

**České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská**

**Rešeršní práce: Nelineární zobrazení matic hustoty**

**Vypracoval : Stanislav Vymětal**

**Vedoucí práce : Doc. Ing. Igor Jex, DrSc.**

**Konzultant : Doc. Ing. Goce Chadzitaskos, Csc.**

**V Praze 1.6. 2001**

Cílem této rešeršní práce je uvedení formalizmu kvantové fyziky do užší souvislosti s teorií kvantové informace. Hlavním tématem práce jsou nelineární zobrazení matice hustoty, kterým je věnována pátá kapitola.

Za autory všech materiálů, ze kterých jsem čerpal, bych chtěl poděkovat především vedoucímu své práce, panu *doc. I. Jexovi*, z Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT.

S. Vymětal

Obsah:

1. Matice hustoty - obecné vlastnosti	3
2. Složené kvantové systémy, redukovaná matice hustoty	7
3. Časový vývoj matice hustoty	18
4. Působení projekčních operátorů na matici hustoty	23
5. Nelineární zobrazení matic hustoty	29
6. Literatura	38

# Kapitola č. 1

## Matice hustoty — obecné vlastnosti

**Obsah:** Tato kapitola bude věnována obecným vlastnostem matice hustoty.

Použitá literatura: LOKF, (1), (2).

Dříve než se pustím do rozboru matice hustoty, připomenou základní postuláty q1-q5 kvantové teorie (viz. LOKF):

**q1.a:** Každému kvantovému systému přísluší separabilní Hilbertův prostor  $\mathcal{H}$ , který se nazývá stavový prostor systému.

**q1.b:** Každému stavu systému odpovídá statistický operátor  $W$  na  $\mathcal{H}$ .

**q1.c:** Každé pozorovatelné systému odpovídá samozdružený operátor  $A$  na  $\mathcal{H}$ .

**q2.a:** Možné výsledky měření veličiny  $A$  leží ve spektru  $\sigma(A)$  operátoru  $A$ .

**q2.b:** Pravděpodobnost toho, že na systému ve stavu  $W$  naměříme hodnotu pozorovatelné  $A$  ležící v Borelovské množině  $\Delta \subset R$  je rovna  $w(\Delta, A; W) = Tr(E_A(\Delta)W)$ , kde  $E_A(\Delta)$  je projektor na "  $\Delta$ -část" spektra operátoru  $A$ , operací  $Tr(\cdot)$  se rozumí součet všech diagonálních prvků maticové reprezentace operátoru.

**q3:** Nechť je systém před měřením ve stavu  $W$ . Jestliže naměřená hodnota veličiny  $A$  leží v množině  $\Delta$ , potom stav systému po měření je popsán statistickým operátorem  $W' = \frac{E_A(\Delta)WE_A(\Delta)}{Tr(E_A(\Delta)W)}$ .

**q4.a:** Časový vývoj systému je popsán unitárním propagátorem  $U(t, s)$ , platí:  $W_t = U(t, s)W_s U(t, s)^{-1}$  kde  $W_t$  odpovídá stavu systému v čase  $t$ .

**q4.b:** Propagátor konzervativního systému ( $U(t + \tau, s + \tau) = U(t, s)$  pro všechna  $t, s, \tau \in R$ ) s hamiltoniánem  $H$  je pro libovolné  $t \in R$  dán vztahem  $U(t) = \exp(-iHt)$ .

**q4.c:** Časový vývoj nekonzervativního systému s hamiltoniánem  $H(t)$  je určen rovnicí:  
$$i \frac{d}{dt} W_t = H(t)W_t - W_t H(t).$$

**q5.a:** Stavový prostor složeného systému je tenzorovým součinem stavových prostorů podsystémů,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ ; přitom předpokládáme, že podsystémy jsou vzájemně různé.

**q5.b:** Stavovým prostorem  $n$  identických částic s celočíselným (poločíselným) spinem je  $S_n \mathcal{H}^n (A_n \mathcal{H}^n)$  v  $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$ , kde  $\mathcal{H}$  je stavový prostor jedné částice.

$S_n := \frac{1}{n!} \sum_{p \in \mathcal{S}_n} U(p)$ ,  $A_n := \frac{1}{n!} \sum_{p \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_p U(p)$ , kde  $p$  značí permutaci  $n$ -prvkové množiny,  $\mathcal{S}_n$  je množina všech permutací  $n$ -prvkové množiny,  $\varepsilon_p$  značí paritu dané permutace.

$U(p) : U(p)(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) = \phi_{p_1} \otimes \dots \otimes \phi_{p_n}$ , pro každou permutaci  $p$  a libovolné vektory  $\phi_j \in \mathcal{H}$ .

Matice hustoty je při práci s kvantovým systémem velmi důležitý matematický objekt. Představuje nejúplnější popis systému vzhledem k pravděpodobnostnímu charakteru kvantové teorie.

Nyní se zabýváme systémem, na kterém jsme naměřili nedegenerované hodnoty  $q_1, \dots, q_n$  nezávislých pozorovatelných  $Q_1, \dots, Q_n$ , pro které příslušné samozdružené operátory tvoří úplný systém komutujících operátorů tzv. ÚSKO. Provedli jsme tzv. *úplný experiment*. Stav systému z hlediska kvantové teorie je nyní plně určen hodnotami  $q_1, \dots, q_n$ . Ve fázovém prostoru je stav systému reprezentován ketem  $|q_1, \dots, q_n\rangle$ . Tomu odpovídá jednorozměrný podprostor fázového prostoru tzv. paprsek. Takový stav se nazývá *čistý stav*. Čistý stav je stavem s "maximálním určením".

Výběr úplného systému komutujících operátorů není jednoznačný. Uvažujme dvě dvojice ÚSKO:  $Q_1, \dots, Q_n$  s vlastními vektory  $|\psi\rangle = |q_1, \dots, q_n\rangle$  a  $Q'_1, \dots, Q'_n$  s vlastními vektory  $|\phi\rangle = |q'_1, \dots, q'_n\rangle$ . Každé  $|\psi\rangle$  lze psát v  $\{\phi_n\}$  reprezentaci jako superpozici ortogonálních vlastních vektorů operátorů  $Q'_1, \dots, Q'_n$ :

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |\phi_n\rangle$$

kde  $n$  odlišuje různé vlastní vektory. Vzhledem k pravděpodobnostnímu charakteru kvantové teorie lze  $|a_n|^2$  považovat za pravděpodobnost naměření hodnoty  $q'_n$  pozorovatelné  $Q'_n$  na systému ve stavu  $|\psi\rangle$ , neboť:

$$|a_n|^2 = |\langle \phi_n | \psi \rangle|^2,$$

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \sum_n |a_n|^2.$$

Provedení úplného experimentu v praxi je téměř nemožné. Bývá obvyklé popsat systém pomocí pravděpodobností  $W_1, W_2, \dots$  s jakými se systém vyskytuje v čistých stavech  $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots$ . Systém, který nelze charakterizovat pomocí jednoho takového čistého stavu se nazývá *smíšený stav*.

Věnujme nyní pozornost postulátu q1.c. Pod pojmem statistického operátoru tzv. *matice hustoty* se rozumí pozitivní operátor s jednotkovou stopou. Takový operátor je normální, kompaktní a podle Hilbert-Schmidtovy věty (LOKF 6.2.4) lze z jeho vlastních vektorů sestavit ortonormální bázi  $\mathcal{H}$ .

Zabývejme se nyní smíšeným stavem, který je směsí stavů  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$  se statistickými vahami  $W_1, \dots, W_n$ . Tyto stavy nemusí být nutně ortonormální.

Definuji operátor  $\rho$  na  $\mathcal{H}$ :

$$\rho = \sum_n W_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$$

kde se sčítá přes všechny stavy smíšeného systému.

**Tvrzení:**  $\rho$  je matice hustoty.

*Důkaz:* Vzhledem k výše uvedenému, vyberu nejprve množinu bazických ortogonálních vektorů  $\mathcal{H}$ :  $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots$ . Použitím principu superpozice dostávám:

$$|\psi_n\rangle = \sum_{m'} a_{m'}^n |\phi_{m'}\rangle, \quad \langle \psi_n| = \sum_m a_m^n \langle \phi_m|.$$

Odtud  $\rho = \sum_{n,m,m'} W_n a_{m'} a_m^{n*} |\phi_{m'}\rangle \langle \phi_m|$ . Mluvím též o operátoru  $\rho$  v  $\{|\phi_n\rangle\}$  reprezentaci. Elementy operátoru  $\rho$  v maticové reprezentaci jsou:

$$\langle \phi_i | \rho | \phi_j \rangle = \sum_n W_n a_i^n a_j^{n*}$$

Je zřejmé, že:

$$\rho_{i,j} = \langle \phi_i | \rho | \phi_j \rangle = \langle \phi_j | \rho | \phi_i \rangle^* = \rho_{j,i}^*$$

pro všechna  $i, j \in \hat{n}$ . Operátor  $\rho$  je tedy hermitovský.

Protože pravděpodobnost nalezení systému ve stavu  $|\psi_n\rangle$  je  $W_n$  a protože pravděpodobnost nalezení  $|\psi_n\rangle$  ve stavu  $|\phi_m\rangle$  je  $|a_m^n|^2$ , pravděpodobnost nalezení systému ve stavu  $|\phi_m\rangle$  je dána diagonálním elementem

$$\rho_{mm} = \sum_n W_n |a_m^n|^2 \geq 0.$$

Operátor  $\rho$  je pozitivní, neboť pro libovolné  $|\psi\rangle = \alpha_{m''} |\phi_{m''}\rangle$ ,  $\langle \psi| = \alpha_{m'''}^* \langle \phi_{m'''}|$  platí:

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle = \sum_{n,m,m',m'',m'''} W_n a_{m'}^n a_m^{n*} \alpha_{m''} \alpha_{m'''}^* \delta_{m,m''} \delta_{m',m'''} =$$

$$= \sum_{n,m,m''} W_n a_{m'}^n a_m^{n*} \alpha_m \alpha_{m'}^* = \sum_{n,m,m'} W_n (a_{m'}^n \alpha_{m'}^*) (a_m^n \alpha_m^*)^* =$$

nechť  $M := \sum_n a_{m'}^n \alpha_{m'}^*$ , potom:

$$= \sum_n W_n M M^* = \sum_n W_n |M|^2 \geq 0.$$

Pravděpodobnost  $W(|\psi\rangle)$  nalezení systému ve stavu  $|\psi\rangle$  je:

$$W(|\psi\rangle) = \sum_n W_n |\langle \psi_n | \psi \rangle|^2 = \sum_n \langle \psi_n | \rho | \psi_n \rangle |\langle \psi_n | \psi \rangle|^2 = \sum_n \langle \psi | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \rho | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \psi \rangle = \langle \psi | \rho | \psi \rangle.$$

Pokud  $\rho$ ,  $|\psi\rangle$ ,  $\langle \psi|$  považují za čtvercové matice řádu  $m \times m$ , potom vzhledem k invarianci stopy vůči cyklické záměně lze:  $\langle \psi | \rho | \psi \rangle = \text{Tr}(|\psi\rangle \langle \psi| \rho) = \text{Tr}(E_\psi \rho)$  kde  $E_\psi = |\psi\rangle \langle \psi|$  je projektor. Shoda s q2.b je zřejmá.

Nyní se podívejme na  $\text{Tr} \rho$ .  $\sum_n W_n = 1$  a  $\sum_m |a_m^n|^2 = 1$  takže:

$$\text{Tr} \rho = \sum_m \rho_{mm} = \sum_m \sum_n W_n |a_m^n|^2 =$$

to je součet řady s nezápornými členy, lze psát:

$$= \sum_n \sum_m W_n |a_m^n|^2 = \sum_n W_n = 1.$$

Ukázali jsme konstrukci statistického operátoru pro smíšený stav systému. Je zřejmé, že pro čistý stav se matice hustoty redukuje na projektor na daný paprsek.

Rozepišme dále střední hodnotu pozorovatelné  $Q$  pomocí matice hustoty  $\rho$ :

$$\langle Q \rangle = \sum_n W_n \langle \psi_n | Q | \psi_n \rangle = \sum_{mm'} \sum_n W_n a_{m'}^n a_m^{n*} \langle \phi_m | Q | \phi_{m'} \rangle = \sum_{mm'} \langle \phi_{m'} | \rho | \phi_m \rangle \langle \phi_m | Q | \phi_{m'} \rangle = \text{Tr}(\rho Q).$$

Nyní ke q3. Je-li systém v čistém stavu  $|\psi\rangle$ , potom po projití filtrem  $E_A(\Delta)$  přejde do stavu:

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{E_A(\Delta)|\psi\rangle}{\|E_A(\Delta)|\psi\rangle\|}.$$

Systém  $\rho$  projde filtrem s pravděpodobností  $\sum_n W_n \|E_A(\Delta)|\psi_n\rangle\|$ .  $|\psi_i\rangle \rightarrow \frac{E_A(\Delta)|\psi_i\rangle}{\|E_A(\Delta)|\psi_i\rangle\|}$  s pravděpodobností  $W'_i = W_i \frac{\|E_A(\Delta)|\psi_i\rangle\|}{\sum_n W_n \|E_A(\Delta)|\psi_n\rangle\|}$ .

Stav systému po průchodu filtrem je:

$$\begin{aligned} W' &= \sum_n W'_n \frac{E_A(\Delta)|\psi_n\rangle}{\|E_A(\Delta)|\psi_n\rangle\|} \frac{\langle \psi_n | E_A(\Delta) | \psi_n \rangle}{\|E_A(\Delta)|\psi_n\rangle\|} = \\ &= \sum_n \frac{E_A(\Delta) W_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n | E_A(\Delta)}{\sum_n W_n \|E_A(\Delta)|\psi_n\rangle\|} = \frac{E_A(\Delta) \rho E_A(\Delta)}{\text{Tr}(E_A(\Delta) \rho)}. \end{aligned}$$

Vztah pro  $\langle Q \rangle$  lze použít i pro nalezení matice hustoty. Vyberme tolik nezávislých pozorovatelných  $Q_1, Q_2, \dots$ , kolik je nezávislých parametrů v matici hustoty. Naměříme jejich střední hodnoty  $\langle Q_1 \rangle, \langle Q_2 \rangle, \dots$ . Potom lze matici hustoty systému  $\rho$  určit řešením rovnic  $\text{Tr}(\rho Q_i) = \langle Q_i \rangle$ . Toto vyjádření matice hustoty má několik výhod. První z nich spočívá v tom, že výběr reprezentace není jednoznačný. Druhou výhodou je to, že základní informaci o systému většinou představují střední hodnoty naměřených veličin a ne určení čistých stavů z nichž se smíšený stav skládá.

Položme si nyní otázku kolik nezávislých parametrů určuje matici hustoty. Obecně je počet parametrů nekonečný. Pokud nás ovšem zajímají pouze některé vlastnosti systému, bývá jejich počet konečný, závislost na ostatních parametrech lze určit.

Předpokládejme, že počet bazických stavových vektorů je  $N$ . Maticovou reprezentací  $\rho$  je  $N$ -dimenzionální čtvercová matice s  $N^2$  komplexními parametry. Protože  $\rho$  je hermitovský,  $N$  diagonálních prvků je reálných a počet reálných parametrů určujících mimodiagonální prvky je  $N^2 - N$ . To je dohromady  $N^2$  reálných parametrů. Stopa matice  $\rho$  je vždy rovna 1, takže  $N$ -dimenzionální matice hustoty je celkově určena  $N^2 - 1$  reálnými parametry. Z důvodů např. symetrie systému lze tento počet ještě dále redukovat.

Věnujme nyní pozornost čistému stavu, který je reprezentován  $|\psi\rangle$ . Odpovídající statistický operátor je  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ . Matici hustoty lze psát v reprezentaci, kde  $|\psi\rangle$  je jeden z bazických vektorů. To je zřejmé z tvrzení Gramm-Schmidtovy věty. Vyberme např. takovou reprezentaci, že  $|\psi_1\rangle = |\psi\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$ . Potom všechny prvky  $\rho$  jsou nulové kromě toho v prvním řádku a prvním sloupci. Je zřejmé, že platí:

$$\text{Tr}(\rho^2) = (\text{Tr}\rho)^2$$

Položme si nyní otázku zda daná matice hustoty určuje čistý stav či nikoli. Převedení matice hustoty na diagonální tvar samozřejmě dá jednoznačnou odpověď. Pokud v diagonálním tvaru všechny prvky kromě jediného  $i$ -tého jsou nulové, potom je jistě daný stav čistý a je reprezentován  $i$ -tým bazickým vektorem. Odvodíme snazší postup než je diagonalizace matice.

**Tvrzení:** Pro obecnou matici hustoty  $\text{Tr}(\rho^2) \leq (\text{Tr}\rho)^2$ .

*Důkaz:* Nechť je matice hustoty v diagonálním tvaru s prvky  $W_n \geq 0$ . Potom  $\text{Tr}(\rho^2) = \sum_n W_n^2 \leq (\sum_n W_n)^2 = (\text{Tr}\rho)^2$ . Protože stopa matice se při změně reprezentace nemění, je odvozený vztah platný pro libovolnou reprezentaci. Tím je důkaz tvrzení hotov.

Předpokládejme, že v tvrzení platí rovnost. Potom  $\sum_n W_n^2 = (\sum_n W_n)^2$ . Tato podmínka vzhledem k nezápornosti  $W_n$  může být splněna pouze tehdy pokud všechny  $W_n$  kromě jediného,  $W_i$  jsou nulové. Potom je systém v čistém stavu reprezentovaný  $i$ -tým bazickým vektorem.

Vztah

$$\text{Tr}(\rho^2) = (\text{Tr}\rho)^2$$

je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby daná matice hustoty představovala čistý stav.

Obecný tvar matice hustoty systému na  $\mathcal{H} = C^2$  lze psát ve tvaru  $\rho = \frac{1}{2}(1 + P\sigma)$  kde  $\xi\sigma = \sum_{i=1}^3 P_i\sigma_i$ . Vektor  $P$  se nazývá vektor polarizace,  $\sigma$  je vektor jehož bazické vektory jsou po řadě  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  tzv. Pauliho matice. Platí tvrzení, že  $\rho$  je matice hustoty, právě tehdy když  $|P|^2 \leq 1$ . Jestliže  $|P| = 1$  systém je v čistém stavu. Jestliže  $P = 0$ , matice hustoty odpovídá nepolarizovanému svazku fotonů.

Na příkladě kvantových balíků t.j. světelných pulsů s neurčitou hodnotou energie lze ukázat, že interference balíků je spojena s mimodiagonálními prvky jejich matice hustoty. Interference balíků se neobjeví, pokud je matice hustoty diagonální. Spojení mezi interferencí a prvky matice hustoty lze zobecnit do následující definice.

