

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Rešeršní práce

Zdeněk Hubáček

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Rešerše strukturních funkcí protonu
Určování konstanty α_S silných interakcí z
produkcí mnoha jetů

Zdeněk Hubáček

Katedra fyziky

Akademický rok: 2001/2002

Školitel: Doc. RNDr. Vladislav Šimák, DrSc., FzÚ AV ČR

V Praze 12. června 2002

1 Strukturní funkce protonu

1.1 Úvod

Tématem této rešeršní práce je prozkoumat vlastnosti strukturních funkcí protonu. Naším cílem bude popsat základní vlastnosti těchto funkcí, porovnat různé parametrizace a vyzkoušet jejich univerzálnost například při interakcích hadronů. Hlavní zájem budeme směřovat k interakcím vedoucím ke vzniku více jetů v koncovém stavu. Rovněž vyzkoušíme zjišťování konstanty silných interakcí α_S při vzniku několika jetů v koncovém stavu.

1.2 Historie

Jak již bylo řečeno v úvodu, cílem první části práce je seznámení se se strukturními funkcemi protonu. Pro jejich experimentální popis jsou nejdůležitější rozpylové experimenty, v našem případě hlavně rozptyl elektronu na protonu, jehož vlastnosti popíšeme později. Je otázkou, proč se jimi vlastně zabýváme. Už hodně dlouho člověk hledá základní kameny, z kterých je poskládáno vše okolo nás. Od původního atomu jsme se dostali k elementárním částicím a dnes zjišťujeme, že ani ty nejsou úplně elementární.

Proton a elektron jsou nejstarší elementární částice, které známe. Pro teorii je nejjednodušší jejich popis pomocí bodových částic. Právě rozpylové experimenty ale poukazyvaly na rozpor s jednoduchým modelem bodových částic. K prvním závěrům se dospělo po spuštění urychlovače SLAC ve Stanfordu. Zároveň postupně objevování dalších elementárních částic vedlo k potřebě určité systematizace jednotlivých částic.

Zásadní význam v teoretické části měly, nezávisle na sobě, práce M. Gell-Manna a G. Zweiga, které popisovaly jednotlivé částice jako kombinace ještě menších částí, tzv. kvarků. Částice, které jsou tvořeny kvarky nazýváme hadrony. Patří mezi ně například proton, neutron a další. Dále existují částice, které se z kvarků neskládají. Ty považujeme za bodové částice. Nazveme je leptony a patří k nim například elektron a mion. Abychom dostali tzv. Standardní model, přiřazujeme k těmto částicím ještě částice zprostředkující interakce. V přírodě rozlišujeme 4 druhy interakcí - elektromagnetickou, slabou, silnou a gravitační. Jejich hlavním rysem je výměnný charakter všech interakcí - vzájemnou interakcí je myšlena výměna zprostředkujících částic. Tyto částice známe u elektromagnetické, slabé a silné interakce (fotony, kalibrační mezony, gluony), existence gravitonu odpovědného za gravitační interakci se předpokládá. Ve Standardním modelu zatím gravitační interakci nepoužíváme. Ve fyzice mikrosvěta je její vliv ze všech 4 zdaleka nejslabší a proto se zanedbává. Ve zjednodušené verzi můžeme říci, že příroda, popsaná Standardním modelem, je tvořena 3 generacemi leptonů, 3 generacemi kvarků a částicemi interakcí. Každou generaci tvoří 2 částice - u leptonů jde o částici a její neutrino, jednu generaci kvarků tvoří 2 kvarky. Počet generací

není přímo potvrzen, například některé programy si nechávají zadní vrátka pro čtvrtou generaci, ale experimenty spíše ukazují na to, že více generací s velkou pravděpodobností neexistuje. Ke každé této částici připojujeme rovněž i její antičástici.

Zjistili jsme tedy, že není příliš dobré a přesné považovat proton za bodovou částici. Označení skládat se z něčeho se zdá být v rozporu s představou jakési bodové částice. Podle jednoduchého kvarkového modelu máme proton obsahující 2 up a 1 down kvarky. Ovšem dalšími rozptylovými experimenty bylo zjištěno, že tento obraz není úplný. Zjistilo se, že na tyto tři kvarky připadá zhruba jedna polovina celkové hybnosti protonu. V protonu se nachází ještě něco jiného. K vylepšení modelu byly do protonu přidány gluony vázající jednotlivé kvarky k sobě. Druhá polovina celkové hybnosti protonu připadá právě na gluony. Gluony přitom nejsou přímo pozorovatelné, jejich přítomnost je zprostředkovávána pomocí tvorby párů kvark-antikvark. Tyto gluony zprostředkovávající silnou interakci jsou důvodem, proč jsou kvarky v protonu uvězněny a nemůžeme je proto pozorovat volně. Dostáváme se tedy k vylepšenému kvarkovému modelu nazývaném občas partonovým modelem. Podle něj se proton skládá z menších částí, tzv. partonů. Přitom partonem je buď kvark nebo gluon.

Naznačili jsme tedy, jak by mohl vypadat model struktury protonu. Při popisu nás bude zajímat struktura ve smyslu rozdělení hybností mezi jednotlivé partony, kterou budeme chtít využít při popisu srážek elementárních částic (pro nás hlavně interakce elektron-proton ep a proton-antiproton $p\bar{p}$). Možnost použití při různých procesech je důkazem jejich univerzálnosti a vysvětluje důvody, proč je důležité se jimi zabývat. Rozdělení hybností je popsáno právě strukturními funkcemi. A jelikož současné teorie nejsou zatím schopny podat dostatečný popis a vysvětlení jejich průběhů, musíme tyto funkce nějakým způsobem parametrizovat a srovnávat je s experimentálně naměřenými hodnotami.

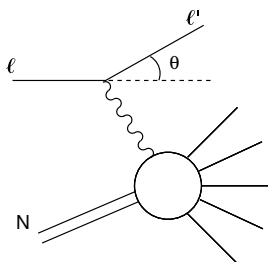
1.3 Hluboce nepružný rozptyl

Máme tedy za sebou historický úvod, který nás přivedl k problému popisu struktury protonu. Jako nástroje k nám k tomu slouží kvantová chromodynamika (QCD) z hlediska teorie a hluboce nepružný rozptyl (DIS) na straně experimentální. Cílem parametrizací strukturních funkcí je co nejlepší popis experimentálních dat, který současně neodporuje teorii (případně navržení a vysvětlení chování strukturních funkcí).

Historie hluboce nepružného rozptylu začíná přibližně v době spuštění lineárního urychlovače SLAC. Jedním z prvních experimentů bylo prověřit, zda můžeme získat nové částice pomocí elektronů. Teoretický fyzik J. D. Bjorken, který se zabýval novými představami o hadronech, navrhl prozkoumat něco jiného. Podle jeho rady se přesunuly detektory dál od linie svazku, aby se mohly pozorovat výrazně rozptýlené elektrony. K jejich překvapení

bylo takových elektronů mnohem víc, než se předpokládalo.

Využijeme hluboce nepružný rozptyl při interakci nukleonu s leptonem (v našem případě nejčastěji protonu s elektronem $ep \rightarrow eX$). Nejdříve stručně popíšeme, jak vypadá samotný experiment. Na urychlovači necháme urychlit svazek protonů a elektronů na příslušnou energii. Kvůli maximální energii necháváme oba svazky vstřícně srážet. Elektron se rozptyluje na protonu a se změněnou čtyřhybností odlétá pryč od místa interakce. U tohoto elektronu známe původní čtyřhybnost danou fyzikálními možnostmi urychlovače a změříme energii a hybnost vyletujícího elektronu a příslušné úhly rozptylu. Z těchto údajů můžeme zpětně vypočítat čtyřhybnost rozptýleného elektronu. Při hluboce nepružném rozptylu dochází ke zničení původního protonu a ke vzniku mnoha nových částic, které můžeme na závěr zjistit detektory. Vzniklý stav původního protonu je poměrně složité zjistit. Většina rozpadů může probíhat několika kanály (několika způsoby). Ze změřených dat se můžeme pokusit rekonstruovat průběh srážky, ale jednotlivá přiřazení nemusí být jednoznačná. Při interakci označujeme tento stav jako X . Při zkoumání vlastností strukturních funkcí není přesný stav vzniklých částic důležitý. Proces se označuje jako inkluzivní, to znamená, že nás zajímají jen celkové energie a hybnosti vzniklých částic. Ty zjistíme například z detektorů (kalorimetrů), které tyto částice zachytily. Jednoduché schéma rozptylu je znázorněno na obrázku 1.



Obrázek 1: Rozpyl leptonu l na nukleonu N (převzato z [10])

Hluboce nepružný rozptyl popíšeme tedy takto. Nalétávající elektron se čtyřhybností k vysílá při interakci foton a odlétá (rozptyluje se) se změněnou čtyřhybností k' . Výměna fotonu je nejdůležitější hlavně při nižších energiích $Q^2 \lesssim M^2(Z^0)$. T.j. při přenesené čtyřhybnosti nižší než je klidová hmotnost intermediálních bozonů. Pokud dochází k vyšším přenosům, musíme zahrnout i možnou výměnu těchto bozonů. Při těchto energiích má výměna fotonu a intermediálních bozonů W^\pm , Z^0 přibližně stejnou váhu. Foton (případně intermediální bozon) interaguje s partonem nesoucím zlomek x celkové hybnosti protonu. Pro popis zavádíme tedy následující 2 veličiny: $Q^2 = -(k - k')^2$ je záporně vzatý kvadrát (velikost) přenesené čtyřhybnosti a Bjorkenovo x jako $x = \frac{Q^2}{2P \cdot q}$ pro zlomek celkové čtyřhybnosti protonu ne-

sený interagujícím partonem. Přitom použití těchto proměnných je vhodné spíše z pohledu teoretického. Použitím jednoduchých transformací lze ovšem použít i experimentální proměnné jako jsou úhly rozptylu a celková energie elektronu. Dále se dá ukázat, že použití dvou proměnných je postačující a další proměnné z nich lze jednoduše vyjádřit. Za hluboce nepružný rozptyl považujeme rozptyl, u kterého je $Q^2 \gg 1 \text{ GeV}^2$.

V důsledku je tedy přenášena čtyřhybnost nástrojem ke zkoumání struktury protonu. Je tedy otázkou, zda jsou kvarky bodové částice nebo zda se skládají z dalších menších součástí. Existují i modely, které popisují složení kvarků a leptonů z menších konstituentů - tzv. preonů. Důležitou poznámkou je, že současné rozptylové experimenty o takové struktuře nevypovídají. Možnosti nových urychlovačů však nechávají tuto otázku otevřenou.

