České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Rešeršní práce

Miroslav Turek

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Duality v teorii pole

Miroslav Turek

Katedra fyziky
Akademický rok: 2002/2003
Školitel: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý , DrSc., FJFI

V Praze 16. září 2003

Obsah

Kapitola 1

1.1 Úvod

Tato práce se zabývá základními typy dualit v teorii pole. Dualitou se myslí získání v jistém smyslu duální akce k akci původní z níž rovnice odvozené jsou buď řešitelné nebo alespoň řešitelné snadněji, než rovnice dané variací akce původní. Akce se myslí v "Lagrangeově-Hamiltonově" smyslu. Práce je napsána ve formalismu diferenciálních forem.

Kapitola 2

2.1 Dualní transformace (Hodge star)

Máme-li varietu M o dimenzi m s metrikou g, pak existuje izomorfismus mezi $\Omega^r(M)$a Ω^{m-r} zvaný **Hodgeuv operátor**. Definujme nejdříve totálně antisymetrický tenzor ε :

$$\varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_m} = \begin{cases} +1 & \text{když } (\mu_1 \ldots \mu_m) \text{ je sudá permutace} \\ -1 & \text{když } (\mu_1 \ldots \mu_m) \text{ je lichá permutace} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Hodgeuv operátor je lineární zobrazení $* : \Omega^r(M) \to \Omega^{m-r}$ jehož akce na bazických vektorech $\Omega^r(M)$ je definována :

$$*(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \varepsilon^{\mu^1 \ldots \mu^r}{}_{\nu_{r+1} \ldots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge dx^{\nu_{r+2}} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m} \tag{2.2}$$

Pro

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \in \Omega^r(M)$$

máme

$$*\omega = \frac{\sqrt{|g|}}{r!(m-r)!} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_r} \varepsilon^{\mu^1 \ldots \mu^r}{}_{\nu_{r+1} \ldots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge dx^{\nu_{r+2}} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m}. \tag{2.3}$$

Kapitola 3

3.1 Skalárně tenzorová dualita

3.1.1 Rovnice pole a Bianchiho identity

Uvažme akce

$$S_\phi = \frac{1}{2}\int F \wedge *F \tag{3.1}$$

kde $F = d\phi$, $\phi \in C^\infty(M) \cong \Omega^0(M)$, $M = (R^4, \eta^{\mu\nu})$

$$S_A = \int \tilde{F} \wedge *\tilde{F} \tag{3.2}$$

kde $\tilde{F} = dA$, $A \in \Omega^2(M)$.

Rovnice pole a Bianchiho identity pro S_ϕ jsou:

$$d * F = d * F_\mu dx^\mu = 0, \qquad dF = F_\mu dx^\mu = 0 \tag{3.3}$$

ve složkách:

$$\partial_\mu F^\mu(\phi) = 0, \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu\rho}(\phi) = 0.$$

Rovnice pole a Bianchiho identity pro S_A jsou:

$$d*\tilde{F} = d*\tilde{F}_{\mu\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho = 0, \qquad d\tilde{F} = \tilde{F}_{\mu\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho = 0 \tag{3.4}$$

ve složkách:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu\rho}(A) = 0, \qquad \partial_\mu \tilde{F}^\mu(A) = 0.$$

Z rovnic vidíme, že Bianchiho identity pro pole A jsou totožné s rovnicemi pole ϕ a Bianchiho identity pro pole ϕ jsou totožné s rovnicemi pole A. Vskutku existuje obecný postup jak ukázat že tyto dvě akce dávaji stejné fyzikální výsledky. Uvažme takzvanou rodičovskou akci od akce S_A:

$$S_{F,\phi} = \int \left(a3!\tilde{F} \wedge *\tilde{F} - b\phi \wedge d\tilde{F} \right), \tag{3.5}$$

kde skalární pole ϕ je Lagrangeův multiplikátor, $\tilde{F}$ je nezávislé pole ($\tilde{F} \neq dA$). Variací této akce vzhledem k poli ϕ dostaneme:

$$\delta\phi : \qquad d\tilde{F} = 0. \tag{3.6}$$

vidíme tedy, že pole $\tilde{F}$ splňuje Bianchiho identitu (rovnice 3.4). Tedy $\tilde{F}$ se dá psát jako $\tilde{F} = dA$ kde $A \in \Omega^2(M)$. Dosazením zpět do rodičovské akce (rovnice 3.5)a volbou $a = \frac{1}{3!}$ dostaneme akci S_A (3.2).

Abychom ukázali ekvivalenci (3.5) a (3.1) uvažme znovu rodičovskou akci $S_{F,\phi}$ s již zvolenou hodnotou $a = \frac{1}{3!}$

$$S_{F,\phi} = \int \left(\tilde{F} \wedge *\tilde{F} - b\phi \wedge d\tilde{F} \right).$$

Variací této akce vzhledem k poli $\tilde{F}$ dostaneme

$$\delta F : \qquad *\tilde{F} = \frac{b}{2} d\phi. \tag{3.7}$$

Dosazením tohoto výrazu zpět do rodičovské akce (3.5) dostaneme volbou $b = \sqrt{2}$ akci S_ϕ(3.1).