Systém je *koherentní superpozicí bazických vektorů*  $|\phi_n\rangle$ , jestliže jeho matice hustoty není diagonální v  $\{|\phi_n\rangle\}$  reprezentaci. Jestliže je systém navíc v čistém stavu, říká se, že je *úplně koherentní*. Jestliže  $\rho$  je diagonální, o systému říkáme, že je v *nekoherentní superpozici bazických vektorů* (za předpokladu, že jsou zde nejméně dva členy nenulové).

## Kapitola č. 2

### Složené systémy, redukováaná matice hustoty

**Obsah:** V této kapitole se budeme zabývat systémy více částic tak, jak jsou postulovány v q5.a, b. Nejvíce se budeme zajímat o entanglované stavy. Tento název používal E. Schrödinger pro superpozici stavů ve vícečásticovém systému. Kvantová teorie je v tomto smyslu lineární pravděpodobnostní teorie. Za velmi zajímavou část této kapitoly považují příklady.

Použitá literatura: LOKF, (3), (4), (5).

Postulát q5.a spolu s omezeními na množinu přípustných hodnot systému tzv. superselekčními pravidly říká, jaké jsou množiny stavů složeného systému  $S$  a jeho podsystémů  $S_j$ .

Zabývejme se nyní systémem složeným ze dvou podsystémů t.j.  $j = 1, 2$ . Předpokládejme, že na  $S$  popsaném maticí hustoty  $\rho$  měříme pozorovatelnou  $Q_j$ , která se vztahuje pouze k podsystému  $S_j$ . Základní úvahou pro získání matice hustoty  $\rho_j$ , která popisuje podsystém  $S_j$  je tato rovnost:

$$Tr(\widetilde{Q}_j \rho) = Tr(Q_j \rho_j) \text{ kde } \widetilde{Q}_j = Q_j \otimes I_2.$$

Požadování její platnosti je vhodné vzhledem k požadavku rovnosti naměření středních hodnot  $\widetilde{Q}_j$  na  $S$ ,  $Q_j$  na  $S_j$ . A to pro všechna  $Q_j$ . Tím je stav  $S_j$  určen jednoznačně.

Podobně jako pro určení čistého stavu se prováděl úplný test, při měření, která se vztahují pouze k danému podsystému, lze zavést pojem *neúplný test*.

**Tvrzení:** Nechť  $\rho$  je statistický operátor popisující stav systému  $S$ , potom existuje právě jedna dvojice statistických operátorů  $\rho_j(\rho)$  odpovídajících realizovatelným stavům a takových, že pro všechny pozorovatelné  $Q_j$  na podsystémech platí:

$$Tr(\widetilde{Q}_j \rho) = Tr(Q_j \rho_j) \text{ kde } \widetilde{Q}_j = Q_j \otimes I_2.$$

*Důkaz:* viz. LOKF 18.2.1.

Stavům  $\rho_j$  se říká *redukové stavy* resp. *redukové matice hustoty*, odpovídající stavu  $\rho$ . K daným redukovaným stavům snadno najdu stav  $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ , který splňuje podmínku středních hodnot, jeho přiřazení však není jednoznačné. Explicitní vyjádření redukovaných stavů pro *koherentní podsystémy*, t.j. podsystémy jejichž stavový prostor je zároveň množinou všech realizovatelných stavů (tzv. *koherentní prostor*), lze provést pomocí redukčních formulí, viz. LOKF. str. 545.

a, b jsou *korelované systémy*, jestliže měření jisté pozorovatelné na systému a(b) projektuje systém b(a) do nového stavu t.j. pokud měření aspoň jedné pozorovatelné na a, b jsou statisticky závislá. V opačném případě jsou a, b *nekorelované*.

Jako příklad uvedu korelované stavy, které vzniknou po dopadu fotonu na krystal dvojlomného vápence. Takový foton má dva stupně volnosti: polarizaci a směr šíření. Přestože přísluší jednomu fotonu lze je považovat za dvoukomponentový systém. Jeho Hilbertův prostor je potom tenzorovým součinem polarizačního a pozičního prostoru po řadě s ortonormálními bazickými vektory:  $x, y$  a  $u, v$ , přitom krystalem prochází jen kombinace typu  $x \otimes u$  a  $y \otimes v$ , které odpovídají řádnému a mimořádnému paprsku. Počáteční stav fotonu je :

$$(\alpha x + \beta y) \otimes w$$

kde  $\alpha, \beta$  jsou komplexní čísla, která vyhovují:  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ,  $w$  určuje směr šíření fotonu. Stav fotonu po projití krystalu je vzhledem k platnosti principu superpozice:  $\alpha x \otimes u + \beta y \otimes v$ . Tento stav je čistý a systém je korelovaný. Nyní popíšu *dekorelaci* tohoto systému. Zkonstruuji maximální test, který korelovaný stav převede do výchozího stavu před provázáním. V ideálním případě po projití zrcadlově umístěným krystalem ke své výchozí pozici je stav fotonu:

$$(\alpha x + \beta y) \otimes w$$



a test je hotov. Reálně se však jednotlivé složky stavu liší o fázový posun. Dalším členem je tedy vlnová destička, která posunem fází převádí elipticky polarizované členy, vzájemně ortogonální, na lineárně polarizované. Posledním členem je potom kalcitový krystal, který rozlišuje mezi dvěma možnými na sebe kolmými polarizacemi, kterých může stav fotonu po průchodu destičkou nabýt.

Pokud budu u fotonu chtít zjišťovat pouze hodnotu jeho polarizace, či směr jeho šíření, omezím se pouze na měření jednoho z parametrů. Směr šíření, či polarizace se stanou tzv. *irelevantním stupněm volnosti*. Použiji-li pro polarizaci latinské a pro směr šíření řecké indexy:

$$\langle P \rangle = \sum_{m,n,\mu,\nu} \rho_{n\nu,m\nu} P_{mn} \delta_{\mu\nu} = \sum_{mn} \left( \sum_{\mu} \rho_{n\mu,m\mu} \right) P_{mn}.$$

Potom  $\rho_{nm} := \sum_{\nu} \rho_{n\mu,m\mu}$ . To jsou tedy prvky redukované matice hustoty fotonu vzhledem k polarizaci.

Nyní se budu věnovat tzv. *Schmidtově rozkladu*. Ukážu, že pro každou dvojici korelovaných kvantových systémů, které tvoří čistý stav  $\psi$  je vždy možné s libovolnou přesností najít bázi, ve které lze  $\psi$  psát jako sumu bi-ortogonálních členů. Tento rozklad je zejména dobrý pro nalezení redukovaných stavů systému.

Uvažujme korelovaný stav fotonu uvedený v předešlém příkladu. Položme  $M := \langle u \otimes v, \psi \rangle$ .  $|M|^2$  je nezáporná a omezená funkce v proměnných  $u, v$ , proto existují jistá  $u, v$  tak, že  $|M|^2$  nabývá svého maxima. Tento výběr ovšem vzhledem k volitelnosti fáze není jednoznačný. Nyní zvolím  $u'$  ortogonálně k  $u$ . Nechť  $\varepsilon$  je libovolně malé komplexní číslo. Potom:

$$\|u + \varepsilon u'\| = 1 + O(\varepsilon^2).$$

Pokud zanedbám hodnotu  $O(\varepsilon^2)$ , potom  $u + \varepsilon u'$  lze považovat za jednotkový vektor, jako  $u$ . Dále:

$$\langle u + \varepsilon u' \otimes v, \psi \rangle = M + \varepsilon \langle u' \otimes v, \psi \rangle,$$

tedy:

$$|\langle u + \varepsilon u' \otimes v, \psi \rangle|^2 = |M|^2 + 2\operatorname{Re}(\varepsilon \langle u' \otimes v, \psi \rangle) + O(\varepsilon^2).$$

Pravá strana je vzhledem k fázové změně  $u$  konstantní a protože fáze  $v$  je přitom libovolná je:

$$\langle u' \otimes v, \psi \rangle = 0, \forall u' \in H'_u$$

kde  $H'_u$  značí množinu všech vektorů prvního podsystemu, které jsou kolmé k  $u$ . Obdobně pro  $v'$  je vektor druhého podsystemu, který je kolmý na  $v$  je:

$$\langle u \otimes v', \psi \rangle = 0, \forall v' \in H'_v.$$

Podívejme se na vektor:  $\psi' := \psi - M u \otimes v$ . Zřejmě  $\psi'$  vyhovuje předchozím dvěma vztahům, navíc též:

$$\langle u \otimes v, \psi' \rangle = \langle u \otimes v, \psi - \langle u \otimes v, \psi \rangle u \otimes v \rangle = 0$$

Odtud plyne, že:

$$\psi' \in H'_u \otimes H'_v.$$

Tento postup lze opakovat v menším prostoru  $H'_u \otimes H'_v$  a tak dále, až:

$$\psi = \sum_j M_j u_j \otimes v_j$$

kde  $u_j, v_j$  přísluší prvnímu resp. druhému podsystemu a vyhovují:  $\langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = 0$  pro  $i \neq j$ . Poznámám, že počet nenulových koeficientů  $M_j$  je nanejvýš roven dimenzi menšího z obou podsystemů. Fáze  $M_j$  jsou libovolné, protože fáze  $u_j$  a  $v_j$  jsou libovolné. Navíc, jestliže některá  $|M_j|$  jsou stejné, potom  $u_j \otimes v_j$ , které jim odpovídají, lze nahradit lineární kombinací těchto členů tak, jako když by byl stav degenerovaný.

Vícečásticové systémy mohou kromě rozlišitelných částic obsahovat též podsystémy identických částic, pro které neexistuje test, který by je odlišil, viz. q5.b. Příkladem nerozlišitelných částic jsou např. elektrony v atomu. Podívejme se nyní na dvoučásticový systém nerozlišitelných částic. Množinu ortogonálních stavů první z nich označím  $u_m$ , pro druhou z nich ji označím  $v_m$ . Pro dvoučásticový systém rozlišitelných částic existují stavy, které se pro dvoučásticový systém nerozlišitelných částic nemohou vyskytovat, např.  $u_m \otimes u_n$ ,  $m \neq n$  jsou zakázané. Stavy, které jsou povoleny mají tvar:

$$u_m \otimes v_m, (u_m \otimes v_n + u_n \otimes v_m)/\sqrt{2}, (u_m \otimes v_n - u_n \otimes v_m)/\sqrt{2}, (m \neq n).$$

Principu superpozice pro dvoučásticový systém vyhovují jen symetrické či antisymetrické stavy. Částice, které mají vždy symetrické stavy se nazývají bosony (celočíslný spin), antisymetrické nazýváme fermiony (poločíslný spin). Střední hodnoty pozorovatelných na dvoučásticovém systému identických částic jsou dány:

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \frac{1}{2} \langle (u_m \otimes v_n \pm u_n \otimes v_m), Q(u_m \otimes v_n \pm u_n \otimes v_m) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} (Q_{mn,mn} + Q_{nm,nm} \pm Q_{mn,nm} \pm Q_{nm,mn}) \end{aligned}$$

kde  $Q_{mn,rs} := \langle u_m \otimes v_n, Q u_r \otimes v_s \rangle$ .

Protože nelze rozlišit, která částice je první a která druhá, musí:  $Q_{mn,rs} = Q_{nm,rs}$ , tedy:  $\langle Q \rangle = Q_{mn,mn} \pm Q_{nm,nm}$ ,  $\pm$  odpovídá bosony/fermiony.

Obdobně bychom mohli dospět k výsledku pro vícečásticové systémy, tak jak to říká q5.b.

Z předchozího výkladu plyne, že dvě identické částice jsou vždy provázané a to i když jsou připraveny zcela nezávisle, ve vzdálených laboratořích. Zabýváme se nyní pojmem *vzdálenost systémů*. Stav  $\rho$  považujeme za *vzdálený*, pokud pro každý operátor  $Q$ , je výsledek testu  $Q$  provedeného na  $\rho$  v našem blízkém okolí zanedbatelně malý t.j.  $\|Q\rho\| \rightarrow 0$ . Ze Schwarzovy nerovnosti a hermitovskosti  $Q$  potom plyne, že každý maticový element  $\rho$  je zanedbatelně malý ( $\langle u, Q\rho \rangle = \langle Qu, \rho \rangle$ ),  $u$  je zde libovolný stavový vektor. Ukažme, že provázání resp. "entanglement" lokálního kvantového systému se vzdáleným systémem nemá měřitelný dopad.

Měříme-li hodnoty pozorovatelné  $Q$  na systému v čistém stavu  $u$  obdržím  $\langle Q \rangle = \langle u, Qu \rangle$ . Předpokládejme, že k němu existuje identický kvantový systém ve vzdáleném stavu  $w$ . Stav  $\psi$  tohoto páru je provázaný  $\psi = (u \otimes w \pm w \otimes u)/\sqrt{2}$  kde  $\pm$  odpovídá bosonům/fermionům. Operátor  $Q$ , vztahující se k prvnímu systému, musíme nahradit novým:  $Q \otimes 1 + 1 \otimes Q$ , který nerozlišuje mezi oběma částicemi. Vychází:

$$\begin{aligned} \langle \psi, (Q \otimes 1 + 1 \otimes Q)\psi \rangle &= \frac{1}{2} \langle u \otimes w \pm w \otimes u, Qu \otimes w + u \otimes Qw \pm Aw \otimes u \pm w \otimes Qu \rangle = \\ &= \frac{1}{2} (\langle u, Au \rangle \pm \langle w, Aw \rangle \langle u, w \rangle + \langle w, Qw \rangle \pm \langle w, u \rangle \langle u, Qw \rangle \pm \langle u, Qw \rangle \langle w, u \rangle + \langle w, Qw \rangle \pm \langle u, w \rangle \langle w, Qu \rangle + \langle u, Au \rangle) = \end{aligned}$$

vzhledem k výše odvozenému a vzhledem k tomu, že členy vztahující se k  $w$  a  $Q$  musí vymizet:

$$= \langle uAu, u \rangle$$

Podobně bychom získali, že pro tři částice, z nichž dvě jsou blízké a třetí vzhledem k nim vzdálená, je výsledek střední hodnoty stejný jako pro dvojčásticový systém, již dříve odvozený.

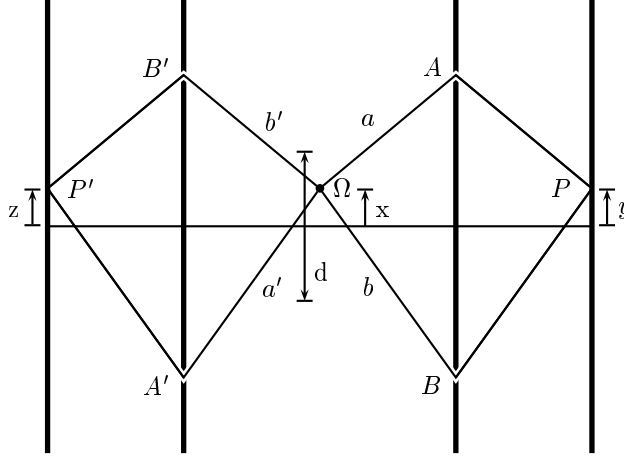
Vlnová funkce, která určuje čistý stav složeného systému leží v tenzorovém součinu Hilbertových prostorů, které přísluší souborům identických částic. Například pro atomové jádro platí, že jádro se sudým resp. lichým hmotnostním číslem se chová jako boson resp. fermion, neboť neutrony i protony jsou fermiony se spinem  $1/2$ . Podobně pro dva atomy  $He_2^4$  se atomy složené ze dvou elektronů, protonů a neutronů chovají jako bosony. Výsledná vlnová funkce musí být symetrická vůči záměně atomů. Funkce, které ji tvoří jsou separované atomové funkce, modifikované vzhledem k parametru polohy.

Mezi experimentálně zvládnuté patří takzvaná sestupní konverze fotonu, kdy z fotonu s frekvencí v oblasti ultrafialového spektra průchodem přes nelineární krystal vznikají dva fotony, které mají podle

zákon zachování energie každý energii nižší než foton před vstupem do krystalu. Proto název sestupní konverze. Takto vzniklé fotony tvoří entanglovaný stav. Pomocí takového páru byla demonstrována dvoučásticová interferometrie, bez užití polarizátorů. Nyní věnuji pozornost zajímavým efektům entanglementu.

### *Dvoučásticová dvouštěrbinová interferometrie*

Zajímavým efektem dvou provázaných částic, pro které provázání zprostředkovává zákon zachování hybnosti je znázorněn na obr. 2.1:



Částice  $\Omega$  se rozpadá na dvě dceřinné částice. Směry jejich šíření jsou svázány zákonem zachování hybnosti, proto projdou trasu  $AA'$  nebo  $BB'$ . Vzhledem k tomu, že nelze přesně určit, které štěrbině si částice vyberou, měl bych na obou stínítkách pozorovat interferenční obrazce, jako jednočásticovou interferometrii. To se většinou nestane. Tímto se dvojjčásticová interferometrie liší od té jednočásticové, založené na Youngově klasickém dvouštěrbinovém experimentu. Důvodem je neurčitost polohy zdroje vzhledem k de-Brogliově vlnové délce vzniklých částic.

Pokud je šířka štěrbin  $d > \frac{\lambda}{\theta}$  kde  $\lambda$  je optická či de-Broglieva vlnová délka emitovaných částic,  $\theta$  je úhel sevřený mezi dvojicí štěrbin a zdrojem, počáteční pozice neurčitosti  $d$  zničí interferenční obrazce.

Pokud je  $d \ll \frac{\lambda}{\theta}$  pozorujeme jednočásticovou interferometrii, neboť vlny přicházejí ke štěrbinám s dobře definovaným fázovým posunem a proto interferují.

Náš systém je ovšem dvoučásticový a proto lze pozorovat k popsanému jednočásticovému efektu ještě tzv. *dvoučásticovou interferometrii*. Ta je opačným efektem k jednočásticové.

Zaznamenávejme pozice  $P, P'$  na dvou scintilačních detektorech v koincidenci t.j. pro stejný počet částic dopadlých za stejný čas. Uvidíme, že částice se rády umisťují tak, že dráhy  $PA\Omega A'P'$  a  $PB\Omega B'P'$  se liší o celočíselné násobky vlnové délky a tak interferují konstruktivně. Poznamenejme, že tuto interferenci nelze zaznamenat na žádné obrazovce, můžeme pouze zaznamenat koincidenci, shodu. To, že částice spolu komunikují a ví kam se mají pohybovat, když zdroj je neurčitý spočívá v tom, že každá částice vytváří sinusoidální amplitudu možných pozic, pozic kde by se zdroj rád vyskytoval. Vzniká speciální druh virtuálních krystalu. Tento krystal vytváří dvoučásticový difrakční obrazec. Virtuální systém štěrbin lze odvodit následujícím způsobem. Pro zjednodušení se zabýváme pouze vertikálním stupněm volnosti  $x$  pro pozici zdroje a řekneme, že rozpadlé částice jsou fotony. Z teorie vlnění pro amplitudu umístění bodu  $P$  na scintilačním detektoru:  $\psi \sim \exp(ikL_a) + \exp(ikL_b) \sim \cos(\frac{2\pi\theta}{\lambda}(y+x))$  kde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  a  $L$  značí délky příslušné cestám na pravé straně přístroje,  $\psi' \sim \cos(\frac{2\pi\theta}{\lambda}(z+x))$ . Celková amplituda pro umístění těchto dvou fotonů je  $\psi(y, z) \sim \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} dx \cos(\frac{2\pi\theta}{\lambda}(y+x)) \cos(\frac{2\pi\theta}{\lambda}(z+x))$ .