Pro diferenciální účinný průřez platí:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2 Y_+}{xQ^4} \left\{ F_2(x, Q^2) - \frac{y^2}{Y_+} \cdot F_L(x, Q^2) \right\} \quad (1)$$

Tento výraz je aproximací při $Q^2 \ll M^2(Z^0)$ (zanedbání výměny intermedieálních bozonů při nízkých energiích), $Y_+ = 1 + (1 - y)^2$ a $y = \frac{q \cdot P}{k \cdot P}$ je koeficient nepružnosti, P , q , k jsou čtyřhybnosti protonu, fotonu a elektronu.

Zavedeme-li redukovaný účinný průřez

$$\sigma_r \equiv \frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} \frac{xQ^4}{2\pi\alpha^2 Y_+} = F_2(x, Q^2) - \frac{y^2}{Y_+} \cdot F_L(x, Q^2) \quad (2)$$

Podrobné odvození lze nalézt například v [1, 21].

Mezi strukturálními funkcemi platí vztah $0 \leq F_L \leq F_2$. A strukturální funkce F_2 dominuje $\sigma_r \simeq F_2$ při $y \leq 0.6$.

Zkoumáme tedy hlavně strukturální funkci F_2 . Longitudální strukturální funkce F_L hraje roli až při vysokém koeficientu neelasticity. Vzorec pro diferenciální účinný průřez se více zkomplikuje při vyšších přenosech a při zanedbávání např. radiačních korekcí. Při výměně intermedieálních bozonů bývá navíc zvykem rozlišit tzv. *charged current* a *neutral current* situace odpovídající výměně W^\pm , respektive Z^0 .

V rámci sjednocení značení je nutno poznamenat, že konvence při značení není jednoznačně daná. Použité strukturální funkce a jejich značení používám podle [2]. Používají se rovněž $F_1(x, Q^2)$ a $F_2(x, Q^2)$ v [1] při neuvažování výměny W^\pm a Z^0 a rovněž $F_3(x, Q^2)$ při výměně těchto bozonů. Jako poznámku uvedme Callan-Grossův teoretický vztah mezi strukturálními funkcemi:

$$F_2(x) = 2xF_1(x). \quad (3)$$

Nenulový experimentální rozdíl nazveme longitudální strukturální funkcí:

$$F_L \equiv F_2 - 2xF_1. \quad (4)$$

1.4 Kvark-partonový model

Možností interpretace těchto experimentů a struktury protonu je několik (viz.[5]). Nejpoužívanější je takzvaný naivní kvark-partonový model, který interakci virtuálního fotonu s protonem, γ^*p , vyjádřuje jako sumu koherentních rozptylů na kvarcích jako na bodových částicích. Koherentním rozptylem myslíme pohlcení tohoto fotonu jedním kvarkem. Na krátkou dobu $\sim \frac{1}{\sqrt{Q^2}}$ foton vidí stav neinteragujícího kvarku. Tento časový okamžik je kratší, než by kvark potřeboval na výměnu informací s dalším partonem, proto se fotonu jeví jako volný. Zpětná hadronizace nastává mnohem později.

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \sum_q \int_0^1 d\xi f_q(\xi) \frac{d^2\hat{\sigma}}{dx dQ^2} e_q \quad (5)$$

Zde $f_q(\xi)$ je pravděpodobnost nalezení kvarku q v protonu se zlomkem ξ celkové hybnosti protonu (takzvaná distribuce - rozdělení partonů - *parton distribution function*, případně hustota - *parton density function*), $\frac{d^2\hat{\sigma}}{dx dQ^2} e_q$ je diferenciální průřez rozptylu elektronu na kvarku. Rozdělení hybností v protonu považujeme za vlastnost protonu a tedy $f_q(\xi)$ nezávisí na Q^2 . Uvidíme později, že to není úplná pravda.

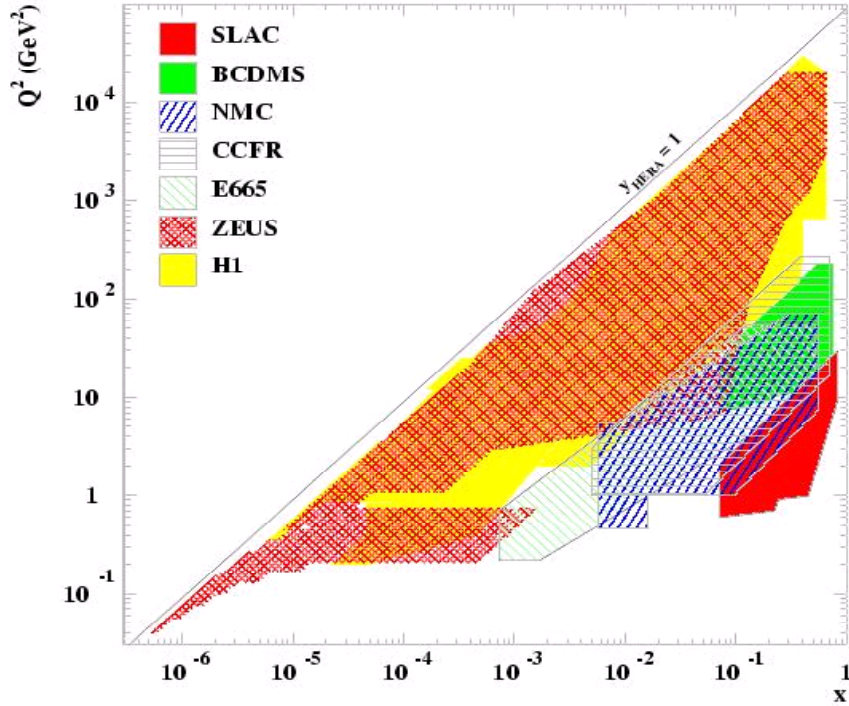
Postupnou úpravou a porovnáním výrazů (1) a (5) pro diferenciální účinný průřez dostáváme výsledný tvar strukturní funkce F_2 jako

$$F_2(x, Q^2) = \sum_q e_q^2 x f_q(x) \quad (6)$$

Škálováním nazýváme nezávislost strukturní funkce na energii Q^2 . V kvantové chromodynamice se předpovídá narušení škálování při nízkém a vysokém x (*low x*, *high x*). Teoretický rozsah pro x je interval $(0, 1)$, pro Q^2 je to interval $(0, Q_{max}^2)$, kde Q_{max}^2 je dán možnostmi experimentu. Měření strukturních funkcí probíhají na většině hlavních urychlovačů na světě. Jednotlivé experimenty a oblasti jejich měření lze vidět na obrázku 2 na straně 6.

V současné době se experimenty zaměřují spíše na okrajové části intervalů, kde doposud neprobíhala přesná měření. Jde tedy o 4 oblasti (nízké x , vysoké x , nízké Q^2 a vysoké Q^2), kde se očekává jiné chování strukturních funkcí (zmíněné narušení škálování). Jde rovněž i o oblasti, pro které neexistuje přesvědčivý teoretický model.

Uvažujme nejprve ideální a fyzikálně nerealizovatelné oblasti, kde $x = 0$ nebo $x = 1$. V prvním případě jde o interakci fotonu s partonem, který nese žádnou hybnost. Jde o to, že nehýbající se parton je součástí protonu, který hybnost má a tedy se pohybuje. Naopak v druhém případě jde o interakci s partonem nesoucím celou hybnost protonu. Tato situace odpovídá dokonale pružnému rozptylu fotonu na bodovém partonu. Zhlediska protonu



Obrázek 2: Experimenty měřící strukturní funkce(převzato z [2])

jde ovšem o nereálnou situaci, kdy jeho zbylé součásti nenesou žádnou hybnost a přitom se pohybují spolu s protonem. Pokud tedy interpretujeme strukturní funkci F_2 jako sumu pravděpodobností výskytu kvarků s určitým zlomkem hybnosti, musí platit $F_2(x, Q^2) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow 0$ a pro $x \rightarrow 1$ (při pevném Q^2 - tj. alespoň bodově). Vzhledem k tomu, že jde o váženou sumu s vahou x , půjde $F_2(x, Q^2)$ k nule i když jednotlivé pravděpodobnosti f_i budou vysoké (nejpravděpodobnější výskyt například kvarků moře a těžších kvarků bude, pokud budou mít jen minimální energii). Chování v těchto regionech bude důležité i pro parametrizace strukturní funkce $F_2(x, Q^2)$. Jak uvidíme později, poruchová kvantová chromodynamika (pQCD) má určité předpovědi o narušení škálování při nízkém a vysokém x . Toto chování se autoři snaží zahrnout do svých parametrizací.

Podívejme se ještě na možnosti vyjádření strukturní funkce $F_2(x, Q^2)$. Podle jednoduchého 3-kvarkového modelu bychom předpokládali maximum jednotlivých distribucí kvarků kolem $x = \frac{1}{3}$, které by odpovídalo tomu, že na jeden kvark připadá jedna třetina celkové hybnosti. Experimentální data tomu nenasvědčují. Rozdíl se dá názorně vysvětlit při vyjádření příspěvků

gluonů.

