh(y_3) + y_2\sinh(y_3) + \frac{v}{p}\sinh(y_3) - \frac{g}{p}\cosh(y_3) - \frac{v}{p}y_3 + d_1, \\
&\xi_2(y_1,y_2,y_3) = y_1\sinh(y_3) + y_2\cosh(y_3) + \frac{v}{p}\cosh(y_3) - \frac{g}{p}\sinh(y_3) + \frac{g}{p}y_3 + d_2, \\
&\xi_3(y_1,y_2,y_3) = y_3 + d_3.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Tato transformace souřadnic převede obecný tvar metriky na konstantní formu

$$G(\xi)_{ij} = \begin{pmatrix} p & 0 & v \\ 0 & -p & g \\ v & g & r \end{pmatrix}; \qquad \text{v, p, r, g jsou konstanty.} \tag{4.19}$$

Tuto konstantní formu už jednoduchou lineární transformací

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \left(\sqrt{|p|}\right)\xi_1 + \varepsilon\left(\frac{v}{\sqrt{|p|}}\right)\xi_3 \\
y_2' &= \left(\sqrt{|p|}\right)\xi_2 - \varepsilon\left(\frac{g}{\sqrt{|p|}}\right)\xi_3
\end{aligned}
$$

$$y_3' \quad = \quad \left(\sqrt{\left|\varepsilon r + \left(\frac{g^2}{p} - \frac{v^2}{p}\right)\right|}\right)\xi_3 \tag{4.20}$$

kde[1]

$$\varepsilon \quad = \begin{cases} 1 & \text{pro } p > 0 \\ -1 & \text{pro } p < 0 \end{cases}$$
$$\delta \quad = \begin{cases} 1 & \text{pro } \left(r + \frac{g^2}{p} - \frac{v^2}{p}\right) > 0 \\ -1 & \text{pro } \left(r + \frac{g^2}{p} - \frac{v^2}{p}\right) < 0 \end{cases}$$

převedeme pomocí transformačního vzorce (2.1) na triviálně plochý tvar metrického tenzoru (4.1)

$$\tilde{G}(y') = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \delta\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

4.2 Diagonalizace metriky modelu $(3|1)$

metriky tohoto modelu je

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} p & u + ze^{-2y_1} & -u + ze^{-2y_1} \\ u + ze^{-2y_1} & q & -q \\ -u + ze^{-2y_1} & -q & q \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Nenulové složky affiní konexe jsou:

$$\Gamma^1_{11} \quad = \quad -2 \quad \Gamma^2_{11} \quad = \quad \tfrac{(pq-u^2)e^{2y_1}+zu}{qz} \quad \Gamma^3_{11} \quad = \quad \tfrac{(pq-u^2)e^{2y_1}-zu}{qz} \tag{4.23}$$

Rovnice (3.23) mají tedy tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial y_1 \partial y_1} \quad &= \quad -2\frac{\partial \xi}{\partial y_1} \\ &\quad + \left(\frac{(pq-u^2)e^{2y_1} + zu}{qz}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y_2} \\ &\quad + \left(\frac{(pq-u^2)e^{2y_1} - zu}{qz}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y_3}, \end{aligned}$$

[1] Případ $p = 0$ neuvažujeme, metrický tenzor by pak nebyl regulární.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1 \partial y_2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1 \partial y_3} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_2 \partial y_2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_2 \partial y_3} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_3 \partial y_3} &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Obecné řešení je tvaru

$$
\xi(y_1, y_2, y_3) = cy_3 + ay_2 + \frac{u(a-c)}{2q} y_1 + \frac{(pq-u^2)(a+c)}{8qz} e^{2y_1} + de^{-2y_1} + b \tag{4.25}
$$

kde a, b, c, d jsou integrační konstanty. Vzhledem k tomu, že transformační rovnice jsou pro každou složku souřadnic stejné, je i obecné řešení stejné a proto zde nebudeme uvádět obecná řešení pro každou souřadnici zvlášť a rovnou přistoupíme k určení integračních konstant. Integrační konstanty se určí z požadovaného tvaru konstantní metriky. Zvolíme-li například

$$
\left[\frac{\partial \xi^k}{\partial y^i} \right]_{\vec{y}=\vec{0}} = \delta_i^k \quad \text{pak} \quad G(\xi) = G(\vec{y} = \vec{0}) \tag{4.26}
$$

Výsledné řešení má pak tvar

$$
\begin{aligned}
\xi_1(y_1, y_2, y_3) &= -\frac{1}{2} e^{-2y_1} + b_1, \\
\xi_2(y_1, y_2, y_3) &= y_2 + \frac{u}{2q} y_1 + \frac{(pq-u^2)}{8qz} e^{2y_1} + \frac{(pq-u^2+2uz)}{8qz} e^{-2y_1} \\
&\quad + b_2, \\
\xi_3(y_1, y_2, y_3) &= y_3 - \frac{u}{2q} y_1 + \frac{(pq-u^2)}{8qz} e^{2y_1} + \frac{(2pq+3u^2-2uz-z^2)}{16qz} e^{-2y_1} \\
&\quad + b_3
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Tato transformace souřadnic převede obecný tvar metriky na konstantní formu

$$
G(\xi)_{ij} = \begin{pmatrix} p & u+z & z-u \\ u+z & q & -q \\ z-u & -q & q \end{pmatrix}; \qquad \text{p , q, z, u jsou konstanty.} \tag{4.28}
$$

Tuto konstantní formu už jednoduchou lineární transformací

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \left(\sqrt{|p|}\right)\xi_1 + \left(\frac{u+z}{\varepsilon\sqrt{|p|}}\right)\xi_2 + \left(\frac{z-u}{\varepsilon\sqrt{|p|}}\right)\xi_3 \\
y_2' &= \left(\sqrt{\left|\frac{(u+z)^2}{|p|} - \frac{q}{\varepsilon}\right|}\right)\xi_2 + \left(\frac{\frac{q}{\delta\varepsilon} + \frac{(z^2-u^2)}{\delta|p|}}{\sqrt{\left|\frac{(u+z)^2}{|p|} - \frac{q}{\varepsilon}\right|}}\right)\xi_3 \\
y_3' &= \left(\sqrt{\left|\frac{\left(\frac{(z^2-u^2)}{\delta|p|} + \frac{q}{\delta\varepsilon}\right)^2}{\left(\frac{(u+z)^2}{|p|} - \frac{q}{\varepsilon}\right)} - \frac{(z-u)^2}{\delta\,|p|} + \frac{q}{\delta\varepsilon}\right|}\right)\xi_3
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \begin{cases} 1 & \text{pro } p > 0 \\ -1 & \text{pro } p < 0 \end{cases} \\
\delta &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \left(\frac{(u+z)^2}{|p|} - \frac{q}{\varepsilon}\right) > 0 \\ -1 & \text{pro } \left(\frac{(u+z)^2}{|p|} - \frac{q}{\varepsilon}\right) < 0 \end{cases} \\
\lambda &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \left(\frac{\left(\frac{z^2-u^2}{\delta|p|} + \frac{q}{\delta\varepsilon}\right)^2}{\left(\frac{(u+z)^2}{|p|} - \frac{q}{\varepsilon}\right)} - \frac{(z-u)^2}{\delta|p|} + \frac{q}{\delta\varepsilon}\right) > 0 \\ -1 & \text{pro } \left(\frac{\left(\frac{z^2-u^2}{\delta|p|} + \frac{q}{\delta\varepsilon}\right)^2}{\left(\frac{(u+z)^2}{|p|} - \frac{q}{\varepsilon}\right)} - \frac{(z-u)^2}{\delta|p|} + \frac{q}{\delta\varepsilon}\right) < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

převedeme s pomocí transformačního vzorce (2.1) na triviálně plochý tvar metrického
tenzoru (4.22)

$$
\tilde{G}(y') = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon\delta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\delta\lambda \end{pmatrix}. \tag{4.30}
$$

4.3 Diagonalizace metriky modelu $(4|1)$

Obecný tvar metriky tohoto modelu je

$$
G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} p & (vy_1+u)e^{-y_1} & ve^{-y_1} \\ (vy_1+u)e^{-y_1} & qe^{-2y_1} & 0 \\ ve^{-y_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.31}
$$