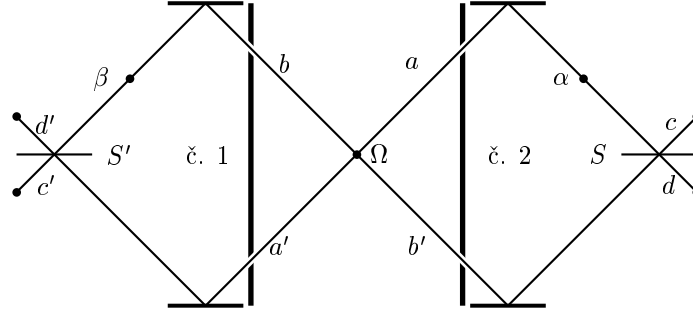
Jestliže  $d \gg \lambda/\theta$  potom integrál přejde v:  $1/2 \cos(2\pi\theta(z-y)/\lambda)$  a získáme 100% pozorovatelnost interferenčních obrazců, takových jak jsem je již popsal.

Jestliže  $d \ll \lambda/\theta$  integrál přejde v  $\cos(\frac{2\pi\theta}{\lambda}(y)) \cos(\frac{2\pi\theta}{\lambda}(z))$  což je součin nezávislých difrakčních obrazců a pozorujeme jednočásticové interferenční obrazce na každém stínítku.

Vzniká druh komplementarity mezi jedno a dvoučásticovou interferometrií. Obdobnou úvahu lze provést pomocí prostoru hybností.

### Dělič paprsku

Zabýváme se nyní případem kdy v aparatuře obr.2.1 stínítka nahradíme děliči svazků, t.j. polopropustnými zrcátky, která s určitou pravděpodobností svazek propustí a s určitou pravděpodobností jej odrazí (obr.2.2):



Za děliči nechť jsou umístěny detektory, které zaznamenávají počet částic v každém ze čtyř možných směrů šíření. Abychom mohli zaznamenat interferenci, do svazku a vložíme posunovač fáze o  $\alpha$ , do směru svazku b vložíme  $\beta$ . Předpokládáme ideální děliče, kdy 50% dopadajícího svazku projde a 50% se odrazí. Přitom odražený a prošlý svazek považujeme posunutý co do fáze o  $\frac{\pi}{2}$ .

Stav provázaných částic po průchodu děliči paprsků je:

$$\frac{i \exp(-i(\alpha + \beta)/2)}{\sqrt{2}} [\sin(\delta/2) |c\rangle_1 |c'\rangle_2 + \cos(\delta/2) |c\rangle_1 |d'\rangle_2] + \cos(\delta/2) |d\rangle_1 |c'\rangle_2 - \sin(\delta/2) |d\rangle_1 |d'\rangle_2$$

kde  $\delta = \alpha - \beta$ .

Abychom viděli dvoučásticovou interferometrii, musíme současně monitorovat detektory na obou stranách např. c a c' v koincidenci při změně  $\delta$ .

Pro detektor zvlášť nezaznamenám žádnou interferenci, např. pravděpodobnost

$$P(c) = P(c, c') + P(c, d') = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}$$

nezávisle od  $\delta$ !  $P(c, c')$  jsou pravděpodobnost současného záznamu c, c'. Označme nyní +1 hodnotu detekce v c nebo c' a -1 hodnotu detekce v d nebo d'. Současný záznam c a d' má potom hodnotu (+1).(-1) = -1. Pravděpodobnost detekce obou částic ve stejný okamžik je potom:

$$E(\alpha, \beta) = P(c, c') - P(c, d') - P(d, c') + P(d, d') = \sin^2 \frac{\delta}{2} - \cos^2 \frac{\delta}{2} = -\cos(\delta)$$

Skutečnost je tedy taková, že tento experiment ukazuje dvoučásticovou korelaci, ale ne jedočásticovou interferenci.

Nyní se zabýváme případem kdy budeme zaznamenávat výstupy pro částici 1, to je ta část, která jde v pravo. Získáme náhodnou posloupnost 1 a -1.

### Interference počtu emitovaných částic

Mějme dvojici setupně konvertovaných fotonů registrována detektory  $D_1$ ,  $D_2$  s časovou neurčitostí koincidence (1 ns), která je menší než rozdíl mezi časy průchodu dlouhé a krátké dráhy (4 ns) mezi nimiž každý z fotonů vybírá svou cestu k detektoru. Předpokládejme, že rozdíl 3 ns je dobře experimentálně rozlišitelný. . Kterou cestu si foton vybere? Protože dolně konvertované fotony vznikají ve stejnou dobu a ve stejnou dobu přichází do detektorů (až na koincidenční okénko), musí oba projít buď krátkou nebo dlouhou dráhu, stav takového systému je popsán:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|s_1\rangle|s_2\rangle + |l_1\rangle|l_2\rangle)$  kde  $s_1, l_1$  značí krátkou a dlouhou dráhu pro částici 1. Vzhledem k tomu, že nevíme kterou s cest si pár v koincidenzi vybral, toto zařízení funguje jako dočasná dvojtěrbina. Snadno nahlédneme, jak lze tuto dvoučasovou štěrbinu rozšířit na vícečásticovou mřížku.

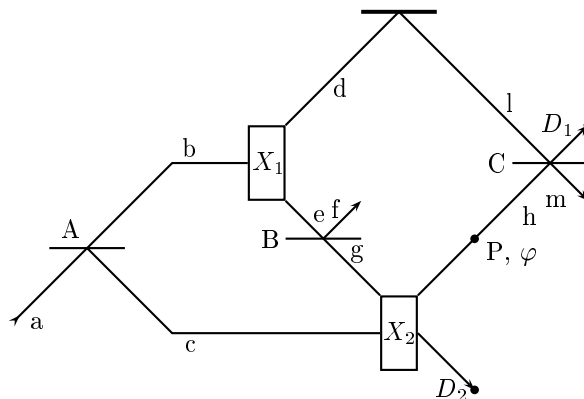
Změnou délky jedné z dlouhých cest t.j. posunem relativních fází dvou členů získáme sinusoidové oscilace, interferenční kroužky, v počtu detekovaných částic v koincidenzi. V každém detektoru zvlášť ovšem je tento počet konstantní.

Proč se zde neobjeví jednočásticová interference, když každá z částic prochází svým vlastním interferometrem? Pokud by jednočásticová interferometrie byla pozorována, potom její existenci neohrozí, když se z jednoho ramene odstraní všechna zrcátka a zruší se tak existence dlouhé cesty v příslušném rameni. Sledujme krátkou trasu a pozorujme co se bude dít v druhém rameni.

Jestliže počet detekovaných částic v obou ramenech je přibližně shodný, oba fotony prošly krátkou trasu. Pokud se detekce liší o 4ns, potom foton v druhém rameni prošel delší trasu. Tímto způsobem jsem schopen určit stav druhé částic ze vztahu k první částici, i když ta druhá prochází interfermetrem. Proto se oscilace amplitud příchodu v jednočásticovém případě nekoná. Pokud jsou ovšem oba interferometry nedotknuté, potom z časových vztahů detekovaných částic nelze usoudit, kterou dráhou prošly a pozorujeme dvoučásticovou interferometrii.

### Rozlišitelnost cest a koherence

Zabývejme se nyní experimentem na obrázku 2.3:



Výsledky jsou v souladu s tvrzením, že stavy mezi sebou v daném experimentu interferují právě tehdy, když je žádnou realizací experimentu nelze od sebe odlišit.

Předpokládejme, že cestou a vstupuje do aparatury jeden foton. Na děliči svazku A dochází k transformaci stavu fotonu (označení je patrné z obrázku,  $i$  odpovídá posunu fáze ketu o  $\frac{\pi}{2}$  t.j. odpovídá odrazu na děliči.

$$|a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|b\rangle + i|c\rangle)$$

Vlnová funkce fotonu se nyní týká obou krystalů  $X_1$ ,  $X_2$ , které mají za úkol provést sestupnou konverzi fotonu. Samozřejmě k sestupné konverzi fotonu dojde pouze v jednom z krystalů, vzniká entanglovaný stav:

$$\frac{\eta}{\sqrt{2}}(|d\rangle_1 \otimes |e\rangle_2 + i|h\rangle_1 \otimes |k\rangle_2),$$

indexy 1, 2 značí pořadí vzniklých fotonů po konverzi:  $|b\rangle \rightarrow \eta|d\rangle_1 \otimes |e\rangle_2$ ,  $|c\rangle \rightarrow \eta|h\rangle_1 \otimes |k\rangle_2$  kde  $\eta$  znamená koeficient konverze a je řádu  $10^{-6}$ .

Otázkou je, jestli  $h, d$  spolu budou na děliči C interferovat. Za situace užití pouze součástí A,  $X_1, X_2$ , C nebudou, protože zaregistrováním druhého z fotonů  $v$  či  $k$  dá jasnou odpověď na to, kde ke konverzi došlo. Pokud mezi  $X_1, X_2$  do směru  $e$  vložíme dělič B:

$$|e\rangle \rightarrow T|g\rangle + iR|f\rangle$$

kde T,R jsou koeficienty transmise a reflexe na druhém děliči svazku,  $|g\rangle \rightarrow |k\rangle$ , potom tyto "druhé" fotony chytíme do krystalu  $X_2$ , čímž pádem bude informace o místě konverze vymazána. Transformace lze zapsat:

$$|h\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|l\rangle + i|m\rangle),$$

$$|d\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|m\rangle + i|l\rangle).$$

Pokud mezi  $X_2, C$  vložíme posun fáze P:  $|h\rangle \rightarrow e^{i\varphi}|h\rangle$ . Celkem:

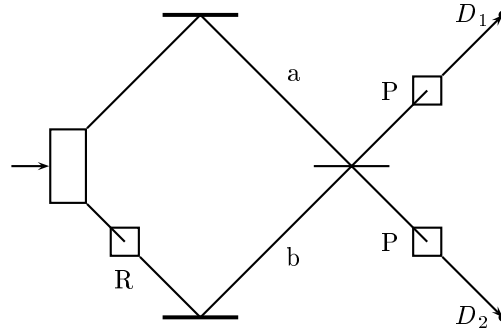
$$\begin{aligned} |a\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|b\rangle + i|c\rangle) \rightarrow \frac{\eta}{\sqrt{2}}(|d\rangle_1 \otimes |e\rangle_2 + i|h\rangle_1 \otimes |k\rangle_2) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\eta}{\sqrt{2}}[(T - e^{i\varphi})(|m\rangle) + i(T + e^{i\varphi})|e\rangle]_1 \otimes |k\rangle_2 + i\frac{\eta}{\sqrt{2}}R(|m\rangle + i|e\rangle)_1 \otimes |f\rangle_2. \end{aligned}$$

Zjišťováním koincidence změřím čtverec amplitudy u členu  $|e\rangle_1 \otimes |f\rangle_2$ :  $\frac{\eta^2}{2}(1 + T^2 + 2T \cos \varphi)$ , takže vzdálenost mezi interferenčními proužky koincidence je dána koeficientem  $\nu = 2T/(1 + T^2)$ . Budu-li na místo koincidence monitorovat pouze  $D_1$ , potom přírůbky od  $|l\rangle_1 \otimes |k\rangle_2$  a  $|l\rangle_1 \otimes |f\rangle_2$  dají  $\frac{\eta^2}{2}(1 + T \cos \varphi)$  t.j.  $\nu = T$ . Takže přes koeficient T je stupeň koherence prvního svazku kontrolován druhým svazkem.

Konvertovaný pár fotonů bychom měli považovat za entitu tzv. "dvojfoton". Právě dvojfoton vzniklý v jednom z  $X_1, X_2$  interferuje sám se sebou. Obecně to je časem se vyvíjející proces fotonového stavu, který interferuje sám se sebou. Modifikaci při které byl použit pouze jeden krystal provedl tým experimentátorů z Vídeňské Univerzity pod vedením *prof. A. Zeilinger* viz. (4).

### Kvantové vymazání

Zabýváme se nyní aparaturou jako na obrázku (obr.2.4):



Nejprve předpokládejme, že v cestě fotonů vzniklých dolní konverzí stojí pouze dělič svazku. Toto zařízení vytváří zajímavý dvoučásticový efekt. Oba fotony skončí v tom samém detektoru. Foton 1 projde dráhu a, na děliči se odrazí nebo projde. Foton 2 projde dráhu b, na děliči se odrazí se nebo projde. Odraz znamená posun fáze o  $\frac{\pi}{2}$ , průchod o 0. Při koincidenci, by se ovšem buď oba odrazily, nebo by prošly. Relativní posun fází přípustných amplitud, odraz či projití je tedy o  $\pi$  a proto se vruší. Koincidence se tedy nepozoruje.

Předpokládejme, že jsou oba fotony např. horizontálně polarizovány, tak zůstanou i po dopadu na dělič a koincidence v 1, 2 se nepozoruje.

Jestliže ovšem do svazku b vložíme rotátor fáze o  $\pi$ , potom se ve svazku b změní horizontální polarizace na vertikální a amplitudy spolu nebudou dále interferovat. Ze znalosti polarizace výsledného stavu

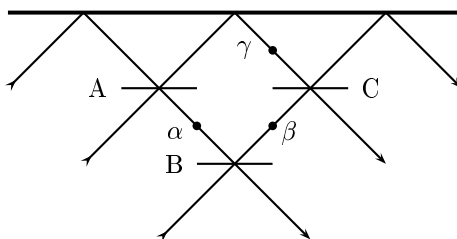
totiž určím, kterou cestou se který foton vydal. Nebudu tedy pozorovat interferenci amplitud, zato budu pozorovat koincidence.

Ovšem ještě je možné informaci o cestách vymazat. Umístím-li za dělič do směru paprsků lineární polarizátory, oba buď horizontálně nebo vertikálně umístěné, potom budu opět schopen říct kudy se který foton pohyboval. Pokud jsou ale orientovány o  $\pi/4$  horizontálně k a, b v příslušné cest obnovím tím koherenci a koincidence nepozoruji.

### Zobecnění pro mnoho stavů

Zobecněním děliče svazků je případ, kdy pro každý foton existují více jak dvě vstupní/výstupní cesty. Obecně mluvíme o multiportech.

Polopropustné zrcátko jako dělič svazku je čtyřport, dva vstupy a dva výstupy. V multiportech jsou výstupní stavy se vstupními svázány unitární transformací. Šestiport, tzv. tritter, schematicky vypadá následovně (obr.2.5):



Osmiport se nazývá quitter. Jestliže tritter doplníme vhodnými posuny fází, lze docílit toho, že jakmile je jeden ze vstupů ozářen vznikají tři výstupy o stejné intenzitě. Takové multiporty jsou vhodným nástrojem pro praktické provedení unitárních transformací zatím v  $3(4)$  – *dimenzionálním* Hilbertově prostoru.

V předešlých příkladech z kvantové optiky jsme se zabývali dvoučásticovým entanglementem. Vícečásticový entanglement je dosud teoreticky a experimentálně neprozkoumanou oblastí. Jisté je, že vzhledem ke složitějším symetriím lze pro vícečásticový entanglement očekávat další zajímavé experimenty.

### Kvantové kodování

Předpokládejme, že kladnou odpověď na danou otázku označíme 1, zápornou 0. Odpovědi na sérii otázek lze tedy zakodovat do posloupnosti těchto dvou cifer. Z fyzikálního hlediska to představuje rozlišitelný systém, složený z dvoustavových podsystémů. Z kvantověmechanického hlediska bude přirozené, když 1 a 0 přiřadíme dva ortogonální vektory.

Novinkou, kterou kvantová informace poskytuje je možnost superpozice obou stavů. Obecná superpozice dvou různých stavů se nazývá *qubit*.

Zakodování  $n$  bitů lze provést přiřazením, které každému bitu přiřadí vlastní dvou stavový systém. V takovém případě je informace zakodována pomocí ortogonálních stavů, např. pro tři bity:

$|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ ,  $|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ ,  $|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$ ,  $|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$ ,  $|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$ ,  $|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$ ,  $|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$ ,  $|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$ , který odpovídá počtu  $2^n$ .

Stavy tvoří úplnou ortonormální bázi pro  $n$ -qubitový prostor. V takovém prostoru lze vybrat různé takové báze, pro dvou-qubitový prostor existuje taková, která je navíc maximálně provázaná:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle),$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle),$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle),$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle).$$

Tato báze se nazývá Bellovská. Zde žádný z qubitů nenese informaci o sobě samém. Celá informace je zakodována do vzájemných vlastností dvou qubitů. Abychom mohli správně vyčíst zakodovanou informaci musíme mít přístup k oběma qubitům současně. Odpovídající měření se nazývá měření Bellovských stavů. To je tedy podstatný rozdíl oproti klasickému kodování kdy na zakodování ano/ne odpovědi stačí jeden qubit. V případě dokonale entanglované báze přístup k jednomu stavu nepřináší zisk žádné informace o systému.

### *Kvantová komunikace a husté kodování*

Abychom mohli dekodovat informaci, musíme vědět, který symbol co znamená. V klasickém případě je to snadné, v kvantovém případě můžeme zakodovat informaci do provázaných vlastností systémů a jak jsme zmínili dříve samotný systém nenese žádnou informaci. Prvním příkladem je tzv. husté kodování. Bellovská báze má tu vlastnost, že z libovolného jejího vektoru ke zbylým třem můžeme dospět manipulací pouze s jedním ze dvou qubitů, zatímco v klasickém případě bychom museli manipulovat s oběma. Např. Vyjdeme-li ze  $|\Psi^+\rangle$ , posunem fáze o  $\pi$  u druhého qubitů přejdeme k  $|\Psi^-\rangle$ .  $|\Phi^+\rangle$  vznikne záměnou hodnot druhého qubitů a  $|\Phi^-\rangle$  je kombinací obou. Aby A mohl dekodovat stav potřebuje analyzátor Bellovských stavů. Lze ukázat, že pro identifikaci všech čtyřech Bellovských stavů je zapotřebí nelineárních interakcí mezi qubity. Užitím pouze lineárních transformací lze užít jenom  $\log_2 3 \doteq 1,58$  bitová informaci na jednu manipulaci s fotonem.