Tímto jsme pomocí rodičovské akce $S_{F,\phi}$ ukázali vzájemnou dualitu akcí S_ϕ a S_A (tato akce však neni dána jednoznačně). Tyto dvě akce tedy dávají stejne fyzikální výsledky, ale fyzikální popis je dán různými poli. Charakteristickým znakem této konstrukce je, že rovnice pole přecházeji na Bianchiho identity a naopak.

3.1.2 Kalibrační invariance

Nyni ukážeme jinou konstrukci duálních teorií. Mějme znovu akci

$$S_\phi = \frac{1}{2} \int d\phi \wedge *d\phi.$$

Tato akce má globální symetrii, je invariantní vůči posunutí $\phi \to \phi + \varepsilon$. Kalibrujeme tuto symetrii pomoci pole V;

$$d\phi \to D\phi \equiv d\phi + V, \tag{3.8}$$

po dosazení máme

$$S_\phi \to S_{\phi,V} \equiv \frac{1}{2} \int D\phi \wedge *D\phi. \tag{3.9}$$

Vůči lokálni transformaci,($\varepsilon = \varepsilon(x)$), však tato akce už invariantni není, a proto musíme transformovat i pole V. Lokální transformace tedy je

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) + \varepsilon(x), \qquad \tilde{V}(x) = V(x) - d\varepsilon(x), \tag{3.10}$$

a forma $D\phi$ přejde na tvar $\tilde{D}\tilde{\phi} = d\tilde{\phi} + \tilde{V}$ a akce $S_{\tilde{\phi},\tilde{V}} = \frac{1}{2}\int \tilde{D}\tilde{\phi} \wedge *\tilde{D}\tilde{\phi}$ už vůči lokálním transformacím invariantní je.

Mějme akci $S_{\phi,V}$ (3.9) a přidejme k ní výraz, který zajistí, že pole V bude čistě kalibrační

$$S_W = a \int A \wedge W, \tag{3.11}$$

kde $W = dV$, $A \in \Omega_2(M)$. Variací akce S_W podle A dostaneme

$$\delta A : \qquad W = 0 \Rightarrow V = d\lambda. \tag{3.12}$$

Můžeme vybrat kalibraci $\lambda = 0$ nebo předefinovat $\tilde{\phi} = \phi + \lambda$, pak bychom dostali akci S_ϕ. Nebo variací výrazu $S_{\phi,V} + S_W$ podle pole V dostaneme

$$\delta(S_{\phi,V} + S_W) : \qquad V = a * F - d\phi, \qquad F = 2dA. \tag{3.13}$$

Dosadíme-li tento výsledek zpět do akce $S_{\phi,V} + S_W$ získáme

$$\begin{aligned} S_{\phi,V} + S_W \quad \rightarrow \quad & \frac{1}{2}\int a^2(-1)F \wedge *F \\ & + \int aA \wedge (ad * F - dd\phi) \\ & = \int (-\frac{1}{2}a^2 F \wedge *F + a^2 F \wedge *F) \\ & \rightarrow \frac{1}{2}a^2 \int F \wedge *F. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Výběrem kostanty $a = \sqrt{2}$ vidíme, že $S_{\phi,V} + S_W \rightarrow S_A$.

Naopak, vezmeme-li akci S_A (3.2)

$$S_A = \frac{1}{3!}\int \tilde{F} \wedge *\tilde{F}.$$

Ta má také symetrii vůči transformaci $A \rightarrow A + \varepsilon$. Kalibrací této symetrie máme

$$dA \rightarrow DA \equiv dA + \hat{V}, \qquad \hat{V} = 3!V. \tag{3.15}$$

Potom akce přejde na tvar

$$S_{A,V} = \int DA \wedge *DA \tag{3.16}$$

$$\tilde{A}(x) = A(x) + \varepsilon(x), \qquad \tilde{V}(x) = V(x) - d\varepsilon(x), \tag{3.17}$$

Znovu zajistíme, že pole V bude čistě kalibrační přidáním členu

$$\tilde{S}_W = -4!a \int \phi \wedge W, \tag{3.18}$$

kde $W = d\hat{V}$, $\phi \in \Omega^0 M$. Variací této akce vzhledem k ϕ

$$\delta\phi : \qquad W = 0 \Rightarrow V = d\lambda. \tag{3.19}$$

Můžeme vybrat kalibraci $\lambda = 0$ nebo předefinovat $\tilde{A} = A + 3!\lambda$ a získáme tak akci S_A.

Pokud však budeme varírovat $S_{A,V} + \tilde{S}_W$ podle V pak máme

$$\delta(S_{A,V} + \tilde{S}_W): \qquad V = 2a * d\phi - 2dA. \tag{3.20}$$

Po dosazení zpět do akce $S_{A,V} + \tilde{S}_W$ dostáváme akci

$$S_{A,V} + \tilde{S}_W \to 3!4!a^2 \int d\phi \wedge *d\phi, \tag{3.21}$$

která výběrem $a = \frac{\sqrt{2}}{4!}$ přechází v akci S_ϕ.

Kapitola 4

4.1 Elektro-magnetická dualita

4.1.1 Rovnice pole a Bianchiho identity

Nyní rozšíříme skalárně-tenzorovou dualitu na Maxwelovu teorii elektromagnetismu.

