České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Výzkumný úkol

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Lieova-Poissonova T-dualita

Miroslav Turek

Katedra fyziky
Akademický rok: 2004/2005
Školitel: Prof. Ladislav Hlavatý, CSc., FJFI

V Praze 28. července 2004

Obsah

Úvod

Tato práce se zabývá Lie-Poissonovou T-dualitou v obecném případě, kde cílové variety σ-modelů jsou ztotožněny s Lieovými grupami (obecně) neabelovskými. Tématicky navazuje na [1] kde je popsána konstrukce vzájemně duálních σ-modelů v abelovském případě. Ukazuje se, že i za těchto obecných podmínek se dá zkonstruovat pár duálních σ-modelů. Pro konstrukci těchto duálních modelů se zdá být klíčovým objektem "Drinfeldova dvojice". Duální transformace pak jednoduše prohazují úlohu obou grup tvořící tuto Drinfeldovu dvojici. V první kapitole je popsána základní klasifikace jednotlivých druhů dualit pomocí typu Drinfeldovy dvojice. Dále je tam zkonstruován pár vzájemně duálních σ-modelů s neabelovskou Drinfeldovou dvojicí. V druhé kapitole je pomocí obecného postupu z první kapitoly odvozen explicitní tvar vzájemně duálních modelů pro polo-abelovský případ. Ve třetí kapitole jsou uváženy podmínky za jakých daný σ-model připouští Lie-Poissonovu dualitu. Nakonec je uvedena explicitní forma vzájemně duálních modelů pro Borelovskou dvojici.

Kapitola 1

Maninovy trojice a T-dualita

V této části popíšeme konstrukci duálních σ-modelů, kde dualita se míní ve smyslu, že modely mají stejnou obecnou formu pohybových rovnic (zatímco explicitní tvar těchto pohybových rovnic je už na σ modelu závislý) a stejnou symplektickou strukturu fázových prostorů. Dualita v "Poisson-Lieově" smyslu je zobecněním pojmu "abelovská T-dualita" jakož i pojmu "Neabelovská T-dualita". Pro popis Poisson-Lieovy duality budeme potřebovat důležitý pojem Drinfeldovy dvojice. Drinfeldova dvojice je libovolná Lieova grupa D jejíž Lieovu algebru $\mathcal{D}$ je možno rozložit do dvojice maximálních izotropních podalgeber vzhledem k nedegenerované invariantní bilineární formě na $\mathcal{D}$. Izotropní podprostory $\mathcal{D}$ jsou takové, že hodnoty formy na dvou libovolných vektorech patřících do jednoho podprostoru jsou nulové. "Maximální izotropní" znamená, že podprostory nemohou být prodlouženy při zachování vlastnosti izotropie formy. Libovolný rozklad algebry $\mathcal{D}$ do dvojice maximálních izotropních podalgeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ který dává v součtu $\mathcal{G} + \tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{D}$ nazýváme Maninova trojice. Pro klasifikaci různých druhů T-dualit je podstatný typ Drinfeldovy dvojice:

- abelovská dvojice, která přísluší standardní abelovské T-dualitě
- polo-abelovská dvojice, která přísluší standardní neabelovské T-dualitě mezi σ-modelem s grupou izometrií G a σ-modelem který žádné izometrie nemá.
- neaebelovská dvojice, která přísluší netriviální Poisson-Lieově T-dualitě

Konstrukce duálních modelů v obecném případě

Uvažme n-dimenzionální lineární podprostor ε^+, $2n$-dimenzionální Lieovy algebry $\mathcal{D}$ a jeho ortogonální doplněk ε^- takový, že $\varepsilon^+ + \varepsilon^-$ je roven $\mathcal{D}$ jako součtu vektorových prostorů. Nyní ukážeme, že tyto údaje určují dvojici duálních σ-modelů jejichž cílové prostory jsou ztotožněny s Lieovými grupami G a $\tilde{G}$. Vskutku, uvažme následující rovnice pole pro zobrazení $l(\xi^+, \xi^-)$ z $2n-$dimenzionálního prostoru do Drinfeldovy dvojice dané grupou D:

$$\langle \partial_\pm l l^{-1}, \varepsilon^\pm \rangle = 0. \tag{1.1}$$

Zde závorka$\langle .,. \rangle$ značí invariantní bilineární formu na Drinfeldově dvojici. Platí tvrzení, že existuje jednoznačný rozklad (alespoň v okolí jednotkového prvku grupy D) libovolného elementu grupy D na součin prvků z G a $\tilde{G}$, tedy

$$l(\xi^+, \xi^-) = g(\xi^+, \xi^-)\tilde{h}(\xi^+, \xi^-). \tag{1.2}$$

Dosazením tohoto rozkladu do předcházející rovnice dostaneme:

$$\langle g^{-1}\partial_\pm g + \partial_\pm \tilde{h}\tilde{h}^{-1}, g^{-1}\varepsilon^\pm g \rangle = 0. \tag{1.3}$$