Podle (6) jsme strukturní funkci protonu $F_2(x, Q^2)$ vyjádřili pomocí sumy pravděpodobností nalezení příslušného kvarku s určitým zlomkem jeho celkové hybnosti. Pokud si vyjádříme proton jako $p = u u d + q \bar{q}$ - tedy 2 up, 1 down kvarky, které nazýváme valenční a páry kvarků a antikvarků, které nazýváme mořem kvarků (*sea quarks*), můžeme psát:

$$f_u(x) \equiv u(x) = u_v + u_{sea} \quad (7)$$

$$f_{\bar{u}(x)} \equiv \bar{u}(x) = u_{sea} \quad (8)$$

Při zkoumání při škále Q jsou aktivní jen ty kvarky, kdy $m_q \lesssim Q$. Vyjádření (7) a (8) jsou zřejmá. Antikvarky se v protonu vyskytují vždy v páru s příslušným kvarkem, proto je pravděpodobnost jejich výskytu dána těmito vztahy. Z jednoduchých vlastností musí platit tyto sumační pravidla:

$$\int_0^1 (u - \bar{u})dx = \int_0^1 u_v dx = 2 \quad (9)$$

$$\int_0^1 (d - \bar{d})dx = \int_0^1 d_v dx = 1 \quad (10)$$

Podle kvark-partonového modelu je $F_2 = \sum_q e_q^2 x f_q(x)$ a tedy:

$$F_2^{ep} = x \left(\frac{4}{9}u + \frac{1}{9}d + \frac{1}{9}s + \dots + \frac{4}{9}\bar{u} + \frac{1}{9}\bar{d} + \frac{1}{9}\bar{s} + \dots \right) \quad (11)$$

Proton a neutron považujeme díky izospinu za 2 různé stavy nukleonu. Díky tomu můžeme předpokládat, že platí (horní index značí částici):

$$f_u^p \equiv f_d^n \quad f_d^p \equiv f_u^n \quad (12)$$

V případě rozptylu en (elektronu na neutronu) dostáváme:

$$F_2^{en} = x \left(\frac{4}{9}d + \frac{1}{9}u + \frac{1}{9}s + \dots + \frac{4}{9}\bar{d} + \frac{1}{9}\bar{u} + \frac{1}{9}\bar{s} + \dots \right) \quad (13)$$

Při rozdílu obou strukturních funkcí vymizí příspěvky od moře kvarků a dostáváme takzvané Gottfriedovo sumační pravidlo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x} (F_2^{ep} - F_2^{en}) &= \frac{1}{3} \int dx (u - d + \bar{u} - \bar{d}) = \\ &= \frac{1}{3} \int dx \{ (u - \bar{u}) - (d - \bar{d}) \} + \frac{2}{3} \int dx (\bar{u} - \bar{d}) = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (14)$$

při předpokladu $\bar{u} = \bar{d}$ (mají podobné klidové energie). Výsledek experimentu NMC [4]:

$$\int_{0.004}^{0.8} = 0.236 \pm 0.008 \pm 0.014 \Rightarrow \int_0^1 = 0.258 \pm 0.017 \quad (15)$$

Podle novějších dat je $\bar{u} \neq \bar{d}$, což vede ke snížení teoretické hodnoty 1/3 směrem k experimentálním výsledkům.

1.5 QCD-vylepšený partonový model

Než se dostaneme k parametrizacím strukturních funkcí, zkusíme vylepšit náš stále poměrně jednoduchý model pomocí některých zajímavých vlastností kvantové chromodynamiky.

Obvyklé první korekce QCD pocházejí z vyzáření gluonu kvarkem (před nebo po interakci s fotonem). Hlavní kvalitativní vlastnosti gluonové emise můžeme pochopit z několika kinematických úvah. Při nízkých přenosech hybnosti se proton chová jako jeden objekt, buď bodový (při nízké energii) nebo konečně rozměrný. Při vyšších energiích je foton citlivější vzhledem k menším vzdálenostem a rozptyluje se na partonech. Při ještě vyšších energiích je foton ještě citlivější a může rozdělit kvark na kvark a gluon. Parton se zlomkem hybnosti x může být rozdělen na parton a gluon s menšími zlomky hybnosti, $x' < x$ a $x - x'$. Podobným způsobem může být gluon rozdělen v pár kvark a antikvark.

Tento jednoduchý popis implikuje, že s vyšší energií Q^2 foton zaznamená změny v partonových distribucích. Vyzáření gluonu způsobí posun distribuce valenčních kvarků a kvarků moře směrem k nižším hodnotám x a rozdělení gluonu na pár kvark-antikvark zvýší množství moře (hlavně při nízkém x). I bez detailních výpočtů můžeme očekávat závislost partonových distribucí na Q^2 - tj. narušení Bjorkenova škálování kvůli QCD interakcím.

Rovnice popisující závislost distribuce kvarku na škále:

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} f(x, Q^2) = \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f(y, Q^2) P_{qq}^+ \left(\frac{x}{y} \right) \quad (16)$$

Změna v distribuci pro kvark se zlomkem hybnosti x je dána integrálem přes y příslušné distribuce kvarku se zlomkem hybnosti $y \geq x$, kterému po vyzáření gluonu zůstal zlomek x/y původní hybnosti.

Dělicí funkce (*splitting function*) je definována jako

$$P_{qq}(z) \equiv C_F \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right) \quad (17)$$

a

$$P_{qq}^+(z) \delta(yz - x) \equiv P_{qq}(z) \{ \delta(yz - x) - \delta(y - x) \} \quad (18)$$

Potom má dělicí funkce názornou fyzikální interpretaci: $(\alpha_S/2\pi) P_{qq}^+(x/y)$ je pravděpodobnost spojená s dělicím procesem $f(y) \rightarrow f(x)g$ (vyzáření

gluonu kvarkem). Tato pravděpodobnost je velká pro velké zlomky hybnosti - kvarky s vysokým zlomkem hybnosti hybnost ztrácí vyzařováním gluonů. Proto budou při vyšším Q^2 distribuce kvarků klesat s vyšším x a růst při nízkém x .

Je nutné zdůraznit, že evoluční rovnice (16) se týkala jen kvarků a platí jen pro ne-singletní distribuce typu $f_i(x) - f_j(x)$, kde se (singletní) příspěvky gluonů zruší. Ne-singletní distribuce znamená nenulovost kvantových čísel jako je izospin a baryonové číslo. Singletní distribuce typu $f_i = q_i + \bar{q}_i$ má tyto čísla nulová. Při zobecnění je nutno uvažovat i efekty pocházející z rozdělení gluonu na kvark a antikvark, který interaguje s fotonem. Obvyklé zobecnění má tvar:

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} \begin{pmatrix} q(x, Q^2) \\ G(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \begin{bmatrix} P_{qq}^+(\frac{x}{y}) & P_{qG}(\frac{x}{y}) \\ P_{Gq}(\frac{x}{y}) & P_{GG}(\frac{x}{y}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q(y, Q^2) \\ G(y, Q^2) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

kde $P_{gq}(z) = P_{qg}(1-z)$ určuje pravděpodobnost, že kvark vyzáří gluon se zlomkem z původní hybnosti kvarku a

$$P_{qG}(z) = T_F [z^2 + (1-z)^2] \quad (20)$$

$$P_{GG}(z) = 2C_A \left[\frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right] + \frac{1}{6}(11C_A - 4N_f T_F) \delta(1-z) \quad (21)$$

jsou dělicí funkce gluonu na $q\bar{q}$ a GG . Dolní index u $1/(1-z)_+$ znamená

$$\int_0^1 dz f(z) [g(z)]_+ \equiv \int_0^1 dz [f(z) - f(1)] g(z) \quad (22)$$

Hodnoty konstant C_F , T_F , C_A a N_f nejsou pro nás v tuto chvíli důležité.

1.6 Parametrizace strukturních funkcí

V následujícím odstavci zkusíme nastínit úvahy vyvstávající při parametrizacích strukturních funkcí. Popíšeme několik parametrizací od různých autorů a pokusíme se je nějakým způsobem porovnat.

Potřeba parametrizovat strukturní funkce vyvstala hned po jejich prvním měření. Od té doby vzniklo velké množství parametrizací. Důležitou vlastností je jejich zpřesňování možné díky pokrokům při výpočtech v QCD. Největší počet parametrizací existuje pro strukturní funkce protonu. Jako důsledek univerzálnosti je lze po upravení použít i pro neutron. Potom je možné z nich sestavit i strukturní funkce celých atomových jader. Existují i strukturní funkce pionů a strukturní funkce fotonu. Pro potřebu systematizace vznikl program PDFLIB[6], kde jsou jednotlivé parametrizace uloženy a odkud můžou být použity i v dalších programech.

Hledáme tedy spojitou funkci 2 proměnných (x, Q^2) . Při škálování by měla být strukturní funkce F_2 nezávislá na Q^2 . V QCD ale existují rovnice popisující vývoj F_2 v Q^2 . Parametrizace se fitují při pevně zvolené škále Q a jejich následný vývoj se poté upravuje.

Porovnání parametrizací umožňují χ^2 testy. Jde o matematický nástroj na potvrzování hypotéz týkajících se statistických předpovědí. Jde o potvrzení hypotézy (parametrizace) porovnáním s experimentálně naměřenými hodnotami $F_2(x, Q^2)$. Lepší parametrizací bude ta s lepším výsledkem χ^2 testu.

1.6.1 Závislost na x

Na rozdíl od Q^2 neexistují v QCD rovnice popisující chování strukturních funkcí v závislosti na zlomku celkové hybnosti jednotlivého partonu. Parametrizace probíhá tím způsobem, že se nejprve zafixuje škála Q_0 a pak se hledá funkce jedné proměnné, která se svými vlastnostmi blíží co nejlépe experimentálním hodnotám. Důležitou vlastností je počet nezávislých konstant, které k popisu této funkce potřebujeme.

Všechny hlavní parametrizace používají obecný tvar:

$$f_i(x, Q_0) = A_0 x^{A_1} (1 - x)^{A_2} P(x; A_3, \dots), \quad (23)$$

ve kterém se snaží dávat fyzikální význam použitým parametrům A_1, A_2 a $P(x; A_3, \dots)$ je vhodně zvolená hladká funkce jednoho nebo více dalších parametrů. Právě tvar této funkce a počet dalších parametrů (= stupňů volnosti) rozlišuje jednotlivé parametrizace. Jednotlivé konstanty mohou být spolu svázány například přes sumační pravidla a zákony zachování. Při jednoduchém zkoumání je vidět, že základní tvar

$$f_i(x, Q_0) = A_0 x^{A_1} (1 - x)^{A_2} \quad (24)$$

ovládá pomocí konstant A_1 a A_2 singularity distribucí v 0 a 1. Dodatečná funkce P pak upravuje průběh.