Buďte F tenzor elektromagnetického pole ($F \in \Omega^2$) a A vektorový čtyřpotenciál ($A \in \Omega^1$), $F = dA$.

Neuvažujeme-li zdroje, rovnice pole jsou:

$$*d*F = 0 \tag{4.1}$$

a Bianchiho identity

$$dF = 0. \tag{4.2}$$

Zde záměna polních rovnic a Bianchiho identit je ekvivalentní

$$F \to *F, \qquad *F \to -F. \tag{4.3}$$

Protože

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

a

$$*\mathbf{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

jsou složky forem F a $*F$ je vidět symetrie

$$E \to B; \qquad B \to -E \tag{4.6}$$

která se proto nazývá elektro-magnetická dualita.

Začněme s akcí

$$S_A = \frac{1}{2g^2}\int F\wedge *F, \tag{4.7}$$

kde $F = dA$.Bianchiho identity a rovnice pole jsou

$$dF = 0 \qquad \text{(Bianchiho identity)} \tag{4.8}$$

$$d * F = 0 \qquad \text{(rovnice pole)} \tag{4.9}$$

Rodičovská akce má tvar

$$S_{F,A} = \int (\frac{1}{2g^2}F\wedge *F + a\Lambda\wedge dF), \tag{4.10}$$

kde $\Lambda \in \Omega^1(R^4)$.Variací této rodičovské akce vzhledem k Λ máme

$$\delta S_{F,A} : dF = 0 \Rightarrow F = dA. \tag{4.11}$$

Naopak variací vzhledem k F dostáváme

$$\delta F : \frac{1}{g^2}F = a * G, \qquad G = d\Lambda, \tag{4.12}$$

po dosazení zpět do rodičovské akce vychází

$$S_\Lambda = g^2a^2\int G\wedge *G, \tag{4.13}$$

volbou konstanty $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dostáváme duální akci S_Λ. $(A\to\Lambda, g\to\hat{g} = \frac{1}{g})$

4.1.2 Dualita p-forem

Nechť $M = (R^D, g)$, $A \in \Omega^p(M)$. Tedy máme

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{p!}A_{\mu_1\ldots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p} && (4.14)\\ dA &= F(A) = \frac{1}{(p+1)!}F_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}}dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_{p+1}} && (4.15)\end{aligned}$$

Mějme akci

$$S_A = \frac{p!}{2}\int F(A)\wedge *F(A). \tag{4.16}$$

Rovnice pole a Bianchiho identity jsou

$$\begin{aligned} dF(A) &= 0, \qquad \text{(Bianchiho identity)} && (4.17)\\ d * F(A) &= 0, \qquad \text{(Rovnice pole).} && (4.18)\end{aligned}$$

Uvažme rodičovskou akci

$$S_{F,\Lambda} = \int \Big(\frac{p!}{2} F \wedge *F + (-1)^{D-(p+1)}[D-(p+2)]! a\Lambda \wedge dF \Big), \qquad (4.19)$$

kde $F \in \Omega^{p+1}, \Lambda \in \Omega^{D-p+2}$. Jejíž variací vzhledem k Λ dostáváme

$$\delta\Lambda : dF \;=\; 0 \Rightarrow F = dA \Rightarrow S_{F,\Lambda} \to S_A = \frac{p!}{2} \int F(A) \wedge *F(A), \quad (4.20)$$

naopak variací podle F

$$\delta F : F \;=\; *d\Lambda \Rightarrow S_{F,\Lambda} \to S_\Lambda = \frac{p!}{2} \int F(\Lambda) \wedge *F(\Lambda). \qquad (4.21)$$

Dostali jsme tedy dualitu $F(\Lambda) \sim F(A), \Lambda \leftrightarrow A$.

Nyni ukážeme jinou metodu konstrukce duálních teorií p-forem. Mějme opět akci

$$S_A = \frac{p!}{2} \int F(A) \wedge *F(A). \qquad (4.22)$$

Tato akce je invariantní vůči globální transformaci $A \to A + \varepsilon$, kalibrujme tuto symetrii pomoci pole V ($V \in \Omega^{p+1}(M)$)

$$dA \to DA = dA + V \qquad (4.23)$$

a tedy akce S_A přejde na tvar

$$S_{A,V} = \int \frac{p!}{2} (dA + V) \wedge *(dA + V). \qquad (4.24)$$

Přidáním členu

$$S_W = -\frac{[D-(p+2)]!}{2(p+1)} \Lambda \wedge dV \qquad (4.25)$$

zajistíme, že pole V bude čistě kalibrační. Rodičovská akce potom je

$$S_{A,V,\Lambda} = \int \Big(\frac{p!}{2} (dA + V) \wedge *(dA + V) - \frac{[D-(p+2)]!}{2(p+1)} \Lambda \wedge dV \Big) \qquad (4.26)$$

kde $\Lambda \in \Omega^{D-(p+2)}(R^D, g)$. Výskedky pro $\dim(R^d) = 3, 4$ jsou shrnuty v následujících tabulkách