Nechť $\tilde{T}_i$ a T^j jsou vzájemně duální báze algeber $\tilde{\mathcal{G}}$ a $\mathcal{G}$ vzhledem k invariantní bilineární formě $\langle .,. \rangle$ tj.

$$\langle T^i, \tilde{T}_j \rangle = \delta^i_j. \tag{1.4}$$

Také je vhodné zapsat

$$g^{-1}\varepsilon^+ g = Span(T^i + E^{ij}(g)\tilde{T}_j), \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1.5}$$
$$g^{-1}\varepsilon^- g = Span(T^i - E^{ji}(g)\tilde{T}_j), \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1.6}$$

Dosazením předchozích vztahů do (1.3)

$$-(\partial_+ \tilde{h}\tilde{h}^{-1})^i = E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_+ g)_j \equiv A^i_+(g), \tag{1.7}$$
$$-(\partial_- \tilde{h}\tilde{h}^{-1})^i = -E^{ji}(g)(g^{-1}\partial_- g)_j \equiv A^i_-(g). \tag{1.8}$$

Působením operátoru ∂_- na první z předcházejících vztahů a operátoru ∂_+ na druhý vztah a následným sečtením, vyloučíme $\tilde{h}$ čímž dospíváme k rovnicím

$$\partial_+ A^i_-(g) - \partial_- A^i_+(g) - \tilde{c}^i_{kl} A^k_-(g) A^l_+(g) = 0, \tag{1.9}$$

kde $\tilde{c_{kl}}^i$ jsou strukturní koeficienty lieovy algebry $\tilde{\mathcal{G}}$. Přímým výpočtem se dá ukázat, že tyto rovnice jsou vskutku pohybovými rovnicemi σ-modelu s lagrangiánem

$$L = E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_- g)_i (g^{-1}\partial_+ g)_j. \tag{1.10}$$

Vypočtěme tedy variaci akce

$$S = \int E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_- g)_i (g^{-1}\partial_+ g)_j dz^+ dz^-, \tag{1.11}$$

k tomu je zapotřebí znát explicitní závislost formy E na g. Ta je dána vztahem

$$\begin{aligned} g^{-1}\varepsilon^+ g &= Span[g^{-1}(T^i + E^{ij}(e)\tilde{T}_j)g] \\ &= Span[(a(g)^i{}_l + E^{ij}(e)b(g)_{jl})T^l + E^{ij}(e)d(g)_j{}^l \tilde{T}_l], \end{aligned} \tag{1.12}$$

kde

$$g^{-1}T^i g \equiv a(g)^i{}_l T^l, \tag{1.13}$$
$$g^{-1}\tilde{T}_j g \equiv b(g)_{jl} T^l + d(g)_j{}^l \tilde{T}_l \tag{1.14}$$

a tedy matice σ-modelu je dána

$$E(g) = (a(g) + E(e)b(g))^{-1}E(e)d(g), \tag{1.15}$$

$E(e)$ je konstantní matice. Variace akce je

$$\begin{aligned}\delta S &= \int\{\delta E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_- g)_i(g^{-1}\partial_+ g)_j + E^{ij}(g)(\delta g^{-1}\partial_- g)_i(g^{-1}\partial_+ g)_j \\ &+ E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_-\delta i(g^{-1}\partial_+ g)_j + E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_- g)_i(\delta g^{-1}\partial_+ g)_j \\ &+ E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_- g)_i(g^{-1}\partial_+\delta g)_j\}dz^+dz^-.\end{aligned} \tag{1.16}$$

kde variace prvního členu je:

$$\begin{aligned}\delta E^{ij}(g) &= \delta\{[a(g)^{il} + E(e)^{ik}b(g)_k{}^l]^{-1}E(e)_l{}^m d(g)_m{}^j\} \\ &+ [a(g)^{il} + E(e)^{ik}b(g)_k{}^l]^{-1}E(e)^m{}_j\delta d(g)_m{}^j.\end{aligned} \tag{1.17}$$

s využitím vztahu máme

$$\begin{aligned}\delta[g^{-1}T^i g] &= -g^{-1}\delta g g^{-1}T^i g + g^{-1}T^i g g^{-1}\delta g \\ &= -(g^{-1}\delta g)_k T^k[a(g)^i_l]T^l + [a(g)^i_l]T^l(g^{-1}\delta g)_k T^k \\ &= a(g)^i_m c^{mk}{}_l(g^{-1}\delta g)_k,\end{aligned} \tag{1.18}$$