### *Fotonové statistiky na děliči svazku a Bellovská analýza*

Jak bylo zmíněno Bellovský analyzátor pracuje s nelineární interakcí qubitů, přesto lze pomocí děliče svazku provést, alespoň částečnou statistickou analýzu. Podstata celé záležitosti spočívá v tom, že jediné  $|\psi^-\rangle$  je antisymetrický, ostatní Bellovské bazické vektory jsou symetrické. To není v rozporu s tím, že užití částice na experiment jsou buď fermiony nebo bosony, protože kromě charakteristiky qubitů, (vnitřní parametr) je celková vlnová funkce tvořená ještě prostorovým členem (vnější parametr) a výsledná vlnová funkce je jejich součinem. Celkovou symetričnost či antisymetričnost vlnové funkce zajistím volbou vnějšího parametru.

Nyní se zabýváme dvěma fotony(bosony), dopadajícími symetricky na děliči svazku. Vzhledem k tomu, že jde o nerozlišitelné částice jejich možné nezávislé vnější stavy jsou:

$$|\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle \otimes |b\rangle - |b\rangle \otimes |a\rangle),$$

$$|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle \otimes |b\rangle + |b\rangle \otimes |a\rangle).$$

Z požadavku symetričnosti celkové vlnové funkce této dvojice qubitů mám čtyři možnosti:

$$|\Psi^+\rangle \otimes |\Psi_S\rangle,$$

$$|\Psi^-\rangle \otimes |\Psi_A\rangle,$$

$$|\Phi^+\rangle \otimes |\Psi_S\rangle,$$

$$|\Phi^-\rangle \otimes |\Psi_S\rangle.$$

Takže jediné stav antisymetrický ve vnější proměnné je antisymetrický i ve vnitřní proměnné. Pokud budu předpokládat, že dělič paprsku neovlivní vnitřní stav dopadajícího fotonu a také, že při odrazu dochází k posunu fáze o  $\pi/2$ . Lze ukázat, že prostorově antisymetrický stav, je pro každý operátor děliče svazku vlastní vektor. Naopak, v ostatních třech případech, kdy je vnější stav symetrický se fotony objeví společně na jedné straně děliče. Stav  $|\Psi^-\rangle$  je tedy jediný ze čtyř Bellovských stavů, který vede ke koincidenci mezi detektory umístěnými na každé straně děliče. Jak lze rozlišit zbylé stavy? Ve stavu  $|\Psi^+\rangle$  mají fotony rozdílnou polarizaci, zatímco zbylé dva ji mají stejnou. Měřením polarizace pro fotony na jedné straně děliče tedy lze rozlišit, jestli jde o stav:  $|\Psi^+\rangle$  či o stavy  $|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle$ . Obecně lze takto rozlišit libolně tři ortogonální maximálně provázané stavy dvoudimenzionálního Hilbertova prostoru, neboť vždy existuje unitární transformace, která je převede na výše zmíněné dobře rozlišitelné Bellovské vektory. Obdobnou úvahu lze provést i pro fermiony, vnitřní rozlišitelné stavy jsou stejné jako pro bosony.



### *Možnosti vzniku entanglementu*

Entanglement částic vzniká pokud entanglované částice spolu interagovaly v minulosti nebo pokud vznikly ze stejného zdroje. Existují ovšem jiné způsoby, jak provázat dvě částice. Jedním z nich je případ kdy ze dvou entanglovaných párů vezmeme po částici a na těchto provedeme měření Bellovského stavu. Tím pádem se dvě zbylé částice spolu prováží. Vzhledem k tomu, že provázání znamená že část informace o systému je sdílena ve společných či relativních vlastnostech částic, je tento způsob velmi zajímavý. Např. pro stav  $\Phi^-$ , který je antisymetrický ať vybereme jakoukoliv bázi, naměřené qubity budou vždy v různých stavech.

Zabývejme se nyní informačním obsahem Bellovských měření. Ať vyprodukujeme zdrojem Bellovských stavů jakýkoliv stav, čistý Bellovský analyzátor vrátí jako výstup nějaký jeden Bellovský stav a to s pravděpodobností 25%. Akce Bellovského analyzátoru je taková, že dva fotony zprojektuje do provázaného stavu. Protože ty jsou členy entanglovaných stavů, samy o sobě nenesou žádnou informaci. To se stane se stejnou pravděpodobností pro všechna měření Bellovských stavů.

Abychom to ukázali na příkladu uvažujme, že v jistém experimentu obdržíme jako výsledek Bellovského měření stav  $|\Psi^-\rangle$  A nechť víme, že zdroje Bellovských stavů produkují jen  $|\Psi^-\rangle$ . Potom vím, že částice 1 a 2, 3 a 4 jsou různé a též z měření BSM 2 a 3 jsou různé, celkem tedy protože jsme na dvoudimenzionálním Hilbertově prostoru, víme, že i 1 a 4 jsou různé v libovolné bázi, proto tvoří stav  $|\Psi^-\rangle$ .

### *Kvantový teleport a nelokálnost informace*

Předpokládejme, že A by ráda sdělila B dvoubitovou informaci. Otázkou je, zda by nešlo pro tento účel využití entanglementu částic např. fotonů se dvěma ortogonálními polarizačními stavy.

Nechť A posílá informaci tvaru  $|\psi\rangle = a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1$ . K provedení experimentu je potřeba, aby existoval zdroj Bellovských stavů, který produkuje např.  $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 - |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3)$ .

Na začátku je stav systému:  $|\psi\rangle \otimes |\Psi^-\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1) \otimes (|0\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 - |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3) =$   
 $|\Phi^+\rangle_{12} \otimes (\frac{a}{2}|1\rangle_3 - \frac{b}{2}|0\rangle_3) + |\Phi^-\rangle_{12} \otimes (\frac{a}{2}|1\rangle_3 + \frac{b}{2}|0\rangle_3) + |\Psi^-\rangle_{12} \otimes (-\frac{a}{2}|0\rangle_3 - \frac{b}{2}|1\rangle_3) + |\Psi^+\rangle_{12} \otimes (-\frac{a}{2}|0\rangle_3 + \frac{b}{2}|1\rangle_3)$

A na 1 a 2 provede měření Bellovských stavů, částice 3 nechť je u B. Měření Bellovských stavů na 1,2 má čistě náhodný charakter, každý z vektorů Bellovské báze je možné naměřit s pravděpodobností 25%. Přesto, lze Bellovským stavům přiřadit dva bity např.:

$$|\Psi^+\rangle \rightarrow (10)$$

$$|\Psi^-\rangle \rightarrow (01)$$

$$|\Phi^+\rangle \rightarrow (11)$$

$$|\Phi^-\rangle \rightarrow (00)$$

A do B klasickým způsobem dodá jednu, ze čtyř možností a B potom na 3 provede jednu z unitárních transformací:

$$(10) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(01) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(11) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(00) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tyto transformace lze jednoduše realizovat pomocí dvojlomného krystalu a čtvrtlnové destičky.

Všimněme si, že v tomto případě jde o vytvoření identické kopie částice na jiném místě, aniž by se znal její počáteční stav. Technické problémy jsou spojeny především s existencí analyzátoru Bellovských stavů, který používá nelineární zobrazení.

Tímto postupem nelze částice klonovat, původní částice se stává součástí provázaného stavu 1,2. Rychlost klonování je omezena rychlostí přenosu dvoubitové informace. Ta v současných podmínkách nepřesáhne rychlost světla, takže experiment není ve sporu s teorií relativity. Přenos dvoubitové informace je přitom pro experiment nezbytný, v opačném případě je stav částice 3 smíšený a nepolarizovaný:

$$\rho_3 = \frac{1}{4}(-a|0\rangle_3 + b|1\rangle_3)(-a^*\langle 0|_3 + b^*\langle 1|_3) + \frac{1}{4}(-a|0\rangle_3 - b|1\rangle_3)(-a^*\langle 0|_3 - b^*\langle 1|_3) +$$

$$\frac{1}{4}(-b|0\rangle_3 + a|1\rangle_3)(-b^*\langle 0|_3 + a^*\langle 1|_3) + \frac{1}{4}(b|0\rangle_3 + a|1\rangle_3)(b^*\langle 0|_3 + a^*\langle 1|_3) = \frac{1}{2}(\underbrace{(a^2 + b^2)}_{=1}|0\rangle_3\langle 0|_3 + \underbrace{(a^2 + b^2)}_{=1}|1\rangle_3\langle 1|_3)$$

polarizace stavu 3 je tak zcela náhodná a provedení unitární operace nemá žádný význam.

## Kapitola č. 3

### Časový vývoj

**Obsah:** Popis Časového vývoje kvantových systémů je postulován v q4. a, b, c. Důležitou rovnicí pro určování časového vývoje systému je Schrödingerova rovnice, protože ji lze použít i pro nekonzervativní systémy. Z její platnosti vyjdu a odvodím užitečnou Liouvillovu rovnici. Kromě řešení Schrödingerovy rovnice nastíním i konstrukci Dysonova rozvoje (viz. LOKF 17.5.1). Většina předpovědí kvantové teorie se vyjadřuje pomocí spektrálních vlastností samozdružených operátorů, které odpovídají konkrétním pozorovatelným. Tyto vlastnosti jsou unitárními ekvivalenty. Podívám se tedy na operace, kdy operátory všech pozorovatelných nahradím unitárně ekvivalentními operátory získanými pomocí téhož unitárního operátoru. Ve vztahu k časovému vývoji mě bude zajímat případ, kdy je unitární ekvivalence zprostředkována operátorem časového vývoje.

Použitá literatura: LOKF, (1), (2).

Časový vývoj kvantově mechanického systému v čistém stavu je popsán Schrödingerovou rovnicí :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H|\psi(t)\rangle$$

analogicky:

$$-i\hbar \frac{\partial \langle\psi(t)|}{\partial t} = H\langle\psi(t)|$$

Nyní předpokladejme, že systém je konzervativní resp.  $H$  explicitně časově nezávislý. Princip superpozice říká, že každé řešení Schrödingerovy rovnice lze psát ve tvaru:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n |\mu_n(t)\rangle = \sum_n C_n \exp(-\frac{i}{\hbar} E_n t) |\mu_n\rangle$$

kde  $C_n$  jsou časově nezávislé konstanty a  $|\mu_n\rangle$  jsou vlastní funkce  $H : H|\mu_n\rangle = E_n|\mu_n\rangle$ .  
Z rozvoje:

$$\exp(-\frac{i}{\hbar} Ht) = 1 - \frac{i}{\hbar} Ht - \frac{1}{2\hbar^2} H^2 t^2 - \dots$$

potom dostanu vztah, který byl zřejmý již z postulátu q4.b:

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar} Ht) \sum_n C_n |\mu_n\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar} Ht) |\psi(0)\rangle.$$

Operátor  $\exp(-\frac{i}{\hbar} Ht)$  v tomto případě nese celkovou informaci o časovém vývoji stavu  $|\psi(0)\rangle$ .

Nyní se zabývejme případem kdy hamiltonián  $H$  systému připraveného v čistém stavu závisí na čase. Nechť  $U(t)$  je operátor časového vývoje, který transformuje stav  $|\psi(0)\rangle$  do stavu  $|\psi(t)\rangle$ :

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle, \quad \langle\psi(t)| = \langle\psi(0)|U(t)^\dagger$$

kde pravděpodobnost nalezení systému v čase  $t$  ve stavu  $|\phi\rangle$  je:  $|\langle\phi|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle\phi|U(t)|\psi(0)\rangle|^2$ .

Substitucí do Schrödingerovy rovnice vychází:

$$i\hbar \frac{\partial U(t)}{\partial t} |\psi(0)\rangle = H(t)U(t)|\psi(0)\rangle.$$

Protože  $|\psi(0)\rangle$  je libovolné lze ekvivalentně psát:

$$i\hbar \frac{\partial U(t)}{\partial t} = H(t)U(t)$$

s počáteční podmínkou  $U(0) = 1$ , pro adjungovaný operátor :

$$-i\hbar \frac{\partial U(t)^\dagger}{\partial t} = U(t)^\dagger H(t).$$

Obložením první z rovnic zleva  $U(t)^\dagger$  a druhé zprava  $U(t)$  a následným odečtením první od druhé dostanu:

$$i\hbar(U^\dagger \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U^\dagger}{\partial t}) = i\hbar \frac{U^\dagger U}{\partial t} = 0.$$

Odtud plyne, že  $U^\dagger U$  musí být konstantní operátor a vzhledem k počáteční podmínce  $U^\dagger(0)U(0) = 1$  to musí být unitární operátor.  $U^\dagger U$  je identický operátor. Lze ověřit, že operátor  $U(t)$  je unitární propagátor,  $U(t) = U(t, 0)$ .

Způsob doposud užitého popisu se nazývá *Schrödingerova reprezentace*. Časový vývoj se v něm projevu závislostí statistických operátorů resp. vektorů popisujících stavy na čase. Operátory reprezentující pozorovatelné ve Schrödingerově reprezentaci na čase nezávisí, výjimkou jsou pozorovatelné, jejichž závislost na čase je parametrická t.j. nesouvisí s dynamikou systému.

V *Heisenbergově reprezentaci* se libovolné pozorovatelné přiřazuje operátorová funkce  $Q_H$ , která zobrazuje z  $R$  do množiny samozdružených operátorů definovaných na stavovém prostoru:

$$Q_H(t) = U(t)^{-1}QU(t), \quad Q_H(0) = Q$$

kde  $Q$  reprezentuje danou pozorovatelnou ve Schrödingerově reprezentaci. Předpovědi teorie jako jsou střední hodnoty pozorovatelných musí být na reprezentaci nezávislé, proto stavy v Heisenbergově reprezentaci mají tvar:  $W_H = U(t)^{-1}W(0)U(t)$  resp.  $\psi_H(t) = U(t)^{-1}\psi(0)$ . Z postulátu q4. a potom plyne, že stavy jsou v této reprezentaci časově nezávislé.

Třetí užívanou reprezentací je *Dirakova* nebo též *interakční reprezentace*, při němž je časová závislost rozdělena mezi stavy a pozorovatelné. Této reprezentace se užívá pro systémy s hamiltoniánem  $H = H_0 + V$  kde  $H_0, V$  jsou samozdružené operátory. U nekonzervativních systémů se hamiltonián  $H$  rozděluje tak, že  $H_0$  je časově nezávislý.

Nyní k Liouvillově rovnici. Předpokládejme, že v čase  $t = 0$  je systém ve smíšeném stavu s maticí hustoty

$$\rho(0) = \sum_n W_n |\psi_n(0)\rangle \langle \psi_n(0)|.$$

Stavy  $|\psi_n(0)\rangle$  se v čase vyvíjejí a v důsledku toho se se vyvíjí i statistický operátor:

$$\rho(t) = \sum_n W_n |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)| = \sum_n W_n U(t) |\psi_n(0)\rangle \langle \psi_n(0)| U(t)^\dagger = U(t)\rho(0)U(t)^\dagger.$$

Derivováním tohoto výsledku podle času získám:

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)]$$

s komutátorem:

$$[H(t), \rho(t)] = H(t)\rho(t) - \rho(t)H(t).$$

To je tzv. *Liouvillova rovnice*.

Nyní předpokládejme, že můžeme psát

$$H(t) = H_0 + V(t)$$

kde  $H_0$  je časově nezávislý a  $V(t)$  charakterizuje vnější pole, které indukuje přechod mezi  $|\mu_n^0\rangle$  vlastními vektory  $H_0$ . Užitím těchto vektorů jako bazických vektorů pro vyjádření čistého stavu systému vychází:

$$|\psi(t)_n\rangle = \sum_n C_n(t) |\mu_n^0(t)\rangle = \sum_n C_n(t) \exp(-i\hbar E_n^0 t) |\mu_n^0\rangle$$

kde časová závislost potenciálu  $V(t)$  je obsažen v koeficientech  $C(t)$ , pro  $V(t) = 0$  přechází problém na stacionární stav.

Nyní odvodíme časový vývoj matice hustoty v  $|\mu_n^0\rangle$  reprezentaci. Prvek matice  $H = H_0 + V(t)$  je dán:

$$\langle \mu_{m'}^0 | H(t) | \mu_m^0 \rangle = E_m^0 \delta_{m'm} + \langle \mu_{m'}^0 | V(t) | \mu_m^0 \rangle.$$

Jestliže Liouvillovu rovnici vynásobíme zleva  $\langle \mu_{m'}^0 |$  a zprava  $|\mu_m^0\rangle$  a položíme  $\rho(t)_{m'm} = \langle \mu_{m'}^0 | \rho(t) | \mu_m^0 \rangle$ , potom vychází:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \rho(t)_{m'm}}{\partial t} &= \sum_n (E_{m'}^0 \delta_{m'n} \rho(t)_{nm} + \langle \mu_{m'}^0 | V(t) | \mu_n^0 \rangle \rho(t)_{nm} - \rho(t)_{m'n} E_m^0 \delta_{nm} - \rho(t)_{m'n} \langle \mu_n^0 | V(t) | \mu_m^0 \rangle) = \\ &= (E_{m'}^0 - E_m^0) \rho(t)_{m'm} + \sum_n (\mu_{m'n}^0 \langle V(t) | \mu_n^0 \rangle \rho(t)_{nm} - \rho(t)_{m'n} \langle \mu_n^0 | V(t) | \mu_m^0 \rangle) = \\ &= (E_{m'}^0 - E_m^0) \rho(t)_{m'm} + \langle \mu_{m'}^0 | [V(t), \rho(t)] | \mu_m^0 \rangle. \end{aligned}$$

Přitom:

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t) \sum_n C(t)_n |\mu_n^0\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t) |\psi(t)_I\rangle$$

kde

$$|\psi(t)_I\rangle = \sum_n C(t)_n |\mu_n^0\rangle.$$

Schrödingerova rovnice má nyní tvar:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} &= i\hbar (-\frac{i}{\hbar}) H_0 \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t) |\psi(t)_I\rangle + i\hbar (\exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t) \frac{\partial |\psi(t)_I\rangle}{\partial t}) = H(t) \psi(t) = \\ &= [H(0) + V(t)] \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t) |\psi(t)_I\rangle. \end{aligned}$$

Odtud plyne:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)_I\rangle}{\partial t} = V(t)_I |\psi(t)_I\rangle$$

kde  $V(t)_I = \exp(\frac{i}{\hbar} H_0 t) V(t) \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t)$ .

Odvozená rovnice ukazuje, že časový vývoj  $|\psi(t)_I\rangle$  závisí pouze od  $V(t)$ . Je-li rozptyl  $V(t)$  malý, mění se  $|\psi(t)_I\rangle$  pomalu. Z toho bývá výpočet  $|\psi(t)_I\rangle$  příjemnější.

Pro počítání je často výhodné rychle se měnící člen, který závisí od  $H_0$ , z popisu stavu vyloučit. Toho lze docílit např. zavedením operátoru  $U_0^\dagger(t) = \exp(\frac{i}{\hbar} H_0 t)$  pro všechny stavy ve Schrödingerově reprezentaci lze zavést unitární transformaci:

$$|\psi(t)_I\rangle = \exp(\frac{i}{\hbar} H_0 t) |\psi(t)\rangle.$$

Obdobně předchozímu přetransformuji všechny pozorovatelné  $Q(t)$  na  $Q(t)_I := \exp(\frac{i}{\hbar} H_0 t) Q(t) \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t)$ .