$d = 4$

p	A_p	F_{p+1}	$\Lambda_{D-(p+2)}$	$F(\Lambda)_{D-p-1}$
0	A	$F_\mu(A)$	$\Lambda_{\mu\nu}$	$F_{\mu\nu\rho}(\Lambda)$
1	A_μ	$F_{\mu\nu}(A)$	Λ_μ	$F_{\mu\nu}(\Lambda)$
2	$A_{\mu\nu}$	$F_{\mu\nu\rho}(A)$	Λ	$F_\mu(\Lambda)$

$d = 3$

p	A_p	F_{p+1}	$\Lambda_{D-(p+2)}$	$F(\Lambda)_{D-p-1}$
0	A	$F_\mu(A)$	Λ_μ	$F_{\mu\nu}(\Lambda)$
1	A_μ	$F_{\mu\nu}(A)$	Λ	$F_\mu(\Lambda)$

4.1.3 3D vektorová dualita

Nechť $M = (R^3, g)$. Uvažme akci

$$S_B = \frac{1}{2}\int \Big(m^2 B \wedge *B + \frac{m}{2} B \wedge F(B)\Big). \tag{4.27}$$

Kde $B \in \Omega^1(R^3, g), F(B) = dB$. Variací této akce vzhledem k B

$$\delta B : B = \frac{1}{2m} * F. \tag{4.28}$$

Akce S_B je duální k akci S_A, která má tvar

$$S_A = \int \Big(\frac{-1}{2} F(A) \wedge *F(A) - mA \wedge F(A)\Big) \tag{4.29}$$

$(A \in \Omega^1(R^3, g), F(A) = dA)$jejíž variaci podle A dostáváme

$$\delta A : d * F = mF. \tag{4.30}$$

Rodičovská akce má tvar

$$S_{B,A} = \frac{1}{2}\int \Big(m^2 B \wedge *B - 2m(B \wedge F(A) + A \wedge F(A))\Big). \tag{4.31}$$

Varírujeme-li $S_{B,A}$ vůči B máme

$$\delta B : B = \frac{-1}{m} * F. \tag{4.32}$$

Dosazením do $S_{B,A}$

$$S_{B,A} \to S_A = \int \Big(\frac{-1}{2} F \wedge *F - mA \wedge F\Big). \tag{4.33}$$

Naopak variací podle A

$$\delta A : \frac{1}{2} F(B) = -F(A), \tag{4.34}$$

a tedy

$$\begin{aligned} S_{B,A} \quad \to \quad & \frac{1}{2}\int \Big(m^2 B \wedge *B - 2m(B \wedge dA + A \wedge dA)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\int \Big(m^2 B \wedge *B - 2m(\frac{-1}{2} B \wedge F(B) + \frac{1}{4} B \wedge F(B) \\ &= \frac{1}{2}\int \Big(m^2 B \wedge *B + \frac{m}{2} B \wedge F(B)\Big) = S_B. \end{aligned} \tag{4.35}$$

4.1.4 3D dualizace z 2D hlediska

Mějme opět rodičovskou 3D akci

$$S_{B,A} = \frac{1}{2}\int \Big(m^2 B \wedge *B - 2m(B \wedge F(A) + A \wedge F(A))\Big). \tag{4.36}$$

kde $A \in \Omega^1(R^3, g)$ $B \in \Omega^1(R^3, g)$. Rozštěpíme B A

$$B_\mu \to (B_i, \phi) \qquad A_\mu \to (A_i, \lambda). \qquad (i \in (1,2)) \tag{4.37}$$

Zadefinujme

$$\tilde{B} \in \Omega^1(R^2, g) \qquad \tilde{A} \in \Omega^1(R^2, g).$$

Potom vychází 2D-rodičovská akce

$$S_{B,\phi,A,\lambda} = \frac{1}{2}\int \Big(m^2(\tilde{B}\wedge*\tilde{B}+\phi\wedge*\phi)-2m(\tilde{B}\wedge d\lambda+\phi\wedge d\tilde{A}+2\lambda\wedge d\tilde{A})\Big) \tag{4.38}$$

Variací této akce vzhledem k $\tilde{B}$ a ϕ

$$\delta\tilde{B} : \tilde{B} = \frac{1}{m} * d\lambda \tag{4.39}$$

$$\delta\phi : \phi = -\frac{1}{m} * F, \tag{4.40}$$

a pro duální formy platí

$$*\tilde{B} = \frac{1}{m} d\lambda \tag{4.41}$$

$$*\tilde{\phi} = \frac{1}{m} F. \tag{4.42}$$

Dosazením těchto ronic zpět do rodičovské akce dostáváme

$$\begin{aligned} S_{B,\phi,A,\lambda} \quad \to \quad & \frac{1}{2}\int \Big(m^2(\frac{1}{m} * d\lambda \wedge \frac{1}{m} d\lambda + (-\frac{1}{m}) * F \wedge \frac{1}{m} F) \\ & -2m(\frac{1}{m} * d\lambda) \wedge d\lambda + (-\frac{1}{m}) * F \wedge F + 2\lambda \wedge F\Big) \\ & = \frac{1}{2}\int (d\lambda \wedge *d\lambda - F \wedge *F - 4m\lambda \wedge F) = S_{A,\Lambda}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Naopak variací rodičovské akce podle $\tilde{A}$ a λ vychází