Nenulové složky affiní konexe jsou:

$$\begin{array}{llllllll}
\Gamma^1_{11} &=& -1 & \Gamma^2_{11} &=& \frac{v}{q}e^{y_1} & \Gamma^2_{12} &=& -1 \\
\Gamma^2_{21} &=& -1 & \Gamma^3_{11} &=& -\frac{u}{q}e^{y_1}+\frac{v}{q}y_1e^{y_1}+\frac{p}{v}e^{y_1} & \Gamma^3_{12} &=& \frac{u}{v}+y_1 \\
\Gamma^3_{22} &=& \frac{q}{v}e^{-y_1} &&&&&&
\end{array} \quad (4.32)$$

Rovnice (3.23) mají tedy tvar:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1\partial y_1} &= -\frac{\partial\xi}{\partial y_1}+\left(\frac{v}{q}e^{y_1}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2}+\left(-\frac{u}{q}e^{y_1}+\frac{v}{q}y_1e^{y_1}+\frac{p}{v}e^{y_1}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3}\\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1\partial y_2} &= -\frac{\partial\xi}{\partial y_2}+\left(\frac{u}{v}+y_1\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3}\\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1\partial y_3} &= 0\\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_2\partial y_2} &= \left(\frac{q}{v}e^{-y_1}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3}\\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_2\partial y_3} &= 0\\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_3\partial y_3} &= 0.
\end{aligned} \quad (4.33)$$

Tyto rovnice mají obecné řešení tvaru:

$$\begin{aligned}
\xi(y_1,y_2,y_3) &= cy_3+\frac{qc}{2v}y_2^2e^{-y1}+ay_2e^{-y_1}+cy_1y_2+\frac{cu}{v}y_2-cy_2+\frac{av}{q}y_1\\
&\quad +\frac{pc}{2v}e^{y_1}+\frac{cv}{2q}e^{y_1}+de^{-y_1}+b,
\end{aligned} \quad (4.34)$$

kde a,b,c,d jsou integrační konstanty. Vzhledem k tomu, že transformační rovnice jsou pro každou složku souřadnic stejné, je i obecné řešení stejné a proto zde nebudeme uvádět obecná řešení pro každou souřadnici zvlášť a rovnou přistoupíme k určení integračních konstant. Integrační konstanty se určí z požadovaného tvaru konstantní metriky. Zvolíme-li například

$$\left[\frac{\partial\xi^k}{\partial y^i}\right]_{\vec{y}=\vec{0}}=\delta^k_i \quad \text{pak} \quad G(\xi)=G(\vec{y}=\vec{0}) \quad (4.35)$$

Výsledné řešení má pak tvar:

$$\xi_1(y_1,y_2,y_3) = -e^{-y_1}$$

$$
\begin{aligned}
\xi_2(y_1,y_2,y_3) &= y_2e^{-y_1}+\frac{v}{q}y_1+\frac{v}{q}e^{-y_1}\\
\xi_3(y_1,y_2,y_3) &= \frac{(pq-2uv)}{2qv}e^{-y_1}+\frac{v}{2q}e^{-y_1}+y_3+\frac{q}{2v}y_2^2e^{-y_1}+y_1y_2+\frac{u}{v}y_2\\
&\quad -y_2+\frac{p}{2v}e^{y_1}-\frac{u}{v}y_2e^{-y_1}+y_2e^{-y_1}+\frac{(v-u)}{q}y_1-\frac{v}{2q}e^{y_1}.
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

Tato transformace souřadnic převede obecný tvar metriky v konstantní formu

$$
G(\xi)_{ij}=\begin{pmatrix} p & u & v\\ u & q & 0\\ v & 0 & 0\end{pmatrix}; \qquad \text{p, q, v, u jsou konstanty.} \tag{4.37}
$$

Tuto konstantní formu už jednoduchou lineární transformací

$$
\begin{aligned}
y_1' &= (\sqrt{p})\,\xi_1+\left(\frac{u}{\varepsilon\sqrt{|p|}}\right)\xi_2+\left(\frac{v}{\varepsilon\sqrt{|p|}}\right)\xi_3\\
y_2' &= \left(\sqrt{\left|\frac{u^2}{|p|}-\frac{q}{\varepsilon}\right|}\right)\xi_2+\left(\left(\frac{uv}{\delta\,|p|}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\left|\frac{u^2}{|p|}-\frac{q}{\varepsilon}\right|}}\right)\right)\xi_3\\
y_3' &= \left(\left|\frac{u^2v^2}{p^2\left(\left|\frac{u^2}{|p|}-\frac{q}{\varepsilon}\right|\right)}-\frac{v^2}{\delta\,|p|}\right|\right)\xi_3.
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \begin{cases} 1 & \text{pro } p>0\\ -1 & \text{pro } p<0\end{cases}\\
\delta &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \left(\frac{u^2}{|p|}-\frac{q}{\varepsilon}\right)>0\\ -1 & \text{pro } \left(\frac{u^2}{|p|}-\frac{q}{\varepsilon}\right)<0\end{cases}\\
\lambda &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \left(\frac{u^2v^2}{p^2\left(\left|\frac{u^2}{|p|}-\frac{q}{\varepsilon}\right|\right)}-\frac{v^2}{\delta|p|}\right)>0\\ -1 & \text{pro } \left(\frac{u^2v^2}{p^2\left(\left|\frac{u^2}{|p|}-\frac{q}{\varepsilon}\right|\right)}-\frac{v^2}{\delta|p|}\right)<0\end{cases}
\end{aligned}
$$

převedeme s pomocí transformačního vzorce (2.1) na triviálně plochý tvar metrického tenzoru (4.31)

$$
\tilde{G}(y')=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0\\ 0 & -\delta\varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \lambda\delta\varepsilon\end{pmatrix}. \tag{4.39}
$$

4.4 Diagonalizace metriky modelu $(7_0|1)$

Obecný tvar metriky tohoto modelu je

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} p & 0 & z+py_2 \\ 0 & p & g-py_1 \\ z+py_2 & g-py_1 & r+2gy_1+2zy_2+p(y_1^2+y_2^2) \end{pmatrix}, \qquad (4.40)$$

Nejdříve zavedeme substituci:

$$y'_2 = \tfrac{z+py_2}{p}, \quad y'_1 = -\tfrac{g-py_1}{p}, \quad {y'}_3 = y_3. \qquad (4.41)$$

Potom metrika G přejde na tvar

$$G'(y')_{ij} = \begin{pmatrix} p & 0 & py'_2 \\ 0 & p & -py'_1 \\ py'_2 & -py'_1 & r'+p({y'}_1^2+{y'}_2^2) \end{pmatrix}; \qquad r' = r - \tfrac{(g+h)^2}{4p} - \tfrac{(z+v)^2}{4p}. \qquad (4.42)$$

Nenulové složky afinní konexe metriky $G'(y')$ jsou:

$$\begin{array}{lllllllll} \Gamma^1_{23} & = & 1 & \Gamma^1_{32} & = & 1 & \Gamma^1_{33} & = & -y'_1 \\ \Gamma^2_{13} & = & -1 & \Gamma^2_{31} & = & -1 & \Gamma^2_{33} & = & -y'_2. \end{array} \qquad (4.43)$$

Rovnice (3.23) mají tedy tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial y'_1\partial y'_1} &= 0 \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial y'_1\partial y'_2} &= 0 \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial y'_1\partial y'_3} &= -\frac{\partial\xi}{\partial y'_2} \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial y'_2\partial y'_2} &= 0 \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial y'_2\partial y'_3} &= \frac{\partial\xi}{\partial y'_1} \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial y'_3\partial y'_3} &= -y'_1\frac{\partial\xi}{\partial y'_1} - y'_2\frac{\partial\xi}{\partial y'_2}. \end{aligned} \qquad (4.44)$$

Tyto rovnice mají obecné řešení tvaru:

$$\xi(y'_1, y'_2, y'_3) = -y'_1(iae^{iy'_3} - ibe^{-iy'_3}) - y'_2(ae^{iy'_3} + be^{-iy'_3}) + cy'_3 + d, \qquad (4.45)$$

kde a, b, c, d jsou integrační konstanty. Vzhledem k tomu, že transformační rovnice jsou pro každou složku souřadnic stejné, je i obecné řešení stejné a proto zde nebudeme uvádět obecná řešení pro každou souřadnici zvlášť a rovnou přistoupíme k určení integračních konstant. Integrační konstanty se určí z požadovaného tvaru konstantní metriky. Zvolíme-li například

$$\left[\frac{\partial \xi^k}{\partial y^i}\right]_{\vec{y}=\vec{0}} = \delta_i^k \quad \text{pak} \quad G(\xi) = G(\vec{y} = \vec{0}) \tag{4.46}$$