Inverzní transformační vztahy jsou:

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t) |\psi(t)_I\rangle,$$

$$Q_I(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t) Q_0(t) \exp(\frac{i}{\hbar} H_0 t).$$

Zřejmě  $U_0(t)$  je unitární.  $|\psi(t)\rangle$  závisí pouze na  $V(t)$ ,  $Q(t)$  naopak závisí od  $H_0$ .

Reprezentace časového vývoje v pojmech  $|\psi(t)_I\rangle$  a  $Q_I(t)$  se nazývá interakční. Protože  $U_0(0) = 1$  jsou všechna tři pojetí v čase  $t=0$  stejná:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi(0)_H\rangle = |\psi(0)_I\rangle.$$

Nyní se podívejme na problém časového vývoje operátoru. Pozornost soustředím na interakční pojetí:

$$|\psi(t)_I\rangle = \exp(\frac{i}{\hbar} H_0 t) U(t) |\psi(0)\rangle.$$

t.j.

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t) |\psi_I(0)\rangle$$

kde

$$U(t)_I = \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t\right)U(t)$$

a inverzně:

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t\right)U(t)_I.$$

Operátor  $U(t)_I$  určuje časový vývoj stavu v interakční reprezentaci, podle předchozího:

$$i\hbar\frac{\partial U(t)_I}{\partial t} = V(t)_IU(t)_I \quad (3.25)$$

$V(t)_I$  je řešením této rovnice s počáteční podmínkou:

$$U(0)_I = 1.$$

Vzhledem k tomu, že rovnice obsahuje závislosti na obou členech je výhodné řešit ji poruchovou torií.

Pro diskusi řešení rovnici nejprve formálně zintegrujeme:

$$U(t)_I = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t V(\tau)_IU(\tau)_I d\tau.$$

Tato integrální rovnice obsahuje neznámou funkci i v integrandu, její řešení lze provést iterací.

Je-li  $V(t) = 0$ , potom  $U(t)_I = 1$ . Je-li  $V(t)$  dostatečně malý potom  $U(t)_I$  se málo liší od 1, v takovém případě lze psát:

$$U(t)_I = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t V(\tau)_I d\tau$$

Pokud takto získaný člen substituujeme znovu do rovnice, a provedeme více iterací, získáme lepší aproximaci. Výpočet je vlastně aplikací Dysonova rozvoje.

Nyní odvodíme pohybovou rovnici pro matici hustoty. Aplikujeme odvozené vztahy na matici hustoty ve Schrödingerově reprezentaci:

$$\rho(t)_I = \sum_n W_n |\psi(t)_{n,I}\rangle \langle \psi(t)_{n,I}|.$$

V interakční reprezentaci je matice hustoty definována:

$$\rho(t)_I = \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t\right)\rho(t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t\right)$$

takže:

$$\rho(t)_I = U(t)_I\rho(0)_IU(t)_I^\dagger$$

s

$$\rho(0) = \rho(0)_I.$$

Substitucí  $\rho(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t\right)\rho(t)_I\exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t\right)$  do Liouvilovy rovnice získám její tvar v interakční reprezentaci:

$$i\hbar\frac{\partial \rho(t)_I}{\partial t} = [V(t)_I, \rho(t)_I].$$

Tuto rovnici opět převedu do integrálního tvaru:

$$\rho(t)_I = \rho(0)_I - \frac{i}{\hbar} \int_0^t [V(\tau)_I, \rho(\tau)_I] d\tau$$

a provedu obdobnou aproximaci jako dříve: nechť pro  $t \geq j\epsilon$   $V(t) = 0$ , potom  $\rho(t)_I = \rho(0)_I$ . Bude-li pro  $t > 0$  rozptyl  $V(t)$  malý,  $\rho(t)_I$  se nebude výrazně lišit od  $\rho(0)_I$ , potom lze psát:

$$\rho(t)_I = \rho(0)_I - \frac{i}{\hbar} \int_0^t [V(\tau)_I, \rho(0)_I] d\tau,$$

iterací lze docílit lepší aproximace.

## Kapitola č. 4

### Působení projekčních operátorů na matici hustoty

**Obsah:** Nejprve se stručně zmíním o kvantové statistice. Zavedu entropii kvantového systému jako funkci matice hustoty. Dále se budu věnovat kvantovým obvodům.

Použitá literatura: (6), (7), (8), (9), (10).

Korelace je základní vlastnost dvoukomponentového systému. Mírou informace o systému uložené v matici hustoty je *von Neumannova entropie*:

$$S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho).$$

Pro čistý stav je  $S$  nulová a pro smíšené stavy je pozitivní. Navíc je invariantní vůči unitárním transformacím. Označím-li  $a, b$  podsystémy daného systému, potom:  $S_{a(b)} = -\text{Tr}(\rho_{a(b)} \ln \rho_{a(b)})$ .

*Araki a Lieb* dokázali nerovnost:

$$|S_a - S_b| \leq S \leq S_a + S_b.$$

Její důležitým důsledkem je skutečnost, že pokud je výsledná entropie systému  $S = 0$ , tedy výsledný stav je čistý, jsou entropie obou podsystémů (ne nutně v čistých stavech) stejné.

Entropické míry informace dobře fungují pro čisté stavy. Obecně míry informace pro více jak dva systémy či pro smíšené stavy nejsou zatím dostatečně prozkoumány.

Množství informace, ztracené tím, že podsystémy přijdou o vzájemnou korelaci odráží *index korelace*  $I_c = Q - (Q_a + Q_b)$  kde  $Q = S^{max} - S$ . Celkem  $I_c = S^{max} - S - (S_a^{max} - S_a + S_b^{max} - S_b) = S_a + S_b - S$  a lze jej rozšířit na  $N$ -komponentový systém:  $I_c = \sum_{j=1}^N S_j - S$ . Je-li  $S_b \geq S_a$ , potom z Araki-Liebovi nerovnosti plyne:  $S_a - S \leq S_b$ , tedy  $I_c \leq 2S_b$ . Systém nabývá  $I_c^{max}$  pokud  $S_a = S_b$  t.j  $S = 0$  tedy pokud je stav čistý.

Velikost indexu korelace závisí od charakterů obou podsystémů. Optimálně korelovaný dvoukomponentový systém je v čistém stavu a entropie jednoho z podsystémů je maximální.

Stav s maximální entropií při dané střední energii je popsán maticí hustoty:

$$\rho_{th} = Z^{-1}(\beta) e^{-\beta H}$$

kde  $Z(\beta)$  je partiční funkce a  $H$  je hamiltonián systému,  $\beta$  je inverzní teplota. Maximálně korelovaný stav je čistý a oba podsystémy vykazují termální charakter, takové stavy se v kvantové statistické mechanice nazývají *termopole*. Termopolní vakuový stav představuje nejsilněji korelovaný stav dvou stejných kvantových systémů. Termopolní vakuový systém je dán:  $|O(\beta)\rangle = Z^{-1/2}(\beta) \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n, \bar{n}\rangle$  kde  $|n\rangle, |\bar{n}\rangle$  představují reálný a fiktivní prostor, pomocí něhož je systém popsán.

*Bogoliubova transformace* smíchává reálný a fiktivní systém (ty slouží k dobrému popisu termopole):  $|O(\beta)\rangle = e^{\theta(\beta)(a^\dagger \bar{a}^\dagger - a \bar{a})}$  kde  $\tanh[\theta(\beta)] = \exp(-\beta \omega/2)$  a je základní transformací termopolního formalizmu.

Dvumódové stlačené stavy vakua vznikají působením Bogoliubovy transformace na koherentní stavy vakua. Lze ukázat, že v tomto případě fáze a počet fotonů obsahují každý polovinu informace o korelaci mezi módy. Proto jsou dvumódové stavy vakua nejsilněji korelované stavy světla.

Kromě absolutní míry korelace jakou je index korelace se zavádí též *Shannonův index*  $I_c(M, N)$ , který vyjadřuje míru korelace mezi  $M, N$  dvěma konkrétními pozorovatelnými na podsystémech  $a, b$ .

Zavedme  $Q_a(M) = S^{max}(M) + \sum_\mu \langle \mu | \rho_a | \mu \rangle \ln \langle \mu | \rho_a | \mu \rangle$ , kde  $|\mu\rangle$  značí vlastní vektor  $M$  a  $S^{max}$  je maximální entropie systému svázaná s pozorovatelnou.

*Vzájemná Shannonova entropie* systému pro pozorovatelné  $M, N$  na podsystémech  $a, b$  je:

$$S(M, N) = - \sum_\mu \sum_\nu \rho_{\mu\nu} \ln \rho_{\mu\nu}, \quad \rho_{\mu\nu} = \langle \mu | \langle \nu | \rho | \nu \rangle | \mu \rangle$$

kde  $|\nu\rangle$  je vlastní stav  $N$ .

$I_c(M, N) = S_a(M) + S_b(N) - S(M, N)$ . Pomocí diagonálního tvaru matice hustoty systému a diagonálních tvarů redukovanych matic hustoty podsystemů lze odvodit *modifikovanou Araki-Liebovu nerovnost*:

$$\max(S_a(M), S_b(N)) \leq S(M, N) \leq S_a(M)S_b(N).$$

Obdobně jako v předchozím lze odvodit, že systém optimálně korelovaných pozorovatelných musí mít stejnou neuspořádanost, Shannonovu entropii v každé pozorovatelné. Pro každý pár pozorovatelných lze ukázat, že  $I_c(M, N) \leq I_c$ , což dobře odpovídá faktu, že měření dvou pozorovatelných nepokrývá větší informaci než korelace systému samotná. Je-li stav čistý je  $I_c(M, N) \leq \frac{I_c(\text{čistý})}{2}$ .

Shannonův index lze považovat za charakteristiku nezávislosti dvou pravděpodobnostních distribučních funkcí. Za míru korelace jsme považovali  $I_c$ . Pomocí něho lze určit podmínku optimální korelace. Lze ovšem přejít k jiné míře  $Q$ , která bude odrážet korelaci ve vztahu k pozorovatelným.

Definujme index korelace  $r := \frac{\Delta(X, Y)}{\Delta X \Delta Y}$  kde  $\Delta(X, Y) = \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle$   $\Delta X = (\langle X^2 \rangle - (\langle X \rangle)^2)^{1/2}$ ,  $X, Y$  jsou dané pozorovatelné. Pro korelaci dvou částic se spiny položíme:

$$Q := \frac{9}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' r^2(\theta, \phi, \theta', \phi')$$

kde  $\theta, \phi$  představují orientaci analyzátorů spinu v systému a  $\theta', \phi'$  v systému b. Lze ukázat, že  $Q$  je opravdu mírou korelace v souladu s  $I_c$ .

### Kvantové obvody

Boolovské brány a obvody vytváří strukturu pro popis obvodů klasické elektroniky. V následujícím textu se budu věnovat jejich kvantovému analogu. V klasické teorii je základním nosičem informace bit, který nabývá symbolů 0 nebo 1. Jeho kvantovým analogem je čistý stav dvoustavového systému, již dříve uvedený qubit  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  kde  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Cennost kvantových obvodů spočívá v tom, že mohou obsahovat exponenciálně méně bran než jejich klasické protějšky. Vzhledem k rozlišitelnosti složek  $|0\rangle, |1\rangle$  lze totiž pracovat i se superpozicemi těchto ketů, což v klasické teorii není možné. Motivací pro studium kvantových bran a obvodů je jejich fyzikální realizace, která je zmíněna na modelu protonu v magnetickém poli.

Logické (zhledem k Boolovské dvouhodnotové logice) brány mohou být obecně vratné či nevratné. U *vratných bran* ze znalosti výstupu můžeme jednoznačně určit vstup, u *nevratných bran* to nejde. AND, OR, NOR-brány patří mezi nevratné logické brány.

Podívejme se nyní na přehled nejpoužívanějších vratných logických bran, index  $i$  značí vstup,  $f$  výstup:

N-brána (NOT): jednobitová

$$a_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$a_f = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

CN-brána (CONTROL-NOT): dvoubitová, zobrazuje kontrolní bit (a), terčový bit (b) na sebe:

$$a_f = a_i$$

$$b_f = \begin{cases} b_i, & \text{když } a_i = 0; \\ \bar{b}_i, & \text{když } a_i = 1 \end{cases}$$

ve smyslu Boolovského logického součtu:  $b_f = a_i \oplus b_i$ .

XOR $\equiv$ CCN-brána (CONTROL-CONTROL-NOT): tříbitová, zobrazuje dva kontrolní bity (a,b), jeden terčový bit (c) na sebe:

$$a_f = a_i, \quad b_f = b_i$$

$$c_f = \begin{cases} \bar{c}_i, & \text{když } a_i = b_i = 1; \\ c_i, & \text{jinak} \end{cases}$$



ve smyslu Boolovského logického součinu a součtu:  $c_f = a_i b_i \oplus c_i$ . Napíšu-li si pravdivostní tabulku hodnot této brány, uvidím, že je vratná. Navíc je univerzální v tom smyslu, že pro:  $a_i = b_i = 1$  obdržím na c N-bránu. Pro  $a_i = 1$  obdržím CN-bránu. Pro  $c_i = 0$  obdržím AND-bránu.

F-brána (FREDKINOVA): je tříbitová, kontrolní bit (a), dva terčové (b,c):

$$a_f = a_i$$

$$\begin{pmatrix} b_f \\ c_f \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} b_i \\ c_i \end{pmatrix}, & \text{když } a_i = 0; \\ \begin{pmatrix} c_i \\ b_i \end{pmatrix}, & \text{když } a_i = 1 \end{cases}$$

je vratná. Je univerzální v tom smyslu, že pro  $c_i = 0$  získám AND-bránu.

*Kvantová brána* s n vstupy a n výstupy je určena unitárním operátorem  $U : \mathcal{H}_{\epsilon^{\setminus}} \rightarrow \mathcal{H}_{\epsilon^{\setminus}}$  a reprezentována unitární maticí řádu  $2^n$ .

Nyní následuje přehled základních kvantových bran.

N-brána: Zobrazuje z  $\mathcal{H}_2$  do  $\mathcal{H}_2$ , qubit na qubit. Dopadající foton-qubit, který je v čistém stavu:  $c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ ,  $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$  přejde působením N-brány:  $|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$  v  $c_0|1\rangle + c_1|0\rangle$ . V maticové reprezentaci:  $|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  je N-brána reprezentována:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Unitarita N-brány je zřejmá.

CN-brána: Pokud užiji přiřazení:

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |0\rangle, & |01\rangle &\rightarrow |1\rangle, \\ |10\rangle &\rightarrow |2\rangle, & |11\rangle &\rightarrow |3\rangle \end{aligned}$$

je maticová reprezentace:

$$CN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Unitarita je zřejmá.

Pro tříqubitové brány CCN a F napíšu pouze jejich Dirakův tvar:

$$CCN = |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| + |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 110|,$$

dva qubity zleva jsou kontrolní.

$$F = |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| + |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 101| + |111\rangle\langle 111|,$$

levý qubit je terčový. Unitarita obou bran je zřejmá.

Zajímavé jsou fyzikální realizace bran. Zabýváme se nyní protonem se spinem  $1/2$  v homogenním magnetickém poli  $\vec{B}$  ve směru osy z. Schrödingerova časová rovnice je:  $i\hbar\dot{\psi} = H\psi$ , kde  $\psi(t) = c_0(t)|0\rangle + c_1(t)|1\rangle$ ,  $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ .

Hamiltonián systému je  $H = -\gamma\hbar BI^z$ ,  $\gamma$  je protonový gyromagnetický poměr,  $\omega_0 = \gamma B$  je vlastní frekvence systému.  $I^z = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$  určuje z-tovou komponentu spinu.

Řešením Schrödingerovy rovnice získám časový vývoj:  $\psi(t) = c_0(0)e^{i\omega_0 t/2}|0\rangle + c_1(0)e^{-i\omega_0 t/2}|1\rangle$ .

Pro operátory průmětu spinu do os x, y dostanu:  $I^x = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$   $I^y = \frac{i}{2}(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|)$ .

Jednoduchým výpočtem obdržíme střední hodnoty složek spinu:

$$\begin{aligned}\langle I^x \rangle &= a \cos(\omega_0 t + \varphi), \\ \langle I^y \rangle &= -a \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ \langle I^z \rangle &= \frac{1}{2}(|c_0|^2 - |c_1|^2)\end{aligned}$$

kde  $c_0(0)c_1^*(0) = ae^{i\varphi}$ .

Nyní se zabýváme případem, kdy magnetické pole bude příčně kruhově polarizované:  $B^x = h \cos \omega t$ ,  $B^y = -h \sin \omega t$ . V tomto případě je  $H = -\gamma \hbar \vec{B} \cdot \vec{I} = -\hbar \{ \omega_0 (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) + \Omega (e^{i\omega t} |0\rangle\langle 1| + e^{-i\omega t} |1\rangle\langle 0|) \}$  kde  $\Omega = \gamma h$  je tzv. Rabiho frekvence, která popisuje přechod mezi stavy  $|1\rangle$  a  $|0\rangle$ ,

$$\omega_0 \gg \Omega_0.$$

Substitucí

$$\begin{aligned}c_0 &= c'_0 e^{i\omega t/2}, \\ c_1 &= c'_1 e^{i\omega t/2}\end{aligned}$$

přejdu do souřadného systému, který rotuje v rezonanci s magnetickým polem. V tomto souřadném systému mám pouze příčné konstantní magnetické pole s amplitudou  $h = \Omega/\gamma$ : Pokud na jistou dobu  $c'_i \rightarrow c_i$ , potom je-li systém v rezonanci t.j.  $\omega = \omega_0$ :

$$\begin{aligned}c_0(t) &= c_0(0) \cos \frac{\Omega t}{2} + ic_1(0) \sin \frac{\Omega t}{2}, \\ c_1(t) &= c_0(0) \sin \frac{\Omega t}{2} + ic_1(0) \cos \frac{\Omega t}{2}.\end{aligned}$$

V čase  $t=0$  je spin v základním stavu:  $c_0(0) = 1, c_1(0) = 0$ . Pokud bude doba působení této transformace  $t_1 = \pi/\Omega$ , potom  $c_0(t_1) = 0, c_1(t_1) = i$ . Tímto jsme excitovali systém ze základního stavu, použili jsme tzv.  $\pi$ -puls.

Naopak z excitovaného stavu  $c_0(0) = 0, c_1(0) = 1$  akcí  $\pi$ -pulsu přejdu do základního stavu  $c_0(t_1) = i, c_1(t_1) = 0$ .  $\pi$ -puls slouží jako N-brána.

Analogicky lze zavést  $\pi/2$ -puls, který převede systém ze základního či excitovaného stavu do superpozice základního a excitovaného stavu se stejnými váhami.

