

UNITÁRNÍ TRANSFORMACE MATICE HUSTOTY

MARTIN ŠTEFAŇÁK

CONTENTS

1. Matice hustoty-základní vlastnosti	3
1.1. Zavedení matice hustoty	3
1.2. Interpretace matice hustoty	3
1.3. Výpočty středních hodnot, počet nezávislých parametrů	5
1.4. Čisté a smíšené stavy	5
1.5. Koherentní – nekoherentní superpozice	6
1.6. Časový vývoj smíšených stavů	6
1.7. Příklad – polarizační matice hustoty	7
2. Složené kvantové systémy, redukovaná matice hustoty	10
2.1. Popis složeného systému a podsystémů – redukovaná matice hustoty	10
2.2. Provázané stavy	11
2.3. Příklad – Bellovské stavy	11
3. Funkce na maticích hustoty	14
3.1. Entropie	14
3.2. Entropie složených systémů, indexy korelace	15
3.3. Vlastnosti Bellovských stavů	17
4. Hradla pro kvantové počítání	19
4.1. Kvantová informace	19
4.2. Kvantová hradla	19
4.3. Příklady základních hradel	19
5. Působení hradel na kvantové systémy a popis pomocí matice hustoty	21
References	24

1. MATICE HUSTOTY-ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

1.1. Zavedení matice hustoty. Jeden ze základních postulátů kvantové mechaniky se týká popisu stavu systému - systému přiřazujeme komplexní separabilní Hilbertův prostor, stavu pak nějaký paprsek (viz. např. [11]). Toto jsou tzv. čisté stavy. Tento popis není nejobecnější a je často nedostačující - například když v experimentu technicky nedokážeme zajistit, aby všechny prvky zkoumaného systému (např. částice ve svazku urychlovače) byly ve stejném čistém stavu; často ale jako důsledek přípravy systému víme, v jakých stavech se mohou nacházet a známe pravděpodobnosti, se kterými v těchto stavech mohou být. Tyto systémy již můžeme popsat pomocí zde uvedeného formalismu.

Poznámka 1.1. Na další důvody pro zavedení obecnějšího popisu stavu poukáží při popisu složených systémů ve druhé kapitole.

Základním pojmem tohoto formalismu je matice hustoty.

Definice 1.2. Necht $\{e_j\}$ je ortonormální báze v \mathcal{H} , $\hat{\rho} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je pozitivní operátor, potom

$$(1.1) \quad \text{Tr} \hat{\rho} := \sum_j (e_j; \hat{\rho} e_j)$$

je stopa operátoru $\hat{\rho}$. Jestliže $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$, potom $\hat{\rho}$ je matice hustoty.

Poznámka 1.3. Protože $\hat{\rho} \geq 0$, je $\text{Tr} \hat{\rho}$ konečný nebo $+\infty$. Navíc $\text{Tr} \hat{\rho}$ nezávisí na volbě báze — $(e_j; \hat{\rho} e_j) = \|\sqrt{\hat{\rho}} e_j\|^2$, je-li v bázi $\{e_j\}$ $\text{Tr} \hat{\rho} < +\infty$, je $\sqrt{\hat{\rho}}$ Hilbert-Schmidtův operátor a $\|\sqrt{\hat{\rho}}\|_2 = \sqrt{\text{Tr} \hat{\rho}}$, Hilbert-Schmidtova norma $\|\cdot\|_2$ ale nezávisí na volbě báze.

Nyní můžeme zavést obecnější popis stavu v kvantové mechanice.

Postulát 1.4. Každému stavu kvantově mechanického systému odpovídá jistá matice hustoty (statistický operátor) $\hat{\rho}$ na stavovém prostoru \mathcal{H} . Stavy popsané maticí hustoty nazýváme smíšené (viz [11]).

Rozdíl mezi čistými a smíšenými stavy je následující. Pro čistý stav popsaný vektorem $|\psi\rangle$ existuje úplná množina komutujících pozorovatelných (=ÚMKP) $\hat{Q}_1; \hat{Q}_2; \dots$ taková, že $|\psi\rangle$ je jejich společným vlastním vektorem s vlastními čísly $q_1; q_2; \dots$. Měřením pozorovatelných $\hat{Q}_1; \hat{Q}_2; \dots$ na stavu $|\psi\rangle$ tak dostaneme s jistotou hodnoty $q_1; q_2; \dots$ — pro čisté stavy tedy existuje úplný sada experimentů (měření ÚMKP), jehož výsledek můžeme určit s jistotou. V tomto smyslu máme o čistém stavu maximum informací, které v kvantové mechanice můžeme mít; čisté stavy jsou tak obdobou klasických stavů, které odpovídají bodům fázového prostoru, tj. stavům s přesně určenými polohami a hybnostmi částic. Pokud ale při přípravě stavu neprovedeme z nějakého důvodu úplnou sadu experimentů (tj. nebudeme měřit ÚMKP), nemůžeme takto připravený systém popsat jedním vektorem; můžeme nanejvýš znát pravděpodobnosti $W_1; W_2; \dots$ s jakými je systém v čistých stavech $|\psi_1\rangle; |\psi_2\rangle; \dots$. Takový systém umíme popsat pomocí nějaké matice hustoty, statistický popis musíme použít ze stejných důvodů jako v klasické statistické mechanice.

1.2. Interpretace matice hustoty. Z funkcionální analýzy víme, že každý operátor s konečnou stopou (a tedy i matice hustoty) je Hilbert-Schmidtův (\Rightarrow je kompaktní); matice hustoty je navíc pozitivní a tedy normální operátor. Celkem je matice hustoty $\hat{\rho}$ normální kompaktní operátor — platí pro ni Hilbert-Schmidtova

věta, která zajišťuje existenci ON báze tvořené vlastními vektory $\hat{\rho}$ (tj. $\hat{\rho}$ má čistě bodové spektrum). Libovolnou matici hustoty lze tedy zapsat ve tvaru

$$(1.2) \quad \hat{\rho} = \sum_n W_n |n\rangle \langle n|;$$

kde $|n\rangle$ jsou vlastní vektory $\hat{\rho}$, W_n odpovídající vlastní čísla

$$(1.3) \quad \hat{\rho} |n\rangle = \sum_k W_k |k\rangle \langle k|n\rangle = \sum_k W_k |k\rangle \langle kn| = W_n |n\rangle;$$

Z podmínky pro stopu $\hat{\rho}$ plyne

$$(1.4) \quad Tr \hat{\rho} = \sum_n \langle n|\hat{\rho}|n\rangle = \sum_n W_n = 1;$$

z positivity $\hat{\rho}$ plyne $W_n \geq 0$. Čísla W_n mají význam pravděpodobnosti nalezení systému popsaném maticí hustoty $\hat{\rho}$ v čistém stavu $|n\rangle$.

Mějme nyní systém ve smíšeném stavu

$$(1.5) \quad \hat{\rho} = \sum_n W_n |n\rangle \langle n|$$

($|n\rangle$ nemusí být nutně ortogonální); náš systém je tedy s pravděpodobností W_n ve stavu $|n\rangle$. Budeme chtít vyjádřit $\hat{\rho}$ v maticové formě – zvolíme nějakou ON bázi $\{|'n\rangle\}$ a budeme hledat čísla

$$(1.6) \quad \langle 'n|\hat{\rho} |'n\rangle =: \hat{\rho}_{ij};$$

tj. maticové elementy $\hat{\rho}$ v $\{|'n\rangle\}$ reprezentaci. Protože

$$(1.7) \quad \sum_n |'n\rangle \langle 'n| = 1;$$

můžeme zapsat $|n\rangle$ ve tvaru

$$(1.8) \quad |n\rangle = \sum_m a_m^{(n)} |'m\rangle;$$

kde $a_m^{(n)} = \langle 'm|n\rangle$, obdobně

$$(1.9) \quad \langle n| = \sum_k a_k^{(n)*} \langle 'k|;$$

Matice hustoty přejde do tvaru

$$(1.10) \quad \hat{\rho} = \sum_{n,m,k} W_n a_m^{(n)} a_k^{(n)*} |'m\rangle \langle 'k|;$$

pro $\hat{\rho}_{ij}$ platí

$$(1.11) \quad \hat{\rho}_{ij} = \langle 'i|\hat{\rho} |'j\rangle = \sum_{n,m,k} W_n a_m^{(n)} a_k^{(n)*} \delta_{im} \delta_{kj} = \sum_n W_n a_i^{(n)} a_j^{(n)*};$$

zřejmě je $\hat{\rho}_{ij} = \hat{\rho}_{ji}^*$, tj. $\hat{\rho}$ je hermitovská matice. Pro diagonální elementy platí $\hat{\rho}_{mm} = \sum_n W_n |a_m^{(n)}|^2$. Protože W_n je pravděpodobnost nalezení $\hat{\rho}$ ve stavu $|n\rangle$ a $|a_m^{(n)}|^2$ je pravděpodobnost nalezení $|n\rangle$ ve stavu $|'m\rangle$, má $\hat{\rho}_{mm}$ význam pravděpodobnosti nalezení systému ve stavu $|'m\rangle$, zřejmě je $\hat{\rho}_{mm} \geq 0$. Obecněji je pravděpodobnost nalezení systému s maticí hustoty $\hat{\rho} = \sum_n W_n |n\rangle \langle n|$ ve stavu $|'m\rangle$ dána

maticovým elementem

$$(1.12) \quad W(\hat{\rho}) = \langle \hat{\rho} | \hat{\rho} \rangle = \sum_n w_n |\langle n | \hat{\rho} \rangle|^2$$