Výsledné řešení má pak tvar:

$$\begin{aligned} \xi_1(y_1', y_2', y_3') &= y_1' \cos(y_3') + y_2' \sin(y_3') + d_1 \\ \xi_2(y_1', y_2', y_3') &= -y_1' \sin(y_3') + y_2' \cos(y_3') + d_2 \\ \xi_3(y_1', y_2', y_3') &= y_3' + d_3. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Tato transformace souřadnic převede obecný tvar metriky v konstantní formu

$$G'(\xi)_{ij} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & r' \end{pmatrix}; \qquad \text{p, r' jsou konstanty.} \tag{4.48}$$

Tuto konstantní formu už jednoduchou lineární transformací

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= \left(\sqrt{|p|}\right) \xi_1 \\ \tilde{y}_2 &= \left(\sqrt{|p|}\right) \xi_2 \\ \tilde{y}_3 &= \left(\sqrt{|r|}\right) \xi_3. \end{aligned} \tag{4.49}$$

kde[2]

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{cases} 1 & \text{pro } p > 0 \\ -1 & \text{pro } p < 0 \end{cases} \\ \delta &= \begin{cases} 1 & \text{pro } r > 0 \\ -1 & \text{pro } r < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

převedeme s pomocí transformačního vzorce (2.1) na triviálně plochý tvar metrického tenzoru (4.40)

$$\tilde{G}(\tilde{y}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}. \tag{4.50}$$

[2]Zde opět předpokládáme $p \neq 0$, aby metrický tenzor byl regulární.

4.5 Diagonalizace metriky modelu $(2|1)$

Obecný tvar metriky tohoto modelu je

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ u & q & g+uy_2 \\ v & g+uy_2 & r+2vy_2 \end{pmatrix}, \tag{4.51}$$

Nenulové složky affiní konexe jsou:

$$\begin{array}{llllll} \Gamma^1_{22} = \frac{-u^2g-u^3y_2+uvq}{u^2r-2uvg+v^2q} & \Gamma^1_{23} = \frac{-vug-u^2vy_2+v^2q}{u^2r-2uvg+v^2q} & \Gamma^1_{33} = \frac{-vur-uv^2y_2+v^2g}{u^2r-2uvg+v^2q} \\ \Gamma^2_{22} = \frac{-u^2v}{u^2r-2uvg+v^2q} & \Gamma^2_{23} = \frac{-uv^2}{u^2r-2uvg+v^2q} & \Gamma^2_{33} = \frac{-v^3}{u^2r-2uvg+v^2q} \\ \Gamma^3_{22} = \frac{u^3}{u^2r-2uvg+v^2q} & \Gamma^3_{32} = \frac{u^2v}{u^2r-2uvg+v^2q} & \Gamma^3_{33} = \frac{uv^2}{u^2r-2uvg+v^2q}. \end{array} \tag{4.52}$$

Rovnice (3.23) mají tedy tvar:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1\partial y_1} &= 0 \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1\partial y_2} &= 0 \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1\partial y_3} &= 0 \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_2\partial y_2} &= \left(\frac{-u^2g+vqu}{u^2r-2uvg+v^2q} - \frac{u^3y_2}{u^2r-2uvg+v^2q}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_1} - \left(\frac{u^2v}{u^2r-2uvg+v^2q}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2} \\
&\quad + \left(\frac{u^3}{u^2r-2uvg+v^2q}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3} \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_2\partial y_3} &= \left(\frac{-uvg+v^2q}{u^2r-2uvg+v^2q} - \frac{u^2vy_2}{u^2r-2uvg+v^2q}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_1} - \left(\frac{uv^2}{u^2r-2uvg+v^2q}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2} \\
&\quad + \left(\frac{u^2v}{u^2r-2uvg+v^2q}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3} \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_3\partial y_3} &= \left(\frac{-urv+v^2g}{u^2r-2uvg+v^2q} - \frac{uv^2y_2}{u^2r-2uvg+v^2q}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_1} - \left(\frac{v^3}{u^2r-2uvg+v^2q}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2} \\
&\quad + \left(\frac{uv^2}{u^2r-2uvg+v^2q}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Tyto rovnice mají obecné řešení tvaru:

$$\xi(y_1,y_2,y_3) = \frac{(-3u^3c{y_2}^2g+6u^3y_2br-v^3{y_3}^3uc+3v^2{y_3}^2u^2a+6v^3y_3bq+6ay_3u^3r)}{6u(u^2r-2uvg+v^2q)}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(-u^4cy_2{}^3+3u^4ay_2{}^2+6ay_3uv^2q+6du^3r-12ay_3u^2vg+6duv^2q)}{6u(u^2r-2uvg+v^2q)}\\
&+\frac{(3v^2y_3{}^2cug+6vy_3bu^2r-12v^2y_3bug-3vcy_3{}^2u^2r-3u^2y_2v^2cy_3{}^2)}{6u(u^2r-2uvg+v^2q)}\\
&+\frac{(6u^3y_2vy_3a-6u^2y_2vy_3cg+6uy_2v^2y_3cq-12u^2y_2bvg+6uy_2bv^2q)}{6u(u^2r-2uvg+v^2q)}\\
&+\frac{(-12du^2vg+3u^2cy_2{}^2vq-12cy_1u^2vg+6cy_1uv^2q+6cy_1u^3r)}{6u(u^2r-2uvg+v^2q)}\\
&-\frac{(3u^3vcy_3y_2{}^2)}{6u(u^2r-2uvg+v^2q)}.
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

kde a, b, c, d jsou integrační konstanty. Vzhledem k tomu, že transformační rovnice jsou pro každou složku souřadnic stejné, je i obecné řešení stejné a proto zde nebudeme uvádět obecná řešení pro každou souřadnici zvlášť a rovnou přistoupíme k určení integračních konstant. Integrační konstanty se určí z požadovaného tvaru konstantní metriky. Zvolíme-li například

$$
\left[\frac{\partial \xi^k}{\partial y^i}\right]_{\vec{y}=\vec{0}} = \delta_i^k \quad \text{pak} \quad G(\xi) = G(\vec{y}=\vec{0}) \tag{4.55}
$$

Výsledné řešení má pak tvar:

$$
\begin{aligned}
\xi_1(y_1,y_2,y_3) \;=\; &\frac{(6y_1u^2r-12y_1uvg+6y_1v^2q-3u^2y_2{}^2g+3uy_2{}^2vq-u^3y_2{}^3)}{6(u^2r-2uvg+v^2q)}\\
&+\frac{(-3u^2vy_3y_2{}^2-3uy_2v^2y_3{}^2-6uy_2vy_3g+6y_2v^2y_3q-v^3y_3{}^3)}{6(u^2r-2uvg+v^2q)}\\
&+\frac{(v^2y_3{}^2g-vy_3{}^2ur)}{2(u^2r-2uvg+v^2q)}+d_1
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_2(y_1,y_2,y_3) &= \frac{(-u^2vy_2{}^2-2uv^2y_3y_2+2ru^2y_2-4uvy_2g+2y_2v^2q-v^3y_3{}^2)}{2(u^2r-2uvg+v^2q)}+d_2\\
\xi_3(y_1,y_2,y_3) &= \frac{(u^3y_2{}^2+2u^2vy_3y_2+uv^2y_3{}^2+2y_3u^2r-4vy_3ug+2v^2y_3q)}{2(u^2r-2uvg+v^2q)}+d_3
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

Tato transformace souřadnic převede obecný tvar metriky v konstantní formu

$$
G(\xi)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ u & q & g \\ v & g & r \end{pmatrix}; \qquad \text{q, u, v, r, g jsou konstanty.} \tag{4.58}
$$