Pokud se podíváme na střední hodnoty složek spinu získáme pro:

$$t = 0 : \langle I^z \rangle = 1/2, \pi/2 - \text{puls} : \langle I^y \rangle = 1/2, \pi - \text{puls} : \langle I^z \rangle = -1/2.$$

Nyní se podívám na fyzikální realizaci operátorů:  $A_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_j\rangle\langle 0_j| + |0_j\rangle\langle 1_j| + |1_j\rangle\langle 0_j| - |1_j\rangle\langle 1_j|)$ ,  $B_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_j 0_k\rangle\langle 0_j 0_k| + |0_j 1_k\rangle\langle 0_j 1_k| + |1_j 0_k\rangle\langle 1_j 0_k| + e^{i\theta_{jk}} |1_j 1_k\rangle\langle 1_j 1_k|)$ , které jsou nutné pro provedení diskrétní Fourierovy transformace.

Nejprve  $A_j$ : Zavedme elektromagnetické pole:

$$B_x = h \cos(\omega t + \varphi), \quad B_y = -h \sin(\omega t + \varphi),$$

$$H = -\gamma \hbar \vec{B} \cdot \vec{I} = -\hbar \{ \omega_0 (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) + \Omega (e^{i\omega t + \varphi} |0\rangle\langle 1| + e^{-i\omega t + \varphi} |1\rangle\langle 0|) \}.$$

Zavedme transformaci systému do stavu, který rotuje v rezonanci s magnetickým polem, přitom směr rotujícího magnetického pole svírá s x-ovou osou rotujícího souřadného systému úhel  $\varphi$ . Ze Schrödingerovy rovnice analogickým výpočtem jako dříve vyjde:

$$\begin{aligned}c_0(t) &= c_0(0) \cos \frac{\Omega t}{2} + ic_1(0) e^{i\varphi} \sin \frac{\Omega t}{2}, \\ c_1(t) &= c_0(0) \sin \frac{\Omega t}{2} + ic_1(0) e^{-i\varphi} \cos \frac{\Omega t}{2}.\end{aligned}$$

Akce  $\pi/2$ -pulsu,  $\Omega t = \pi/2$  a  $\varphi = \pi/2$  se projeví. Je-li systém v základním stavu  $c_0(0) = 1, c_1(0) = 0$  potom  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Je-li systém v excitovaném stavu  $c_0(0) = 0, c_1(0) = 1$ , potom  $c_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Podívejme se na akci:  $A_j|0_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_j\rangle + |1_j\rangle)$ ,  $A_j|1_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_j\rangle - |1_j\rangle)$ . Porovnáme-li ji s akcí  $\pi/2$ -pulsu s fází  $\varphi = \pi/2$ :  $|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |1\rangle)$ . Odlišnost v druhém členu transformace mohu odstranit pokud zavedu ještě třetí "nejvyšší", pomocnou hladinu  $|2_j\rangle$ . Nechť frekvence mezi přechody hladin:  $|0_j\rangle \leftrightarrow |2_j\rangle$ ,  $\omega_{02}$  a  $|1_j\rangle \leftrightarrow |2_j\rangle$ ,  $\omega_{12}$  jsou různé. Akce  $2\pi$ -pulsu s frekvencí  $\omega_{12}$  ponechá systém v základním stavu  $|0_j\rangle$  beze změny, je-li v excitovaném stavu  $|1_j\rangle$  jeho transformace je výsledkem výše uvedeného řešení Schrödingerovy rovnice kde  $c_0 \rightarrow c_2$ :  $c_1 = -c_1, c_2 = 0$ .  $2\pi$ -puls představuje transformaci  $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$ . Nyní aplikuji  $\pi/2$ -puls s frekvencí  $\omega_{01}$  a fází  $\pi/2$ , obdržím:  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Vzhledem k akci  $\pi$ -pulsu je excitovaný stav:  $c_0(0) = 0, c_1(0) = -1$ . Akcí  $\pi/2$ -pulsu je:  $c_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, c_1(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Tímto získám požadovanou transformaci. Zápisem působení pulsů v Diracově notaci vyjde původní vzorec  $A_{ij}$ .

Pro realizaci brány  $B_{jk}$  předpokládejme existenci dvou tříhladinových systémů, které přísluší dvěma různým atomům. Přitom předpokládejme, že energie stavu jednoho ( $k$ -tého) atomu závisí od energie druhého ( $j$ -tého) atomu. Označení je analogické předchozímu. Namísto jedné frekvence přechodu  $\omega^k(1_k \leftrightarrow 2_k)$  existují dvě  $\omega_{0,1}^k(1_k \leftrightarrow 2_k)$ , kde dolní indexy odpovídají základnímu a prvnímu excitovanému stavu  $j$ -tého atomu. Ptejme se po akci  $\pi$ -pulsu s frekvencí  $\omega_1^k$  na  $k$ -tý atom, fáze je nyní nepodstatná. Je-li atom  $j$  v základním stavu, nebo atom  $k$  je v základním stavu či jsou oba zároveň v základním stavu, potom  $\pi$ -puls nemá na systém žádný vliv. Pouze pro stav systému  $|1_k 1_j\rangle$  se jeho akce projeví přechodem stavu  $|1_k\rangle$  do  $|2_k\rangle$ .

Aplikujme nyní na  $k$ -tý atom  $\pi$ -puls s frekvencí  $\omega_1^k$  a fází  $\varphi_1$ . Systém je ve stavu  $|1_k 1_j\rangle$  a substitucí  $c_0 \rightarrow c_1, c_1 \rightarrow c_2$  přejde do stavu  $|2_k 1_j\rangle$  kde  $c_1 = 0, c_2 = ie^{i\varphi_1}$ . Aplikací druhého pulsu přejde zpět na  $|1_k 1_j\rangle$ , nyní  $c_1 = i(e^{i\varphi_1})e^{-i\varphi_2} = -e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, c_2 = 0$ . Výslednou akcí těchto tří pulsů je působení na jediný stav  $|1_k 1_j\rangle$  a je to fázový posun o  $\theta_{jk} = \pi + \varphi_1 - \varphi_2$ . Na dvojici  $j$  a  $k$ -tého atomu jsme provedli transformaci  $B_{jk}$ .

Obě transformace jsou unitární, to je snadné ověřit.

Otázka rozkladu unitární matice na součin malého počtu menších unitárních matic nás přivádí k pojmu obvod.

*Kvantovým obvodem* rozumím soubor propojených kvantových bran. Kvantovou branou rozumím objekt, který má vstup a výstup a který transformuje stav vstupního kvantového systému do výstupního stavu. Hranou rozumím spojnici mezi branou a zbylým obvodem. V místě styku dvou a více hran vznikají uzly.

Významné pro tvorbu obvodů jsou Hadamarovy brány:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, H' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, H'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a též brány rotace:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, R_y(\theta) = \begin{pmatrix} i \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & i \cos \theta \end{pmatrix}, R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Turingův stroj je přístroj obdobný čtecí hlavě a děrnému štítku, kdy hlava čte okýnko po okýnku resp. bit po bitu. Turingův stroj jak v klasické teorii, tak v kvantové s výhodou nahradíme kalsickým boolovským obvodem resp. kvantovým obvodem.

*Kvantový obvod*  $C$  je definován vstupními proměnnými  $x_1, \dots, x_n$  a výstupními proměnnými  $y_1, \dots, y_m$ ,  $m \leq n$ . Vstup  $x \in \{0, 1\}^n$  je reprezentován pravděpodobnostní distribucí  $\rho_x$  definovanou přes  $\{0, 1\}^m$ . Každému vstupu  $x$  odpovídá výstup  $v$ :  $v = \sum_{y \in \{0, 1\}^m} \alpha_y |y\rangle$ ,  $\pi_x(y) = |\alpha_y|^2$  je pravděpodobnost výstupu  $y$  při vstupu  $x$ .  $\pi_x|x \in \{0, 1\}^n$  je distribuce generovaná obvodem  $C$ .

Kvantový obvod  $C$  s  $n$  vstupy nazveme  $(n, t)$  *simulací* kvantového Turingova stroje  $M$ , jestliže pro každý  $x \in \{0, 1\}^n$  pravděpodobnost distribuce  $\rho_x$  generovaná  $C$  je identická distribuci  $M$  po  $t$  krocích se vstupem  $x$ .

*Měřitelné brány* slouží pro výstup kvantového systému do klasického světa. Mezi představitele patří XOR brána. Použití měřitelných bran v kvantových obvodech je důležité např. pro vytvoření posloupností náhodných výsledků měření.

*Kvantový program* je kvantový obvod připojený k nějaké měřitelné bráně.

Kvantové operace se tímto výkladem zdají být spojité. Nyní se budeme věnovat univerzálnosti kvantových bran.

Matice  $M$  je  $\varepsilon$  *blízkou* unitární matici  $U$ , nebo její  $\varepsilon$  aproximací, pokud  $\|U - M\| \leq \varepsilon$ .

Množinu kvantových bran nazývám *univerzální*, jestliže každou unitární transformaci  $U$  na libovolném qubitu mohu s libovolnou přesností nahradit kvantovým obvodem  $C_{U, \varepsilon}$ , který je složen z bran této množiny. Kvantová brána je univerzální pokud sama jako množina bran spojená s konstantními vstupy  $|0\rangle, |1\rangle$  je univerzální.

Například lze ukázat, že každá 3-qubitová brána s unitární maticí:

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & \cos\theta \\ & 0 & 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

kde  $\mathbf{1}$  je jednotková matice čtvrtého řádu, je univerzální pokud  $\theta/\pi$  je iracionální. Pomocí tohoto tvrzení lze ukázat, že 2-qubitová brána :

$$A(\phi, \alpha, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha} \cos\theta & -ie^{i(\alpha-\phi)} \sin\theta \\ 0 & 0 & -ie^{i(\alpha+\phi)} \sin\theta & e^{i\alpha} \cos\theta \end{pmatrix}$$

je univerzální, pokud  $\alpha, \phi, \theta$  jsou iracionální násobky  $\pi$ .

Důkaz je následující. Zřejmě  $A^n(\phi, \alpha, \theta) = A(\phi, n\alpha \bmod 2\pi, n\theta \bmod 2\pi)$ , či-li  $A(\phi, \alpha_1, \theta_1)$  lze pro libovolná  $\alpha_1, \theta_1 \in [0, 2\pi]$  apoximovat pomocí několika  $A(\phi, \alpha, \theta)$  s libovolnou přesností.

Definuji:

$$V(\phi, \alpha, \theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\alpha} \cos\theta & -ie^{i(\alpha-\phi)} \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & -ie^{i(\alpha+\phi)} \sin\theta & e^{i\alpha} \cos\theta \end{pmatrix}.$$

*Repertoárem*  $A$  nazvu množinu unitárních transformací, které mohou být s libovolnou přesností apoximovány sítí tvořenou pouze branami  $A$ . Pro tento případ zřejmě  $A^{-1}(\phi, \alpha, \theta) = A(\phi, 2\pi - \alpha, 2\pi - \theta)$  patří do repertoáru  $A$ . Pokud  $A_{ij}, 1 \leq i \neq j \leq 3$  představuje 2-qubitovou bránu, která má  $i$ -tý kontrolní bit a  $j$ -tý terčový bit, potom:  $V(\phi, \alpha, \theta) = A_{23}(\phi, \alpha/2, \theta/2)A_{13}(\phi, \alpha/2, \theta/2)A_{12}(\phi, \pi/2, \pi/2)A_{23}^{-1}(\phi, \alpha/2, \theta/2)A_{12}(\phi, \pi/2, \pi/2)$ , takže  $V$  je v repertoáru  $A$ .

Označme  $V'$  bránu, která vznikne z  $V$  záměnou druhého a třetího qubitu a nechť matice  $P = V'(\phi, \pi/2, \pi/2)$ .

$$Q = V'(\phi, \pi/2, -\pi/2)V(\phi, \pi/2, -\pi/2)V'(\phi, \pi/2, -\pi/2) \text{ a } T(\phi, \beta) = Q(V(\phi, 0, \beta)P)^2(V(\phi, 0, -\beta))^2Q.$$

$V(\phi - \pi/2, 0, \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\phi, \sqrt{\beta/n})^n$  lze tedy připravit s libovolnou přesností pomocí sítě složené z A.

$R_z(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} [V(\phi, 0, \sqrt{\frac{\beta}{2n}})V(\phi - \frac{\pi}{2}, 0, \sqrt{\frac{\beta}{2n}})V(\phi, 0, -\sqrt{\frac{\beta}{2n}})V(\phi - \frac{\pi}{2}, 0, -\sqrt{\frac{\beta}{2n}})]^n$ . Protože však  $D_\phi = R_z(\frac{\phi}{2})V(\phi, \frac{\pi}{2}, \phi)R_z(-\frac{\phi}{2})$  je A též univerzální.

Mezi významné obvody patří tzv. *aritmické obvody*, které modelují aritmetické operace na číslech. Zápis v dvojkové soustavě lze modelovat souborem qubitů. Mezi nejvýznamější patří binární sčítač, odčítač, násobič, mocnitel. Podrobný rozbor těchto obvodů lze najít v (5).

Nyní přejdeme od čistých stavů ke smíšeným. *Superoperátorová brána* G typu (k,l) je striktně pozitivní operátor, který zobrazuje matici hustoty k qubitů na matici l qubitů. Její působení na matici hustoty označím  $G \circ \rho$ .

Speciální případy představují unitární a měřitelné brány. Unitární brána U jako superoperátor má tvar:  $U \circ \rho = U\rho U^\dagger$  kde pro čistý stav systému  $|\phi\rangle$  je  $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ . Měřitelná brána reprezentuje pravděpodobnostní projekci na množinu vzájemně ortogonálních podprostorů, které tvoří smíšený stav. Obecně superoperátory nejsou reverzibilní.

**Tvrzení:** Následující podmínky jsou ekvivalentní pro každé dva Hilbertovy prostory  $\mathcal{H}_n$  a  $\mathcal{H}_m$  a množiny lineárních operátorů  $L(\mathcal{H}_n)$  a  $L(\mathcal{H}_m)$ .

1. Superoperátor  $T : L(\mathcal{H}_n) \rightarrow L(\mathcal{H}_m)$  zachovává stopu a je striktně pozitivní.

2. Existuje Hilbertův prostor F s  $\dim(F) \leq \dim(\mathcal{H}_n)\dim(\mathcal{H}_m)$  a unitární rozšíření  $E : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n \otimes F$  takové, že  $T\rho = Tr_F(E\rho E^\dagger)$  pro všechna  $\rho \in L(\mathcal{H}_n)$ .

Speciálním případem superoperátorů jsou *kódovací a dekódovací přístroje*. Pomocným qubitům, které hrají roli v rozšiřování dimenzí Hilbertových prostorů se říká *ancilla qubity*.

*Kvantovým superoperátorovým obvodem* nad množinou superoperátorů G se rozumí acyklický graf jehož uzly spojují superoperátory z G tak, že počet vstupů k a počet výstupů l tvoří superoperátor typu (k,l).

Jestliže Q je kvantový superoperátorový obvod a  $G_1, \dots, G_t$  je topologická třída jeho bran, potom:  $Q \circ \rho = G_t \circ G_{t-1} \circ \dots \circ G_1 \circ \rho$ . Jestliže  $G_1, G_2$  jsou superoperátory působící na matici hustoty  $\rho$  potom  $G_1 \circ G_2 \circ \rho = G_2 \circ G_1 \circ \rho$ .

**Tvrzení:** Nechť Q je kvantový obvod s n vstupy a m výstupy. Pravděpodobnostní distribuce  $f_Q : \{0,1\}^n \rightarrow [0,1]^{\{0,1\}^m}$  Q-výpočtu je dána:  $f_Q(i)(j) = \langle j|(Q \circ |i\rangle\langle i|)_A|j\rangle$  kde A je množina všech možných výstupů.

**Tvrzení:** Jestliže  $G : L(H_{2n}) \rightarrow L(H_{2m})$  je superoperátorová brána typu (n,m) potom existuje unitární kvantová brána  $U_g$  na  $2n+m$  qubitech taková, že pro každou matici hustoty řádu n je  $G \circ \rho = (U_g \circ (\rho \otimes |0^{(n+m)}\rangle\langle 0^{(n+m)}|))_A$  kde A je množina prvních n qubitů.

Důsledkem je **tvrzení:** Model kvantového obvodu se smíšenými stavy je polynomiálně ekvivalentní co do mocniny výpočtu standartnímu modelu kvantových obvodů přes čisté stavy.

## Kapitola č. 5

### Nelineární zobrazení matic hustoty

**Obsah:** Nejprve se budu zabývat jistým nelineárním zobrazení systému dvou částic se spinem  $1/2$ . Ukážu, že toto zobrazení s určitou pravděpodobností úspěchu lze použít jak pro rozlišení neortogonálních stavů částic se spinem  $1/2$ , tak například i pro tvorbu dobré aproximace Bellovského stavu  $|\Psi^-\rangle$  z libovolného vstupního stavu systému. Dále se budu zajímat o optimalizaci procesu entanglementu, zavedu pojem obecného kvantového procesu a uvedu jejich základní klasifikaci.

Použitá literatura: (11), (12).

#### *Nelineární transformace stavů částic se spinem $1/2$*

Zabýváme se následující transformací:

$$\rho^{in} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \rho^{out} = \begin{pmatrix} \rho_{11}^2 & \rho_{12}^2 \\ \rho_{21}^2 & \rho_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Tato transformace je nelineární a nezachovává stopu. To, že se dnes neumí fyzicky realizovat, ovšem neznamená, že není fyzikální. Význam této transformace je z hlediska teorie kvantové informace značný, což uvidíme později.

Abychom mohli uskutečnit takovou transformaci, nejprve potřebujeme dvě identické, nezávislé kopie částice se spinem  $1/2$  ve stavu  $\rho^{in}$ . Předpokládejme, že je to možné. První krok spočívá v tom, že:  $\rho^{in} \rightarrow \rho^{in} \otimes \rho^{in}$ . To je snadné, protože tak vypadá současný stav dvoučásticového systému, není třeba nic provádět. Přesto je to nejpodstatnější krok. Další krok spočívá v XOR interakci mezi každým spinem v páru. To je nejobtížnější část celé transformace. XOR mění hodnotu druhého, terčového spinu tehdy a jen tehdy, když první, zdrojový spin je  $+$ . Na dvojici fotonů působí unitární transformace  $U_{XOR}$ :

$$|++\rangle \rightarrow |+-\rangle,$$

$$|+-\rangle \rightarrow |++\rangle,$$

$$|-+\rangle \rightarrow |-+\rangle,$$

$$|--\rangle \rightarrow |--\rangle$$

nebo v maticové reprezentaci:

$$U_{XOR} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_x \\ \sigma_x & \sigma_x \end{pmatrix}$$

kde

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že XOR je základní stavební kámen pro kvantové procesory. Třetí krok je lehký: Změřit komponentu spinu druhé částice v páru ve směru osy  $z$  a ponechat dvojici jen tehdy, pokud je  $-$ . Zdrojový spin se transformuje:  $\rho_{source}^{in} \rightarrow \rho_{source}^{out}$ . Terčový spin je vždy s orientací  $-$ :  $\rho_{target}^{in} \rightarrow \rho_{target}^{out} = |-\rangle\langle -| = P_-$ . Celkově lze proces popsat:

$$\begin{aligned} & (1 \otimes P_- (U_{XOR}(\rho^{in} \otimes \rho^{in})U_{XOR}^\dagger)1 \otimes P_-) = \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^2 & \rho_{11}\rho_{12} & \rho_{12}\rho_{11} & \rho_{12}^2 \\ \rho\rho_{21} & \rho_{11}\rho_{22} & \rho_{12}\rho_{21} & \rho_{12}\rho_{22} \\ \rho\rho_{21} & \rho_{21}\rho_{12} & \rho_{22}\rho_{11} & \rho_{22}\rho_{12} \\ \rho_{21}^2 & \rho_{21}\rho_{22} & \rho_{22}\rho_{21} & \rho_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \rho^{out} \otimes P_-.$$

To znamená, že odesílatel je schopen zakodovat dvoubitovou informaci do zcela provázaného systému pouze manipulací s jedním qubitem.