kde jsme využili komutačních relací

$$[T^k, T^l] = c^{kl}{}_m T^m. \tag{1.19}$$

Variace zbylých členů spočteme obdobným způsobem. Využijeme vztah

$$g^{-1}\tilde{T}_j g \equiv b(g)_{jl}T^l + d(g)^l_j T_l \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}\delta b(g)^j_m T^m + \delta d(g)^m_j\tilde{T}_m &= -g^{-1}\delta g g^{-1}\tilde{T}_j g + g^{-1}\tilde{T}_j g g^{-1}\delta g \\ &= -(g^{-1}\delta g)_k T^k[b(g)^j_l T^l + d(g)^{jl}\tilde{T}_l] + [b(g)^j_l T^l + d(g)^{jl}\tilde{T}_l](g^{-1}\delta g)_k T^k \\ &= [b(g)^j_l T^l, (g^{-1}\delta g)_k T^k] + [d(^{jl}\tilde{T}_l, (g^{-1}\delta g)_k T^k] \\ &= b(g)^j_l(g^{-1}\delta g)_k c^{lk}{}_m T^m + d(g)^{jl}(g^{-1}\delta g)_k c_l{}^{km}\tilde{T}_m + d(g)^{jl}(g^{-1}\delta g)_k\tilde{c}^k_{ml}T^m.\end{aligned} \tag{1.21}$$

Porovnáním s definicí dostáváme

$$\delta b(g)^j_m = [b(g)^j_l c^{lk}{}_m + d(g)^{jl}\tilde{c}^k_{ml}](g^{-1}\delta g)_k \tag{1.22}$$

$$\delta d(g)^{jm} = [d(g)^j_l c^{lkm}](g^{-1}\delta g)_k, \tag{1.23}$$

kde jsme opět využili komutačních relací

$$-[T^a, \tilde{T}_b] = c^{ax}{}_b\tilde{T}_x + \tilde{c}^a_{xb}T^x. \tag{1.24}$$

Dosazením připravených vztahů pro variace členů a, b, d do vztahu pro variaci $E(g)^{ij}$ dostáváme

$$\delta E(g)^{ij} = [-c^{ikm}E(g)_m{}^j - E(g)^i{}_x \tilde{c}^{mxk}E(g)_m{}^j + E(g)^i{}_x c^{xkj}](g^{-1}\delta g)_k. \tag{1.25}$$

Nyní upravíme vztah (1.16) jehož druhý a třetí člen se dá upravit na tvar

$$\begin{aligned}
\int & E^{ij}(g)(\delta g^{-1}\partial_- g)_i(g^{-1}\partial_+ g)_j + E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_-\delta i(g^{-1}\partial_+ g)_j dz^+dz^- \\
= & -\int E^{ij}(g)(g^{-1}\delta g g^{-1}\partial_- g)_i(g^{-1}\partial_+ g)_j + E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_-\delta i(g^{-1}\partial_+ g)_j dz^+dz^- \\
= & -\int E^{ij}(g)[(g^{-1}\delta g)(g^{-1}\partial_- g)]_i(g^{-1}\partial_+ g)_j dz^+dz^- \\
& -\int \partial_- A^i_+(g^{-1}\delta g)_i dz^+dz^- \\
& +\int E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_+ g)_j[(g^{-1}\partial_- g)(g^{-1}\delta g)]_i dz^+dz^- \\
= & \int E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_+ g)_j c^{kl}{}_i(g^{-1}\partial_- g)_k(g^{-1}\delta g)_l dz^+dz^- \\
& -\int \partial_- A^i_+(g^{-1}\delta g)_i dz^+dz^-.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Obdobně upravíme i poslední dva členy (1.16)

$$\begin{aligned}
&\int E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_- g)_i(\delta g^{-1}\partial_+ g)_j dz^+dz^- + \int E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_- g)_i(g^{-1}\partial_+\delta g)_j dz^+dz^- \\
&= \int E^{ij}(g)c^{kl}{}_j(g^{-1}\partial_- g)_i(g^{-1}\partial_+ g)_k(g^{-1}\delta g)_l dz^+dz^- + \int \partial_+ A^i_-(g^{-1}\delta g)_i dz^+dz^-.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

A tedy konečně celá variace akce S se dá psát

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int (g^{-1}\delta g)_k[\partial_+ A^k_- - \partial_- A^k_+ \\
- & E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_+ g)_j c^{kl}{}_i(g^{-1}\partial_- g)_l \\
- & E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_- g)_i c^{kl}{}_j(g^{-1}\partial_+ g)_l \\
+ & \frac{\delta E^{ij}(g)(g^{-1}\partial_- g)_i(g^{-1}\partial_+ g)_j}{\delta(g^{-1}\delta g)_k}]dz^+dz^- \\
= & \int (g^{-1}\delta g)_k[\partial_+ A^k_- + \partial_- A^k_+ - \tilde{c}^k_{xm}A^x_- A^m_+] \stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Pohybové rovnice pak jsou

$$\partial_+ A^k_- + \partial_- A^k_+ - \tilde{c}^k_{xm}A^x_- A^m_+ = 0. \tag{1.29}$$