Tuto konstantní formu už jednoduchou lineární transformací

$$
\begin{aligned}
y'_1 &= \left(\frac{u}{\varepsilon\sqrt{|q|}}\right)\xi_1 + \left(\sqrt{|q|}\right)\xi_2 + \left(\frac{g}{\varepsilon\sqrt{|q|}}\right)\xi_3 \\
y'_2 &= \left(\frac{|u|}{\sqrt{|q|}}\right)\xi_1 + \left(\left(\frac{ug}{|q|} - \frac{v}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\sqrt{|q|}}{|u|}\right)\right)\xi_3 \\
y'_3 &= \left(\sqrt{\left(\frac{gu}{|q|} - \frac{v}{\varepsilon}\right)^2 \frac{|q|}{u^2} - \frac{g^2}{\delta\,|q|} + \frac{r}{\varepsilon\delta}}\right)\xi_1.
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \begin{cases} 1 & \text{pro } q > 0, \\ -1 & \text{pro } q < 0. \end{cases} \\
\delta &= \begin{cases} 1 & \text{pro } u > 0, \\ -1 & \text{pro } u < 0. \end{cases} \\
\lambda &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \left(\left(\frac{gu}{|q|} - \frac{v}{\varepsilon}\right)^2 \frac{|q|}{u^2} - \frac{g^2}{\delta|q|} + \frac{r}{\varepsilon\delta}\right) > 0, \\ -1 & \text{pro } \left(\left(\frac{gu}{|q|} - \frac{v}{\varepsilon}\right)^2 \frac{|q|}{u^2} - \frac{g^2}{\delta|q|} + \frac{r}{\varepsilon\delta}\right) < 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

převedeme s pomocí transformačního vzorce (2.1) na triviálně plochý tvar metrického tenzoru (4.51).

$$
\tilde{G}(y') = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon\delta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\varepsilon\delta \end{pmatrix}.
\tag{4.60}
$$

4.6 Diagonalizace metriky modelu (5|1)

Model (5|1) Obecný tvar metriky tohoto modelu je

$$
G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} p & ue^{-y_1} & ve^{-y_1} \\ ue^{-y_1} & \frac{g^2}{r}e^{-2y_1} & ge^{-2y_1} \\ ve^{-y_1} & ge^{-2y_1} & re^{-2y_1} \end{pmatrix},
\tag{4.61}
$$

Nenulové složky affiní konexe jsou:

$$\begin{array}{lllllllll}
\Gamma^1_{11} &=& -1 & \Gamma^2_{11} &=& \frac{rp}{(ur-vg)}e^{y_1} & \Gamma^2_{12} &=& \frac{gv}{(ur-vg)} \\
\Gamma^2_{13} &=& \frac{vr}{(ur-vg)} & \Gamma^2_{22} &=& \frac{g^2}{(ur-vg)}e^{-y_1} & \Gamma^2_{23} &=& \frac{gr}{(ur-vg)}e^{-y_1} \\
\Gamma^2_{33} &=& \frac{r^2}{(ur-vg)}e^{-y_1} & \Gamma^3_{11} &=& -\frac{pg}{(ur-vg)}e^{y_1} & \Gamma^3_{21} &=& -\frac{ug}{(ur-vg)} \\
\Gamma^3_{22} &=& -\frac{g^3}{r(ur-vg)}e^{-y_1} & \Gamma^3_{31} &=& -\frac{ur}{(ur-vg)} & \Gamma^3_{32} &=& -\frac{g^2}{(ur-vg)}e^{-y_1} \\
\Gamma^3_{33} &=& -\frac{gr}{(ur-vg)}e^{-y_1}. &&&&&&
\end{array} \tag{4.62}$$

Rovnice (3.23) mají tedy tvar:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1\partial y_1} &= -\frac{\partial\xi}{\partial y_1} + \left(\frac{rp}{(ur-vg)}e^{y_1}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2} - \left(\frac{pg}{(ur-vg)}e^{y_1}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3} \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1\partial y_2} &= \left(\frac{gv}{(ur-vg)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2} - \left(\frac{ug}{(ur-vg)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3} \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1\partial y_3} &= \left(\frac{vr}{(ur-vg)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2} - \left(\frac{ur}{(ur-vg)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3} \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_2\partial y_2} &= \left(\frac{g^2}{(ur-vg)}e^{-y_1}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2} - \left(\frac{g^3}{r(ur-vg)}e^{-y_1}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3} \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_2\partial y_3} &= \left(\frac{gr}{(ur-vg)}e^{-y_1}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2} - \left(-\frac{g^2}{(ur-vg)}e^{-y_1}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3} \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_3\partial y_3} &= \left(\frac{r^2}{(ur-vg)}e^{-y_1}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2} - \left(\frac{gr}{(ur-vg)}e^{-y_1}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Tyto rovnice mají obecné řešení tvaru:

$$\begin{aligned}
\xi(y_1,y_2,y_3) &= -\left(\frac{g^3c}{2r(ur-gv)}\right)y_2^2e^{-y_1} - \left(\frac{ugc}{(ur-gv)}\right)y_2 + \left(\frac{rby_3}{g}+a\right)e^{-y_1} \\
&- \left(\frac{pgc}{2(ur-gv)}\right)e^{y_1} + \left(c-\frac{urc}{(ur-gv)}\right)y_3 - \left(\frac{rgcy_3^2}{2(ur-gv)}\right)e^{-y_1} \\
&+ \left(b-\frac{g^2cy_3}{(ur-gv)}\right)y_2e^{-y_1} + d.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

kde a,b,c,d jsou integrační konstanty. Vzhledem k tomu, že transformační rovnice jsou pro každou složku souřadnic stejné, je i obecné řešení stejné a proto zde nebudeme uvádět obecná řešení pro každou souřadnici zvlášť a rovnou přistoupíme k určení integračních konstant. Integrační konstanty se určí z požadovaného tvaru konstantní metriky. Zvolíme-li například

$$\left[\frac{\partial\xi^k}{\partial y^i}\right]_{\vec{y}=\vec{0}} = \delta^k_i \quad \text{pak} \quad G(\xi) = G(\vec{y}=\vec{0}) \tag{4.65}$$

Výsledné řešení má pak tvar:

$$
\begin{aligned}
\xi_1(y_1,y_2,y_3) &= -e^{-y_1} + d_1
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_2(y_1,y_2,y_3) &= \left(\frac{g^2}{2(ur-gv)}\right) y_2^2 e^{-y_1} + \left(\frac{ur}{(ur-gv)}\right) y_2 + \left(\frac{pr}{2(ur-gv)}\right) e^{y_1} \\
&+ \left(\frac{rg}{(ur-gv)} y_3 - \frac{gv}{(ur-gv)}\right) y_2 e^{-y_1} + \left(\frac{ur^2}{g(ur-gv)} - \frac{r}{g}\right) y_3 \\
&- \left(\frac{rv}{(ur-gv)} y_3 + \frac{pr}{2(ur-gv)}\right) e^{-y_1} + \left(\frac{r^2 y_3^2}{2(ur-gv)}\right) e^{-y_1} + d_2
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_3(y_1,y_2,y_3) &= -\left(\frac{g^3}{2r(ur-gv)}\right) y_2^2 e^{-y_1} - \left(\frac{ug}{(ur-gv)}\right) y_2 - \left(\frac{pg}{2(ur-gv)}\right) e^{y_1} \\
&+ \left(\frac{ug}{(ur-gv)} - \frac{g^2}{(ur-gv)} y_3\right) y_2 e^{-y_1} - \left(\frac{rg}{2(ur-gv)}\right) y_3^2 e^{-y_1} \\
&+ \left(\frac{ru}{(ur-gv)} y_3 - \frac{pg}{2(ur-gv)}\right) e^{-y_1} + \left(1 - \frac{ur}{(ur-gv)}\right) y_3 + d_3
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

Tato transformace souřadnic převede obecný tvar metriky v konstantní formu

$$
G(\xi)_{ij} = \begin{pmatrix} p & u & v \\ u & \frac{g^2}{r} & g \\ v & g & r \end{pmatrix}; \qquad \text{q, u, v, r, g jsou konstanty.} \tag{4.69}
$$