1.3. Výpočty středních hodnot, počet nezávislých parametrů. Aby matice hustoty $\hat{\rho}$ skutečně dobře popisovala stav systému, musíme být schopni pomocí ní vypočítat střední hodnoty libovolné pozorovatelné systému. Pro čistý stav $| \psi \rangle$ platí, že střední hodnota pozorovatelné \hat{Q} je rovna

$$(1.13) \quad \langle \hat{Q} \rangle = \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle$$

Jestliže máme statistickou směs stavů $| n \rangle$ s váhami w_n (tak, že $\sum w_n = 1$), pak střední hodnota \hat{Q} ve stavu $\hat{\rho} = \sum w_n | n \rangle \langle n |$ je zřejmě

$$(1.14) \quad \langle \hat{Q} \rangle = \sum_n w_n \langle n | \hat{Q} | n \rangle$$

Použijeme-li (1.10), dostaneme

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \langle \hat{Q} \rangle &= \sum_{m,k} \sum_n w_n a_m^{(n)} a_k^{(n)*} \langle m | \hat{Q} | k \rangle = \\ &= \sum_{m,k} \langle k | \hat{\rho} | m \rangle \langle m | \hat{Q} | k \rangle = \sum_k \langle k | \hat{Q} | k \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{Q}) \end{aligned}$$

Znalost $\hat{\rho}$ nám umožňuje spočítat střední hodnotu libovolné pozorovatelné – matice hustoty tak obsahuje všechny fyzikálně podstatné a dostupné informace o systému.

Pomocí vztahu $\langle \hat{Q} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{Q})$ můžeme zavést matici hustoty systému jiným způsobem. Zvolíme tolik nezávislých pozorovatelných $\hat{Q}_1; \hat{Q}_2; \dots$, kolik nezávislých parametrů $\hat{\rho}$ obsahuje; známe-li jejich střední hodnoty $\langle \hat{Q}_i \rangle$, je $\hat{\rho}$ určena soustavou rovnic

$$(1.16) \quad Tr(\hat{\rho} \hat{Q}_i) = \langle \hat{Q}_i \rangle$$

Počet nezávislých parametrů matice hustoty závisí na počtu ON stavů v rozkladu $\hat{\rho}$ – obecně je tedy nekonečný, ale pokud nás při popisu systému budou zajímat jen ty fyzikální veličiny, které jsou popsány operátory na konečnědimenzionálních prostorech (např. spin), bude konečný ($\hat{\rho}$ bude konečnědimenzionální matice). Jestliže $\hat{\rho} = \sum_{n=1}^N w_n | n \rangle \langle n |$, pak $\hat{\rho} \in \mathbb{C}^{N,N}$ a odpovídá $2N^2$ reálným parametrům; samosdruženost $\hat{\rho}$ a podmínka $Tr \hat{\rho} = 1$ redukuje počet nezávislých reálných parametrů na $N^2 - 1$.

1.4. Čisté a smíšené stavy. Čisté stavy jsou speciálním případem stavů smíšených – čistému stavu $| \psi \rangle$ odpovídá matice hustoty $\hat{\rho} = | \psi \rangle \langle \psi |$ (tj. projektor na paprsek určený $| \psi \rangle$). Protože v tomto případě je $\hat{\rho}$ projektor, je $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ a tedy $Tr \hat{\rho}^2 = (Tr \hat{\rho})^2$ je nutná podmínka pro to, aby matice hustoty popisovala čistý stav. Je to ale i postačující podmínka – nejprve dokáží nerovnost $Tr \hat{\rho}^2 \leq (Tr \hat{\rho})^2$ pro libv. $\hat{\rho}$. Stačí využít toho, že stopa pozitivního operátoru nezávisí na volbě báze, $Tr \hat{\rho}$ jednoduše určíme v bázi tvořené vlastními vektory $\hat{\rho}$

$$(1.17) \quad (Tr \hat{\rho})^2 = \left(\sum_n w_n \right)^2; Tr \hat{\rho}^2 = \sum_n w_n^2$$

Protože $w_n \geq 0 \quad \forall n$ (jsou to vlastní čísla pozitivního operátoru), nerovnost platí. Nechť platí rovnost $Tr \hat{\rho}^2 = (Tr \hat{\rho})^2$, potom $\sum_n w_n^2 = \left(\sum_n w_n \right)^2$, což platí

právě tehdy když $\exists i$, tak že $w_i = 1$ a všechny ostatní w_n jsou rovny nule, tedy $\hat{\rho} = |i\rangle\langle i|$. Dostáváme tak následující tvrzení:

Věta 1.5. *Matice hustoty $\hat{\rho}$ popisuje čistý stav $\iff Tr \hat{\rho}^2 = (Tr \hat{\rho})^2$.*

1.5. Koherentní – nekoherentní superpozice. Matice hustoty můžeme vyjádřit v různých reprezentacích (tj. v různých ON bázích). S tím souvisí následující pojmy koherentní a nekoherentní superpozice.

Definice 1.6. Mějme $\hat{\rho}$ v $\{|'n\rangle\}$ reprezentaci. Řekneme, že systém je koherentní superpozicí stavů $|'n\rangle$, jestliže $\hat{\rho}$ není diagonální. Je-li $\hat{\rho}$ čistý stav, pak systém je úplně koherentní. Jestliže $\hat{\rho}$ je diagonální a má více než jeden nenulový prvek, pak je systém nekoherentní superpozicí bazických stavů $|'n\rangle$.

Pojmy koherentní a nekoherentní superpozice závisí na volbě reprezentace dané matice hustoty, např. $\hat{\rho} = \sum w_n |n\rangle\langle n|$ je nekoherentní superpozicí stavů $|n\rangle$, pokud jsou alespoň dvě w_n různé od nuly; v jiné bázi ale může mít $\hat{\rho}$ nenulové mimodiagonální prvky (viz vztah (1.10)). V tomto případě je $\hat{\rho}$ koherentní superpozicí bazických stavů a nenulové mimodiagonální prvky mají význam interference mezi těmito stavy (viz. [2]).

1.6. Časový vývoj smíšených stavů. Časový vývoj čistých stavů je určen Schrödingerovou rovnicí

$$(1.18) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = \hat{H}(t) |t\rangle$$

Zavedeme-li operátor časového vývoje $\hat{U}(t)$, který převádí $|0\rangle$ do stavu $|t\rangle$, dostaneme (1.18) ve tvaru

$$(1.19) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) |0\rangle = \hat{H}(t) \hat{U}(t) |0\rangle$$

Tato rovnice musí platit pro každý počáteční stav $|0\rangle$; dosáváme tak operátorovou rovnicí

$$(1.20) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) = \hat{H}(t) \hat{U}(t)$$

s počáteční podmínkou $\hat{U}(0) = 1$ (pro časově nezávislý Hamiltonián je $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t}$). $\hat{U}(t)$ použijeme k odvození rovnice pro časový vývoj matice hustoty. Mějme pro $t = 0$ systém ve stavu $\hat{\rho}(0) = \sum_n w_n |0\rangle_n \langle 0|_n$. Potom v čase t je ve stavu

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= \sum_n w_n |t\rangle_n \langle t|_n = \sum_n w_n \hat{U}(t) |0\rangle_n \langle 0|_n \hat{U}(t)^\dagger = \\ &= \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}(t)^\dagger; \end{aligned}$$

speciálně pro časově nezávislý Hamiltonián je $\hat{\rho}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} \hat{\rho}(0) e^{+\frac{i}{\hbar} \hat{H}t}$. Zderivujeme-li vztah (1.21) podle t , dostaneme

$$(1.22) \quad \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}(t)^\dagger + i\hbar \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t)^\dagger = \\ &= \hat{H}(t) \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}(t)^\dagger - \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}(t)^\dagger \hat{H}(t) = \hat{H}(t) \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{H}(t); \end{aligned}$$

a tedy

$$(1.23) \quad i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(t)}{\partial t} = [\hat{H}(t); \hat{\psi}(t)]:$$

Tento vztah se nazývá Liouvilleova rovnice, je obdobou Schrödingerovy rovnice pro čisté stavy.