$$\delta\tilde{A} : d\tilde{A} = -\frac{m}{2} dA \tag{4.44}$$

$$\delta\lambda : \lambda = -\frac{1}{2}\phi, \tag{4.45}$$

a pro duální formy platí

$$*\tilde{A} = -\frac{m}{2} * dA \tag{4.46}$$

$$*\tilde{\phi} = \frac{1}{2} * \phi. \tag{4.47}$$

Dosazením do rodičovské akce

$$S_{B,\phi,A,\lambda} \to S_{B,\phi} = \frac{1}{2}\int (m^2\tilde{B} \wedge *\tilde{B} + 4m^2\phi \wedge *\phi + m\tilde{B} \wedge d\phi) \tag{4.48}$$

Kapitola 5

5.1 Dualita σ-modelu

σ-model je zobrazení z d-dimenzionálního prostoru M do D-dimenzionálního cílového prostoru T

$$\phi^{\mu} : M \rightarrow T \tag{5.1}$$

s akcí

$$S_{\phi} = \int G_{\mu\nu}(\phi) d\phi^{\mu} \wedge *d\phi^{\nu}, \tag{5.2}$$

kde $G_{\mu\nu}(\phi)$ má význam metriky na cílovém prostoru T. Rovnice pohybu dostaneme variací akce podle ϕ

$$\delta\phi : -\frac{1}{2} G_{\rho\sigma,\mu} d\phi^{\rho} \wedge *d\phi^{\sigma} + d(*d\phi^{\nu} G_{\mu\nu}(\phi)) = 0. \tag{5.3}$$

Tato rovnice se dá upravit

$$\begin{aligned}
0 &= G_{\mu\nu} * d * d\phi^{\nu} + G_{\mu\nu,\rho} * (d\phi^{\rho} \wedge *d\phi^{\nu}) - \frac{1}{2} G_{\rho\sigma,\mu} * (d\phi^{\rho} \wedge *d\phi^{\sigma}) \\
&= G_{\mu\nu} * d * d\phi^{\nu} + \frac{1}{2} * (d\phi^{\nu} \wedge *d\phi^{\nu})(2G_{\mu\sigma,\rho} - G_{\sigma\rho,\mu}) \Rightarrow \\
&*d * d\phi^{\mu} + \frac{1}{2} G^{\mu\nu} (G_{\nu\sigma,\rho} + G_{\nu\rho,\sigma} - G_{\sigma\rho,\nu}) * (d\phi^{\rho} \wedge *d\phi^{\sigma}) = 0,
\end{aligned}$$

a tedy máme

$$*d * d\phi^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} * (d\phi^{\rho} \wedge *d\phi^{\sigma}) = 0 \tag{5.4}$$

kde Levi-Civitova konexe je

$$\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \equiv \frac{1}{2} G^{\mu\nu} (G_{\nu\sigma,\rho} + G_{\nu\rho,\sigma} - G_{\sigma\rho,\nu}). \tag{5.5}$$

Vraťme se k akci σ-modelu

$$S_{\phi} = \int G_{\mu\nu}(\phi) d\phi^{\mu} \wedge *d\phi^{\nu}, \tag{5.6}$$

a předpokládejme, že pole $G_{\mu\nu}$ má izometrii danou polem $\varepsilon(\phi) = \varepsilon^\mu(\phi)\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Potom tedy platí

$$L_\varepsilon G_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \delta G_{\mu\nu}, \delta\phi^\mu = \varepsilon^\mu. \tag{5.7}$$

Nyní ukážeme, že tato izometrie je také izometrií akce σ-modelu

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon \quad S &= \int (G_{\mu\nu,\rho}\varepsilon^\rho d\phi^\mu \wedge *d\phi^\nu + 2G_{\mu\nu,\rho} d\varepsilon \wedge *d\phi) \\ &= \int (G_{\mu\nu,\lambda}\varepsilon^\lambda + 2G_{\lambda\nu}\varepsilon^\lambda_\mu) d\phi^\mu \wedge *d\phi^\nu.\end{aligned} \tag{5.8}$$

užitím identity

$$\frac{1}{2}G_{\mu(\nu}\varepsilon^\mu_{,\rho)} + \frac{1}{2}G_{\nu\rho,\mu}\varepsilon^\mu = \frac{1}{2}G_{\mu(\nu}\nabla_{\rho)}\varepsilon^\mu, \tag{5.9}$$

můžeme psát

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon \quad S &= \int G_{\mu(\nu}\nabla_{\rho)}\varepsilon^\mu d\phi^\nu \wedge *d\phi^\rho \\ &= \int \nabla_{(\mu}\varepsilon_{\nu)} d\phi^\mu \wedge *d\phi^\nu \\ &= 0,\end{aligned} \tag{5.10}$$

a tedy pole ε generuje izometrii akce σ-modelu.