1.6.2 Závislost na Q^2

Závislost na vyměněné čtyřhybnosti je v QCD popsána takzvanými DGLAP rovnicemi (Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi) [7]. V podstatě jsme tyto rovnice popsali v kapitole 1.5. Šlo o rovnice (16) a (19). Přepíšeme je ještě jednou v používanějším zápise. Zavedeme nejdříve označení pro nesingletní a singletní kvarkové distribuce:

$$F_{NS} = q_i - q_j \quad F_S = \sum_i (q_i + \bar{q}_i) \quad (25)$$

DGLAP rovnice (někdy zvané evoluční rovnice QCD) mají tvar:

$$Q^2 \frac{\partial F_{NS}}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_S(|Q|)}{2\pi} P_{qq} * F_{NS} \quad (26)$$

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} F_S \\ G \end{pmatrix} = \frac{\alpha_S(|Q|)}{2\pi} \begin{pmatrix} P_{qq} & 2n_f P_{qg} \\ P_{gq} & P_{gg} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} F_S \\ G \end{pmatrix} \quad (27)$$

kde * značí konvoluční integrál:

$$f * g = \int_x^1 \frac{dy}{y} f(y) g\left(\frac{x}{y}\right) \quad (28)$$

Altarelli-Parisiho dělicí funkce jsou

$$P_{qq} = \frac{4}{3} \left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} \right] + 2\delta(1-x) \quad (29)$$

$$P_{qg} = \frac{1}{2} \left[x^2 + (1-x)^2 \right] \quad (30)$$

$$P_{gq} = \frac{4}{3} \left[\frac{1+(1-x)^2}{x} \right] \quad (31)$$

$$P_{gg} = 6 \left[\frac{1-x}{x} + x(1-x) + \frac{x}{(1-x)_+} + \frac{11}{12} \delta(1-x) \right] - \frac{n_f}{3} \delta(1-x) \quad (32)$$

Zavádíme distribuci gluonů $G(x, Q^2)$, n_f je *number of flavors* - počet vůní, které v modelu započítáváme (obvykle 5) a $1/(1-x)_+$ znamená opět (22)

$$\int_0^1 dx \frac{f(x)}{(1-x)_+} = \int_0^1 dx \frac{f(x) - f(1)}{1-x} \quad (33)$$

Samotné řešení evolučních rovnic je poměrně složitý problém. Jejich složitost vyžaduje numerická řešení.

1.7 Příklady parametrizací

V následující kapitole uvedeme nejčastěji používané parametrizace MRST, GRV a CTEQ spolu s poněkud odlišným modelem založeným na matematické teorii fraktálů.

1.7.1 MRST

Martin, Roberts, Stirling, Thorne [11] používají parametrizace:

$$x f_i(x, Q^2) = A_0 x^{A_1} (1-x)^{A_2} (1 + A_3 \sqrt{x} + A_4 x) \quad (34)$$

pro partony $u_v, d_v, S(= \text{sea})$. Strukturu moře mají následující:

$$2\bar{u} = 0.4S - \Delta \quad 2\bar{d} = 0.4 + \Delta \quad 2\bar{s} = 0.2S \quad s = \bar{s}, \quad (35)$$

kde Δ je parametrizována následovně:

$$x\Delta = x(\bar{d} - \bar{u}) = A_0 x^{A_1} (1-x)^{A_2} (1 + A_3 x + A_4 x^2) \quad (36)$$

Výsledné parametry jsou shrnuty v tabulce 1.

Parton	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
xu_v	0.158	0.25	3.33	5.61	55.49
xd_v	0.040	0.27	3.88	52.73	30.65
xS	0.222	-0.26	7.10	3.42	10.3
$x\Delta = x(\bar{d} - \bar{u})$	1.195	1.24	9.10	14.05	-45.52

Tabulka 1: Parametrizace MRST

Glucion je v MRST parametrizován poněkud odlišně:

$$xg = 1.90x^{0.09} (1-x)^{3.70} (1 + 1.26\sqrt{x} - 1.43x) - 0.21x^{-0.33} (1-x)^{10} \quad (37)$$

Druhý člen v gluonové distribuci porušuje nezápornost a neumožňuje tak pravděpodobnostní interpretaci.

1.7.2 GRV

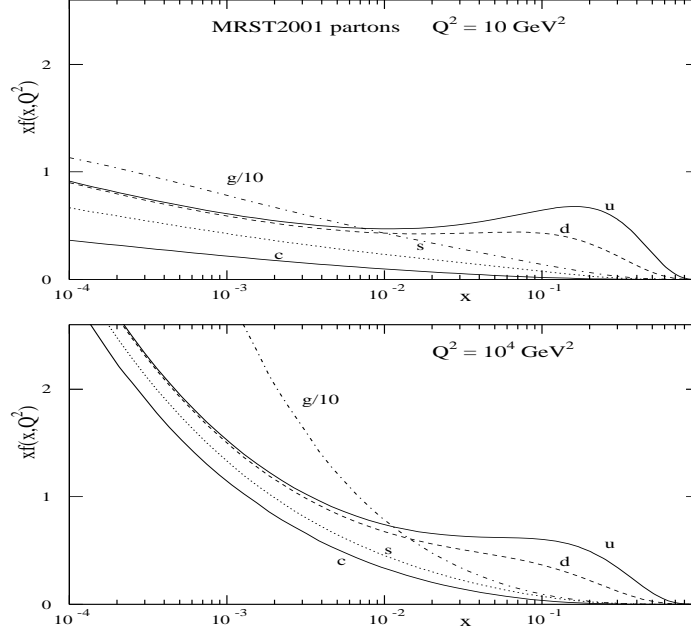
Glück, Reya a Vogt používají parametrizaci partonových distribucí ve tvaru:

$$xf_i(x, Q^2) = A_0 x^{A_1} (1-x)^{A_2} (1 + A_3\sqrt{x} + A_4 x) \quad (38)$$

V literatuře [12] srovnávají starší verzi svojí parametrizace s tehdejšími dostupnými daty a uvádějí novější verzi parametrizací. Uvádějí 2 verze - LO a NLO (to souvisí s přesností výpočtů v QCD - viz. strana 23).

LO a NLO distribuce jsou parametrizovány při $Q^2 = 0.26 \text{ GeV}^2$, resp. $Q^2 = 0.40 \text{ GeV}^2$. Hodnoty parametrů $A_0 - A_4$ jsou udány v tabulkách 2 a 3.

Zajímavou poznámkou je, že autoři zvolili vymizející moře podivnosti s při vstupní škále, která by podle nich mohla vyhovovat některým experimentálním ukazatelům narušené $SU(3)$ symetrie v moři kvarků. Pokud budoucí experimenty prokáží konečné nenulové moře podivnosti, budou muset $s(x, Q^2)$ interpretovat jako jenom možný dolní odhad tohoto moře.



Obrázek 3: MRST2001 parametrizace (převzato z [11])

1.7.3 CTEQ

CTEQ je zkratkou pro The Coordinated Theoretical-Experimental Project on QCD, mezinárodní skupinu řešící problémy QCD - například parametrizace strukturních funkcí.

Tato skupina už vydala několik verzí sad parametrizací. Nejnovější sadou je CTEQ6. Popíšeme nejprve trochu starší sadu CTEQ4 [13] a poté nejnovější verzi [14]. Bude při tom jasně vidět rozdíl mezi parametrizacemi. Původní partonové distribuce při $Q = Q_0$ jsou v CTEQ4 parametrizovány

$$f_i(x, Q_0) = A_0 x^{A_1} (1-x)^{A_2} (1 + A_3 x^{A_4}) \quad (39)$$

pro gluon G a kvarky d_v , u_v , $\bar{u} + \bar{d}$, $s(\bar{s})$, kromě kombinace $\bar{d} - \bar{u}$, která nemusí být pozitivně definitní a je parametrizována jako:

$$\bar{d} - \bar{u} = A_0 x^{A_1} (1-x)^{A_2} (1 + A_3 \sqrt{x} + A_4 x) \quad (40)$$

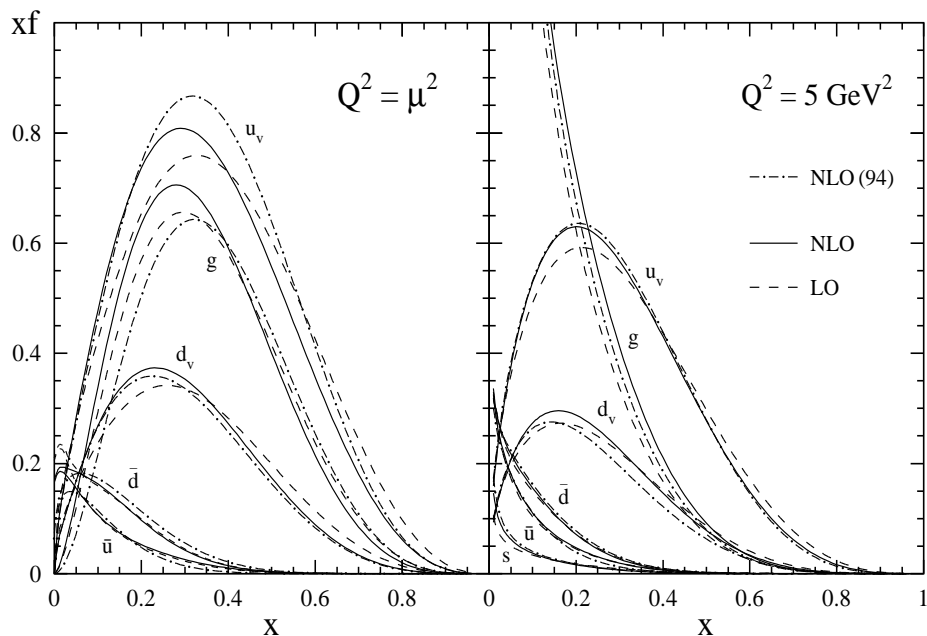
V jedné verzi parametrizací je uváděno několik dalších sad, které se od sebe odlišují. Rozdíl je v použitém schématu, v použité konstantě α_S a v použité vstupní škále. Většina sad je parametrizována při $Q_0 = 1.6$ GeV,

Parton	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
xu_v	1.239	0.48	2.72	-1.8	9.5
xd_v	0.761	0.48	3.62	-1.8	9.5
$x(\bar{d} - \bar{u})$	0.23	0.48	11.3	-12.0	50.9
$x(\bar{u} + \bar{d})$	1.52	0.15	9.1	-3.6	7.8
xg	17.47	1.6	3.8	0	0
$xs = x\bar{s}$	0				

Tabulka 2: GRV LO parametrizace

Parton	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
xu_v	0.632	0.43	3.09	0	18.2
xd_v	0.393	0.43	4.09	0	18.2
$x(\bar{d} - \bar{u})$	0.20	0.43	12.4	-13.3	60.0
$x(\bar{u} + \bar{d})$	1.24	0.20	8.5	-2.3	5.7
xg	20.80	1.6	4.1	0	0
$xs = x\bar{s}$	0				

Tabulka 3: GRV NLO parametrizace



Obrázek 4: Porovnání GRV parametrizací (převzato z [12])

sada CTEQ4LQ je parametrizována při $Q_0 = 0.7\text{GeV}$. Pro stručnost shrneme použité údaje v tabulce 4.

sada PDF	Popis	$\alpha_S(M(Z^0))$	$Q_0^2(\text{GeV}^2)$
Standardní sady			
CTEQ4M	$\overline{\text{MS}}$ schéma	0.116	2.56
CTEQ4D	DIS schéma	0.116	2.56
CTEQ4L	Leading order	0.132	2.56
Různé α_S			
CTEQ4A1	1	0.110	2.56
CTEQ4A2	2	0.110	2.56
CTEQ4A3	Stejné jako CTEQ4M	0.116	2.56
CTEQ4A4	4	0.119	2.56
CTEQ4A5	5	0.122	2.56
Speciální sady			
CTEQ4HJ	Jety	0.116	2.56
CTEQ4LQ	Nízké Q_0	0.114	0.49

Tabulka 4: Seznam a popis parametrizací CTEQ4

Schéma znamená použitý renormalizační proces. Renormalizace je podstatnou součástí QCD. QCD v podstatě dává divergující výsledky a renormalizace je matematický trik, jak se zbavit nekonečen a dostat použitelné výsledky fyzikálních veličin. Potřebujeme ji, pokud chceme porovnávat teoretické předpovědi QCD s naměřenými hodnotami např. účinných průřezů. Na ukázkou je možno porovnat výsledné parametry partonových distribucí (tabulky 5 a 6).