1.7. Příklad – polarizační matice hustoty. Mějme částici se spinem $\frac{1}{2}$, stavový prostor je \mathbb{C}^2 . Statistický operátor $\hat{\rho}$ je matice 2×2 a má $2^2 - 1 = 3$ nezávislé parametry. Označíme standardním způsobem Paulio matice

$$(1.24) \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

složky operátoru spinu $\hat{S}_i := \frac{\hbar}{2} \sigma_i$ a vlastní stavy \hat{S}_3 jako

$$(1.25) \quad |+\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |-\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Budeme hledat $\hat{\rho}$ v $| \pm \rangle$ reprezentaci. Protože $\hat{\rho}$ je hermitovská matice 2×2 , musí být lineární kombinací Pauliho matic a jednotkové matice \mathbf{I} :

$$(1.26) \quad \hat{\rho} = a\mathbf{I} + \sum_{i=1}^3 b_i \sigma_i$$

Ze vztahu $\text{Tr} \sigma_i = 0$ pro $i=1,2,3$ a normalizace $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ plyne $a = \frac{1}{2}$, zbývá určit b_i . Zavedeme vektor polarizace \mathcal{P} po složkách

$$(1.27) \quad P_i = \langle \sigma_i \rangle = 2 \langle \hat{S}_i \rangle$$

Střední hodnota $\langle \sigma_i \rangle$ je určena vztahem $\langle \sigma_i \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \sigma_i)$, pro součin $\hat{\rho} \sigma_i$ z vlastnosti Pauliho matic

$$(1.28) \quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{I} + i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

vyplývá

$$(1.29) \quad \hat{\rho} \sigma_i = \frac{1}{2} \sigma_i + \sum_j b_j \sigma_j \sigma_i = \frac{1}{2} \sigma_i + \sum_j b_j \sum_k \epsilon_{jik} \sigma_k$$

Pro stopu $\hat{\rho} \sigma_i$ tedy platí

$$(1.30) \quad \text{Tr}(\hat{\rho} \sigma_i) = 2b_i = \langle \sigma_i \rangle = P_i$$

takže $b_i = \frac{1}{2} P_i$. Polarizační matici hustoty v $| \pm \rangle$ reprezentaci tak můžeme zapsat ve tvaru

$$(1.31) \quad \hat{\rho} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \mathcal{P} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+P_3 & P_1-iP_2 \\ P_1+iP_2 & 1-P_3 \end{pmatrix};$$

Dále dokáží, že vektor polarizace splňuje podmínku

$$(1.32) \quad |\mathcal{P}| = \left(\sum_j P_j^2 \right)^{1/2} \leq 1;$$

kde rovnost nastává právě tehdy, když $\hat{\rho}$ je čistý stav. Uvažujme nejprve čisté stavy; libovolný čistý spinový stav $|\psi\rangle$ můžeme zapsat jako lineární kombinaci stavů $|\pm 1/2\rangle$:

$$(1.33) \quad |\psi\rangle = a_1|+1/2\rangle + a_2|-1/2\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C};$$

$|\psi\rangle$ je normalizován na jedničku:

$$(1.34) \quad \langle \psi | \psi \rangle = |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$$

Čísla a_1, a_2 odpovídají čtyřem reálným parametřům. Protože globální fáze stavu $|\psi\rangle$ nemá význam ($e^{i\varphi}|\psi\rangle$ leží ve stejném paprsku jako $|\psi\rangle$, tj. popisuje stejný stav), můžeme je zvolit tak, aby $a_1 \in \mathbb{R}$, normalizace $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ dále redukuje počet reálných parametrů na 2 – např. θ a δ , určené vztahy

$$(1.35) \quad a_1 = \cos \frac{\theta}{2}; \quad a_2 = e^{i\delta} \sin \frac{\theta}{2}$$

Potom je

$$(1.36) \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\delta} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix};$$

zřejmě je $\langle \psi | \psi \rangle = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1$. Pro složky vektoru polarizace stavu $|\psi\rangle$ dostáváme

$$(1.37) \quad \begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & e^{-i\delta} \sin \frac{\theta}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\delta} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\delta} + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\delta} = \sin \theta \cos \delta; \end{aligned}$$

$$(1.38) \quad \begin{aligned} P_2 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & e^{-i\delta} \sin \frac{\theta}{2} \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\delta} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= -i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\delta} + i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\delta} = \sin \theta \sin \delta; \end{aligned}$$

$$(1.39) \quad \begin{aligned} P_3 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & e^{-i\delta} \sin \frac{\theta}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\delta} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta; \end{aligned}$$

takže pro normu vektoru polarizace skutečně platí

$$(1.40) \quad |\mathcal{P}| = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2} = \sqrt{\sin^2 \theta (\cos^2 \delta + \sin^2 \delta) + \cos^2 \theta} = 1;$$

Ze vztahů pro P_i můžeme interpretovat parametry θ a δ jako polární úhly \mathcal{P} – θ je úhel mezi \mathcal{P} a z-ovou osou, δ je azimutální úhel \mathcal{P} .

Pro smíšený stav $\hat{\rho} = \sum_{k=1}^n w_k |k\rangle \langle k|$ jsou $P_i = \sum_k w_k P_i^{(k)}$, kde $P_i^{(k)} = \langle k | i | k \rangle$ je i -tá složka vektoru polarizace stavu $|k\rangle$, normy vektorů $\mathcal{P}^{(k)} =$

$(P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, P_3^{(k)})$ jsou podle předchozího rovny 1. Velikost $\mathcal{P} = \sum_k w_k \mathcal{P}^{(k)}$ je tedy

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}|^2 &= \left(\sum_k w_k \mathcal{P}^{(k)} \right)^2 = \sum_k w_k^2 |\mathcal{P}^{(k)}|^2 + \sum_{j \neq k} w_j w_k \mathcal{P}^{(j)} \cdot \mathcal{P}^{(k)} \leq \\ (1.41) \quad &\leq \sum_k w_k^2 + \sum_{j \neq k} w_j w_k = \left(\sum_k w_k \right)^2 = 1: \end{aligned}$$

Rovnost platí, jestliže $\mathcal{P}^{(j)} \cdot \mathcal{P}^{(k)} = 1 \quad \forall j, k \in \hat{n}$, tedy pouze v případě, kdy všechny stavy $|k\rangle$ mají stejné vektory polarizace $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}$; pak ale $|k\rangle$ popisují stejný stav $|\hat{\cdot}\rangle$ a $\hat{\cdot} = \sum_k w_k |k\rangle\langle k| = |\hat{\cdot}\rangle\langle \hat{\cdot}|$ je projektor na čistý stav $|\hat{\cdot}\rangle$.

Dostáváme tak následující tvrzení:

Lemma 1.7. *Pro vektor polarizace platí nerovnost $0 \leq |\mathcal{P}| \leq 1$, přičemž $|\mathcal{P}| = 1 \iff \hat{\cdot}$ popisuje čistý stav, pro smíšený stav je vždy $|\mathcal{P}| < 1$.*

Stejný výsledek bychom získali i jiným postupem – víme, že $\hat{\cdot}$ popisuje čistý stav $\iff Tr \hat{\cdot}^2 = (Tr \hat{\cdot})^2$, ze vztahu (1.31) máme pro $\hat{\cdot}^2$

$$(1.42) \quad \hat{\cdot}^2 = \frac{1}{4} \left(I + \sum_j P_j \right)^2 = \frac{1}{4} \left(I + 2 \sum_j P_j + \sum_{j,k} P_j P_k \right);$$

takže

$$(1.43) \quad Tr \hat{\cdot}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{j,k} P_j P_k Tr(|j\rangle\langle k|) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} |\mathcal{P}|$$

a tedy

$$(1.44) \quad Tr \hat{\cdot}^2 = 1 \iff |\mathcal{P}| = 1$$

Pro $|\mathcal{P}| = 0$ (nepolarizovaný stav) má $\hat{\cdot}$ podle vztahu (1.31) tvar

$$(1.45) \quad \hat{\cdot} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

v $|\pm 1/2\rangle$ reprezentaci, stejný tvar má samozřejmě i v jakékoli jiné bázi – $\hat{\cdot}$ popisuje stav systému, ve kterém pro libovolně nastavený filtr (= Stern-Gerlachův přístroj) částice s pravděpodobností 1/2 projde a se stejnou neprojde.

Na závěr shrnu výsledky tohoto příkladu:

Čistý stav je určen 2 parametry – polárními úhly θ a ϕ vektoru polarizace; smíšený stav je určen 3 parametry – úhly θ a ϕ a velikostí vektoru polarizace.