Ekvivalentně můžeme užít rozklad

$$l(\xi^+, \xi^-) = \tilde{g}(\xi^+, \xi^-)h(\xi^+, \xi^-), \tag{1.30}$$

kde $\tilde{g} \in \tilde{G}$ a $h \in G$. Poznamenejme, že "dualita" je vztah mezi $g \in G$ a $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{G}}$, který je díky jednoznačnosti rozkladu grupy D na součin podgrup G a $\tilde{\mathcal{G}}$ (alespoň v okolí jednotkového prvku) též jednoznačný. Dále bychom postupovali analogicky předchozímu případu s lagrangiánem

$$\tilde{L} = \tilde{E}^{ij}(\tilde{g})(\tilde{g}^{-1}\partial_-\tilde{g})_i(\tilde{g}^{-1}\partial_+\tilde{g})_j \tag{1.31}$$

kde matice σ modelu $\tilde{E}_{ij}(\tilde{g})$ je definována jako

$$\tilde{g}^{-1}\varepsilon^{+}\tilde{g} = Span(\tilde{T}_i + \tilde{E}_{ij}(\tilde{g})T^j), \qquad i = 1,\dots,n, \tag{1.32}$$

$$\tilde{g}^{-1}\varepsilon^{-}\tilde{g} = Span(\tilde{T}_i - \tilde{E}_{ji}(\tilde{g})T^j), \qquad i = 1,\dots,n. \tag{1.33}$$

Konstantní matice $E(e)$ a $\tilde{E}(\tilde{e})$ splňují vztah

$$E(e)\tilde{E}(\tilde{e}) = \tilde{E}(\tilde{e})E(e) = Id. \tag{1.34}$$

Kapitola 2

Polo-abelovská dualizace

Pro případ polo-abelovské dualizace můžeme užít obecné konstrukce popsané v minulé kapitole. Mějme grupu D a její rozklad na podgrupy G, $\tilde{G}$ z nihž grupa $\tilde{G}$ je abelovská. A nechť σ model s lagrangiánem má tvar

$$\begin{aligned}
L(g) = Tr(\partial_- g g^{-1})(\partial_+ g g^{-1}) &= E^{ij}(g^{-1}\partial_- g)_i (g^{-1}\partial_+ g)_j \\
&= E(g^{-1}\partial_- g, g^{-1}\partial_+ g) \\
&= E(g^{-1}\partial_- g g^{-1} g, g^{-1}\partial_+ g g^{-1} g) \\
&= (\partial_- g g^{-1})_i (\partial_+ g g^{-1})_j E(g^{-1} T^i g, g^{-1} T^j g) \\
&= (\partial_- g g^{-1})_i (\partial_+ g g^{-1})_j a(g)^i{}_l a(g)^j{}_k E(T^l, T^k) \\
&= (\partial_- g g^{-1})_i (\partial_+ g g^{-1})_j a(g)^i{}_l a(g)^j{}_k E(g)^{lk} \\
&= R^{ij} (\partial_- g g^{-1})_i (\partial_+ g g^{-1})_j
\end{aligned} \tag{2.1}$$

kde platí $R^{ij} = \delta^{ij}$, $R = aEa^T$. V předchozí kapitole jsme odvodili vztah

$$E(g) = (a(g) + E(e)b(g))^{-1} E(e) d(g). \tag{2.2}$$

Z definice matice $a(g)$

$$g^{-1} T^i g \equiv a(g)^i{}_l T^l \tag{2.3}$$

plyne, že pro $g = e$ je tato matice rovna identitě, tedy platí vztahy

$$a(e) = I \tag{2.4}$$

$$R(g) = I \quad \forall g \in G \quad \Rightarrow \quad I = R(e) = E(e) \tag{2.5}$$

$$\tilde{E}(\tilde{e}) E(e) = I \quad \Rightarrow \quad \tilde{E}(\tilde{e}) = I. \tag{2.6}$$