Transformaci lze použít pro *identifikaci stavů*. Pomocí ní lze transformovat neortogonální stavy na ortogonální.

Neortogonální stavy nelze rozlišit se 100% pravděpodobností, tato transformace tedy není ve sporu s kvantovou teorií, když je s jistou nenulovou pravděpodobností neúspěšná.

Polarizační tvar matice hustoty pro systém se spinem 1/2 je:  $\rho = \frac{1}{2}(1 + P \cdot \sigma)$  kde P je vektor polarizace a  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  jsou Pauliho matice.

Stavy dvou 1/2-spinových částic  $|a\rangle, |b\rangle$  jsou ortogonální pokud  $P_a = -P_b$ . Zabýváme se dvěma čistými stavy  $|\Psi_1^{in}\rangle$  a  $|\Psi_2^{in}\rangle$ , s polarizačními vektory  $P_1^{in}, P_2^{in}$  vyjádřenými ve sférických souřadnicích:

$$(P_i^{in})_x = \sin \theta_i \cos \Phi_i,$$

$$(P_i^{in})_y = \sin \theta_i \sin \Phi_i,$$

$$(P_i^{in})_z = \cos \theta_i.$$

Aplikací transformace na  $|\Psi_1^{in}\rangle$  a  $|\Psi_2^{in}\rangle$ :

$$(P_i^{out})_x = \frac{1}{2} \sin^2 \theta_i \cos 2\Phi_i,$$

$$(P_i^{out})_y = \frac{1}{2} \sin^2 \theta_i \sin 2\Phi_i,$$

$$(P_i^{out})_z = \cos \theta_i.$$

Aby výsledné stavy  $|\Psi_1^{out}\rangle, |\Psi_2^{out}\rangle$  byly ortogonální, musí  $P_1^{out} = -P_2^{out}$ , t.j.:

$$\cos \theta_1 = -\cos \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 + \pi,$$

$$\theta \equiv \theta_1 = \theta_2 - \pi,$$

$$\cos 2\Phi_1 = -\cos 2\Phi_2, \quad \sin 2\Phi_1 = -\sin 2\Phi_2$$

$$\Phi \equiv \Phi_1 = \Phi_2 - \frac{\pi}{2}.$$

Odpovídající počáteční stavy jsou:

$$\rho_1^{in} = \frac{1}{2}(1 + \sin \theta \cos \Phi \sigma_x + \sin \theta \sin \Phi \sigma_y + \cos \theta \sigma_z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & \sin \theta e^{-i\Phi} \\ \sin \theta e^{i\Phi} & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} = |\Psi_1^{in}\rangle \langle \Psi_1^{in}|,$$

$$\rho_2^{in} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & i \sin \theta e^{-i\Phi} \\ -i \sin \theta e^{i\Phi} & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} = |\Psi_2^{in}\rangle \langle \Psi_2^{in}|,$$

$\rho_1^{in} \rho_2^{in} \neq 0$ . Pravděpodobnost překryvu  $|\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle|^2$  vypočtu z  $\rho_1^{in} \rho_2^{in} \rho_1^{in} = |\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle|^2 \rho_1^{in}$ , vyjde:  $|\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle| = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$ . Odpovídající  $\rho_1^{out} \rho_2^{out} = 0$ .

Tento postup tedy umožňuje s jistotou rozlišit určité neortogonální stavy. Pokud je proces neúspěšný, nemám o stavu systému žádnou informaci. Pravděpodobnost úspěchu je :

$$P_{succes} = \frac{1}{2}(Tr(\rho_1^{out}) + Tr(\rho_2^{out})) = 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - |\langle \psi_1^{in} | \psi_2^{in} \rangle|^2$$

Jiný způsob pro identifikaci neortogonálních stavů je tzv. měření pozitivních operátorů (POVM), které je zobecněním standartně používaných projektorů.

LIGe je speciální druh POMV, který již byl experimentálně proveden. V případě LIGe je podstata v tom, že dva neortogonální spiny 1/2  $|\psi_1^{in}\rangle, |\psi_2^{in}\rangle$  leží v rovině určené dvěma ortogonálními vektory  $|\Phi_1\rangle$  a  $|\Phi_2\rangle$  t.j.:

$$|\Psi_1^{in}\rangle = \cos \frac{\alpha}{2} |\Phi_1\rangle + \sin \frac{\alpha}{2} |\Phi_2\rangle,$$

$$|\Psi_2^{in}\rangle = \cos \frac{\alpha}{2} |\Phi_1\rangle - \sin \frac{\alpha}{2} |\Phi_2\rangle$$

s překryvem  $|\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle| = \cos \alpha$ . Vtip je v tom, že rozšíříme dimenzi stavového prostoru o vektor  $|\Phi_0\rangle$  kolmý k  $|\Phi_1\rangle$  i  $|\Phi_2\rangle$  a provedeme rotaci kolem  $|u\rangle \equiv |\Phi_1\rangle - |\Phi_2\rangle$  o úhel  $\theta$ ,  $\cos \theta = \tan(\frac{\alpha}{2})$ . Touto rotací stavy přejdou v:

$$|\Psi_1^{out}\rangle = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} |\Phi_1\rangle + \sqrt{\cos \alpha} |\Phi_0\rangle,$$

$$|\Psi_2^{out}\rangle = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} |\Phi_2\rangle + \sqrt{\cos \alpha} |\Phi_0\rangle.$$

Protože  $|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle$  jsou ortogonální lze je standartním způsobem rozlišit. Pokud na výsledném stavu naměříme stav  $|\Phi_1\rangle$  či  $|\Phi_2\rangle$ , potom víme, že odpovídající počáteční stav byl  $|\psi_1^{in}\rangle$  resp.  $|\psi_2^{in}\rangle$  a stavy mám rozlišeny. Takový výsledek nastává s pravděpodobností  $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ . Pokud naměřím  $\Phi_0$ , o tom který ze stavů jsem transformoval nevím nic, to nastává s pravděpodobností  $\cos \alpha$ . Pravděpodobnost identifikace stavu je  $1 - |\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle|$ . Abychom porovnali předchozí nelineární metodu a LIGe, zjistíme co pro LIGe znamená, když máme k dispozici dvě identické nezávislé kopie stavu. S tímto vybavením můžeme provést buď dvě nezávislá LIGe měření nebo jedno nelineární měření. V prvním případě je pravděpodobnost úspěchu identifikace rovna součtu pravděpodobnosti úspěchu v prvním měření a pravděpodobnosti úspěchu druhého měření za podmínky selhání prvního měření, t.j.:

$$\begin{aligned} P^{2 \times LIGe}(success) &= P_1(success) + P_1(failure)P_2(success) = \\ &= 1 - |\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle| + |\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle|(1 - |\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle|) = 1 - |\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle|^2 \end{aligned}$$

V druhém případě provádím LIGe měření na  $|\Psi_i^{in}\rangle \otimes |\Psi_i^{in}\rangle$ . Pravděpodobnost úspěchu identifikace:

$$P^{1 \times LIGe}(success) = 1 - |\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle|^2,$$

neboť pravděpodobnost překryvu mezi  $|\Psi_1^{in}\rangle \otimes |\Psi_1^{in}\rangle, |\Psi_2^{in}\rangle \otimes |\Psi_2^{in}\rangle$  je  $|\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle|^2$ .

Nyní se zajímejme o optimalizaci procesu rozlišení. Když požadují rozlišovací bezchybný proces, očekáváme tři odpovědi: "systém je ve stavu  $|\Psi_1^{in}\rangle$ ", "systém je ve stavu  $|\Psi_2^{in}\rangle$ ", nebo "nevím".

Operátory:

$$P_{-|\Psi_1^{in}\rangle} = 1 - |P_{S1}^{in}\rangle \langle \Psi_1^{in}|,$$

$$P_{-|\Psi_2^{in}\rangle} = 1 - |P_{S2}^{in}\rangle \langle \Psi_2^{in}|$$

projektují na stavy ortogonální k  $|\Psi_1^{in}\rangle, |\Psi_2^{in}\rangle$  (po řadě). Projektory, které představují filtry odpovídající na uvedené tři otázky jsou po řadě:

$$A_{|\Psi_1^{in}\rangle} = x(1 - |\Psi_2^{in}\rangle \langle \Psi_2^{in}|),$$

$$A_{|\Psi_2^{in}\rangle} = x(1 - |\Psi_1^{in}\rangle \langle \Psi_1^{in}|),$$

$$A_{?} = 1 - A_{|\Psi_1^{in}\rangle} - A_{|\Psi_2^{in}\rangle}.$$

Otázkou je, jaké hodnoty má nabývat  $x$  (stejně pro všechny stavy, neboť pravděpodobnost identifikace stavů  $|\Psi_1^{in}\rangle, |\Psi_2^{in}\rangle$  na prvních dvou operátorech je stejná), aby pravděpodobnost odpovědi "nevím" byla co nejmenší a aby všechny tři operátory byly pozitivní (to z důvodu vazby pravděpodobnosti s vlastními čísly operátorů):

$$x = \frac{1}{1 + |\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle|}.$$

Pravděpodobnost úspěšného rozlišení je:

$$P(success) = 1 - |\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle|.$$

Pokud mám k dispozici dvě kopie počátečního stavu, potom:

$$P(success) = 1 - |\langle \Psi_1^{in} | \Psi_2^{in} \rangle|^2.$$



Nyní se zabýváme *čištěním smíšených stavů* se spinem 1/2.

Za vstupní systém nyní beru smíšené stavy entanglovaných párů částic se spinem 1/2. Mějme k dispozici dva fyzikální nezávislé systémy, každý v tomtéž stavu  $\rho_{in}$ , což je nyní matice  $4 \times 4$  a pro zkonkrétnění problému předpokládejme, že jednu částice z každého páru má vždy k dispozici pozorovatel v A, druhou pozorovatel v B. Zobecnění postupu spočívá v tom, že provedeme nezávislé operace na částicích v A a B, které budou podobné XOR:

$$U_A = \begin{pmatrix} -i\sigma_y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_B = \begin{pmatrix} i\sigma_y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Filtrování je u konce pokud jsou v terčových párech oba spiny směrem  $-$ . To celkem vytváří následující operaci:

$$(1 \otimes P_-)_A (1 \otimes P_-)_B U_A U_B (\rho^{in} \otimes \rho^{in}) U_B^\dagger U_A^\dagger (1 \otimes P_-)_B (1 \otimes P_-)_A.$$

Pro výstupní stav, který je sdílen mezi A a B:

$$\rho^{in} \rightarrow \rho^{out} = \begin{pmatrix} \rho_{11}^2 & -\rho_{12}^2 & \rho_{13}^2 & -\rho_{14}^2 \\ -\rho_{21}^2 & \rho_{22}^2 & -\rho_{23}^2 & \rho_{24}^2 \\ \rho_{31}^2 & -\rho_{32}^2 & \rho_{33}^2 & -\rho_{34}^2 \\ -\rho_{41}^2 & \rho_{42}^2 & -\rho_{43}^2 & \rho_{44}^2 \end{pmatrix}.$$

Transformace zachovává singletní stav  $\psi^-$ . Po transformaci A a B oba provedou na každém spinu svého páru rotaci o  $\pi/2$  kolem osy  $x$ . Rotace rozliší mezi  $\psi^+$  a  $\phi^+$ , aniž by ovlivnila ostatní Bellovské stavy. To co jsme získali je tzv. *čistící schéma*, které čistí vzhledem k singletnímu stavu  $\psi^-$ . Čistící schéma pracuje následovně. Předpokládejme, že počáteční stav  $\rho^{in}$  má čistotu  $F^{in} = \langle \psi^- | \rho^{in} | \psi^- \rangle$  vzhledem k singletnímu stavu. Vezměme dvě kopie  $\rho^{in}$ , provedme transformaci a poté rotaci, čistota  $F_{rot}^{out}$  nového stavu  $\rho_{rot}^{out}$  je větší než  $F^{in}$ , t.j.  $F_{rot}^{out} > F^{in}$ . Když je  $F_{rot}^{out} = 1$  potom stav je čistý a proto není provázán s okolím. Opakováním tohoto procesu včetně rotací vede k zvýšení čistoty stavu, i když se zpočátku procesu mohou vzhledem k volbě počátečního stavu vyskytnout lokální poklesy čistoty, nakonec vždy vzroste. Např. Pro  $F^{in} = 0.51$  po 15 iteracích je  $F^{15} = 0.99997$ .

Pro větší efektivitu (pro více párů) A a B mohou zdrojový pár ponechat, když "terčový pár" dá buď  $++$ , nebo  $--$ .

Poznamenejme, že je možné umocnit prvky vstupní matice na libovolnou přirozenou mocninu  $n+1$ . To se provede tak, že vezmu  $n+1$  kopií  $\rho^{in}$  kde  $n$  kopií působí jako terčové spiny. Použiji potom zobecněný XOR, který mění hodnoty všech terčových spinů tehdy, když zdrojový je  $+$ . Tomu následuje otočení všech terčových spinů dolů.

Je taky možné rozšířit "čtvercování" matice do vyšších dimenzí. Předpokládejme, že vstupní čistý stav má dimenzi  $n$ , t.j.:  $|\psi\rangle = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ . Provedením tenzorového součinu dvou identických stavů dá nový stav:  $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle = (\psi_{11}, \psi_{12}, \dots, \psi_{nn})$  s prvky  $\psi_{11} = (\psi_1)^2, \psi_{12} = \psi_1 \psi_2, \dots, \psi_{nn} = (\psi_n)^2$ . Abychom vybrali umocněné prvky, výsledný stav zrotujeme tak, že:  $\psi_{11} \rightarrow \psi_{1n}, \psi_{22} \rightarrow \psi_{2n}, \psi_{nn} \rightarrow \psi_{nn}$ . Tyto prvky jsou zajímavé. Ostatní mohou libovolně rotovat dokud nepřejdou do stavů:  $\psi_{jn}$ , pro všechna  $j$ . Projekce na  $n$  komponent terčových spinů ponechá terčové spiny  $n$ -stavu, zdrojový spin je ponechán ve stavu, kde každá komponenta je "zkvadrátována".

### Optimální dvoučásticový entanglement pomocí univerzálního kvantového procesu

Entanglement dvoučásticového systému či klonování kvantového systému, to jsou procesy, které mají pro praktické využití teorie kvantové informace velký význam. Úspěšnost jejich provedení není 100% Pro výklad nalezení optimálního postupu jejich provedení zavedu pojem univerzální kvantový proces. *Univerzální kvantový proces* působí na všechny přípustné vstupní stavy kvantového systému stejným způsobem. Takový proces odráží přirozeným způsobem symetrie Hilbertova stavového prostoru, nepoužívá význačné směry. Omezení kladená na tyto procesy plynou z linearity kvantové teorie, tím pádem tyto procesy naráží až na omezení samotné kvantové teorie.

Nejprve se budu zabývat možnými obecnými kvantovými procesy. Dále rozeberu podtřídu těch, které produkují dvoučásticové stavy, a přitom nejsou separovatelné. Ukážu, že pro dimenzi větší než dvě tyto procesy tvoří jednoparametrickou třídu.

Nejprve ilustrativní příklad.

Mějme kvantový systém dvou rozlišitelných částic:

$$\rho_1(\vec{m}) \equiv \rho_{in}(\vec{m}) \otimes \frac{1}{2}\mathbf{1} \quad (5.1)$$

kde vstupní stav první částice je čistý:

$$\rho_{in}(\vec{m}) = |m\rangle\langle m|,$$

určený Blochovým vektorem  $\vec{m}$ .

Stav druhé, referenční částice, je pevný, úplně nepolarizovaný.

$J$  nechť je úhrový angulární moment,  $M \in \{0, \dots, J\}$ .  $P_J = \sum_M |JM\rangle\langle JM|$ . Definuji zobrazení dvoučásticového systému:

$$\rho_1 \rightarrow \rho_2 = \frac{P_J \rho_1 P_J}{\text{Tr}(P_J \rho_1 P_J)}$$

V tomto případě je výchozí hodnota  $J \in \{0, 1\}$ , takže pokud za referenční směr vyberu směr polarizace vstupního stavu jsou přípustné pouze:

$$\rho_2(\vec{m}) = p_1 |J=1M=1\rangle\langle J=1M=1| + (1-p_1) |J=1M=0\rangle\langle J=1M=0| \quad (5.2a)$$

kde  $p_1 = 2/3$ , (vzhledem k tomu, že absolutní hodnota vedlejšího magnetického kvantového čísla nabývá hodnoty 1 ve dvou případech (+1,-1), kdežto 0 jen v jediné (0))

$$\rho_2(\vec{m}) = |J=0M=0\rangle\langle J=0M=0| \quad (5.2b).$$

Oba tyto procesy jsou univerzální, se všemy vstupními stavy se zachází stejným způsobem. U takových operací budu požadovat symetričnost vzhledem k unitárním transformacím vstupních stavů. V naší úloze jsou vstupní stavy čisté. U nečť je unitární transformace:  $|m\rangle \equiv U(m)|m_0\rangle$  potom  $\rho_m = U(m) \otimes U(m)\rho_2(m_0)U(m)^\dagger \otimes U(m)^\dagger$  tzv. *kovariantní podmínka*, (5.3).

Možné výstupní stavy tvoří dvou částicovou reprezentaci grupy unitárních jednoparametrických transformací. Zajímavé je, že univerzální kvantový proces, pro nějž lze transformaci 5.1 provést se 100% úspěšností lze spojit s procesem klonování kvantových stavů. V předchozím bylo ukázáno, že optimální kvantový proces klonování qubitů, lze provést s maximální pravděpodobností 2/3. Ta je ekvivalentní s  $p_1$  z 5.2a.

Celkem tedy, pokud proces 5.1 s  $J=1$  je proveden s pravděpodobností úspěchu 100%, potom tento proces kopíruje libovolný vstupní stav optimálním způsobem. Budu-li se zabývat 5.2b, procesem projekce na stav s  $J=0$ , skončím u antisymetrického Bellovského stavu. Přitom tento výsledek nezávisí od volby počátečních stavů. Tento proces je příkladem entanglovacího procesu.