2. SLOŽENÉ KVANTOVÉ SYSTÉMY, REDUKOVANÁ MATICE HUSTOTY

2.1. Popis složeného systému a podsystémů – redukováná matice hustoty. Mějme složený systém S sestávající z různých podsystémů $S_1; S_2; \dots; S_n$ se stavovými prostory $\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2; \dots; \mathcal{H}_n$. Stavovým prostorem S je tenzorový součin stavových prostorů podsystémů:

$$(2.1) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$$

Jsou-li podsystémy $S_1; S_2; \dots; S_n$ stejné (tj. $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \dots = \mathcal{H}_n = \mathcal{H}$), musíme stavový prostor S zúžit na nějaký podprostor v $\mathcal{H}^{(n)} = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$ – pro bosony (částice s celočíselným spinem) je to podprostor symetrických vlnových funkcí, pro fermiony (částice s poločíselným spinem) podprostor antisymetrických vlnových funkcí (viz. [11]).

Konkrétní stav složeného systému je opět popsán maticí hustoty. Složitější otázka je, v jakém stavu jsou podsystémy $S_1; \dots; S_n$, je-li S ve stavu $\hat{\rho}$, a naopak, co víme o systému S , známe-li stavy $S_1; \dots; S_n$.

Pro jednoduchost uvažujme S složený ze dvou různých podsystémů $S_1; S_2$, systém S nechť je ve stavu $\hat{\rho}$, stavy podsystémů označme $\hat{\rho}^j$. $\hat{\rho}^j$ určíme z následujícího přirozeného požadavku – chceme, aby pro libovolnou pozorovatelnou vztahující se pouze k podsystému S_j (pozorovatelné typu $\hat{A}'_1 := \hat{A}_1 \otimes I_2$ nebo $\hat{A}'_2 := I_1 \otimes \hat{A}_2$) platila podmínka

$$(2.2) \quad \langle \hat{A}'_j \rangle_{\hat{\rho}} = \langle \hat{A}_j \rangle_{\hat{\rho}^j};$$

tedy

$$(2.3) \quad Tr(\hat{A}'_j) = Tr(\hat{\rho}^j \hat{A}_j) \quad j = 1; 2;$$

Stavy podsystémů jsou tímto požadavkem určeny jednoznačně (viz [11]); stavům $\hat{\rho}^j$ se říká redukováné matice hustoty.

Nyní budu blíže specifikovat redukováné stavy $\hat{\rho}^j$ – určím jejich maticové elementy. Nechť $\hat{\rho}$ má maticové elementy $\hat{\rho}_{n\mu, m\nu}$ (latinské indexy odpovídají prvnímú a řecké druhému podsystému), budeme počítat střední hodnotu pozorovatelné typu \hat{A}'_1 , tj. s maticovými elementy $\hat{A}_{mn \mu\nu}$:

$$(2.4) \quad \langle \hat{A}'_1 \rangle_{\hat{\rho}} = Tr(\hat{\rho} \hat{A}'_1) = \sum_{m, n, \mu, \nu} \hat{\rho}_{n\mu, m\nu} \hat{A}_{mn \mu\nu} = \sum_{m, n} \left(\sum_{\mu} \hat{\rho}_{n\mu, m\mu} \right) \hat{A}_{mn} = Tr(\hat{\rho}^1 \hat{A}_1);$$

maticové koeficienty $\hat{\rho}^1$ jsou tedy dány vztahem

$$(2.5) \quad \hat{\rho}^1_{nm} = \sum_{\mu} \hat{\rho}_{n\mu, m\mu};$$

Obdobným způsobem dostaneme

$$(2.6) \quad \hat{\rho}^2_{\mu\nu} = \sum_n \hat{\rho}_{n\mu, n\nu};$$

Redukované matice hustoty $\hat{\rho}^j$ můžeme tedy vyjádřit pomocí stopy $\hat{\rho}$ přes složky druhého podsystému (tj. zbavíme se informací o tomto podsystému a informací o vzájemném vztahu S_1 a S_2):

$$(2.7) \quad \hat{\rho}^j = Tr^j \hat{\rho};$$

kde Tr^j je definován vztahy

$$(2.8) \quad (x; \hat{\ }^1 y) = \sum_i (x \otimes e_i; \hat{\ }^1 (y \otimes e_i))$$

respektive

$$(2.9) \quad (a; \hat{\ }^2 b) = \sum_j (f_j \otimes a; \hat{\ }^1 (f_j \otimes b));$$

kde $x; y \in \mathcal{H}_1$ a e_i je ON báze v \mathcal{H}_2 , resp. $a; b \in \mathcal{H}_2$ a f_j je ON báze v \mathcal{H}_1 .

2.2. Provázané stavy. Víme že $\hat{\ }^j$ jsou stavem $\hat{\ }$ jednoznačně určeny, naopak to ale obecně neplatí – důvodem je to, že složené systémy mají navíc pozorovatelné, které nejsou triviální kombinací pozorovatelných na podsystémech. Jsou-li $\hat{\ }^1; \hat{\ }^2$ matice $n \times n$, resp. $m \times m$, pak dohromady mají $n^2 - 1 + m^2 - 1$ nezávislých parametrů (nezávislých pozorovatelných). Matice hustoty složeného systému $\hat{\ }$ je matice $mn \times mn$, má tedy $m^2 n^2 - 1$ nezávislých pozorovatelných, což je zřejmě více než v případě obou podsystémů dohromady. Složený systém tak obsahuje více informací než kolik je v podsystémech, důsledkem těchto informací navíc jsou kvantové korelace (provázání systémů), které nemají obdobu v klasické fyzice.

Stavy složených systémů rozdělujeme na korelované a nekorelované. Nekorelované jsou ty stavy, jejichž matice hustoty je rovna tenzorovému součinu redukovaných matic hustoty:

$$(2.10) \quad \hat{\ } = \hat{\ }^1 \otimes \hat{\ }^2;$$

V těchto stavech obsahuje celková matice hustoty stejné množství informací, jako redukované stavy, jak ukáží podrobněji ve třetí kapitole pomocí entropie a indexu korelace.

Korelované stavy rozdělujeme dále na tři typy, podle toho, jak moc lze rozložit matici hustoty ve smyslu (2.10). Nejslabší korelace vykazují tzv. faktorizované stavy, ve kterých jsou jak složený systém, tak i podsystémy, v čistém stavu, tj. stavy typu $| \rangle | \rangle$. Dalším typem jsou korelované stavy, pro které lze matici hustoty rozložit na tvar

$$(2.11) \quad \hat{\ } = \sum_n \hat{\ }_n^1 \otimes \hat{\ }_n^2;$$

Nejsilněji korelované jsou tzv. provázané stavy (entangled states). Jejich matice hustoty se nedá žádným způsobem rozložit na tenzorový součin redukovaných matic hustoty:

$$(2.12) \quad \hat{\ } \neq \hat{\ }^1 \otimes \hat{\ }^2;$$

Pomocí těchto stavů lze dosáhnout např. porušení Bellových nerovností (viz. [3]), nebo kvantové teleportace (viz. [12]).

Vlastnostmi korelovaných stavů se budu zabývat podrobněji v další kapitole, zde uvedu jejich důležitý příklad – tzv. Bellovské stavy; na tomto příkladě bude také vidět další důvod pro zavedení matice hustoty.

2.3. Příklad – Bellovské stavy. Mějme dvouhladinový kvantový systém – tj. systém se dvěma realizovatelnými ortogonálními stavy, které označíme $|0\rangle$ a $|1\rangle$. Složený systém ze dvou takovýchto podsystémů má čtyři bazické stavy – např.

$|0\rangle|0\rangle; |1\rangle|0\rangle; |0\rangle|1\rangle; |1\rangle|1\rangle$. Můžeme si ale zvolit i jinou ON bázi. Jednu z nich tvoří Bellovské stavy:

$$(2.13) \quad |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle)$$

$$(2.14) \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle)$$

$$(2.15) \quad |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)$$

$$(2.16) \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle)$$

Matice hustoty Bellovských stavů jsou projektoři $|\Psi^\pm\rangle\langle\Psi^\pm|$ a $|\Phi^\pm\rangle\langle\Phi^\pm|$, ve standardní bázi (označíme-li $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) mají tvar

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \hat{\rho}_{\psi^\pm} &= \frac{1}{2}(|0\rangle|1\rangle \pm |1\rangle|0\rangle)(\langle 1|\langle 0| \pm \langle 0|\langle 1|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \hat{\rho}_{\phi^\pm} &= \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle \pm |1\rangle|1\rangle)(\langle 0|\langle 0| \pm \langle 1|\langle 1|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Určíme redukované matice hustoty:

pro stavy $|\Psi^\pm\rangle$ jsou to

$$(2.19) \quad \hat{\rho}_{\psi^\pm}^1 = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2.20) \quad \hat{\rho}_{\psi^\pm}^2 = \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

zřejmě $\hat{\rho}_{\psi^\pm} \neq \hat{\rho}_{\psi^\pm}^1 \otimes \hat{\rho}_{\psi^\pm}^2$, pro stavy $|\Phi^\pm\rangle$

$$(2.21) \quad \hat{\rho}_{\phi^\pm}^1 = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2.22) \quad \hat{\rho}_{\phi^\pm}^2 = \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

opět $\hat{\rho}_{\phi^{\pm}} \neq \hat{\rho}_{\phi^{\pm}}^1 \otimes \hat{\rho}_{\phi^{\pm}}^2$. Celkem tedy vidíme, že všechny čtyři Bellovské stavy jsou provázané. Toho se využívá např. při kvantové teleportaci (viz. [12]).