Tuto konstantní formu už jednoduchou lineární transformací

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \left(\sqrt{|p|}\right) \xi_1 + \left(\frac{u}{\varepsilon\sqrt{|p|}}\right) \xi_2 + \left(\frac{v}{\varepsilon\sqrt{|p|}}\right) \xi_3 \\
y_2' &= \left(\sqrt{\left|\frac{u^2}{|p|} - \frac{g^2}{\varepsilon r}\right|}\right) \xi_2 + \left(\frac{\frac{vu}{\delta|p|} - \frac{g}{\delta\varepsilon}}{\sqrt{\left|\frac{u^2}{|p|} - \frac{g^2}{\varepsilon r}\right|}}\right) \xi_3 \\
y_3' &= \left(\sqrt{\left|\frac{r}{\delta\varepsilon} - \frac{v^2}{\delta\,|p|} + \frac{\left(\frac{vu}{\delta|p|} - \frac{g}{\delta\varepsilon}\right)^2}{\left|\frac{u^2}{|p|} - \frac{g^2}{\varepsilon r}\right|}\right|}\right) \xi_3.
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \begin{cases} 1 & \text{pro } p > 0 \\ -1 & \text{pro } p < 0 \end{cases} \\
\delta &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \left(\frac{u^2}{|p|} - \frac{g^2}{\varepsilon r}\right) > 0 \\ -1 & \text{pro } \left(\frac{u^2}{|p|} - \frac{g^2}{\varepsilon r}\right) < 0 \end{cases} \\
\lambda &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \left(\frac{r}{\delta\varepsilon} - \frac{v^2}{\delta|p|} + \frac{\left(\frac{vu}{\delta|p|} - \frac{g}{\delta\varepsilon}\right)^2}{\left|\frac{u^2}{|p|} - \frac{g^2}{\varepsilon r}\right|}\right) > 0 \\ -1 & \text{pro } \left(\frac{r}{\delta\varepsilon} - \frac{v^2}{\delta|p|} + \frac{\left(\frac{vu}{\delta|p|} - \frac{g}{\delta\varepsilon}\right)^2}{\left|\frac{u^2}{|p|} - \frac{g^2}{\varepsilon r}\right|}\right) < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

převedeme s pomocí transformačního vzorce (2.1) na triviálně plochý tvar metrického tenzoru (4.61)

$$
\tilde{G}(y') = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\delta\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\delta\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{4.71}
$$

Kapitola 5

Diagonalizace metriky modelu $(1|6_0)$

Zjednodušený tvar metriky tohoto modelu je[1]

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{k^2 q {y_1}^2}{(1+2ky_1+k^2({y_1}^2-{y_2}^2))} & \frac{k^2 q y_1 y_2}{(1+2ky_1+k^2({y_1}^2-{y_2}^2))} & -\frac{k(1+ky_1)}{(1+2ky_1+k^2({y_1}^2-{y_2}^2))} \\ \frac{k^2 q y_1 y_2}{(1+2ky_1+k^2({y_1}^2-{y_2}^2))} & \frac{q(-1+k^2{y_2}^2)}{(-1-2ky_1+k^2(-{y_1}^2+{y_2}^2))} & \frac{k^2 y_2}{(1+2ky_1+k^2({y_1}^2-{y_2}^2))} \\ -\frac{k(1+ky_1)}{(1+2ky_1+k^2({y_1}^2-{y_2}^2))} & \frac{k^2 y_2}{(1+2ky_1+k^2({y_1}^2-{y_2}^2))} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

Nenulové složky afinní konexe metriky $G(y)$ jsou

$$\begin{array}{rclrcl} \Gamma^1_{11} & = & -\frac{(1+ky_1)k}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} & \Gamma^1_{21} & = & \frac{k^2 y_2}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} \\ \Gamma^1_{22} & = & -\frac{(1+ky_1)k}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} & \Gamma^2_{22} & = & \frac{k^2 y_2}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} \\ \Gamma^2_{11} & = & \frac{k^2 y_2}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} & \Gamma^2_{12} & = & -\frac{(1+ky_1)k}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} \\ \Gamma^3_{11} & = & \frac{(1+ky_1)kqy_1}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} & \Gamma^3_{21} & = & -\frac{k^2 q y_1 y_2}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} \\ \Gamma^3_{22} & = & \frac{q(-1+k^2{y_2}^2-ky_1)}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} & & & \end{array} \tag{5.2}$$

Rovnice (3.23) mají tedy tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1 \partial y_1} &= \left(-\frac{(1+ky_1)k}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y_1} + \left(\frac{k^2 y_2}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y_2} \\ &\quad + \left(\frac{(1+ky_1)kqy_1}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y_3} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1 \partial y_2} &= \left(\frac{k^2 y_2}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y_1} - \left(\frac{(1+ky_1)k}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y_2} \end{aligned}$$

[1] Tento tvar metrického tenzoru je konstruován z konstantní formy E_0 tvaru (5.7).

$$
\begin{aligned}
&\quad - \left(\frac{k^2 q y_1 y_2}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y_3} \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_2 \partial y_2} &= \left(- \frac{(1+ky_1)k}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y_1} + \left(\frac{k^2 y_2}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y_2} \\
&\quad + \left(\frac{q(-1+k^2{y_2}^2-ky_1)}{(1+2ky_1+k^2{y_1}^2-k^2{y_2}^2)} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y_3} \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1 \partial y_3} &= 0 \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_2 \partial y_3} &= 0 \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_3 \partial y_3} &= 0. \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

Tyto rovnice mají obecné řešení tvaru

$$
\begin{aligned}
\xi(y_1, y_2, y_3) &= \frac{(qa+4kb)}{4k^2} ln\,(1+k(y_1-y_2)) + \frac{(qa+4kc)}{4k^2} ln\,(1+k(y_1+y_2)) \\
&\quad - \frac{qa}{2k} y_1 + \frac{1}{4} \left(qa(y_1^2 - y_2^2) \right) + ay_3 + d. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

kde a, b, c, d jsou integrační konstanty. Vzhledem k tomu, že transformační rovnice jsou pro každou složku souřadnic stejné, je i obecné řešení stejné a proto zde nebudeme uvádět obecná řešení pro každou souřadnici zvlášť a rovnou přistoupíme k určení integračních konstant. Integrační konstanty se určí z požadovaného tvaru konstantní metriky. Zvolíme-li například

$$
\left[\frac{\partial \xi^k}{\partial y^i} \right]_{\vec{y}=\vec{0}} = \delta_i^k \quad \text{pak} \quad G(\xi) = G(\vec{y} = \vec{0}) \qquad (5.5)
$$

Výsledné řešení má pak tvar

$$
\begin{aligned}
\xi_1(y_1, y_2, y_3) &= \frac{1}{2k} \ln(1+k(y_1-y_2)) + \frac{1}{2k} \ln(1+k(y_1+y_2)) + d_1 \\
\xi_2(y_1, y_2, y_3) &= -\frac{1}{2k} \ln(1+k(y_1-y_2)) + \frac{1}{2k} \ln(1+k(y_1+y_2)) + d_2 \\
\xi_3(y_1, y_2, y_3) &= \frac{q}{4k^2} \ln(1+k(y_1-y_2)) + \frac{q}{4k^2} \ln(1+k(y_1+y_2)) - \frac{q}{2k} y_1 \\
&\quad + \frac{q}{4} ({y_1}^2 - {y_2}^2) + y_3 + d_3.
\end{aligned}
\qquad (5.6)
$$

Tato transformace souřadnic převede obecný tvar metriky v konstantní formu

$$
G(\xi)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k \\ 0 & q & 0 \\ -k & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{q, k jsou konstanty.} \qquad (5.7)
$$

Tuto konstantní formu už jednoduchou lineární transformací

$$\begin{aligned} y'_1 &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{|2k|}\right)\xi_1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{|2k|}\right)\xi_3 \\ y'_2 &= (\sqrt{|q|})\xi_2 \\ y'_3 &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{|2k|}\right)\xi_1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{|2k|}\right)\xi_3. \end{aligned} \tag{5.8}$$

kde[2]

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{cases} 1 & \text{pro } k > 0 \\ -1 & \text{pro } k < 0 \end{cases} \\ \delta &= \begin{cases} 1 & \text{pro } q > 0 \\ -1 & \text{pro } q < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

převedeme s pomocí transformačního vzorce (2.1) na triviálně plochý tvar metrického tenzoru (5.1)

$$\tilde{G}(y') = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

V nových plochých souřadnicích mají β-rovnice (3.1) tvar

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^i \partial y'^j} \\ 0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial y'_k}\frac{\partial \Phi}{\partial y'^k}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Obecné řešení těchto rovnic je

$$\Phi(y'_1, y'_2, y'_3) = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + c_3 y'_3 \quad \text{kde} \quad -\varepsilon c_1^2 + \delta c_2^2 + \varepsilon c_3^2 = 0. \tag{5.11}$$

Abychom dostali řešení v původních souřadnicích dosadíme do (5.11) z (5.8)

$$\begin{aligned} \Phi &= c_1 \left[\frac{1}{2}\sqrt{|2k|}\left(\frac{1}{2k}\ln(1 + k(y_1 - y_2)) + \frac{1}{2k}\ln(1 + k(y_1 + y_2))\right)\right] \\ &+ c_1 \left[\frac{1}{2}\sqrt{|2k|}\left(\frac{q}{4k^2}\ln(1 + k(y_1 - y_2)) + \frac{q}{4k^2}\ln(1 + k(y_1 + y_2))\right)\right] \\ &+ c_1 \left[\frac{1}{2}\sqrt{|2k|}\left(-\frac{q}{2k}y_1 + \frac{q}{4}({y_1}^2 - {y_2}^2) + y_3\right)\right] \end{aligned}$$