Výběrem nových souřadnic,t.j.,souřadnic, že $\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \phi^0}$ získáme rodičovskou akci tvaru

$$S_{\phi,V,\Lambda} = \int (G_{00}V \wedge *V + 2G_{0i}d\phi^i \wedge *V + G_{ij}d\phi^j \wedge *d\phi^i + dV \wedge *\Lambda), \tag{5.11}$$

kde $V \in \Omega^1(R^d, g)$ a $\Lambda \in \Omega^2(R^d, g)$. Variací této akce podle Λ dostaneme

$$\delta\Lambda : dV = 0, \tag{5.12}$$

dosazením zpět do rodičovské akce

$$S_{\phi,V,\Lambda} \to S_\phi. \tag{5.13}$$

Naopak variací vzhledem k V

$$\delta\Lambda : \qquad V = \frac{1}{G_{0i}}(d\phi^i + (-1)^d * d * \Lambda) \tag{5.14}$$

a pro duální formy

$$\tag{5.15}$$

$$*V = \frac{1}{G_{0i}}(*d\phi^i + d * \Lambda) \tag{5.16}$$

dosazením zpět do rodičovské akce $S_{\phi,V,\Lambda} \to \tilde{S}$

$$\tilde{S} = \int \Big((-1)^d * d * \Lambda \wedge d * \Lambda + \frac{G_{0i}}{G_{00}} d * \Lambda \wedge d\phi^i + (G_{ij} - \frac{G_{i0}G_{0j}}{G_{00}}) d\phi^i \wedge *d\phi^j\Big) \tag{5.17}$$

5.1.1 T-dualita

Nyní mějme σ-model, který zobrazuje z dvoudimenzionálního prostoru ($dim(M) = 2$) do D-dimenzionálního cílového prostoru T, $dim(T) = D$. Uvažme tedy akci

$$S = \int (G_{\mu\nu}(X) dX^{\mu} \wedge *dX^{\nu} - B_{\mu\nu}(X) dX^{\mu} \wedge dX^{\nu}), \tag{5.18}$$

kde $dX \in \Omega^1(R^2, g)$ a X^{μ} jsou souřadnicové funkce na T.

Předpokládejme, že existuje obecná izometrie tedy transformace, která ponechává G a B invariantní

$$L_{\varepsilon} G_{\mu\nu} = L_{\varepsilon} B_{\mu\nu} = 0 \tag{5.19}$$

Výběrem nových souřadnic (takových že: $\frac{\partial}{\partial \phi^0} = \varepsilon$) přejde rodičovská akce na tvar

$$\begin{aligned} S_{\phi,V,\Lambda} &= \int (G_{00} V \wedge *V + G_{0j} V \wedge *d\phi^j + G_{i0} d\phi^i \wedge *V + G_{ij} d\phi^i \wedge *d\phi^j \\ &\quad -B_{0j} V \wedge d\phi^j - B_{i0} d\phi^i \wedge V - B_{ij} d\phi^i \wedge d\phi^j - d * \Lambda \wedge V). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Variací této akce vzhledem k Λ dostáváme

$$\begin{aligned} \delta S_{\phi,V,\Lambda} : dV = 0 \Leftrightarrow V = d\phi^0 \\ \Rightarrow S_{\phi,V,\Lambda} \to S. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Naopak variací rodičovské akce podle V máme

$$\delta S_{\phi,V,\Lambda} : V = \frac{1}{2G_{00}} (B_{0i} * d\phi^i - \frac{1}{2} * d * \Lambda - G_{i0} d\phi^i). \tag{5.22}$$

Dosazením zpět do rodičovské akce

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \int (-\frac{1}{4G_{00}} * d * \Lambda \wedge d * \Lambda \\ &+ \frac{B_{0i}}{G_{00}} d * \Lambda \wedge d\phi^i \\ &+ [G_{ij} - G_{00}^{-1}(G_{i0} G_{0j} + B_{i0} B0j)] d\phi^i \wedge *d\phi^j \\ &+ \frac{G_{0i}}{G_{00}} d * \Lambda \wedge *d\phi^i \\ &+ [B_{ij} + G_{00}^{-1}(G_{i0} B_{0j} + B_{i0} G_{0j})] d\phi^i \wedge \phi^j). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Kde $\Lambda \in \Omega^2(R^2, g)$, $d\phi^k \in \Omega^1(R^2, g)$ a tedy

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2!} \Lambda_{ab} d\xi^a \wedge d\xi^b \\ d\phi^k &= \frac{1}{1!} \partial_a \phi^k d\xi^a. \end{aligned}$$

Původní akce je duální akci

$$\tilde{S} = \int (\tilde{G}_{\mu\nu}(\tilde{X}) d\tilde{X}^{\mu} \wedge *d\tilde{X}^{\nu} - \tilde{B}_{\mu\nu}(\tilde{X}) d\tilde{X}^{\mu} \wedge d\tilde{X}^{\nu}), \tag{5.24}$$

kde $\tilde{X}$ jsou nové souřadnice na T, ($\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \phi^0}$).