Ve všech čtyřech případech jsou redukované stavy stejné:

$$(2.23) \quad \hat{\rho}_{red} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zde je vidět nutnost zobecnění popisu stavu z paprsku na matici hustoty – Bellovské stavy jsou čisté (jsou popsány paprskem), ale jejich redukované stavy paprskem popsat nemůžeme, protože $\hat{\rho}_{red}$ není čistý stav.

3. FUNKCE NA MATICÍCH HUSTOTY

V této kapitole se budu zabývat dalšími vlastnostmi matice hustoty, především mě bude zajímat její informační obsah. Zavedu veličinu, která charakterizuje množství informací obsažené v matici hustoty – entropii, a budu zkoumat její vlastnosti, zejména pro složené systémy. Pro čisté stavy složených systémů dále zavedu tzv. indexy korelace, které určují sílu provázání podsystémů.

3.1. Entropie. Entropii v kvantové mechanice můžeme zavést několika způsoby. První vychází ze vztahu

$$(3.1) \quad \text{Tr} \hat{\rho}^2 \leq (\text{Tr} \hat{\rho})^2 = 1;$$

kde rovnost platí pro čisté stavy (viz kapitola 1). Protože entropie má popisovat míru neuspořádanosti stavu (čím větší chaos, tím větší entropie), můžeme definovat entropii stavu $\hat{\rho}$ (tzv. linearizovaná entropie) jako

$$(3.2) \quad S_{lin}(\hat{\rho}) := 1 - \text{Tr} \hat{\rho}^2$$

Zřejmě je pro čistý stav $S_{lin}(\hat{\rho}) = 0$, maximální linearizovanou entropii mají stavy

$$(3.3) \quad \hat{\rho}_n = \frac{1}{n} I^{(n)};$$

kde $I^{(n)}$ je jednotková matice $n \times n$ (systém se může nacházet v n ortonormálních bazických stavech se stejnou pravděpodobností $1/n$); pro ně je

$$(3.4) \quad S_{lin}(\hat{\rho}_n) = 1 - 1/n;$$

Pro volný časový vývoj matice hustoty platí vztah

$$(3.5) \quad \hat{\rho}(t) = \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t);$$

kde $\hat{U}(t)$ je unitární (viz kapitola 1), z čehož plyne

$$(3.6) \quad \hat{\rho}^2(t) = \hat{U}(t) \hat{\rho}^2(0) \hat{U}^\dagger(t)$$

a tedy

$$(3.7) \quad \text{Tr} \hat{\rho}^2(t) = \text{Tr}(\hat{U}(t) \hat{\rho}^2(0) \hat{U}^\dagger(t)) = \text{Tr}(\hat{U}^\dagger(t) \hat{\rho}^2(0) \hat{U}(t)) = \text{Tr} \hat{\rho}^2(0);$$

takže linearizovaná entropie je časově nezávislá.

Jiný způsob popisu neuspořádanosti systému představuje von Neumannova entropie definovaná vztahem (viz. [13], [14])

$$(3.8) \quad S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho});$$

Matice hustoty splňuje nerovnost $0 \leq \hat{\rho} \leq I$, protože dále funkce $x \ln x$ má na intervalu $(0; 1)$ minimum v bodě e^{-1} a to $-e^{-1}$, splňuje $\hat{\rho} \ln \hat{\rho}$ nerovnost

$$(3.9) \quad -e^{-1} \leq \hat{\rho} \ln \hat{\rho} \leq 0$$

pro libv. $\hat{\rho}$. Pro libv. $\{ |j\rangle \} \in \mathcal{H}$ je tedy $(\langle j | \hat{\rho} \ln \hat{\rho} | j \rangle) \leq 0$, takže součet řady

$$(3.10) \quad -\sum_j (\langle j | \hat{\rho} \ln \hat{\rho} | j \rangle) = S$$

existuje pro libovolnou ON bázi $\{ |j\rangle \}$ v \mathcal{H} , platí $0 \leq S \leq +\infty$; S nezávisí na volbě ON báze, protože pokud $S < +\infty$ v $\{ |j\rangle \}$, je operátor $-\hat{\rho} \ln \hat{\rho}$ jaderný a jeho stopa je konečná a nezávislá na volbě báze, jinak je $S = +\infty$ opět nezávisle na bázi. $S(\hat{\rho})$ je tedy dobře definováno.

Ukážu, že pro čisté stavy opět platí $S(\hat{\rho}) = 0$. Čistý stav $|\psi\rangle$ můžeme popsat maticí hustoty

$$(3.11) \quad |\psi\rangle\langle\psi| = \hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

stačí zvolit $|\psi\rangle$ jako 1. bazický vektor, takže

$$(3.12) \quad S(\hat{\rho}) = -Tr \hat{\rho} \ln \hat{\rho} = Tr \left(\begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln 1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = 0;$$

Smíšený stav má entropii vždy větší než nula, maximální entropii mají stavy

$$(3.13) \quad \hat{\rho}_n = \frac{1}{n} I^{(n)} \quad n < +\infty;$$

a sice

$$(3.14) \quad S = -\frac{1}{n} Tr \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^k \frac{1}{k} I^{(n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^k \frac{1}{k} = \ln n;$$

Von Neumannova entropie je ze stejných důvodů jako linearizovaná entropie časově nezávislá.

3.2. Entropie složených systémů, indexy korelace. Pro jednoduchost se budu zabývat případem, kdy systém je složen ze dvou podsystémů. Entropie složeného systému je opět určena celkovou maticí hustoty $\hat{\rho}$, entropie podsystémů je dána redukovánými stavy $\hat{\rho}^1; \hat{\rho}^2$:

$$(3.15) \quad S_{1(2)} = -Tr(\hat{\rho}^{1(2)} \ln \hat{\rho}^{1(2)});$$

Tyto veličiny jsou narozdíl od celkové entropie závislé na čase.

Pro entropii složeného systému S a entropie podsystémů $S_1; S_2$ platí Araki-Liebova nerovnost (viz. [13], [14]) :

$$(3.16) \quad |S_1 - S_2| \leq S \leq S_1 + S_2;$$

Tato nerovnost má zajímavý důsledek v případě, že složený systém je v čistém stavu – pak $S = 0$ a tedy $S_1 = S_2$ v libovolném čase.

Pomocí entropie můžeme pro čisté stavy zavést index korelace, který charakterizuje sílu korelací mezi podsystémy:

$$(3.17) \quad I_c = S_1 + S_2 - S;$$

Index korelace je vždy větší nebo roven nule, rovnost nastává pro nekorelované stavy, pro ty je totiž

$$(3.18) \quad \hat{\rho} = \hat{\rho}^1 \otimes \hat{\rho}^2;$$

takže entropie je

$$(3.19) \quad \begin{aligned} S &= -Tr(\hat{\rho}^1 \otimes \hat{\rho}^2 \ln(\hat{\rho}^1 \otimes \hat{\rho}^2)) = -Tr((\hat{\rho}^1 \ln \hat{\rho}^1) \otimes \hat{\rho}^2) - Tr(\hat{\rho}^1 \otimes (\hat{\rho}^2 \ln \hat{\rho}^2)) = \\ &= -Tr(\hat{\rho}^1 \ln \hat{\rho}^1) Tr \hat{\rho}^2 - Tr \hat{\rho}^1 Tr(\hat{\rho}^2 \ln \hat{\rho}^2) = S_1 + S_2; \end{aligned}$$

protože $Tr \hat{\rho}^i = 1$.

Předpokládejme, že $S_1 \geq S_2$, pak je index korelace omezen nerovností $I_c \leq 2S_2$, maximální hodnota je tedy $I_c^{max} = 2S_2$. S_2 může být nejvýše rovno S_1 , takže stavy s nejvyšším indexem korelace jsou ty, pro které je $S_1 = S_2$ (podsystémy jsou stejně neuspořádané) a $S = 0$ (složený systém je v čistém stavu).