Dále také víme, že

$$\left(a(g)^T\right)^{-1} = d(g) \tag{2.7}$$

a tudíž můžeme odvodit následující vztah

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\tilde{g}) &= \tilde{a}(\tilde{g})\tilde{E}(\tilde{g})\tilde{a}(\tilde{g})^T = \tilde{a}(\tilde{g})[(\tilde{a}(\tilde{g}) + \tilde{E}(\tilde{e})\tilde{b}(\tilde{g}))^{-1}\tilde{E}(\tilde{e})(\tilde{a}(\tilde{g})^T)^{-1}]\tilde{a}(\tilde{g})^T \\ &= (I + \tilde{b}(\tilde{g})\tilde{a}(\tilde{g}))^{-1} \Rightarrow \tilde{R}^{-1} = I + \tilde{b}(\tilde{g})\tilde{a}(\tilde{g})^{-1}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Vypočtěme nyní členy $\tilde{a}$ a $\tilde{b}$. Vzhledem k tomu, že algebra $\tilde{\mathcal{G}}$ grupy $\tilde{G}$ je řešitelná a dokonce abelovská plyne, že každý její prvek se dá zapsat ve tvaru součinu

$$\tilde{g} = \tilde{g}_1 \cdots \tilde{g}_n = e^{\chi^1 \tilde{T}_1} \cdots e^{\chi^n \tilde{T}_n} \tag{2.9}$$

kde $\tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_n$ jsou generátory jednoparametrických podgrup grupy $\tilde{G}$. Díky vztahu

$$e^B A e^{-B} = A, \qquad B \in \tilde{\mathcal{G}}, A \in \tilde{G} \tag{2.10}$$

platí

$$\tilde{g}^{-1}\tilde{T}_i\tilde{g} = \tilde{T}_i \quad \Rightarrow \tilde{a}(\tilde{g}) = I. \tag{2.11}$$

Člen $\tilde{b}$ je s využitím vztahů

$$[T^i, \tilde{T}_j] = c_{ki}{}^j \tilde{T}_k, \quad e^B A e^{-B} = A + [A, B] \tag{2.12}$$

snadno vypočteme

$$\tilde{b}(\tilde{g})^{ka} = \chi^n c^k{}_n{}^a. \tag{2.13}$$

Matici formy $\tilde{E}$ můžeme tedy psát ve tvaru

$$(\tilde{E}^{-1})^{ka} = \delta^{ka} + \chi^n c^k{}_n{}^a, \tag{2.14}$$

kde χ^n jsou souřadnice prvků koalgebry $\tilde{\mathcal{G}}$ a $c^k{}_n{}^a$jsou strukturní koeficienty Lieovské algebry $\mathcal{G}$ grupy G. Lagrangián duálního σ modelu je tudíž dán vztahem

$$\tilde{L} \;=\; \tilde{E}_{ij}(\tilde{g})(\tilde{g}^{-1}\partial_-\tilde{g})^i(\tilde{g}^{-1}\partial_+\tilde{g})^j = \tilde{E}_{ij}\partial_-\chi^i\partial_+\chi^j. \tag{2.15}$$

Kapitola 3

Poissonova-Lieova symetrie

Je přirozené klást si otázku, kdy k σ-modelu s volnou akcí grupy G na svém cílovém prostoru můžeme nalézt duální $\tilde{\sigma}$-model s duální grupou $\tilde{G}$.

Mějme znovu akci

$$S = \int (G_{ij}(x) + B_{ij}(x))\partial_+ x^i \partial_- x^j dz^+ dz^- \equiv \int E_{ij}(x)\partial_+ x^i \partial_- x^j dz^+ dz^-, \tag{3.1}$$

kde $G_{ij}(x)$ má smysl metriky na cílové varietě M a $B_{ij}(x)$ je antisymetrická globálně definovaná forma na M a má význam torze. Nechť grupa G má volnou akci na M. Potom můžeme této akci přiřadit noetherovskou 1-formu definovanou na světoprostoru danou vztahem

$$J_a = v_a^i E_{ij} \partial_- x^j dz^- - v_a^i E_{ji} \partial_+ x^j dz^+, \tag{3.2}$$

kde $v_a^i(x)$ jsou levoinvarintní vektorová pole příslušné pravé akci grupy G na M. Tato 1-forma se dá však definovat i v případě, že grupa G není grupou izometrií cílové variety M. Vypočtěme variaci akce S.

$$\delta S = S(x + \varepsilon^a v_a) - S(x) = \int \varepsilon^a \pounds_{v_a}(L) + \int d\varepsilon^a \wedge J_a. \tag{3.3}$$