Nejnovější verzí parametrizací je CTEQ6. Jak následně uvidíme, liší se tvarem parametrizace od starší verze. Vychází také z "časem osvědčené parametrizace" $xf(x, Q_0) = A_0x^{A_1}(1-x)^{A_2}$, ale následně volí jinou funkci P . Nejnovější parametrizace používá funkci ve tvaru:

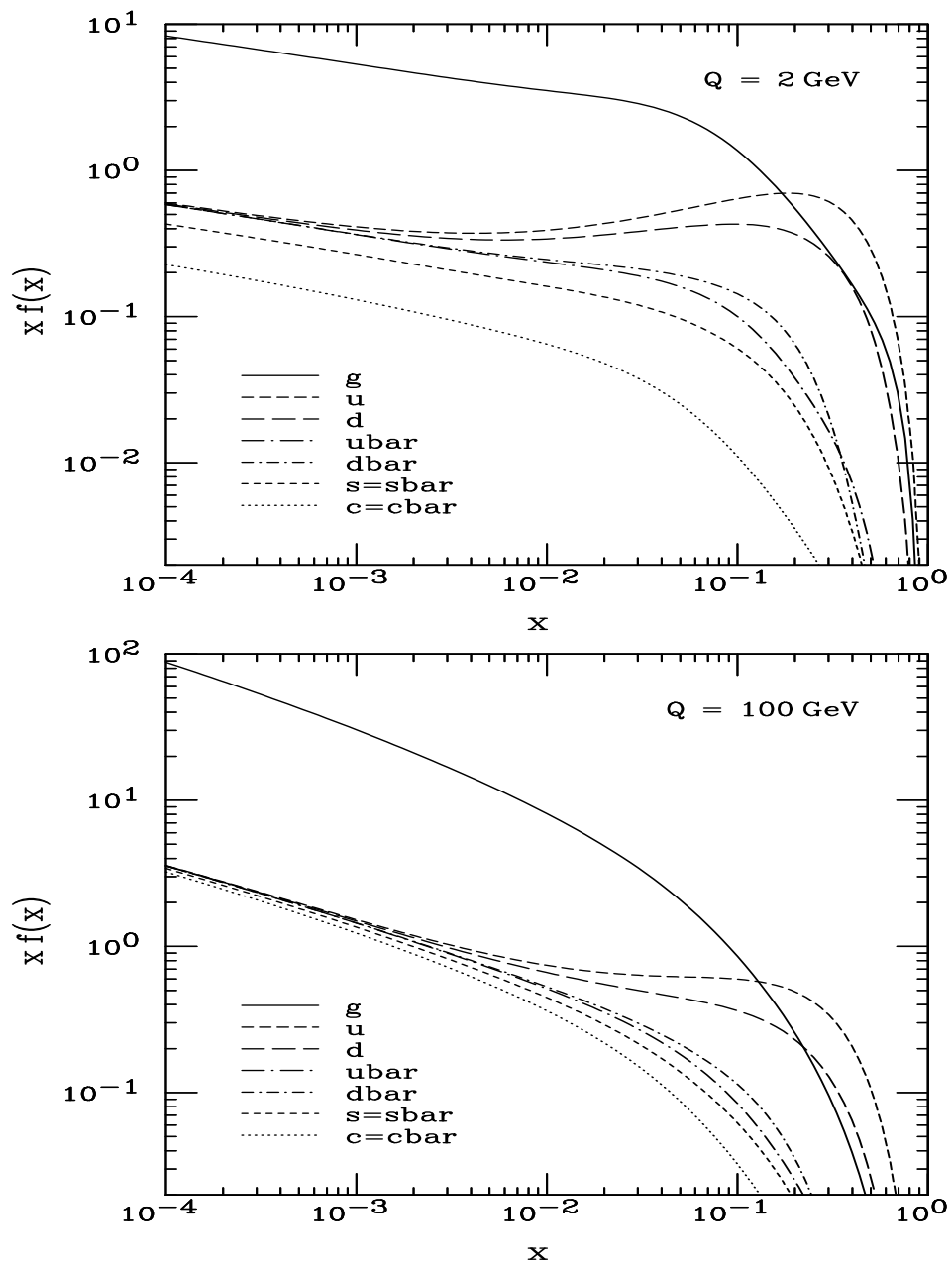
$$xf(x, Q_0) = A_0x^{A_1}(1-x)^{A_2}e^{A_3}(1+e^{A_4}x)^{A_5} \quad (41)$$

pro partony $u_v, d_v, g, \bar{u} + \bar{d}, s = \bar{s} = 0.2(\bar{u} + \bar{d})$. Poměr mezi \bar{d} a \bar{u} je parametrizován

$$\frac{\bar{d}(x, Q_0)}{\bar{u}(x, Q_0)} = A_0x^{A_1}(1-x)^{A_2} + (1 + A_3x)(1-x)^{A_4} \quad (42)$$

Partonové distribuce v základní sadě CTEQ6M jsou parametrizovány při $Q_0 = 1.3 \text{ GeV}$. Jednotlivé parametry jsou shrnuty v tabulce 7.

Je vidět, že se zvýšil počet parametrů na 6. Ve svém článku se snaží vysvětlit problémy gluonu u MRST právě pomocí nutnosti změnit (zmodernizovat) starší funkci P .



Obrázek 5: CTEQ6M parametrizace při 2 a 100 GeV (převzato z [14])

Parton	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
xd_v	0.640	0.501	4.247	2.690	0.333
xu_v	1.344	0.501	3.689	6.402	0.873
xg	1.123	-0.206	4.673	4.269	1.508
$x(\bar{d} - \bar{u})$	0.071	0.501	8.041	0.000	30.000
$x(\bar{d} + \bar{u})$	0.255	-0.143	8.041	6.112	1.000
xs	0.064	-0.143	8.041	6.112	1.000

Tabulka 5: Parametry sady CTEQ4M

Parton	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
xd_v	0.724	0.490	3.839	1.688	0.338
xu_v	1.528	0.490	3.554	6.448	1.162
xg	2.141	-0.058	7.554	36.405	2.223
$x(\bar{d} - \bar{u})$	0.054	0.490	7.200	0.000	30.000
$x(\bar{d} + \bar{u})$	0.154	-0.227	7.200	6.949	1.000
xs	0.038	-0.227	7.200	6.949	1.000

Tabulka 6: Parametry sady CTEQ4D

Parton	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
d_v	1.4473	0.6160	4.9670	-0.8408	0.4031	3.0000
u_v	1.7199	0.5526	2.9009	-2.3502	1.6123	1.5917
g	30.4571	0.5100	2.3823	4.3945	2.3550	-3.0000
$\bar{u} + \bar{d}$	0.0616	-0.2990	7.7170	-0.5283	4.7539	0.6137
$s = \bar{s}$	0.0123	-0.2990	7.7170	-0.5283	4.7539	0.6137
$\frac{\bar{d}}{\bar{u}}$	33657.8	4.2767	14.8586	17.0000	8.6408	

Tabulka 7: Parametry sady CTEQ6M

1.7.4 Fraktální vlastnosti strukturních funkcí

Tento model vychází z poněkud jiných matematických předpokladů a z jejich závěrů dostává jiný tvar parametrizace. Jak je již naznačeno v názvu, využívá matematických vlastností fraktálů. Základem je redefinování pojmu dimenze. V klasické smyslu je dimenze celé číslo. Redefinice umožní fraktálním útvarům přiřadit neceločíselnou dimenzi.

$$D = \frac{\log P}{\log Z}, \quad (43)$$

kde P bude počet sobě-podobných útvarů při zvětšení Z . Příkladem

necht' je čtverec. Každou jeho stranu rozdělíme na a stejných dílků a dělicí body na protilehlých stranách spojíme. Rozdělíme tím původní čtverec na a^2 menších čtverců. Dimenze čtverce potom bude $D = \log(a^2)/\log(a) = 2$. Pro fraktální množiny tímto způsobem dostaneme neceločíselnou dimenzi.

Další matematické zobecnění spočívá v nahrazení P hustotou $f(z)$ a zvětšovacího faktoru Z reálným číslem z . Zároveň nemusí být dimenze v celém fraktálu stejná a proto se zavádí lokální dimenze:

$$D(z) = \frac{\partial \log f(z)}{\partial \log z} \quad (44)$$

V oblasti, kde je dimenze konstantní $D(z) = D$ potom platí:

$$\log f(z) = D \log z + D_0 \quad (45)$$

Pokud zavedeme multi-fraktály - pomocí 2 zvětšovacích faktorů dostaneme zobecněním:

$$\log f(z, y) = D_{zy} \log z \log y + D_z \log z + D_y \log y + D_0 \quad (46)$$

Použití těchto vlastností při paramterizaci strukturních funkcí vychází z lineárního průběhu nezintegrovaných kvarkových distribucí vynášených v grafech s logaritmickým měřítkem na obou osách.

$$\log \frac{\partial u}{\partial Q^2} = A \log x + B \quad (47)$$

$$\log \frac{\partial u}{\partial Q^2} = C \log Q^2 + D \quad (48)$$

Zvětšovacími faktory budou $1/x$ a $1 + Q^2/Q_0^2$. Podle fraktálního popisu hustoty:

$$\begin{aligned} \log f_i(x, Q^2) &= D_1 \log \left(\frac{1}{x} \right) \log \left(1 + \frac{Q^2}{Q_0^2} \right) + D_2 \log \left(\frac{1}{x} \right) + \\ &+ D_3 \log \left(1 + \frac{Q^2}{Q_0^2} \right) + D_0^i \end{aligned} \quad (49)$$

Naše obvyklé hustoty dostaneme zintegrováním

$$q_i(x, Q^2) = \int_0^{Q^2} f_i(x, q^2) dq^2 \quad (50)$$

Řešením (49) a (50) je následující tvar distribucí kvarků:

$$q_i(x, Q^2) = \frac{e^{D_0^i} Q_0^2 x^{-D_2}}{1 + D_3 - D_1 \log(x)} \left(x^{-D_1 \log\left(1 + \frac{Q^2}{Q_0^2}\right)} \left(1 + \frac{Q^2}{Q_0^2}\right)^{D_3+1} - 1 \right) \quad (51)$$

To je poněkud jiný tvar než nabízí ostatní. Tato parametrizace závisí na D_0^i , Q_0^2 , $D_{\{1,2,3\}}$. Při předpokladu *flavour symmetry* je možno položit $D_0^i = D_0$ a zůstává nám 5 volných parametrů. Autor dále navrhuje nastavit pro lepší chování $D_2 = 1$. Pak zůstávají parametry 4. Obě možnosti jsou shrnuty v tabulce 8 a verze se 4 parametry je vynesena v grafu 6.