Index korelace závisí pouze na stavech $|\hat{\mu}^1\rangle$ a $|\hat{\mu}^2\rangle$ a ne na pozorovatelných – neurčuje tedy, které pozorovatelné (a jak silně) jsou korelované. K tomu slouží Shannonův index korelace, který popisuje korelaci konkrétní dvojice pozorovatelných. Nechť $\hat{M}; \hat{N}$ jsou pozorovatelné na systémech 1, resp. 2, $|\hat{\mu}\rangle$ a $|\hat{\nu}\rangle$ jejich vlastní stavy, označme dále

$$(3.20) \quad \hat{\rho}_{\mu\nu} = \langle |\hat{\mu}\rangle \langle \hat{\nu}| \rangle:$$

Shannonova entropie pozorovatelných \hat{M} a \hat{N} je definována vztahem

$$(3.21) \quad S(\hat{M}; \hat{N}) = - \sum_{\mu} \sum_{\nu} \hat{\rho}_{\mu\nu} \ln \hat{\rho}_{\mu\nu}:$$

Entropie jednotlivých pozorovatelných \hat{M} a \hat{N} definujeme obdobně pomocí redukovaných stavů $\hat{\rho}^1$ a $\hat{\rho}^2$ jako

$$(3.22) \quad S_1(\hat{M}) = - \sum_{\mu} \hat{\rho}_{\mu\mu}^1 \ln \hat{\rho}_{\mu\mu}^1,$$

respektive

$$(3.23) \quad S_2(\hat{N}) = - \sum_{\nu} \hat{\rho}_{\nu\nu}^2 \ln \hat{\rho}_{\nu\nu}^2:$$

Shannonův index korelace pozorovatelných \hat{M} a \hat{N} je potom

$$(3.24) \quad I_c(\hat{M}; \hat{N}) = S_1(\hat{M}) + S_2(\hat{N}) - S(\hat{M}; \hat{N}):$$

Pro entropie $S(\hat{M}; \hat{N})$; $S_1(\hat{M})$ a $S_2(\hat{N})$ lze dokázat obdobu Araki-Liebovi nerovnosti (viz. [14]), platí:

$$(3.25) \quad \max(S_1(\hat{M}); S_2(\hat{N})) \leq S(\hat{M}; \hat{N}) \leq S_1(\hat{M}) + S_2(\hat{N}):$$

$I_c(\hat{M}; \hat{N})$ je tedy vždy větší než nula, kde rovnost platí, pokud \hat{M} a \hat{N} jsou nekorelované pozorovatelné (měření \hat{M} na prvním systému neovlivní výsledek měření \hat{N} na druhém systému a naopak). Pro Shannonův index dále platí následující dvě tvrzení.

Tvrzení 3.1. *Pro libv. pozorovatelné \hat{M} , \hat{N} je*

$$(3.26) \quad I_c(\hat{M}; \hat{N}) \leq I_c;$$

tedy korelace dvou pozorovatelných nemůže být větší než korelace celého systému.

Tvrzení 3.2. *Pokud $|\hat{\mu}\rangle$ je čistý stav, pak pro libv. pozorovatelné \hat{M} , \hat{N} platí*

$$(3.27) \quad I_c(\hat{M}; \hat{N}) \leq \frac{1}{2} I_c:$$

Důkazy lze opět nalézt v [14].

Na závěr bych chtěl porovnat korelace v kvantové a klasické fyzice. V klasickém případě definujeme index korelace jako

$$(3.28) \quad I_c^{cl} := \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 - \tilde{S};$$

kde \tilde{S}_i a \tilde{S} jsou entropie definované pomocí pravděpodobnostních distribucí na fázových prostorech systémů.

Pro porovnání korelací zavedu poměry :

$$(3.29) \quad q_m = \frac{I_c}{S_1^{max} + S_2^{max}};$$

$$(3.30) \quad I_c^{cl} = \frac{I_c^{cl}}{\tilde{S}_1^{max} + \tilde{S}_2^{max}};$$

kde \tilde{S}_i^{max} a \tilde{S}_i^{max} značí maximální entropii možnou pro daný systém. V klasickém případě musí být korelovaný systém alespoň tak neuspořádaný, jako každý z jeho podsystémů – tedy $\tilde{S} \geq \max(\tilde{S}_1; \tilde{S}_2)$; v kvantovém případě ale může být složený systém v čistém stavu – pak je $S = 0$. Pro poměry tedy platí tyto nerovnosti :

$$(3.31) \quad q^m \leq 1$$

$$(3.32) \quad c^l \leq 1=2:$$

Kvantové systémy tedy mohou být dvakrát silněji korelované než klasické, v oblasti $1=2 \leq q^m \leq 1$ se projevuje to, že v kvantové mechanice skládáme amplitudy pravděpodobnosti, viz [14].

3.3. Vlastnosti Bellovských stavů. V tomto příkladě spočítám entropii, index korelace a Shannonův index některých pozorovatelných pro Bellovské stavy. Bellovské stavy zde popisují 2 částice se spinem $1=2$, $|0\rangle$ a $|1\rangle$ jsou vlastní stavy operátoru σ_z , tedy

$$(3.33) \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(3.34) \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Matice hustoty jsou Bellovských stavů jsou podle příkladu 1.7

$$(3.35) \quad \hat{\rho}_{\psi^\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3.36) \quad \hat{\rho}_{\phi^\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Všechny čtyři matice jsou projektory, tj. $\hat{\rho}_{\psi^\pm}^2 = \hat{\rho}_{\psi^\pm}$ a $\hat{\rho}_{\phi^\pm}^2 = \hat{\rho}_{\phi^\pm}$, takže $Tr \hat{\rho}_{\psi^\pm}^2 = Tr \hat{\rho}_{\phi^\pm}^2 = 1$ a linearizovaná entropie ($S_{lin} = 1 - Tr \hat{\rho}^2$) je tedy rovna nule, což odpovídá tomu, že se jedná o čisté stavy. Ze stejného důvodu je i von Neumannova entropie ($S = -Tr \hat{\rho} \ln \hat{\rho}$) rovna nule.

Z příkladu 1.7 dále vyplývá, že všechny Bellovské stavy mají stejné redukované stavy

$$(3.37) \quad \hat{\rho}_{red} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

jejich entropie je podle (3.14) rovna $S(\hat{\rho}_{red}) = \ln 2$. Index korelace Bellovských stavů je tedy

$$(3.38) \quad I_c = 2 \ln 2:$$

Dále spočítám Shannonův index pro pozorovatelné (1) σ_z a (2) σ_x .

(1) Entropie pozorovatelné z ve stavu $\hat{\rho}_{red}$ je podle vztahů (3.22) a (3.23) rovna

$$(3.39) \quad S_1(z) = S_2(z) = -1/2 \ln 1/2 - 1/2 \ln 1/2 = \ln 2;$$

Stavy $| \pm \rangle$ mají nenulové diagonální prvky $\hat{\rho}_{00,11} = \hat{\rho}_{11,00} = 1/2$, pro stavy $| \pm \rangle$ to jsou $\hat{\rho}_{00,00} = \hat{\rho}_{11,11} = 1/2$, podle vztahu (3.21) je tedy vzájemná entropie $z; z$ rovna

$$(3.40) \quad S(z; z) = -1/2 \ln 1/2 - 1/2 \ln 1/2 = \ln 2;$$

Shannonův index je tedy

$$(3.41) \quad I_c(z; z) = \ln 2;$$

což je polovina celkového indexu korelace. Tyto pozorovatelné jsou tedy nejsilněji korelované, z definice Bellovských stavů je přímo vidět, že měření z na jednom systému zároveň jednoznačně určí stav druhého systému.

(2) Entropie pozorovatelné x ve stavu $\hat{\rho}_{red}$ je opět

$$(3.42) \quad S_2(x) = \ln 2;$$

to platí pro libovolný operátor spinu, protože $\hat{\rho}_{red} = 1/2 \mathbf{I}$. K určení vzájemné entropie musíme najít diagonální prvky matice hustoty v bázi $|0\rangle|0; x\rangle; |1\rangle|0; x\rangle; |0\rangle|1; x\rangle; |1\rangle|1; x\rangle$, kde $|0; x\rangle; |1; x\rangle$ jsou vlastní stavy operátoru x . Ty odpovídají vektorům polarizace

$$(3.43) \quad P = (\pm 1 \quad 0 \quad 0);$$

tedy polárním úhlem $\theta = 0; \phi = \pm \pi/2$, takže podle vztahu (1.36) je

$$(3.44) \quad |0; x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$(3.45) \quad |1; x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle);$$

Přímým výpočtem potom zjistíme, že

$$(3.46) \quad \hat{\rho}_{diag} = \frac{1}{4}(|0\rangle|0; x\rangle\langle 0; x|\langle 0| + |0\rangle|1; x\rangle\langle 1; x|\langle 0| + |1\rangle|0; x\rangle\langle 0; x|\langle 1| + |1\rangle|1; x\rangle\langle 1; x|\langle 1|)$$

pro všechny Bellovské stavy, takže vzájemná entropie $z; x$ v Bellovských stavech je

$$(3.47) \quad S(z; x) = -4 \frac{1}{4} \ln \frac{1}{4} = 2 \ln 2;$$

Shannonův index je tedy

$$(3.48) \quad I_c(z; x) = \ln 2 + \ln 2 - 2 \ln 2 = 0;$$

takže tyto pozorovatelné nejsou vzájemně korelované.