Porovnáním této akce s původní akcí dostáváme

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{00} &= G_{00}^{-1} \\
\tilde{G}_{0i} &= G_{00}^{-1} B_{0i} \\
\tilde{G}_{ij} &= G_{ij} - G_{00}^{-1}(G_{i0}G_{0j} + B_{i0}B_{0j}) \\
\tilde{B}_{ij} &= B_{ij} + G_{00}^{-1}(G_{i0}B_{0j} + B_{i0}G_{0j}) \\
\tilde{B}_{0i} &= G_{00}^{-1} G_{0i}.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

5.1.2 Bosonový *O(3)* model

Začneme s akcí

$$S = \int \Sigma^a \wedge *\Sigma^a, \tag{5.26}$$

kde $\Sigma^a \in \Omega^1(R^2, g), \Sigma^a = d\sigma^a = \partial_\mu \sigma^a dx^\mu; a = 1,2,3; \mu = 1,2$. V nových souřadnicích, které jsou dány vztahy

$$\begin{aligned}
&\sigma^a \sigma^a = 1 \\
&\phi = (\sigma^1 + i\sigma^2)/(1+\sigma^3) \\
&\bar{\phi} = (\sigma^1 - i\sigma^2)/(1+\sigma^3),
\end{aligned} \tag{5.27}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= (\phi + \bar{\phi})/(1+\phi\bar{\phi}) \\
\sigma_2 &= i(\phi - \bar{\phi})/(1+\phi\bar{\phi}) \\
\sigma_3 &= (1 - \phi\bar{\phi})(1+\phi\bar{\phi})
\end{aligned} \tag{5.28}$$

má akce tvar

$$S = \int \left(\frac{1}{1+\phi\bar{\phi}}\right)^2 d\phi \wedge *d\bar{\phi} = \int G_{\phi\bar{\phi}} d\phi \wedge *d\bar{\phi}. \tag{5.29}$$

Kde $G_{\phi\bar{\phi}}$ se nazývá Kählerova struktura. Platí totiž

$$G_{\phi\bar{\phi}} = \partial_\phi \partial_{\bar{\phi}} ln(1+\phi\bar{\phi}) = \partial_\phi \partial_{\bar{\phi}} K(\phi, \bar{\phi}) \tag{5.30}$$

kde$K(\phi, \bar{\phi})$ je Kählerův potenciál.

5.2 Dualita bosonového modelu

Mějme znovu akci

$$S = \int \left(\frac{1}{1 + \phi\bar{\phi}} \right)^2 d\phi \wedge *d\bar{\phi}, \tag{5.31}$$

přejdeme transformací

$$\begin{aligned} \phi &= (\phi_1 + i\phi_2) \\ \bar{\phi} &= (\phi_1 - i\phi_2) \end{aligned} \tag{5.32}$$

k reálným souřadnicím ϕ_1, ϕ_2 ve kterých má tato akce tvar

$$S = \int \left(\frac{1}{1 + \phi_1 + \phi_2} \right)^2 (d\phi_1 \wedge *d\phi_1 + d\phi_2 \wedge *d\phi_2). \tag{5.33}$$

Nyní ještě přechodem k polárním souřadnicím (φ, θ)

$$S = \int \left(\frac{1}{1 + \varphi^2} \right)^2 (V \wedge *V + \tilde{\phi} \wedge *\tilde{\phi}), \tag{5.34}$$

kde $d\theta \to V, V \in \Omega^1(R^2, g)$ a $\tilde{\phi} = d\varphi, \tilde{\phi} \in \Omega^1(R^2, g)$.

Rodičovská akce má tvar

$$S_p = \int \Big(\left(\frac{1}{1 + \varphi^2} \right)^2 (V \wedge *V + \tilde{\phi} \wedge *\tilde{\phi}) - 2\lambda \wedge dV \Big). \tag{5.35}$$

Jejíž variací podle λ

$$\delta S_p : dV = 0 \Rightarrow V = d\theta \tag{5.36}$$

a zpětným dosazením do rodičovské akce máme

$$S_p \to S = \int \left(\frac{1}{1 + \varphi^2} \right)^2 (V \wedge *V + \tilde{\phi} \wedge *\tilde{\phi}). \tag{5.37}$$

Naopak variací vzhledem k V

$$\delta V : \qquad V = \frac{1}{\varphi^2 G} * \lambda \tag{5.38}$$

a pro duální formu

$$*V = \frac{1}{\varphi^2 G} \lambda \tag{5.39}$$

kde $G = 1/(1 + \varphi^2)^2$, a po dosazení do rodičovské akce dostáváme

$$S_p \to \tilde{S} = \int (\frac{1}{\varphi^2 G} d\lambda \wedge *d\lambda + G\tilde{\phi} \wedge *\tilde{\phi}). \tag{5.40}$$

5.3 *O(3)* model s θ podmínkou

Uvažme akci

$$S = \frac{1}{g^2}\int \Big(d\Sigma^i \wedge *d\Sigma^i - \alpha(\sigma^i\sigma^i)dx^1 \wedge dx^2 - \theta\varepsilon^{ijk}\sigma^i d\sigma^j \wedge d\Sigma^k \Big). \tag{5.41}$$

Přechodem $\sigma^i \to (\varphi, \bar{\varphi})$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (\phi + \bar{\phi})/(1 + \phi\bar{\phi}) \\ \sigma_2 &= i(\phi - \bar{\phi})/(1 + \phi\bar{\phi}) \\ \sigma_3 &= (1 - \phi\bar{\phi})(1 + \phi\bar{\phi}) \end{aligned} \tag{5.42}$$

přejde akce na tvar

$$S = \int \left(\frac{1}{g^2(1+\phi\bar{\phi})^2} d\bar{\phi} \wedge *d\phi - \frac{4i\theta}{(1+\phi\bar{\phi})^2} d\bar{\phi} \wedge *d\phi \right). \tag{5.43}$$