[2] Opět předpokládáme $k \neq 0$ a $q \neq 0$, aby mterický tenzor byl regulární.

$$
\begin{aligned}
&+\quad c_2\left[\sqrt{|q|}\left(-\frac{1}{2k}\ln(1+k(y_1-y_2))+\frac{1}{2k}\ln(1+k(y_1+y_2))\right)\right]\\
&+\quad c_3\left[\frac{1}{2}\sqrt{|2k|}\left(\frac{1}{2k}\ln(1+k(y_1-y_2))+\frac{1}{2k}\ln(1+k(y_1+y_2))\right)\right]\\
&-\quad c_3\left[\frac{1}{2}\sqrt{|2k|}\left(\frac{q}{4k^2}\ln(1+k(y_1-y_2))+\frac{q}{4k^2}\ln(1+k(y_1+y_2))\right)\right]\\
&-\quad c_3\left[\frac{1}{2}\sqrt{|2k|}\left(-\frac{q}{2k}y_1+\frac{q}{4}({y_1}^2-{y_2}^2)+y_3\right)\right].
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Pro speciální volbu konstant $c_1 = -c_3 = \frac{\sqrt{|2k|}}{4k}$, $c_2 = 0$ dostaneme řešení (3.12). Omezení konstantní formy $\tilde{E}_0$ na tvar (5.7) jsme provedli hlavně proto, že získané formule pro obecný tvar metrického tenzoru jsou příliš složité a nepřehledné. V principu je však řešení této úlohy v obecném případě stejné.

Kapitola 6

Diagonalizace metriky modelu $(5ii|6_0)$

Zjednodušený[1] tvar metriky tohoto modelu je

$$G(y)_{ij} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33}. \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

kde[2]

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{(e^{-(y_1+y_2)} + 2e^{y_1+y_2} + e^{3(y_1+y_2)} - 4e^{-y_1} + 4e^{3y_1+y_2} - 4e^{3y_1+2y_2})(q(w^2-1))}{(-4+(-4+4e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)} \\
G_{21} &= -\frac{(2e^{y_1} - e^{-(y_1+y_2)} + 2e^{3y_1+2y_2} - 2e^{y_1+y_2} - e^{3(y_1+y_2)})(q(w^2-1))}{(-4+(-4+4e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)} \\
&- \frac{(2e^{-y_2} - 4e^{2y_1} + 2e^{2y_1+y_2})(qw^2)}{(-4+(-4+4e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)} \\
G_{31} &= \frac{(2e^{2y_1+y_2} - e^{2(y_1+y_2)})(w(1-w)) + w(1+w)}{(-2+(-2+2e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)} \\
G_{22} &= \frac{(4e^{-y_2} - 4e^{y_1-y_2} + 4e^{2y_1+y_2})(qw^2)}{(-4+(-4+4e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)} \\
&+ \frac{(2e^{y_1+y_2} + e^{3(y_1+y_2)} + e^{-(y_1+y_2)})(q(1-w^2))}{(-4+(-4+4e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)}
\end{aligned}$$

[1]Tento tvar metrického tenzoru je konstruován z konstantní formy E_0 tvaru (6.8).
[2]Z důvodů symetrie metrického tenzoru $G(y)_{ij}$ uvádíme pouze dolní trojúhelníkovou část.

$$G_{32} = \frac{e^{2(y_1+y_2)}w(w-1) - 4w^2e^{y_1} + w(1+w)}{(-2+(-2+2e^{(y_1+y_2)})(-1+w))(1+w-2e^{y_1}w+e^{(y_1+y_2)}w)}$$

$$G_{33} = 0$$

Nenulové složky afinní konexe metriky $G(y)$ jsou

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{(2e^{2(y_1+y_2)}-e^{2y_1+3y_2})w(w-1)+(2+e^{y_2})w(w+1)+(2e^{y_1+y_2}-2e^{y_1+2y_2})(w^2-1)}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)} \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{e^{y_2}((2e^{2y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)})w(w-1)+w(1+w)-2e^{y_1+y_2}(w^2-1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)} \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{e^{y_2}((4e^{2y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)})w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(1+w)-2e^{y_1+y_2}(w^2-1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)} \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{(-2+e^{y_2})((e^{2(y_1+y_2)}-2e^{2y_1+y_2})w(w-1)-w(w-1)+2e^{y_1+y_2}(w^2-1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)} \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{e^{y_2}((4e^{2y_1}+e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+w(w+1)+(2e^{y_1+y_2}-2e^{y_1})(w^2-1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)} \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{e^{y_2}(2e^{y_1}+(4e^{2y_1}+e^{2(y_1+y_2)}-6e^{2y_1+y_2})w(w-1)-w(w+1)+2e^{y_1+y_2}(w^2-1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)} \\
\Gamma^3_{11} &= \frac{e^{-(y_1+y_2)}(1+e^{2(y_1+y_2)}-2e^{2y_1+y_2})q(-1+(4e^{y_1}-2e^{y_1+y_2})w+w^2+(e^{2(y_1+y_2)}-2e^{2y_1+y_2})(w^2-1))}{4(e^{y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)}w(w-1)+2e^{2y_1+y_2}w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(w+1))} \\
\Gamma^3_{12} &= \frac{e^{-(y_1+y_2)}(1+e^{2(y_1+y_2)}-2e^{2y_1+y_2})q(-1-2e^{y_1+y_2}w-2e^{y_1}w(w-1)+w^2+e^{2(y_1+y_2)}(w^2-1))}{4(e^{y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)}w(w-1)+2e^{2y_1+y_2}w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(w+1))} \\
\Gamma^3_{22} &= \frac{e^{-(y_1+y_2)}q(-1-(2e^{y_1+y_2}+2e^{3(y_1+y_2)})w-4e^{3y_1+2y_2}w(w-1)+(1+4e^{2y_1}-4e^{y_1})w^2+(2e^{2(y_1+y_2)}))}{4(e^{y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)}w(w-1)+2e^{2y_1+y_2}w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(w+1))} \\
&+ \frac{e^{3(y_1+y_2)})q(w^2-1)}{4(e^{y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)}w(w-1)+2e^{2y_1+y_2}w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(w+1))}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Rovnice (3.23) mají tedy tvar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1\partial y_1} &= \left(\frac{(2e^{2(y_1+y_2)}-e^{2y_1+3y_2})w(w-1)+(2+e^{y_2})w(w+1)}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_1} \\
&+ \left(\frac{(2e^{y_1+y_2}-2e^{y_1+2y_2})(w^2-1)}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_1} \\
&+ \left(\frac{(-2+e^{y_2})((e^{2(y_1+y_2)}-2e^{2y_1+y_2})w(w-1)-w(w-1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2} \\
&+ \left(\frac{(-2+e^{y_2})(2e^{y_1+y_2}(w^2-1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(\frac{e^{-(y_1+y_2)}(1+e^{2(y_1+y_2)}-2e^{2y_1+y_2})q(-1+(4e^{y_1}-2e^{y_1+y_2})w+w^2)}{4(e^{y_1+y_2}+(2e^{2y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)})w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(w+1))}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3}\\
&+ \left(\frac{e^{-(y_1+y_2)}(1+e^{2(y_1+y_2)}-2e^{2y_1+y_2})q(e^{2(y_1+y_2)}-2e^{2y_1+y_2})(w^2-1)}{4(e^{y_1+y_2}+(2e^{2y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)})w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(w+1))}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3}
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1\partial y_2} &= \left(\frac{e^{y_2}((2e^{2y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)})w(w-1)+w(1+w)-2e^{y_1+y_2}(w^2-1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_1}\\
&+ \left(\frac{e^{y_2}((4e^{2y_1}+e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+w(w+1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2}\\
&+ \left(\frac{e^{y_2}((2e^{y_1+y_2}-2e^{y_1})(w^2-1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2}\\
&+ \left(\frac{e^{-(y_1+y_2)}(1+e^{2(y_1+y_2)}-2e^{2y_1+y_2})q(-1-2e^{y_1+y_2}w-2e^{y_1}w(w-1))}{4(e^{y_1+y_2}+(2e^{2y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)})w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(w+1))}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3}\\
&+ \left(\frac{e^{-(y_1+y_2)}(1+e^{2(y_1+y_2)}-2e^{2y_1+y_2})q(w^2+e^{2(y_1+y_2)}(w^2-1))}{4(e^{y_1+y_2}+(2e^{2y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)})w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(w+1))}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_2\partial y_2} &= \left(\frac{e^{y_2}((4e^{2y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)})w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(1+w))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_1}\\
&- \left(\frac{e^{y_2}(2e^{y_1+y_2}(w^2-1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_1}\\
&+ \left(\frac{e^{y_2}(2e^{y_1}+(4e^{2y_1}+e^{2(y_1+y_2)}-6e^{2y_1+y_2})w(w-1)-w(w+1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2}\\
&+ \left(\frac{e^{y_2}(2e^{y_1+y_2}(w^2-1))}{(2e^{2(y_1+y_2)}-4e^{2y_1+y_2})w(w-1)+4e^{y_1}w^2-2e^{y_1+y_2}-2w(1+w)}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_2}\\
&+ \left(\frac{e^{-(y_1+y_2)}q(-1-(2e^{y_1+y_2}+2e^{3(y_1+y_2)})w-4e^{3y_1+2y_2}w(w-1))}{4(e^{y_1+y_2}+(2e^{2y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)})w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(w+1))}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3}\\
&+ \left(\frac{e^{-(y_1+y_2)}q((1+4e^{2y_1}-4e^{y_1})w^2+(2e^{2(y_1+y_2)}))}{4(e^{y_1+y_2}+(2e^{2y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)})w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(w+1))}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3}\\
&+ \left(\frac{e^{3(y_1+y_2)}q(w^2-1)}{4(e^{y_1+y_2}+(2e^{2y_1+y_2}-e^{2(y_1+y_2)})w(w-1)-2e^{y_1}w^2+w(w+1))}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y_3}\\
\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1\partial y_3} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_2 \partial y_3} &= 0 \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_3 \partial y_3} &= 0
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Tyto rovnice mají obecné řešení tvaru