4. HRADLA PRO KVANTOVÉ POČÍTÁNÍ

4.1. Kvantová informace. Nejprve rozeberu otázku, jak zapsat informaci pomocí stavu kvantového systému. V klasickém případě převedeme data do binární soustavy, např. pomocí ano/ne otázek, hodnota bitu 1 odpovídá kladné a hodnota 0 záporné odpovědi. Konkrétní realizaci takového kódování pak představuje systém se dvěma dobře rozlišitelnými stavy. Z toho vyjdeme pro kvantové kódování. Mějme dvouhladinový kvantový systém, označme jeho ortogonální stavy jako $|0\rangle$ (záporná odpověď) a $|1\rangle$ (kladná odpověď). Náš systém ale může být v libovolné superpozici těchto dvou stavů – tím se kvantové kódování zásadně liší od klasického. Obecná superpozice $|0\rangle$ a $|1\rangle$ se nazývá qubit.

Stavový prostor jednoho dvouhladinového systému je \mathbb{C}^2 . Zapsání většího množství informací je zřejmě možné udělat tak, že každému bitu přiřadíme dvouhladinový systém – pro n bitů je tedy stavový prostor \mathbb{C}^{2^n} .

4.2. Kvantová hradla. Klasická hradla můžeme popsat např. pomocí pravdivostní tabulky, které ukazují, jak hradlo působí na bit podle jeho hodnoty. V klasickém případě má bit hodnotu buď 0 nebo 1, v kvantovém ale může být v libovolné superpozici stavů $|0\rangle$ a $|1\rangle$. Kvantové hradlo pracující s n bity tak musíme popsat pomocí operátoru (matice) na stavovém prostoru \mathbb{C}^{2^n} :

Definice 4.1. Kvantové hradlo s n vstupy a n výstupy je popsáno unitárním operátorem $\hat{U} : \mathbb{C}^{2^n} \mapsto \mathbb{C}^{2^n}$.

Poznámka 4.2. Unitarita je požadována proto, že chceme popsat výpočet (tj. působení hradel na systém) pomocí časového vývoje systému, a ten je generován unitárním operátorem. Některé klasické operace (např. AND) tak nemají přímou kvantovou obdobu, ale musíme je poskládat z dostupných hradel.

4.3. Příklady základních hradel. Nejjednodušším hradlem je \widehat{NOT} , který transformuje $|0\rangle$ na $|1\rangle$ a naopak, stejně jako klasický digitální NOT. Pro superpozici z linearity \widehat{NOT} vyplývá

$$(4.1) \quad \widehat{NOT}(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|1\rangle + b|0\rangle:$$

\widehat{NOT} můžeme popsat maticí 2×2 ; pokud označíme

$$(4.2) \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

pak \widehat{NOT} je reprezentován maticí

$$(4.3) \quad \widehat{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Další možností je popsat hradlo pomocí tzv. Hubbardových operátorů X^{ik} ($i; k \in \hat{2}$), kde

$$(4.4) \quad X^{ik}_{jl} = \delta_{ij} \delta_{kl}:$$

Pro násobení těchto matic platí následující jednoduché pravidlo:

$$(4.5) \quad X^{ik} X^{mn} = X^{in} \delta_{km};$$

jak se lze přesvědčit přímým výpočtem. Pomocí Hubbardových operátorů zapíšeme \widehat{NOT} jako

$$(4.6) \quad \widehat{NOT} = X^{12} + X^{21}:$$

Poslední možností je popis hradla pomocí projektorů. Hubbardovy matice X^{ik} odpovídají projektorům $|i-1\rangle\langle k-1|$. \widehat{NOT} má tedy tvar

$$(4.7) \quad \widehat{NOT} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|:$$

Zásadní význam pro kvantové počítání má CONTROL-NOT (\widehat{CNOT}), popsané operátorem

$$(4.8) \quad \widehat{CNOT} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|:$$

\widehat{CNOT} pracuje se dvěma qubity, přičemž první je kontrolní (jeho hodnota se působením \widehat{CNOT} nemění), druhý mění svojí hodnotu, pokud má kontrolní qubit hodnotu $|1\rangle$ (poslední dva sčítance v (4.8)), jinak je ponechán beze změny (první dva sčítance v (4.8)). Druhý qubit tedy prochází podmíněným unitárním vývojem. \widehat{CNOT} má maticovou podobu

$$(4.9) \quad \widehat{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}:$$

Dalšími důležitými hradly jsou Hadamardovy operátory

$$(4.10) \quad \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \hat{H}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{H}'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

které provádí rotaci jednoho qubitu.

Důležitá 3-qubitová hradla jsou CONTROL-CONTROL-NOT (\widehat{CCNOT}) a Fredkinův operátor (\hat{F}). \widehat{CCNOT} pracuje se dvěma kontrolními qubity a jedním cílovým, jehož hodnota se mění, pokud oba kontrolní mají hodnotu $|1\rangle$:

$$(4.11) \quad \widehat{CCNOT} = |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| + \\ + |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 110|$$

\hat{F} má jeden kontrolní qubit a dva cílové, ty si vymění hodnoty, pokud kontrolní má hodnotu $|1\rangle$:

$$(4.12) \quad \hat{F} = |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| + |100\rangle\langle 100| + \\ + |101\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 101| + |111\rangle\langle 111|$$

Skládáním těchto hradel do kvantových obvodů dostaneme většinu složitějších hradel, které potřebujeme.

5. PŮSOBNÍ HRADEL NA KVANTOVÉ SYSTÉMY A POPIS POMOCÍ MATICE HUSTOTY

Víme jak hradla působí na čisté stavy - pokud \hat{A} je operátor popisující hradlo A a $| \rangle$ je stav systému na vstupu, pak výsledný stav systému je $\hat{A}| \rangle$, tedy opět čistý stav. Musíme dále určit, jak se transformují smíšené stavy. Víme, že každou matici hustoty $\hat{\rho}$ můžeme zapsat jako sumu projektorů na vlastní stavy $| \rangle$

$$(5.1) \quad \hat{\rho} = \sum_n | \rangle \langle |$$

Ket- a bra-vektory $| \rangle, \langle |$ se působením hradla A transformují na

$$(5.2) \quad | \rangle \rightarrow \hat{A} | \rangle = | \rangle;$$

$$(5.3) \quad \langle | \rightarrow \hat{A} \langle | = \langle | \hat{A}^+;$$

Smíšený stav $\hat{\rho}$ se tedy působením A změní na

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \hat{\rho} \rightarrow \hat{A} \hat{\rho} \hat{A}^+ &= \sum_n w_n | \rangle \langle | = \sum_n w_n \hat{A} | \rangle \langle | \hat{A}^+ = \\ &= \hat{A} \left(\sum_n w_n | \rangle \langle | \right) \hat{A}^+ = \hat{A} \hat{\rho} \hat{A}^+; \end{aligned}$$

$\hat{\rho}'$ je pozitivní operátor, protože

$$(5.5) \quad \langle | \hat{\rho}' | \rangle = \langle | \hat{A} \hat{\rho} \hat{A}^+ | \rangle = \langle | \hat{A} \hat{A}^+ | \rangle \langle | \hat{\rho} | \rangle \geq 0 \quad \forall | \rangle;$$

kde $| \rangle = \hat{A}^+ | \rangle$. Protože \hat{A} je unitární operátor, je

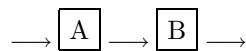
$$(5.6) \quad Tr \hat{\rho}' = Tr(\hat{A} \hat{\rho} \hat{A}^+) = Tr(\hat{A}^+ \hat{A}) = Tr \hat{\rho} = 1;$$

takže $\hat{\rho}'$ je opět matice hustoty. Z unitarity \hat{A} dále vyplývá, že stavy $| \rangle$ a $| \rangle$ mají stejnou entropii.

Zatím jsem se zabýval působením jednotlivých hradel na systém. Tato hradla mají spíše pomocný charakter. Se systémem chceme provádět především složitější operace. Ty vytvoříme skládáním základních hradel do kvantových obvodů.