Pokud Lieova derivace lagrangianu $\pounds_{v_a}(L)$ bude rovna nule, pak forma J_a je uzavřená na extremálním povrchu $x^i(z^+, z^-)$. Nalezneme podmínku na formu $E_{ij}(x)$ tak aby bylo zaručeno, že forma J_a na extremálním povrchu bude splňovat podmínku

$$dJ_a = \frac{1}{2}\tilde{c}_a^{kl} J_k \wedge J_l. \tag{3.4}$$

Kde $\tilde{c}_a^{kl}$ jsou strukturní koeficienty nějaké Lieovy algebry $\tilde{\mathcal{G}}$. Dosazením této podmínky do předchozího vztahu máme

$$\pounds_{v_a}(L) = \frac{1}{2}\tilde{c}_a^{kl} J_k \wedge J_l. \tag{3.5}$$

Použitím definice formy J_a nabývá tento vztah tvaru

$$\begin{aligned}
\pounds_{v_a}(L) &= \frac{1}{2}\tilde{c}_a^{kl} J_k \wedge J_l \\
&= \frac{1}{2}\tilde{c}_a^{kl}(v_k^i E_{ij}\partial_- x^j dz^- - v_k^i E_{ji}\partial_+ x^j dz^+) \wedge (v_l^m E_{mn}\partial_- x^n dz^- - v_l^m E_{nm}\partial_+ x^n dz^+) \\
&= \frac{1}{2}\tilde{c}_a^{kl}(v_k^i E_{ij}\partial_- x^j v_l^m E_{mn}\partial_- x^n dz^- \wedge dz^- + v_k^i E_{ij}\partial_- x^j v_l^m E_{nm}\partial_+ x^n dz^- \wedge dz^+ \\
&+ v_k^i E_{ji}\partial_+ x^j v_l^m E_{mn}\partial_- x^n dz^+ \wedge dz^- + v_k^i E_{ji}\partial_+ x^j v_l^m E_{nm}\partial_+ x^n dz^+ \wedge dz^+) \\
&= \tilde{c}_a^{kl} v_k^i v_l^m E_{ji} E_{mn}\partial_+ x^j \partial_- x^n dz^- \wedge dz^+, \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

a tedy

$$\pounds_{v_a}(E_{ji}) = \tilde{c}_a^{kl} v_k^m v_l^n E_{mi} E_{jn}. \qquad (3.7)$$

Pomocí předcházejícího vztahu upravíme

$$\begin{aligned}
\pounds_{v_b}(\pounds_{v_a}(E_{ij})) &= \pounds_{v_b}(\tilde{c}_a^{kl} v_k^m v_l^n E_{mj} E_{in}) \\
&= \tilde{c}_a^{kl} E_{mj} E_{in} \pounds_{v_b}([v_k^m, v_l^n]) \\
&= \tilde{c}_a^{kl} c_{bk}^f E_{mj} E_{in} v_f^m v_l^n + \tilde{c}_a^{kl} c_{bl}^f E_{mj} E_{in} v_f^n v_k^m \\
&= (\tilde{c}_a^{dl} c_{bd}^f - \tilde{c}_a^{df} c_{bd}^l) E_{mj} E_{in} v_f^m v_l^n \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Analogicky upravíme i výraz $\pounds_{v_a}(\pounds_{v_b}(E_{ij})$

$$\pounds_{v_a}(\pounds_{v_b}(E_{ij})) = (\tilde{c}_b^{kl} c_{ak}^f - \tilde{c}_b^{kf} c_{ak}^l) E_{mj} E_{in} v_f^m v_l^n \qquad (3.9)$$

Nakonec upravíme ještě vztah

$$[\pounds_{v_a}, \pounds_{v_b}] = \pounds_{[v_a, v_b]} = (\tilde{c}_k^{fl} c_{ab}^k) E_{mj} E_{in} v_f^m v_l^n \qquad (3.10)$$

A tedy konečně můžeme podmínku psát ve tvaru

$$\tilde{c}_a^{dl} c_{bd}^f - \tilde{c}_a^{df} c_{bd}^l + \tilde{c}_b^{kl} c_{ak}^f - \tilde{c}_b^{kf} c_{ak}^l = \tilde{c}_k^{fl} c_{ab}^k \qquad (3.11)$$

Tento vztah je standardní podmínka kterou musí splňovat strukturní koeficienty lieovské bialgebry ($\mathcal{G}$,$\tilde{\mathcal{G}}$). Tato podmínka je manifestačně duální, a tedy má smysl očekávat, že existuje duální σ-model u něhož se role algeber $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ vymění. Zřejmě, bude duální model splňovat podmínku

$$\pounds_{\tilde{v}_a}(\tilde{E}_{jn}) c_a{}^{kl} \tilde{v}_k^i \tilde{v}_l^m \tilde{E}_{ij} \tilde{E}_{nm}. \qquad (3.12)$$