Další transformací $\varphi = \varphi_0 + i\varphi_1$ přejde tato akce na tvar

$$\begin{aligned} S = \quad & \int \bigg(\frac{1}{g^2(1+\varphi_0^2+\varphi_1^2)^2}(d\varphi_0 \wedge *d\varphi_0 + d\varphi_0 \wedge *d\varphi_0) \\ & + \frac{4i\theta}{(1+\varphi_0^2+\varphi_1^2)}(d\varphi_0 \wedge *d\varphi_0 + d\varphi_0 \wedge *d\varphi_0) \\ & + \frac{4i\theta}{(1+\varphi_0^2+\varphi_1^2)}(id\varphi_0 \wedge d\varphi_1 - id\varphi_1 \wedge d\varphi_0) \bigg). \end{aligned} \tag{5.44}$$

Buscherovy pravidla jsou

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{00} &= G_{00}^{-1} = g^2(1+\varphi_0^2+\varphi_1^2)^2 \\ \tilde{G}_{01} &= G_{00}^{-1}B_{01} = 4\theta g^2 \\ \tilde{G}_{11} &= G_{11} - G_{00}^{-1}B_{10}B_{01} = \frac{1}{g^2(1+\varphi_0^2+\varphi_1^2)^2}(1+16\theta^2 g^4) \\ \tilde{B}_{01} &= G_{00}^{-1}G_{01} = 0 \end{aligned} \tag{5.45}$$

A tedy tato akce je duální k akci

$$\tilde{S} = \int \left(g^2(1+\varphi_0^2+\varphi_1^2)^2 d\phi_0 \wedge *d\phi_0 + 8\theta g^2 d\phi_0 \wedge *\phi_1 + \frac{1+16\theta^2 g^4}{g^2(1+\varphi_0^2+\varphi_1^2)} d\phi_1 \wedge *d\phi_1 \right). \tag{5.46}$$

Kapitola 6

6.1 Závěr

Závěrem bych chtěl zhodnotit výhody a nevýhody použití formalismu diferenciálních forem pro popis základních typů dualit v teorii pole. Výhody použití tohoto formalizmu jsou hlavně v obecnosti popisu. Diferenciální forma je objekt invariantní vůči transformaci souřadnic dané variety na které daný fyzikální problém studujeme. V neposlední řadě mi to posloužilo k osvojení a hlubšímu pochopení některých pojmů z geometrie a analýzy na varietách. Nevýhody spatřuji nejvíce v tom ,že mnoho autorů tohoto formalizmu nepoužívá, a konvence v tomto formalismu neí jednotná což čtení textu značně zesložiťuje.

Dodatek A

A.1 Notace a konvence

Užíváme Minkowského metriku $g = diag(+1, -1, \ldots, -1)$. V D=4; platí pro Levi-Civitův symbol $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, ($\varepsilon^{0123} = 1$) tato pravidla

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -4! \\
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\lambda\nu\rho\sigma} &= -3!\delta^{\mu}_{\lambda} \\
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\lambda\kappa\rho\sigma} &= -2!\delta^{\mu}_{[\lambda}\delta^{\nu}_{\kappa]} \\
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\lambda\kappa\tau\sigma} &= -1!\delta^{\mu}_{[\lambda}\delta^{\nu}_{\kappa}\delta^{\rho}_{\tau]}.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Antisymetrizační pravidla jsou definována

$$A_{[\mu}B_{\nu]} \equiv A_{\mu}B_{\nu} - A_{\nu}B_{\mu} \tag{A.2}$$

toto pravidlo se dá jednodušše zobecnit pro větší dimenzi, sčíta se přes všechny permutace indexu mezi hranatymi závorkami s příslušným znaménkem.

Obecná forma $\omega \in \Omega^r(R^d, g)$ má tvar

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \in \Omega^r(M)$$

Vnější derivace této formy je dána vzorcem

$$d\omega = \frac{1}{r!}\left(\frac{\sigma}{\sigma x^{\nu}}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\right) dx^{\nu} \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}.$$

Některé užitečné relace jsou

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\partial_{[\mu}A_{\nu\rho]} &= 3!\varepsilon^{\alpha\mu\nu\rho} \\
\delta^{\mu}_{[\lambda}\delta^{\nu}_{\kappa}\delta^{\rho}_{\tau]}\partial_{\mu}A_{\nu\rho} &= \partial_{[\lambda}A_{\kappa\tau]} \\
\delta^{\rho}_{[\lambda}\delta^{\mu}_{\kappa}\delta^{\nu}_{\alpha]}\partial^{\lambda}A^{\kappa\alpha} &= 3!\partial^{[\rho}A^{\mu\nu]}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Literatura

[1] S.E.Hjelmland,U.Lindstrom:*Duality for the Non-Specialist,* hep-th/9705122.

[2] M.Nakahara:*Geometry, Topology and Physics;* QA641.N35 1990