	D_0	D_1	D_2	D_3	$Q_0^2[\text{GeV}^2]$
5 parametrů	0.339	0.073	1.013	-1.287	0.062
	± 0.145	± 0.001	± 0.01	± 0.01	± 0.01
4 parametry	0.523	0.074	1	-1.282	0.051
	± 0.014	± 0.001	<i>const.</i>	± 0.01	± 0.002

Tabulka 8: Parametry fraktálních vlastností strukturních funkcí

1.8 Použití parametrizací

Strukturní funkce protonu (a partonové distribuce) jsme odvodili z hluboce nepružného rozptylu elektronu na protonu. Jejich největší zbraní je ale univerzálnost. Chtěli bychom tyto funkce použít při popisu co největšího počtu interakcí hadronů, např. $p\bar{p}$.

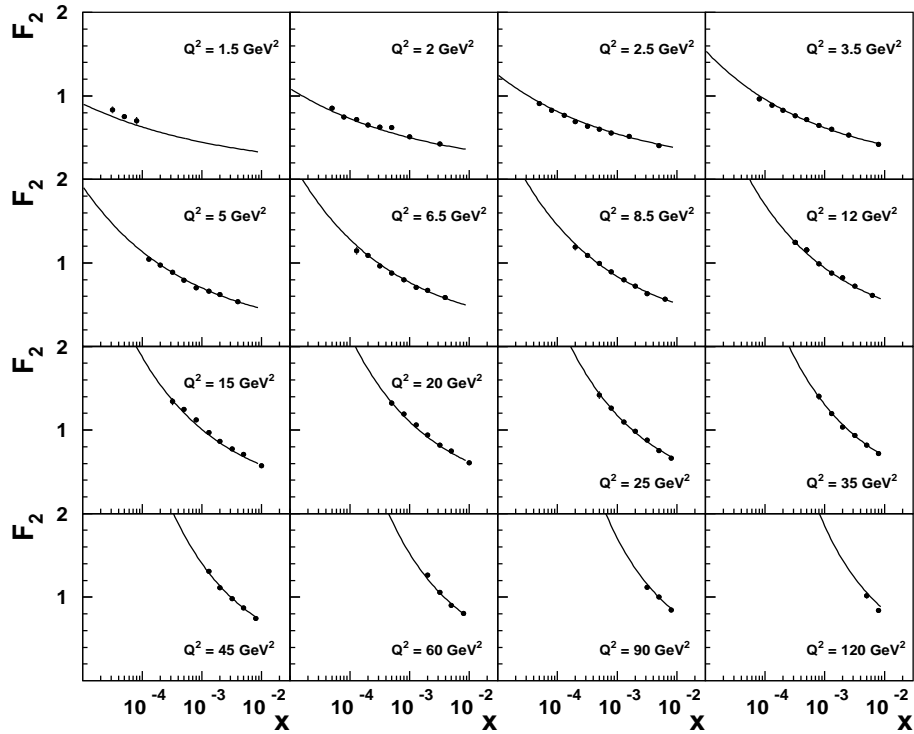
Pro interakce mezi hadrony by z teorémů QCD mělo pro účinný průřez interakce hadronů platit:

$$\sigma = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 f_i(x, M^2) f_j(x, M^2) \sigma_{ij}^p(M^2) \quad (52)$$

Ščítá se přes i, j (přes kvarky a gluony), σ_{ij}^p je účinný průřez interakce partonů i a j . Jako měřitelný fyzikální výsledek by celkový účinný průřez neměl záviset na zvolené škále M , ale protože se účinné průřezy interakcí partonů počítají v poruchové teorii jen do konečného řádu, určitá závislost na M zůstane.

Právě takové integrály (52) se počítají pomocí metod Monte-Carlo v počítačových simulacích srážek elementárních částic. Tyto programy (např. PYTHIA[20]) obsahují většinou více parametrizací, aby si uživatel mohl vybrat. Z důvodů použití nejnovějších verzí existuje i možnost připojení knihovny PDFLIB[6].

Strukturní funkce lze rovněž využít ke zjišťování konstanty silných interakcí α_S . K tomu se dá využít závislost těchto funkcí na Q^2 .



Obrázek 6: Měření strukturální funkce $F_2(x, Q^2)$ v experimentu H1. Křivka odpovídá parametrizaci se 4 parametry (převzato z [16])

1.9 Nedostatky a neznámé

V následujících bodech shrneme některé možné problémy související se strukturálními funkcemi.

Spin - experimenty s polarizovanými svazky nám poskytují možnost zkoumat i spinovou strukturu protonu. Většina modelů a parametrizací však spinovou strukturu uvažuje zvlášť a vznikají tak vedle sebe 2 sady parametrizací, které by spolu měly úzce souviset.

Těžké kvarky - v uvedených parametrizacích jsou většinou popsány jen lehké kvarky (u, d, s) a další se neuvažují přímo. Souvisí to s tím, že kvarkové distribuce jsou parametrizovány při nízkém Q . Parametrizace těžkých kvarků se dostávají řešením DGLAP rovnic. Těžké kvarky b,

c se mohou objevit při $Q \gg m_{b,c}$ a to při rozpadu gluonu na pár kvark-antikvark.

Nesymetrie moře - jde hlavně o nesymetrii mezi \bar{d} a \bar{u} . Některé skupiny parametrizují podíl $\frac{\bar{d}}{\bar{u}}$, který je tak většinou různý od 1 a způsobuje tak změnu Gottfriedovy sumy (14).

Nesymetrie s - některé experimenty by mohly vypovídat o nesymetrii mezi s a \bar{s} v důsledku efektů QCD. Potom by bylo nutno oba kvarky parametrizovat zvlášť.

Vnitřní struktura - jde o už jednou zmiňované preony. Možná, že by struktura samotných kvarků mohla dát nějakou informaci o chování kvarkových distribucí. Ale zatím neexistuje slušný model a experimentální potvrzení substruktury kvarků také neexistuje.

2 Vazebná konstanta QCD

2.1 Úvod ke QCD

Kvantová chromodynamika (QCD) patří mezi nejdůležitější teorie současné fyziky. Jedná se o kalibrační polní teorii popisující silnou interakci (viz. 1.2).

Lagrangián QCD popisující interakci kvarků a gluonů je

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_k \bar{\psi}_k (i\mathcal{D} - m_k)\psi_k, \quad (53)$$

kde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (54)$$

je tenzor síly gluonového pole,

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a \quad \mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu \quad (55)$$

je kovariantní derivace a T^a jsou matice reprezentace $SU(3)$ normalizované tak, že $\text{Tr } T^a T^b = \delta^{ab}/2$ a sumace přes k znamená sčítání přes 6 vůní kvarků (u, d, s, c, b, t). Na klasické úrovni (považujeme kvarky za hmotné částice) závisí Lagrangián QCD na hmotách kvarků m_k a na vazebné konstantě g (nebo ekvivalentně na konstantě jemné struktury silné interakce $\alpha_S = g^2/4\pi$). Kvantová teorie obsahuje dodatečný parametr, úhel θ , který narušuje CP. Experimentální limit tohoto parametru je $\theta < 10^{-9}$ [3], takže tento parametr pro naše potřeby volíme roven 0.

QCD dosáhla významných úspěchů při popisování interakcí hadronů na krátkých vzdálenostech (vysoké přenosy hybností), vedoucích k asymptotické volnosti.

Asymptotická volnost předpovídá logaritmický pokles konstanty silných interakcí α_S při rostoucí energii charakterizující proces. Mělo by $\alpha_S \rightarrow 0$ pro $Q^2 \rightarrow \infty$. To znamená, že při vysoké energii se kvarky a gluony navzájem neovlivňují a chovají se jako volné částice. Hodnota α_S , volný parametr QCD, je jednou ze základních konstant přírody. Její určení hraje hlavní roli pro QCD a pozorování její vývoj se změnou hybnosti je jejím klíčovým testem. S nejdůležitějšími měřeními je možno se seznámit v literatuře [3].

Konstanta α_S hraje důležitou roli i v případě strukturních funkcí. V tomto případě hraje roli počáteční konstanty. Jednotlivé parametrizace si ji volí podle různých měření. Tato volba může hrát klíčovou roli v přesnosti výsledků.

2.2 Renormalizace

Nevýhodou výpočtů QCD jsou divergentní integrály (například při korekcích vyšších řádů - při započítávání smyček(*loops*) do diagramů popisujících

nějakou interakci). S heslem "Teoretici se nebojí nekonečen" byl hledán způsob, jakým by bylo možné se nekonečných výsledků zbavit a dostávat smysluplné hodnoty pozorovatelných veličin. Tento způsob se nazývá renormalizace. Jejím podstatou je absorpce divergentních členů do redefinice polí a parametrů. Podstatnou součástí je přesvědčení se, že fyzikální výsledky nezávisí na použitém regularizačním procesu.