Kapitola 4

Borelovská dvojice

Nejjednodušším případem ne-abelovské dvojice je grupa $D = GL(2, R)$; její algebra $\mathcal{D}$ s generátory $T_1, T_2, \tilde{T}^1, \tilde{T}^2$ je dána komutačními relacemi

$$[T_i, T_j] = f_{ij}{}^k T_k, \quad [\tilde{T}^i, \tilde{T}^j] = \tilde{f}^{ij}_k \tilde{T}^k, \tag{4.1}$$

$$[T_i, \tilde{T}^j] = f^j_{ki} \tilde{T}^k + \tilde{f}^{jk}_i T_k, \tag{4.2}$$

kde strukturní koeficienty jsou dány tabulkou

$$\begin{aligned}
f_{11}{}^1 &= 0, \quad f_{11}{}^2 = 0 \\
f_{12}{}^1 &= 0, \quad f_{12}{}^2 = 1 \\
f_{21}{}^1 &= 0, \quad f_{21}{}^2 = -1 \\
f_{22}{}^1 &= 0, \quad f_{22}{}^2 = 0 \\
\tilde{f}^{11}_1 &= 0, \quad \tilde{f}^{11} - 2 = 0 \\
\tilde{f}^{12}_1 &= 0, \quad \tilde{f}^{12} - 1 = 1 \\
\tilde{f}^{21}_1 &= 0, \quad \tilde{f}^{21} - 2 = -1 \\
\tilde{f}^{22}_1 &= 0, \quad \tilde{f}^{22} - 2 = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Adjungovaná reprezentace této algebry $\mathcal{D}$ je

$$Ad_{T_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Ad_{T_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$Ad_{\tilde{T}^1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, Ad_{\tilde{T}^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Tato algebra $\mathcal{D}$ má dvě řešitelné podalgebry $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ s komutačními relacemi

$$[T_1, T_2] = T_2, \quad [\tilde{T}^1, \tilde{T}^2] = \tilde{T}^2. \tag{4.6}$$

Nyní sestrojme adjungovanou reprezentaci grupy G na $\mathcal{D}$.

$$M_1 = exp(\chi_1 Ad_{T_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\chi_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\chi_1} \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

$$M_2 = exp(\chi_2 Ad_{T_2}) = \begin{pmatrix} 1 & \chi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\chi_2 & 1 & 0 \\ \chi_2 & {\chi_2}^2 & -\chi_2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Obecný prvek grupy G má v adjungované reprezentaci tvar

$$M(g) = M_2.M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \chi_2 e^{-\chi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\chi_1} & 0 & .0 \\ 0 & -\chi_2 e^{-\chi_1} & 1 & 0 \\ \chi_2 & \chi_2^2 e^{-\chi_1} & -\chi_2 & e^{\chi_1} \end{pmatrix}$$

Tato matice má blokovou strukturu

$$M(g) = \begin{pmatrix} a(g) & 0 \\ b(g) & d(g) \end{pmatrix}$$

kde submatice $a(g)$,$b(g)$,$d(g)$jsou rovny

$$a(g) = \begin{pmatrix} 1 & \chi_2 e^{-\chi_1} \\ 0 & e^{-\chi_1} \end{pmatrix}, b(g) = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_2 e^{-\chi_1} \\ \chi_2 & \chi_2^2 e^{-\chi_1} \end{pmatrix}, d(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\chi_2 & e^{\chi_1} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Nyní už jednoduše získáme matici σ-modelu $E(g)$. Využijeme vztah

$$E(g) = (a(g) + E(e)b(g))^{-1} E(e) d(g),$$

kde $E(e)$ je konstantní matice

$$E(e)^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}.$$

A tedy lagrangian σ-modelu se dá psát

$$\begin{aligned} L(g) \;=\; & \frac{x{\chi_2}^2 + \chi_2(u+y) + v}{{\chi_2}^2 + \chi_2(u-y) + (xv-uy)} \partial_-\chi_1 \partial_+\chi_1 \\ + & \frac{x}{{\chi_2}^2 + \chi_2(u-y) + (xv-uy)} \partial_-\chi_2 \partial_+\chi_2 \\ - & \frac{y + (x-1)\chi_2}{{\chi_2}^2 + \chi_2(u-y) + (xv-uy)} \partial_-\chi_1 \partial_+\chi_2 \\ - & \frac{u + (x+1)\chi_2}{{\chi_2}^2 + \chi_2(u-y) + (xv-uy)} \partial_-\chi_2 \partial_+\chi_1. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Úplně analogicky sestrojíme lagrangian duálního σ-modelu. Nyní sestrojme adjungovanou reprezentaci grupy $\tilde{G}$ na $\tilde{\mathcal{D}}$.