Vzhledem k aktuálnosti entanglementu, budu se nyní věnovat vztahu vlastností univerzálních entanglovacích procesů a dimenzí Hilbertových prostorů, ve kterých proces popisují.

Tvar obecného kvantového procesu je:

$$P : \rho_{in}(m) \otimes \rho_{ref} \rightarrow \rho_{out}(m)$$

Předpokládejme, že:  $\rho_{in} \equiv |m\rangle\langle m|$ , tvar  $\rho_{ref}$  bude blíže neurčený. Pro jednoduchost, ale předpokládám, že dimenze Hilbertových stavových prostorů daných podprostorů jsou stejné,  $D \geq 2$ .

Matici hustoty vstupního stavu v  $D$ -dimenzionálním stavovém prostoru lze psát pomocí generátorů grupy  $SU_D$  jako:  $\rho_{in} = \frac{1}{D}(\mathbf{1} + m_{ij}A_{ij})$ , užil jsem Einsteinovy sumační konvence pro  $i, j \in \{1, \dots, D\}$ .

$A_{ij}$  je reprezentováno  $D \times D$  maticí:

$$(A_{ij})^{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{D}\delta_{ij}\delta_{kl}.$$

Taková matice není hermitovská, ale vyhovuje:  $A_{ij}^\dagger = A_{ji}$  a  $\sum_{i=1}^D = 0$ . Celkem má  $D^2 - 1$  nezávislých členů. Pro jednoduchost uvažujme  $m_{DD} = 0$ .

Nechť  $D=2$ :

potom  $2A_{11} = \sigma_z$ ,  $2A_{12} = \sigma_x + i\sigma_y$  a  $2A_{21} = \sigma_x - i\sigma_y$ .

Podle podmínky kovariance lze bez újmy na obecnosti ztotožnit výchozí čistý stav s některým bazickým vektorem, řekněme  $|1\rangle$ . Přidružená matice hustoty má tvar:  $\rho_{in}(m_0 = DA_{11}) = \frac{1}{D}(\mathbf{1} + DA_{11}) \equiv |1\rangle\langle 1|$  kde  $m_{ij} = \delta_{i1}\delta_{j1}D$ .

Lze psát

$$\rho_{out}(m) = \frac{1}{D^2}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \alpha_{ij}^1(m)A_{ij} \otimes \mathbf{1} + \alpha_{ij}^2(m)\mathbf{1} \otimes A_{ij} + K_{ijkl}(m)A_{ij} \otimes A_{kl}.$$

Abych splnil podmínky kovariance a linearity, rozepíšu poslední člen na části, které jsou invariantní a na části, které se transformují jako generátory  $A_{ij}$  pod vlivem libovolné unitární transformace tvaru  $U \otimes U$ .

Pro tento účel bude vhodné nejprve zapsat tvar komutační relace grupy  $SU_D$ , resp.:  $[A_{ij}, A_{mn}] = A_{ab}(\delta_{jm}\delta_{ai}\delta_{bn} - \delta_{in}\delta_{am}\delta_{bj})$ .

Tento vztah říká, že tensorový produkt  $A_{ji} \otimes A_{sj}$  se transformací  $U \otimes U$  transformuje stejně jako  $A_{si}$  pod  $U$ . Navíc  $A_{ij} \otimes A_{ji}$  je pod vlivem  $U \otimes U$  invariantní. Užitím těchto tvrzení a podmínky kovariance vyjde:

$$\rho_{out}(m) = \frac{1}{D^2}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \alpha_{ij}^1(m)A_{ij} \otimes \mathbf{1} + \alpha_{ij}^2(m)\mathbf{1} \otimes A_{ij} + C(m)A_{ij} \otimes A_{ji} + \beta_{il}(m)A_{ij} \otimes A_{jl} + \beta_{il}(m)^*A_{ji} \otimes A_{lj}$$

kde

$$\alpha_{ij}^{(1,2)} = \alpha^{(1,2)}m_{ij}, \quad \beta_{ij} = \beta m_{ij}, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Celkem tedy  $\rho_{out}(m)$  je hermitovský operátor, který reprezentuje obecný tvar výstupu této úlohy vzhledem k podmínce linearity a kovariance pro  $\rho_{in}(m)$ .

Pokud  $\rho_{in}(m_0 = DA_{11}) \equiv |1\rangle\langle 1|$ , potom  $\rho_{out}(m_0 = DA_{11}) = \sum_{i=1}^4 \oplus p_i q_i$  kde  $Tr(\rho_i) = 1$ . Explicitní vyjádření je uvedeno v (10). Protože  $Tr(\rho_{out}(m)) = 1$ , je  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ , (5.4). Lze najít i vlastní čísla  $\rho_{out}(m_0 = DA_{11})$  a ukázat, že operátor je nezáporný právě tehdy, když všechny pravděpodobnosti  $p_i$  a vlastní hodnoty jsou nezáporné a splňují 5.4. Takto lze získat množinu přípustných nezávislých hodnot např.  $\{p_1, p_2, p_3\}$  a geometricky ji interpretovat. Každý bod takové množiny odpovídá určitému kvantovému procesu.

Nyní se zabýváme univerzálním entanglovacím procesem, jehož výstup neobsahuje žádné oddělitelné komponenty. Lze ukázat, že každý dvousložkový kvantový systém  $\rho$  lze rozložit na separabilní  $\rho_{sep}$  a neseperabilní  $\rho_{insep}$  část, kde:

$$\rho = \lambda\rho_{sep} + (1 - \lambda)\rho_{insep}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Separabilní stav je konvexní sumou  $\rho_A \otimes \rho_B$  kde  $\rho_A, \rho_B$  přísluší kvantovým systémům A,B. Rozklad při pevné hodnotě  $\lambda$  není jednoznačný, nás nyní budou zajímat ty, pro něž maximální hodnota  $\lambda$  je 0 pro libovolný rozklad. Odvodíme parametry, které takové procesy charakterizují. Aby  $\rho_{out}(m_0 = DA_{11})$  vyhovovalo takovým stavům, je třeba aby její rozklad postrádal členy typu  $|j\rangle\langle j|$  kde  $j \in \{1, \dots, D\}$ , což podle explicitního vyjádření  $\rho_i$  znamená:

$$p_1 = 0, \quad p_3 = 0 \quad (5.5).$$

Lze ukázat, že je to zároveň podmínka postačující. Pro každý dvousložkový stav  $|\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$  a pro každou kladnou hodnotu  $\lambda$  ukážu, že operátor:

$$\rho' = \rho_{out}(m_0 = DA_{11})^{ent} - \lambda|\psi\rangle\langle\psi|$$

je negativně definitní. Potom protože  $\rho_{out}(m_0)^{ent}$  vyhovuje 5.5, lze  $\rho_{out}(m_0 = DA_{11})^{ent} = (1 - p_4)\rho_2^{ent} \oplus p_4\rho_4^{ent}$ . To je konvexní suma čistých dvousložkových stavů, antisymetrická vzhledem k prohození obou systémů.

Pro každý stav  $|\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$  lze vybrat unitární transformaci  $U$  takovou, že  $\langle 1|U|\psi\rangle, \langle 1|U|\chi\rangle$  jsou obě nenulové. Tuto transformaci, lze pokládat za změnu báze v Hilbertově prostoru. Aplikací  $U$  na  $\rho_{out}(m_0 = DA_{11})^{ent}$ , vyjde opět antisymetrický dvousložkový stav, takže "symetrický filtr"  $\langle 11|$  dá:

$$\langle 11|U \otimes U\rho_{out}^{ent}U^\dagger \otimes U^\dagger|11\rangle = 0.$$

Odtud:

$$\langle 11|U \otimes U \rho' U^\dagger \otimes U^\dagger|11\rangle = 0 - \lambda \langle 1|U|\psi\rangle \langle 1|U|\chi\rangle$$

je negativní t.j.  $\rho'$  negativně definitní.

Nyní se zabýváme univerzálním kvantovým procesem, který je optimální vzhledem k *Vidal-Wernerově* míře  $N(\rho)$ . Pro každý dvoučásticový operátor hustoty je  $N(\rho) = |\sum_i \mu_i|$  míra provázání, kde  $\mu_i$  jsou negativní vlastní hodnoty částečného transponování matice  $\rho$ . Tato míra je monotóní pro lokální operace a klasickou komunikaci a je konvexní, t.j.:

$$N\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \leq \sum_i p_i N(\rho_i)$$

kde  $\rho$  je matice hustoty a  $p_i \geq 0$  kde  $\sum_i p_i = 1$ .

Užitím podmínky konvexnosti míry entanglementu a z explicitního vyjádření  $\rho_i$ ,  $p_i$  lze získat odhad shora pro  $N(\rho_{out}(m_0))$ .

Pro  $D < 5$ :  $p_2 = 1$  vyhovuje procesu optimálního entanglementu. Pro  $D > 5$ :  $p_4 = 1$  je nutnou podmínkou optimálního entanglementu. Pro  $D=5$  je potom etremální hodnota dosažena pro libovolné  $0 \leq p_4 \leq 1$  a pro  $p_2 = 1 - p_4$ . Optimální univerzální entanglovací procesy vzhledem k Vidal-Wernerově míře, tvoří jednoparametrickou třídu entanglovacích procesů ( $p_1 = p_3 = 0$ ), jejichž výstup neobsahuje žádné separabilní složky.

Tato třída univerzálních kvantových procesů vytváří volně provázané stavy. Vzhledem ke kovariantní podmínce, všechny výstupy konkrétního univerzálního optimálního entanglovacího procesu mají tu samou von Neumannovu entropii. Pro  $D > 4$  univerzální entanglovací proces s  $p_4 = 0$  vytváří výstupní stav s nejmenší možnou von Neumannovou entropií. Pro  $D < 4$  je proces s minimální entropií charakterizován  $p_4 = 1$ , příslušná hodnota entropie je: Pro  $D=4$  mají výstupní stavy obou procesů  $p_4 = 0, p_4 = 1$  stejnou entropii.

Univerzální entanglovací procesy, jejichž výstup neobsahuje separabilní části pro  $p_4 = (D - 2)/D$  charakterizuje stav s největší von Neumannovou entropií.

Tento proces vyrváří výstupní stavy, které jsou maximální směsí všech  $(D - 1)(D - 2)/2$  možných antisymetrických dvoukomponentových stavů.

Pro index korelace systémů:  $I_c(\rho) = S(Tr_2\{\rho_{out}(m)\}) + S(Tr_1\{\rho_{out}(m)\}) - S(\rho_{out}(m))$ . Pro jednoparametrickou třídu univerzálních entanglovacích procesů je index korelace:

$$I_c(p_4) = \ln \frac{4}{1 + p_4} + p_4 \ln \frac{2p_4(D - 1)}{(1 + p_4)(D - 2)}$$

Lokální minimum  $I_c(p_4)$  nabývá pro  $p_4 = (D - 2)/D$ .

Odtud je vidět, že entanglovací proces s nejmenší von Neumannovou entropií vytváří výstupní stavy s nejmenší možnou vzájemnou korelací. Dále, výstupní stavy entanglovacího procesu s  $p_4 = 0$  mají největší index korelace, t.j.  $I_c(p_4 = 0) = 2 \ln 2$ . To nezávisle od dimenze prostoru  $D$ ! Tato hodnota je navíc stejná jako vzájemná entropie Bellovského stavu.

Zajímavé je také to, jak výstupní stavy této třídy entanglovacích procesů zachovávají informaci o vstupním čistém stavu  $\rho_{in}(m)$ . Tuto informaci charakterizuje Blochův vektor  $m$ . Pro výstupní stav je schována ve členech:  $Tr_1\{\rho_{out}(m)\}$  a  $Tr_2\{\rho_{out}(m)\}$ .

Lze ukázat, že pro  $D \gg 2$  univerzální entanglovací proces s  $p_4 = 0$  zachovává téměř tolik informace o počátečním stavu systému jako optimální klonovací proces.

Pro jednoparametrickou třídu univerzálních entanglovacích procesů s  $p_4 = (D - 2)/D$  je informace o počátečním stavu systému je ztracena. Výsledný stav je na něm nezávislý a je skalární vzhledem k unitární transformaci tvaru  $U \otimes U$  a permutaci mezi oběma částicemi.

V jednoparametrické třídě existuje pouze jeden proces, pro nějž:

$$Tr_1\{\rho_{out}(m)\} = Tr_2\{\rho_{out}(m)\} = 1/D$$

Tato hodnota je charakteristická pro všechny Bellovské stavy, které jsou generované univerzálním entanglovacím procesem.

Nyní se věnujme příkladům. Probereme základní vlastnosti výstupních entanglovacích stavů jednoparametrické třídy univerzálních entanglovacích procesů na prostorech nízkých dimenzí.

D=3:

Zabývejme se tří dimenzionálním jednočásticovým Hilbertovým prostorem, ve kterém vybereme bázi tak, že čistý vstupní stav je s jedním bazickým vektorem totožný:  $\rho_{in}(m_0 = DA_{11}) \equiv |1\rangle\langle 1|$ .

Bude též vhodné zavést čisté, antisymetrické dvoučásticové stavy:  $|(ij)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ij\rangle - |ji\rangle)$  s  $i, j \in \{1, \dots, D\}$ . Do konvexního tvaru výstupní matice hustoty dosadím:

$$\rho_2^{(ent)} = \frac{1}{2}\{|(12)\rangle\langle(12)| + |(13)\rangle\langle(13)|\},$$

$$\rho_4^{(ent)} = \frac{1}{2}\{|(23)\rangle\langle(23)|\}.$$

Pro  $p_4 = 1$  je podle odpovídající  $\rho_{out}^{ent}(m_0 = DA_{11}) = \rho_4^{(ent)}$  čistý, takže von Neumannova entropie výstupního stavu je nulová. Jedná se o jednozně určený antisymetrický stav. Geometricky představuje jednoznačně určenou rovinu v třírozměrném eukleidovském prostoru, která je kolmá na stav  $|1\rangle$ . Index korelace výstupu je  $I_c(p_4 = 1) = 2\ln 2$ . Optimální univazální entanglovací proces charakterizovaný  $p_2 = 1$  produkuje smíšené výstupní stavy

$$\rho_{out}^{ent}(m_0 = DA_{11}) = \rho_2^{(ent)}.$$

Jeho index korelace je  $I_c(p_4 = 0) = 2\ln 2$ . Tento proces maximalizuje překryv mezi vstupním stavem  $|1\rangle$  a redukovanými jednočásticovými stavy. Tím pádem zachovává informaci o počátečním vstupním stavu.

Pro  $p_4 = 1/3$  je podle odpovídající  $\rho_{out}^{ent}(m_0 = DA_{11}) = (2/3)\rho_2^{(ent)} + (1/3)\rho_4^{(ent)} \equiv \frac{1}{3}\{|(12)\rangle\langle(12)| + |(13)\rangle\langle(13)| + |(23)\rangle\langle(23)|\}$  Maximální možná amplituda entropie je  $S(p_4 = 1/3) = \ln 3$ . Tento výstupní stav je maximálně neuspořádanou směsí všech možných dvou částicových antisymetrických stavů. V tomto procesu je veškerá informace o vstupním stavu  $|1\rangle$  ztracena.

D=4:

Jedparametrická třída výstupních stavů pro  $\rho_{in}(m_0 = DA_{11}) \equiv |1\rangle\langle 1|$  je tvořena konvexní sumou smíšených stavů:

$$\rho_2^{(ent)} = \frac{1}{3}\{|(12)\rangle\langle(12)| + |(13)\rangle\langle(13)| + |(14)\rangle\langle(14)|\},$$

$$\rho_4^{(ent)} = \frac{1}{3}\{|(23)\rangle\langle(23)| + |(24)\rangle\langle(24)| + |(34)\rangle\langle(34)|\}.$$

Pro optimální entanglovací proces s  $p_2 = 1$  vyjde

$$\rho_{out}^{ent}(m_0 = DA_{11}) = \rho_2^{(ent)},$$

který implikuje maximální překryv mezi redukovanými jednočásticovými stavy a vstupním stavem.

Pro případ  $p_4 = p_2 = 1/2$  je výstupem maximálně neuspořádaná směs všech přípustných antisymetrických dvoučásticových stavů:

$$\rho_{out}^{(ent)}(m_0 = DA_{11}) = (1/2)\rho_2^{(ent)} + (1/2)\rho_4^{(ent)} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{6}\{|(12)\rangle\langle(12)| + |(13)\rangle\langle(13)| + |(14)\rangle\langle(14)| + |(23)\rangle\langle(23)| + |(34)\rangle\langle(34)|\}.$$

V tomto procesu je veškerá informace o vstupním stavu systému ztracena.

D=2:

Závěr bude patřit qubitům, kterými byla tato kapitola motivována. Nyní je  $\rho_4^{(ent)} \equiv 0$ . Je tedy přípustný pouze jednočasticový entanglovací proces, jehož výstup neobsahuje žádné separabilní komponenty. Je charakterizován  $p_1 = p_3 = p_4 = 0$  a výstupním čistým stavem:

$$\rho_{out}^{(ent)}(m_0 = DA_{11}) \equiv |(12)\rangle\langle(12)|.$$

V tomto případě jednoparametrická třída přechází do singletního procesu, jehož výstup je nezávislý od vstupního stavu.

## Literatura:

- LOKF: Blank J., Exner P., Havlíček M.: Lineární operátory v kvantové fyzice, Karolinum, Praha 1993
- (1): Formánek J.: Úvod do kvantové teorie, Academia, Praha 1983
  - (2): Blum K.: Density matrix theory and applications, Plenum, New York, 1981
  - (3): Bouwmeester D., Ekert A., Zeilinger A.: The physics of quantum information, Springer, Berlin, 2000
  - (4): Greenberger M., Horne A., Zeilinger A.: Multiparticle interferometry and the superposition principle, Physics Today, August 1993
  - (5): Zeilinger A.: Quantum Entanglement: A Fundamental Concept Finding its Application, Physica Scripta T76, 1997
  - (6): Hoi-Kwong Lo, Popescu S., Spill T.: Introduction to quantum computation and information, World Scientific, Singapore, 1998
  - (7): Gruska J.: Quantum Computing, Springer, Berlin, 1990
  - (8): Barnett S.M., Radmore P.M.: Methods in theoretical quantum optics, Clarendon Press, Oxford, 1997
  - (9): Agarwal G.S.: Quantum statistical theories of Spontaneous emission and their Relation to Other approaches, Springer, Berlin, 1976
  - (10): Araki H., Lieb E.H.: Entropy Inequalities, Springer, 1970
  - (11): Alber G., Delgado D., Jex I.: Optimal universal two-particle processes in arbitrary dimensional Hilbert spaces, quant-ph 0006040
  - (12): Alber G., Delgado D., Gisin N., Jex I.: Generalized quantum XOR-gate and the purification of GHZ states, quant-ph 0008022