Důsledkem renormalizace je závislost vazebné konstanty α_S na škále Q . Nejpoužívanějším renormalizačním schématem je $\overline{\text{MS}}$ schéma (*modified minimal subtraction*). Jejím důsledkem je, jak již bylo řečeno, závislost α_S na škále μ . Tato závislost je popsána β -funkcí:

$$\mu \frac{d\alpha_S}{d\mu} = \beta(\alpha_S(\mu)) \quad (56)$$

V poruchové teorii má β -funkce rozvoj

$$\beta(\alpha_S) = -\beta_0 \frac{\alpha_S^2}{2\pi} - \beta_1 \frac{\alpha_S^3}{(2\pi)^2} - \beta_2 \frac{\alpha_S^4}{(2\pi)^3} - \dots, \quad (57)$$

kde (pro n_f počet vůní kvarků) mají nejnižší členy tvar:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f \quad (58)$$

$$\beta_1 = 51 - \frac{19}{3}n_f \quad (59)$$

Podle počtu použitých členů se výpočty nazývají LO, NLO, NNLO (*leading order, next-to-leading order a next-to-next-to-leading order*). Je zřejmé, že s vyšším počtem členů výrazně roste složitost výpočtů. Pro LO se dá diferenciální rovnice (56) jednoduše vyřešit, další řešení jsou velmi obtížná nebo analyticky nemožná.

2.3 Jety

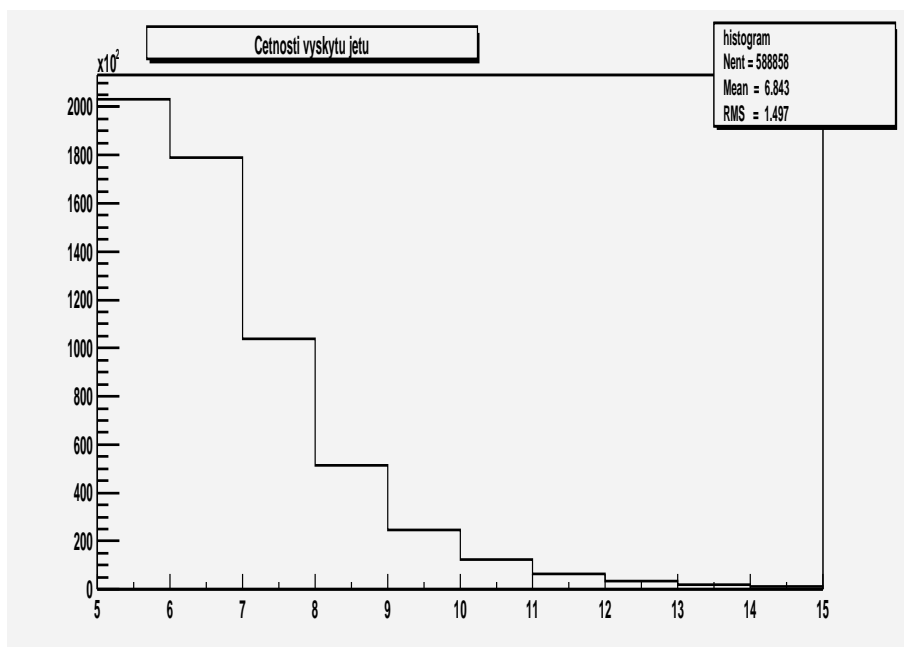
Jety (výtrysky) částic jsou podstatným rysem interakcí elementárních částic při vysokých energiích. Na úrovni kvarků se kvarky a gluony snaží zbavit své energie buď vyzářením dalšího gluonu a nebo tvorbou párů kvark-antikvark. Vzniká tak velké množství částic, které po hadronizaci vytvoří pozorovatelný jet.

Za jeden jet bereme většinou částici, které jsou spolu v určitém prostoro-rovém vztahu. Pokud kolem osy částice vyletující z interakce vytvoříme kužel s určitým poloměrem, můžeme předpokládat, že všechny ostatní částice v tomto kuželu mají společného předka (na kvarkové úrovni) - tj. tyto částice jsou omezeny rychlostí, kterou se mohly vzdálit od směru původního kvarku.

V nejjednodušším přiblížení (*leading order* můžeme předpokládat 2 jety, jeden ve směru interagujícího partonu a druhý ve směru zbývající části

hadronu. Pokud uvážíme QCD korekce 1. řádu, může interagující parton vyzářit gluon, který se později projeví dodatečným (gluonovým) jetem. Jelikož je každé takové vyzáření provázeno konstantou α_S , můžeme z pozorování četností těchto jevů tuto konstantu změřit.

Ve správném smyslu bychom měli porovnávat četnosti výskytu n a $n + 1$ jetů při stejné energii, která danou interakci charakterizovala (celková energie v těžiškové soustavě \sqrt{s} při $p\bar{p}$ interakci, případně Q^2 při ep). V důsledku nedostatku přesných dat přejdeme ke zjednodušení. Budeme předpokládat, že počet vzniklých jetů je přímo úměrný energii bez dalších vlivů. Místo vynášení poměru četností $(n + 1)/n$ jetů vůči energii \sqrt{s} budeme vynášet tento poměr vůči počtu jetů n . Nedostaneme tak sice použitelnou hodnotu konstanty α_S , ale průběh křivky by mohl zhruba odpovídat průběhu $\alpha_S(E)$. K dispozici jsme měli data [22] zahrnující výskyt 5 a více jetů (viz. obrázek 7).



Obrázek 7: Histogram četností výskytu jetů

Pokud řešíme (56) do prvního řádu (57) dostáváme:

$$\frac{1}{\alpha_S(\mu_1)} = \frac{1}{\alpha_S(\mu_2)} + \frac{\beta_0}{2\pi} \ln \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (60)$$

Řekněme, že hodnotu konstanty α_S známe pro nějakou hodnotu energie μ_2 . Označíme:

$$K_1 = \frac{1}{\alpha_S(\mu_2)}; \quad K_2 = -\frac{\beta_0}{2\pi} \ln \mu_2; \quad K_3 = K_1 + K_2; \quad K_4 = \frac{\beta_0}{2\pi}; \quad \mu_1 \equiv E \quad (61)$$

a úpravou dostaneme

$$\alpha_S(E) = \frac{1}{K_3 + K_4 \ln E} \quad (62)$$

Dále předpokládáme, že počet jetů je nějakým způsobem závislý na energii. Jako nejjednodušší možnost se jeví lineární závislost:

$$n = aE + b \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{a}n - \frac{b}{a}, \quad (63)$$

kde volíme $b > 0$, tak aby vznikly alespoň 2 jety. Poměr počtu jetů je svázán s vazebnou konstantou maximálně přes další konstantu:

$$\frac{n+1}{n} = C\alpha_S \quad (64)$$

Takže dostáváme postupně:

$$\alpha_S(n) = \frac{1}{K_3 + K_4 \ln \left(\frac{1}{a}n - \frac{b}{a} \right)} \quad (65)$$

$$\frac{n+1}{n} = \frac{C}{K_3 + K_4 \ln \left(\frac{1}{a}n - \frac{b}{a} \right)} \quad (66)$$

Pro přehlednost přeznačíme:

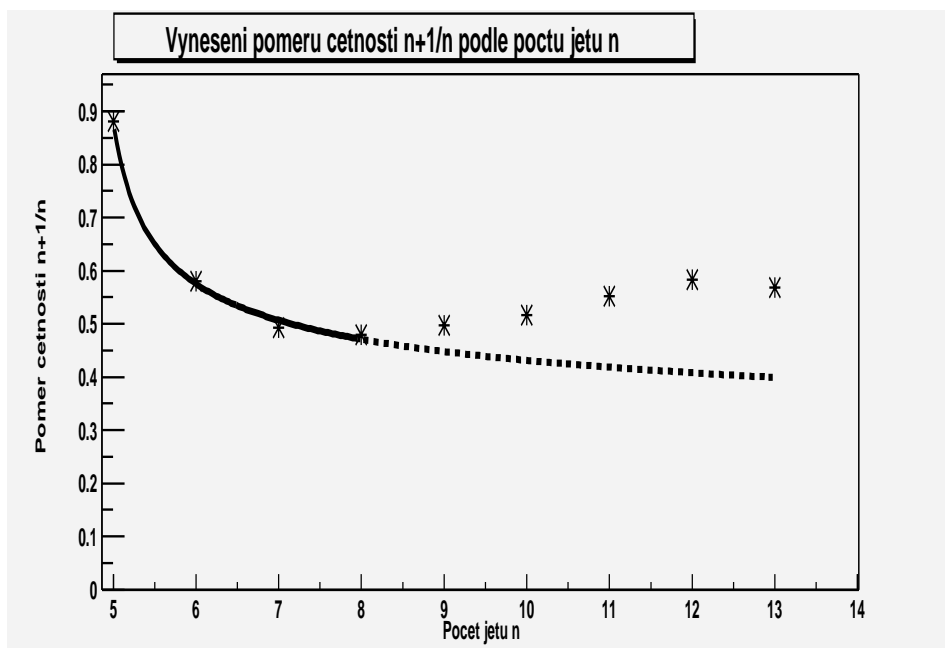
$$y \equiv \frac{n+1}{n}; \quad x \equiv n; \quad Q_1 = \frac{K_3}{c}; \quad Q_2 = \frac{K_4}{c}; \quad Q_3 = \frac{1}{a}; \quad Q_4 = \frac{b}{a} \quad (67)$$

Fitovací funkci do grafu bychom tedy mohli hledat ve výsledném tvaru:

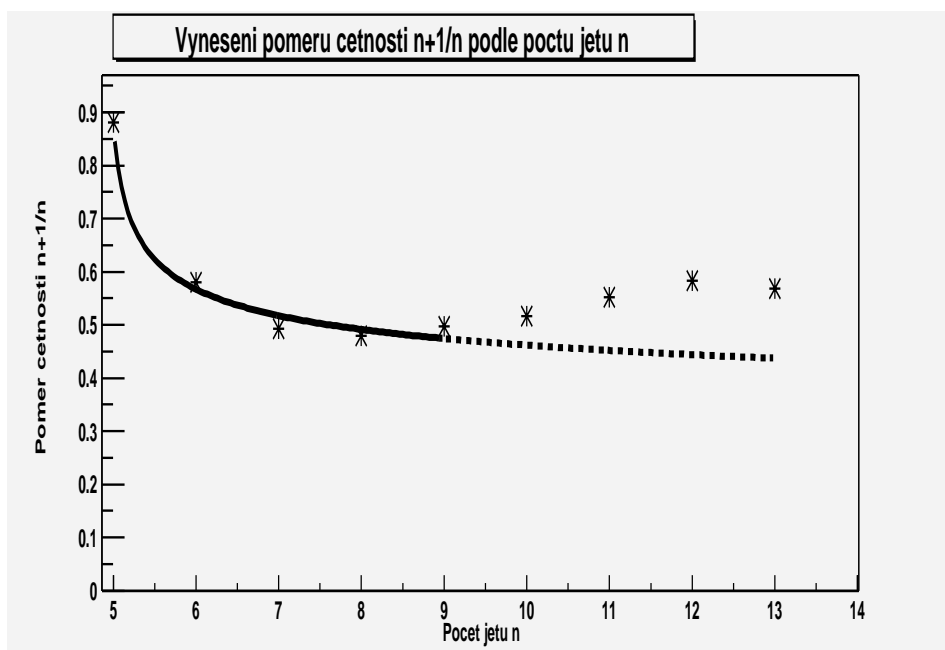
$$y = \frac{1}{Q_1 + Q_2 \ln(Q_3 x - Q_4)} \quad (68)$$

Z grafů bude patrné, že předpoklady byly v určitém směru příliš zjednodušující. S rostoucím počtem jetů se bude měnit závislost na energii - dělicí procesy jsou spojeny s hybností (energií) přes pravděpodobnosti (viz. DGLAP rovnice (26) a (27)). Proto je výskyt více jetů možný nejen při vyšší energii. Pro zlepšení výsledku by bylo nutné tyto jety navíc nějak odečítat. Uvedeme výsledky 3 fitů funkce tvaru (68) pro případ 3 různých maximálních počtů jetů (obrázky 8, 9 a 10 a tabulka 9).