$$\tilde{M}_1 = exp(\tilde{\chi}_1 Ad_{\tilde{T}^1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\tilde{\chi}_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\tilde{\chi}_1} \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

$$\tilde{M}_2 = exp(\tilde{\chi}_2 Ad_{\tilde{T}_2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tilde{\chi}_2 \\ -\tilde{\chi}_2 & 1 & \tilde{\chi}_2 & \tilde{\chi}_2{}^2 \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{\chi}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Obecný prvek grupy $\tilde{G}$ má v adjungované reprezentaci tvar

$$\tilde{M}(g) = \tilde{M}_2.\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tilde{\chi}_2 e^{-\tilde{\chi}_1} \\ -\tilde{\chi}_2 & e^{\tilde{\chi}_1} & 0 & -\tilde{\chi}_2 e^{-\tilde{\chi}_1} \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{\chi}_2 e^{-\tilde{\chi}_1} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\tilde{\chi}_1} \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Tato matice má blokovou strukturu

$$\tilde{M}(g) = \begin{pmatrix} \tilde{d}(\tilde{g}) & \tilde{b}(\tilde{g}) \\ 0 & \tilde{a}(\tilde{g}) \end{pmatrix}$$

kde submatice $\tilde{a}(\tilde{g})$,$\tilde{b}(\tilde{g})$,$\tilde{d}(\tilde{g})$jsou rovny

$$\tilde{a}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\chi}_2 e^{-\tilde{\chi}_1} \\ 0 & e^{-\tilde{\chi}_1} \end{pmatrix}, \tilde{b}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\chi}_2 e^{-\tilde{\chi}_1} \\ \tilde{\chi}_2 & \tilde{\chi}_2^2 e^{-\tilde{\chi}_1} \end{pmatrix}, \tilde{d}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tilde{\chi}_2 & e^{\tilde{\chi}_1} \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Nyní už jednoduše získáme matici duálního σ-modelu $\tilde{E}(\tilde{g})$. Využijeme vztah

$$E(g) = (a(g) + E(e)b(g))^{-1} E(e) d(g),$$

kde $\tilde{E}(\tilde{e})$ je konstantní matice

$$\tilde{E}(\tilde{e}) = \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \tilde{u} & \tilde{v} \end{pmatrix}.$$

A tedy lagrangián duálního σ-modelu se dá psát

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\tilde{g}) &= \frac{\tilde{x}\tilde{\chi}_2^2 + \tilde{\chi}_2(\tilde{u} + \tilde{y}) + \tilde{v}}{\tilde{\chi}_2^2 + \tilde{\chi}_2(\tilde{u} - \tilde{y}) + (\tilde{x}\tilde{v} - \tilde{u}\tilde{y})} \partial_- \tilde{\chi}_1 \partial_+ \tilde{\chi}_1 \\ &+ \frac{\tilde{x}}{\tilde{\chi}_2^2 + \tilde{\chi}_2(\tilde{u} - \tilde{y}) + (\tilde{x}\tilde{v} - \tilde{u}\tilde{y})} \partial_- \tilde{\chi}_2 \partial_+ \tilde{\chi}_2 \\ &- \frac{\tilde{y} + (\tilde{x} - 1)\tilde{\chi}_2}{\tilde{\chi}_2^2 + \tilde{\chi}_2(\tilde{u} - \tilde{y}) + (\tilde{x}\tilde{v} - \tilde{u}\tilde{y})} \partial_- \tilde{\chi}_1 \partial_+ \tilde{\chi}_2 \\ &- \frac{\tilde{u} + (\tilde{x} + 1)\tilde{\chi}_2}{\tilde{\chi}_2^2 + \tilde{\chi}_2(\tilde{u} - \tilde{y}) + (\tilde{x}\tilde{v} - \tilde{u}\tilde{y})} \partial_- \tilde{\chi}_2 \partial_+ \tilde{\chi}_1. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Konstantní matice $\tilde{E}(\tilde{e})$ a $E(e)$ v tomto případě splňují vztah

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \tilde{u} & \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \tilde{u} & \tilde{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = Id. \tag{4.16}$$

Závěr

V této práci je pečlivě odvozen tvar vzájemně duálních modelů pro obecný neabelovský případ což mi posloužilo k hlubšímu porozumění jak samotnému pojmu “dualita σ-modelů” jakož i nový pohled na “jednoduší” typy dualit, kterými jsem se zabýval v předchozí rešeršní práci (abelovská dualita, Buscherova dualita.). K popisu dualit který je zde podán jsem si musel nastudovat a osvojit množství nových pojmů hlavně z teorie lieovských algeber a grup či z teorie reprezentací lieovských algeber a grup. Zároveň předpokládám, že nabyté znalosti bych mohl zúročit či dále rozšířit při psaní své diplomové práce.

Literatura

[1] M.Turek: Rešeršní práce,FJFI,ČVUT,Praha 2003, http://ssmf.fjfi.cvut.cz/

[2] C.Klimčík: Poisson-Lie T-duality, Nuclear Physics B(Proc. Suppl.) 46 (1996) 116-121.

[3] C.Klimčík, P.Ševera: Dual Non-Abelian Duality and the Drinfeld Double, hep-th/9502122.

[4] X. De la Ossa, F. Quevedo: Introduction to the T-Duality and String Theory,hep-th/9210021.