$$
\begin{aligned}
\xi(y_1, y_2, y_3) &= -\frac{(2e^{y_2} qwa + (q(1+2w)a + 2wb)y_2 + e^{-(y_1+y_2)} qa(2-w))}{4w^2} \\
&- \frac{(e^{y_1+y_2} qw^2 a)}{4w^2} + \frac{(qa(w^2-1) + 4wc)\ln(1 + (-1 + e^{-(y_1+y_2)}))}{4w^2} \\
&+ \frac{(qa(1+2w) + 2wb)\ln(-2w + e^{y_2} w + e^{-y_1}(1+w))}{4w^2} + ay_3 \\
&+ \frac{(qwa + 2wb)(y_1+y_2)}{4w^2} + \frac{e^{y_1} qa(1+w)}{2w} + \frac{qa(y_1+y_2)}{4w^2} + d
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

kde a, b, c, d jsou integrační konstanty. Vzhledem k tomu, že transformační rovnice jsou pro každou složku souřadnic stejné, je i obecné řešení stejné a proto zde nebudeme uvádět obecná řešení pro každou souřadnici zvlášť a rovnou přistoupíme k určení integračních konstant. Integrační konstanty se určí z požadovaného tvaru konstantní metriky. Zvolíme-li například

$$
\left[\frac{\partial \xi^k}{\partial y^i}\right]_{\vec{y}=\vec{0}} = \delta_i^k \quad \text{pak} \quad G(\xi) = G(\vec{y} = \vec{0}) \tag{6.6}
$$

Výsledné řešení má pak tvar

$$
\begin{aligned}
\xi_1(y_1, y_2, y_3) = &- \left(\frac{\ln(1 - w + e^{-(y1+y2)} w) + \ln(-2we^{y_1} + e^{y_1+y_2} w + 1 + w)}{2w}\right) + d_1 \\
\xi_2(y_1, y_2, y_3) = & \left(\frac{\ln(-2we^{y_1} + e^{y_1+y_2} w + 1 + w) - \ln(1 - w + e^{-(y_1+y_2)} w)}{2w}\right) + d_2 \\
\xi_3(y_1, y_2, y_3) = &- \left(\frac{2qe^{-y_2} w^2 + qwe^{-(y_1+y_2)} - 2qwe^{y_1} - qw^2 e^{-(y_1+y_2)} + qwe^{y_1+y_2}}{4w^2}\right) \\
&+ \left(\frac{2e^{-y_2} qw^2 - qw^2 + e^{-(y_1+y_2)} q \ln(1 - w + e^{-(y_1+y_2)} w)}{4w^2}\right) e^{y1+y2} \\
&+ \frac{q}{4w^2} \ln(-2we^{-y_2} + w + e^{-(y_1+y_2)} + e^{-(y_1+y_2)} w) + \frac{q}{4w^2} y_2 + qy_1 \\
&+ y_3 + d_3
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Tato transformace souřadnic převede obecný tvar metriky v konstantní formu

$$G(\xi)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w \\ 0 & q & 0 \\ w & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{q, w jsou konstanty.} \tag{6.8}$$

Tuto konstantní formu už jednoduchou lineární transformací

$$\begin{aligned} y'_1 &= \left(\sqrt{\frac{|w|}{2}}\right)\xi_1 + \left(\sqrt{\frac{|w|}{2}}\right)\xi_3 \\ y'_2 &= (\sqrt{|q|})\xi_2 \\ y'_3 &= \left(\sqrt{\frac{|w|}{2}}\right)\xi_1 - \left(\sqrt{\frac{|w|}{2}}\right)\xi_3. \end{aligned} \tag{6.9}$$

kde[3]

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{cases} 1 & \text{pro } w > 0 \\ -1 & \text{pro } w < 0 \end{cases} \\ \delta &= \begin{cases} 1 & \text{pro } q > 0 \\ -1 & \text{pro } q < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

převedeme s pomocí transformačního vzorce (2.1) na triviálně plochý tvar metrického tenzoru (6.1)

$$\tilde{G}(y') = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

V nových plochých souřadnicích mají β-rovnice (3.1) tvar

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^i \partial y'^j} \\ 0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial y'_k}\frac{\partial \Phi}{\partial y'^k}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Obecné řešení těchto rovnic je

$$\Phi(y'_1, y'_2, y'_3) = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + c_3 y'_3 \quad \text{kde} \quad c_1 c^1 + c_2 c^2 + c_3 c^3 = 0. \tag{6.12}$$

[3]Opět předpokládáme $w \neq 0$ a $q \neq 0$, aby mterický tenzor byl regulární.

Abychom dostali řešení v původních souřadnicích dosadíme do (6.12) z (6.9)

$$\begin{aligned}
\Phi &= c_1\left[\sqrt{\frac{|w|}{2}}\left(\frac{\ln(1-w+e^{-(y1+y2)}w)+\ln(-2w+e^{y_2}w+e^{-y_1}+e^{-y_1}w)+y_1}{2w}\right)\right]\\
&- c_1\left[\sqrt{\frac{|w|}{2}}\left(\frac{2qe^{-y_2}w^2+qwe^{-(y_1+y_2)}-2qwe^{y_1}+qwe^{y_1+y_2}-qw^2e^{-(y_1+y_2)}}{4w^2}\right)\right]\\
&+ c_1\left[\sqrt{\frac{|w|}{2}}\left(\left(\frac{2e^{-y_2}qw^2-qw^2+e^{-(y_1+y_2)}q\ln(1-w+e^{-(y_1+y_2)}w)}{4w^2}\right)e^{y1+y2}+qy_1\right)\right]\\
&+ c_1\left[\sqrt{\frac{|w|}{2}}\left(\frac{q}{4w^2}\ln(-2we^{-y_2}+w+e^{-(y_1+y_2)}+e^{-(y_1+y_2)}w)+\frac{q}{4w^2}y_2+y_3\right)\right]\\
&+ c_2\left[\sqrt{|q|}\left(\frac{\ln(-2w+e^{y_2}w+e^{-y_1}+e^{-y_1}w)-\ln(1-w+e^{-(y_1+y_2)}w)+y_1}{2w}\right)\right]\\
&+ c_3\left[\sqrt{\frac{|w|}{2}}\left(\frac{\ln(1-w+e^{-(y1+y2)}w)+\ln(-2w+e^{y_2}w+e^{-y_1}+e^{-y_1}w)+y_1}{2w}\right)\right]\\
&+ c_3\left[\sqrt{\frac{|w|}{2}}\left(\frac{2qe^{-y_2}w^2+qwe^{-(y_1+y_2)}-2qwe^{y_1}+qwe^{y_1+y_2}-qw^2e^{-(y_1+y_2)}}{4w^2}\right)\right]\\
&- c_3\left[\sqrt{\frac{|w|}{2}}\left(\left(\frac{2e^{-y_2}qw^2-qw^2+e^{-(y_1+y_2)}q\ln(1-w+e^{-(y_1+y_2)}w)}{4w^2}\right)e^{y1+y2}+qy_1\right)\right]\\
&- c_3\left[\sqrt{\frac{|w|}{2}}\left(\frac{q}{4w^2}\ln(-2we^{-y_2}+w+e^{-(y_1+y_2)}+e^{-(y_1+y_2)}w)+\frac{q}{4w^2}y_2+y_3\right)\right]
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Pro speciální volbu konstant $c_1 = -c_3 = \frac{2\sqrt{2}w}{\sqrt{|w|}}$, $c_2 = 0$ dostaneme řešení (3.14). Omezení konstantní formy $\tilde{E}_0$ na tvar (6.8) jsme stejně jako v předchozím případě provedli proto, že získané formule pro obecný tvar metrického tenzoru jsou příliš složité a nepřehledné. V principu je však řešení této úlohy v obecném případě stejné.