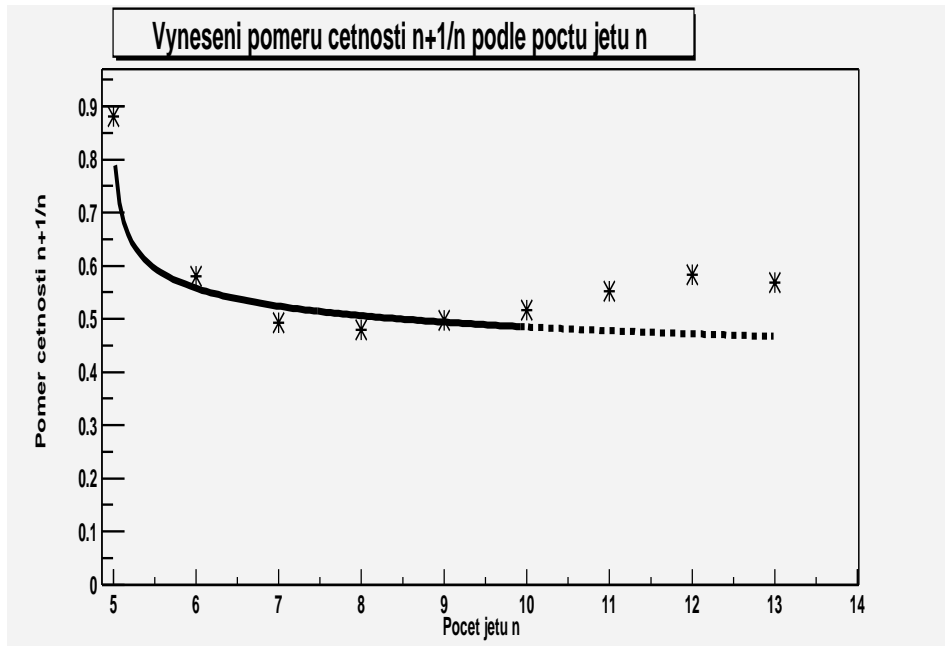
Parametry tabulky 9 je možno dále interpretovat podle (61) a (67). Můžeme například zvolit za $\alpha_S(M(Z^0))$ tabulkovou hodnotu a dále zkoumat, jak se bude lišit naše hodnota $\alpha_S(E)$ od tabulkových při jiných hodnotách



Obrázek 8: Poměr $(n + 1)/n$ četností výskytu jetů vynesný vůči počtu jetů n . Proloženy jsou jety 5-8.



Obrázek 9: Poměr $(n + 1)/n$ četností výskytu jetů vynesný vůči počtu jetů n . Proloženy jsou jety 5-9.



Obrázek 10: Poměr $(n + 1)/n$ četností výskytu jetů vynesný vůči počtu jetů n . Proloženy jsou jety 5-10.

Graf	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Fit 5-8	1.57352	0.262444	1.87468	9.18565
Fit 5-9	1.67373	0.169151	1.98719	9.89465
Fit 5-10	1.39742	0.414411	1.7455	8.19717

Tabulka 9: Parametry fitovacích funkcí

energie. Prvním zdrojem nepřesností bude pravděpodobně jednoduchá volba (63). Obecněji by zde mohla stát libovolná funkce energie, splňující vlastnosti jako je růst počtu jetů s energií (s tím, že stále uvažujeme pouze závislost na energii a ostatní vlivy zanedbáváme). K této funkci bychom museli najít funkci inverzní, změnit rovnici funkce, kterou prokládáme graf (68) a s velkou pravděpodobností přidat další parametry.

3 Shrnutí

Oba popisované problémy (strukturní funkce a vazebná konstanta α_S) hrají ve fyzice vysokých energií důležitou roli. Pro strukturní funkce stále nemáme model vysvětlující jejich průběh a pro další použití je musíme paramet-

ritovat, což k výsledkům přidává další chyby dané zvolenou parametrizací. Určování vazebné konstanty a zkoumání jejího průběhu hraje roli v ověřování platnosti kvantové chromodynamiky.

V první části jsem nastínil problematiku strukturních funkcí a představil jejich nejpoužívanější parametrizace. V druhé části jsem vyzkoušel jednoduchý pokus na zjištění průběhu $\alpha_S(E)$.

Reference

- [1] J. Formánek, *Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie pole 2b*, Karolinum 2000
- [2] J. Zálešák, *Status měření strukturních funkcí v experimentu H1*, Centrum částicové fyziky, 2002
- [3] I. Hinchliffe, A. V. Manohar, *The QCD Coupling Constant*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **50**, 643 (2000), hep-ph/0004186
- [4] A. D. Martin, *QCD and Deep Inelastic Scattering*, Addendum to the 1993 European School of High-Energy Physics, CERN 1994
- [5] W. L. van Neerven, *Deep inelastic lepton-hadron scattering as a test of perturbative QCD*, hep-ph/9905503, 1999
- [6] H. Plochow-Besch, *PDFLIB: Proton, Pion and Photon Parton Density Functions, Parton Density Functions of the Nucleus and α_S Calculations*, Users's Manual - Version 8.04, W5051 PDFLIB, CERN-PPE, 2000
- [7] A. T. Doyle, *Structure Functions*, hep-ex/9812029, 1998
- [8] A. Pich, *Quantum Chromodynamics*, 1994 European School of High-Energy Physics, CERN 1995
- [9] M. L. Mangano, *Introduction to QCD*, 1998 European School of High-Energy Physics, CERN 1999
- [10] G. Altarelli, *A QCD Primer*, hep-ph/0204179, 2002
- [11] A. D. Martin, R. G. Roberts, W. J. Stirling and R. S. Thorne, *MRST2001: partons and α_S from precise deep inelastic scattering and Tevatron jet data*, hep-ph/0110215, 2001
- [12] M. Glück, E. Reya, A. Vogt, *Dynamical Parton Distribution Revisited*, hep-ph/9806404, 1998
- [13] H. L. Lai *et al.*, *Improved parton distributions from global analysis of recent deep inelastic scattering and inclusive jet data*, Phys. Rev. D **55**, 1280, (1997)
- [14] J. Pumplin, D. R. Stump, J. Hustot, H. L. Lai, P. Nadolsky, W. K. Tung, *New Generation of Parton Distributions with Uncertainties from Global QCD Analysis*, hep-ph/0201195, 2002
- [15] T. Laštovička, *Self-similar Properties of the Proton Structure*, DIS2002 přednáška, Krakow, Poland, 2002

- [16] T. Laštovička, *Self-similar Properties of the Proton Structure at low x* , hep-ph/0203260, 2002
- [17] Z. Sullivan, P. M. Nadolsky, *Heavy-quark parton distribution functions and their uncertainties*, FERMILAB-Conf-01/329-T, 2001
- [18] H1 Collaboration, *Deep-Inelastic Inclusive ep Scattering at Low x and a Determination of α_S* , DESY 00-181, 2000
- [19] G. Fraser, E. Lillestøl, I. Sellevåg, *Hledání nekonečna - řešení záhad vesmíru*, Columbus, 1996
- [20] T. Sjöstrand, L. Lönnblad, S. Mrenna, *PYTHIA 6.2 Physics and Manual*, hep-ph/0108264, 2001
- [21] F. Halzen, A. D. Martin, *QUARKS AND LEPTONS: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons, 1984
- [22] D0 Collaboration, *Measurement of the top quark pair production cross section using all jets decay channel*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1908, (1999)

Obsah

1	Strukturní funkce protonu	1
1.1	Úvod	1
1.2	Historie	1
1.3	Hluboce nepružný rozptyl	2
1.4	Kvark-partonový model	5
1.5	QCD-vylepšený partonový model	8
1.6	Parametrizace strukturních funkcí	9
1.6.1	Závislost na x	10
1.6.2	Závislost na Q^2	10
1.7	Příklady parametrizací	11
1.7.1	MRST	11
1.7.2	GRV	12
1.7.3	CTEQ	13
1.7.4	Fraktální vlastnosti strukturních funkcí	17
1.8	Použití parametrizací	19
1.9	Nedostatky a neznámé	20
2	Vazebná konstanta QCD	22
2.1	Úvod ke QCD	22
2.2	Renormalizace	22
2.3	Jety	23
3	Shrnutí	27

Seznam tabulek

1	Parametrizace MRST	12
2	GRV LO parametrizace	14
3	GRV NLO parametrizace	14
4	Seznam a popis parametrizací CTEQ4	15
5	Parametry sady CTEQ4M	17
6	Parametry sady CTEQ4D	17
7	Parametry sady CTEQ6M	17
8	Parametry fraktálních vlastností strukturních funkcí	19
9	Parametry fitovacích funkcí	27

Seznam obrázků

1	Rozpyl leptonu l na nukleonu N	3
2	Experimenty měřící strukturní funkce	6
3	MRST2001 parametrizace	13
4	Porovnání GRV parametrizací	14
5	CTEQ6M parametrizace	16
6	Fraktální parametrizace $F_2(x, Q^2)$ z experimentu H1.	20
7	Histogram četností výskytu jetů	24
8	Fit 5-8 jetů	26
9	Fit 5-9 jetů	26
10	Fit 5-10 jetů	27