Závěr

U modelů řešených ve čtvrté kapitole (t.j. modelů, které jsou řešením β-rovnic (3.1) s konstantním dilatonovým polem Φ) jsou nalezeny transformace souřadnic, jež převádějí obecné tvary metrických tenzorů na triviálně plochý tvar. Modely $(1|6_0)$ a $(5ii|6_0)$, jimž je věnována pátá a šestá kapitola, jsou získány pomocí PLT-duality z modelu $(6_0|1)$ (viz. [2]). Zde jsou opět vypočteny příslušné ploché souřadnice. Ke hledání plochých souřadnic bylo v obou případech využito transformačního vztahu pro složky afinní konexe. Rovnice na které transformační vztah vede jsou lineární a rozseparované vůči hledaným plochým souřadnicím. Ve všech studovaných případech jsme uměli najít jejich obecná řešení. Díky tomu, že β-rovnice v plochých souřadnicích nabývají jednoduchého tvaru (5.10) resp. (6.11) jsme také našli obecná vyjádření dilatonových polí (5.12), (6.13). Dilatonová pole (3.12) resp. (3.14) uvedená v [2] jsou jejich speciálními případy[4]. To je způsobeno tím, že....Nakonec bych, rád poděkoval svému školiteli Prof.RNDr Ladislavu Hlavatýmu, DrSc za nesčetné konzultace a cené poznámky k řešenému problemu, jakož i svému spolužáku Vojtěchu Košťákovi, který mi byl oddaným pomocníkem v "boji" s výpočetní technikou, jež jsem při psaní této diplomové prace hojně využíval.

[4]Vzhledem k tomu, že vztahy (3.12) resp. (3.14) jsou speciálními případy námi nalezených dilatonových polí (5.12), (6.13) je také dokázana jejich správnost.

Dodatek A

Drinfeldova dvojice

Drinfeldova dvojice D je definována jako taková souvislá Lieova grupa, jejíž příslušná Lieova algebra $\mathcal{D}$ je vybavena symetrickou ad-invariantní nedegenerovanou bilineární formou $\langle .,. \rangle$ vůči které může být tato algebra rozložena v dvojici svých podalgeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$, které jsou maximální izotropní vzhledem k formě $\langle .,. \rangle$. Dimenze podalgeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ jsou stejné a báze $\{X_i\}$, $\{\tilde{X}^i\}$ těchto algeber mohou být vybrány tak, že splňují následující podmínky:

$$\langle X_i, X_j \rangle = 0, \quad \langle X_i, \tilde{X}^j \rangle = \langle \tilde{X}^j, X_i \rangle = \delta_i^j, \quad \langle \tilde{X}^i, \tilde{X}^j \rangle = 0. \tag{A.1}$$

Potom algebra $\mathcal{D}$ je rovna direktnímu součtu podalgeber $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ ve smyslu vektorových prostorů. Potom získaná trojice $(\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{D})$ se nazývá Maninova trojice.

Předpokládejme, že existují báze nějaké Maninovy trojice, které splňují podmínku (A.1). Z podmínky ad-invariance formy $\langle .,. \rangle$ plyne, že struktůrní koeficienty algebry $\mathcal{D}$ jsou určeny struktůrními koeficienty jejích maximálních izotropních podalgeber $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$, tj. jestliže je hodnota Lieovy závorky na bazických vektorech $\{X_i\}$, $\{\tilde{X}^i\}$ dána vztahy:

$$[X_i, X_j] = f_{ij}{}^k X_k, \quad [\tilde{X}^i, \tilde{X}^j] = f^{ij}{}_k \tilde{X}^k \tag{A.2}$$

pak

$$[X_i, \tilde{X}^j] = f_{ki}{}^j \tilde{X}^k + \tilde{f}_i^{jk} X_k. \tag{A.3}$$

Poznamenejme, že Maninova trojice není dána jednoznačně. Tedy pro danou Drinfeldovu dvojici může existovat několik Maninových trojic, tj.

$$(\mathcal{G}|\tilde{\mathcal{G}}) \cong (\tilde{\mathcal{G}}|\mathcal{G}) \cong (\mathcal{G}'|\tilde{\mathcal{G}}') \cong \dots$$

Příklady transformací mezi $(\mathcal{G}|\tilde{\mathcal{G}})$ a $(\mathcal{G}'|\tilde{\mathcal{G}}')$ lze nalézt v [4]. Klasifikaci reálných šesti-dimenzionálních Drinfeldových dvojic a jejich rozklady na neizomorfní

Maninovy trojice lze opět najít v [4]. My zde předložíme pouze ty, kterými se zabýváme v této práci.

Drinfeldova dvojice $(\mathbf{6_0}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = 0 \quad , [X_2, X_3] = X_1 \quad , [X_3, X_1] = -X_2$$

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = 0 \quad , [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] = 0 \quad , [\tilde{X}_3, \tilde{X}_1] = 0.$$

Drinfeldova dvojice $(\mathbf{3}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2 - X_3 \quad , [X_2, X_3] = 0 \quad , [X_3, X_1] = X_2 + X_3$$

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = 0 \quad , [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] = 0 \quad , [\tilde{X}_3, \tilde{X}_1] = 0.$$

Drinfeldova dvojice $(\mathbf{4}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2 + X_3 \quad , [X_2, X_3] = 0 \quad , [X_3, X_1] = X_3$$

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = 0 \quad , [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] = 0 \quad , [\tilde{X}_3, \tilde{X}_1] = 0.$$

Drinfeldova dvojice $(\mathbf{7_0}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = 0 \quad , [X_2, X_3] = X_1 \quad , [X_3, X_1] = X_2$$

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = 0 \quad , [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] = 0 \quad , [\tilde{X}_3, \tilde{X}_1] = 0.$$

Drinfeldova dvojice $(\mathbf{2}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = 0 \quad , [X_2, X_3] = X_1 \quad , [X_3, X_1] = 0$$

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = 0 \quad , [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] = 0 \quad , [\tilde{X}_3, \tilde{X}_1] = 0.$$

Drinfeldova dvojice $(\mathbf{5}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2 \quad , [X_2, X_3] = 0 \quad , [X_3, X_1] = X_3$$

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = 0 \quad , [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] = 0 \quad , [\tilde{X}_3, \tilde{X}_1] = 0.$$

Literatura

[1] L. Hlavatý, L. Šnobl: *Poisson-Lie T-plurality of three-dimensional conformally invariant sigma models,J.High Energy Phys.* **0405** (2004) 010 `[hep-th/0403164]`.

[2] L. Hlavatý, L. Šnobl: *Poisson-Lie T-plurality of three-dimensional conformally invariant sigma models: Nondiagonal metrics and dilaton puzzle*

[3] M. Turek: *Lieova-Poissonova T-dualita,* FJFI, ČVUT, Praha 2003, http://ssmf.fjfi.cvut.cz/

[4] L. Šnobl, L. Hlavatý: *Classification of six-dimensional real Drinfeld doubles, Int.J.Mod.Phys.* **A 17** (2002) 4043`[math.QA/0202210]`.

[5] Nevim. Kdo: *Kniha o lieovskych grupach*