Nejjednodušší kvantové obvody mohou vypadat např. následujícím způsobem:

(1) Složení dvou hradel za sebou

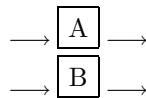


které provádí transformaci

$$| \rangle \longrightarrow \hat{A} | \rangle \longrightarrow \hat{B} \hat{A} | \rangle;$$

tj. operátor, který popisuje působení tohoto obvodu je složením operátorů jednotlivých hradel.

(2) Složení dvou hradel vedle sebe

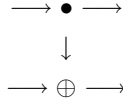


které působí na dva qubity způsobem

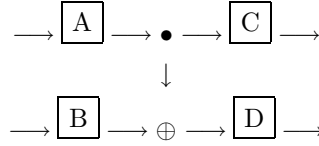
$$| \rangle \otimes | \rangle \longrightarrow \hat{A} | \rangle \otimes \hat{B} | \rangle;$$

tedy operátor popisující tento obvod je tenzorovým součinem operátorů \hat{A} a \hat{B} .

Zde byla obě hradla 1-qubitová, obvod ale může obsahovat i více-qubitová hradla, např. CNOT, který budu v grafech značit jako



kde \bullet je kontrolní a \oplus cílový qubit. Obvod obsahující CNOT pak může vypadat např. jako



a bude transformovat systém na

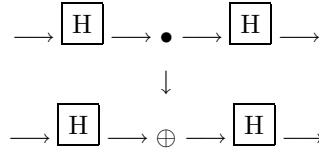
$$\begin{aligned} | \rangle \otimes | ' \rangle &\longrightarrow \hat{A} | \rangle \otimes \hat{B} | ' \rangle \longrightarrow \widehat{CNOT}(\hat{A} | \rangle \otimes \hat{B} | ' \rangle) = |0\rangle\langle 0| \hat{A} | \rangle \otimes \hat{B} | ' \rangle + \\ &+ |1\rangle\langle 1| \hat{A} | \rangle \otimes \widehat{NOT} \hat{B} | ' \rangle \longrightarrow \langle 0| \hat{A} | \rangle \hat{C} |0\rangle \otimes \hat{D} \hat{B} | ' \rangle + \langle 1| \hat{A} | \rangle \hat{C} |1\rangle \otimes \hat{D} \widehat{NOT} \hat{B} | ' \rangle \end{aligned}$$

kde jsem použil rozklad

$$(5.7) \quad \widehat{CNOT} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes \widehat{NOT}:$$

Na závěr kapitoly uvedu několik jednoduchých příkladů kvantových obvodů.

(1) Inverzní CNOT ($I - \widehat{CNOT}$) můžeme sestavit pomocí jednoho CNOT a čtyř Hadamardových hradel:

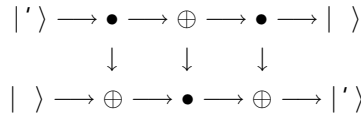


Ověřme to např. pro vstup $|0\rangle|1\rangle$. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} |0\rangle|1\rangle &\longrightarrow \hat{H} \otimes \hat{H} \longrightarrow \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle - |1\rangle|1\rangle) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \widehat{CNOT} \longrightarrow \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle - |0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \hat{H} \otimes \hat{H} \longrightarrow \frac{1}{4}((|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) + (|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) - (|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) - \\ &\quad - (|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)) = |1\rangle|1\rangle; \end{aligned}$$

což je správný výsledek.

(2) Obvod pro výměnu hodnoty dvou qubitů lze sestavit ze dvou CNOT a jednoho inverzního CNOT:

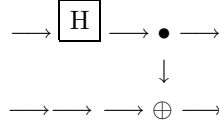


Ověřme to pro vstup $| ' \rangle = |0\rangle + |1\rangle$ a $| \rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$. Dostáváme

$$| ' \rangle | \rangle \longrightarrow \widehat{CNOT} \longrightarrow a|0\rangle|0\rangle + b|0\rangle|1\rangle + a|1\rangle|1\rangle + b|1\rangle|0\rangle \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\longrightarrow I - \widehat{CNOT} \longrightarrow a|0\rangle|0\rangle + b|1\rangle|1\rangle + a|0\rangle|1\rangle + b|1\rangle|0\rangle \longrightarrow \\ &\longrightarrow \widehat{CNOT} \longrightarrow a|0\rangle|0\rangle + b|1\rangle|0\rangle + a|0\rangle|1\rangle + b|1\rangle|1\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) = \\ &= |\psi'\rangle \end{aligned}$$

(3) Obvod produkující Bellové stavy sestavíme z jednoho Hadamardova hradla a jednoho CNOT:



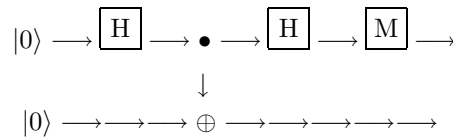
Při vstupu $|0\rangle|1\rangle$ bude výsledek

$$\begin{aligned} |0\rangle|1\rangle &\longrightarrow \hat{H} \otimes \hat{I} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle \longrightarrow \\ &\longrightarrow \widehat{CNOT} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle); \end{aligned}$$

což je Bellovský stav $|\Psi^+\rangle$. Další Bellové stavy dostaneme prostřídáním $|0\rangle$ a $|1\rangle$ na vstupech:

$$\begin{aligned} |0\rangle|0\rangle &\longrightarrow \hat{H} \otimes \hat{I} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \longrightarrow \\ &\longrightarrow \widehat{CNOT} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = |\Phi^+\rangle; \\ |1\rangle|1\rangle &\longrightarrow \hat{H} \otimes \hat{I} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle \longrightarrow \\ &\longrightarrow \widehat{CNOT} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) = |\Psi^-\rangle; \\ |1\rangle|0\rangle &\longrightarrow \hat{H} \otimes \hat{I} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle \longrightarrow \\ &\longrightarrow \widehat{CNOT} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) = |\Phi^-\rangle; \end{aligned}$$

(4) Měřící hradla slouží k zjišťování výsledků procesu v kvantovém obvodu. Můžeme je ale použít i uvnitř obvodu, např. pro generování náhodných qubitů. Takový obvod může vypadat např. takto:



Výstup před měřením bude

$$\begin{aligned} |0\rangle|0\rangle &\longrightarrow \hat{H} \otimes \hat{I} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|0\rangle) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \widehat{CNOT} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \hat{H} \otimes \hat{I} \longrightarrow \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|0\rangle|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|1\rangle); \end{aligned}$$

Redukovaná matice hustoty pro první qubit je

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

takže po měření má první qubit zcela náhodnou hodnotu.

REFERENCES

- [1] FORMÁNEK J.: ÚVOD DO KVANTOVÉ TEORIE, ACADEMIA, PRAHA 1983.
- [2] BLUM K.: DENSITY MATRIX THEORY AND APPLICATIONS, PLENUM, NEW YORK, 1981.
- [3] BOUWMEESTER D., EKERT A., ZEILINGER A.: THE PHYSICS OF QUANTUM INFORMATION, SPRINGER, BERLIN, 2000.
- [4] HOI-KWONG LO, POPESCU S., SPILLER T.: INTRODUCTION TO QUANTUM COMPUTATION AND INFORMATION, WORLD SCIENTIFIC, SINGAPORE, 1998.
- [5] WILLIAMS C. P., CLEARWATER S. H.: EXPLORATIONS IN QUANTUM COMPUTING, SPRINGER, BERLIN, 1997.
- [6] BERMAN G., DOOLEAN G., MAINIERI R., TSIFRINOVICH V. I.: INTRODUCTION TO QUANTUM COMPUTERS, WORLD SCIENTIFIC, SINGAPORE, 1998.
- [7] BARNETT S. M., RADMORE P. M.: METHODS IN THEORETICAL QUANTUM OPTICS, CLAREDON PRESS, OXFORD, 1997.
- [8] ALBER G., DELGADO D., JEX I.: OPTIMAL UNIVERSAL TWO-PARTICLE PROCESSES IN ARBITRARY DIMENSIONAL HILBERT SPACES, QUANT-PH 0006040.
- [9] DELGADO A., ALBER G., GISIN N., JEX I.: GENERALIZED QUANTUM XOR-GATE AND THE PURIFICATION OF GHZ STATES, QUANT-PH 0008022.
- [10] BECHMANN-PASQUINUCCI H., HUTTNER B., GISIN N.: PHYS. LETT. A 242 (1998) 198.
- [11] BLANK J., EXNER P., HAVLÍČEK M.: LINEÁRNÍ OPERÁTORY V KVANTOVÉ FYZICE, KAROLINUM, PRAHA, 1993.
- [12] ZEILINGER A.: QUANTUM ENTANGLEMENT: A FUNDAMENTAL CONCEPT FINDING ITS APPLICATIONS, PHYSICA SCRIPTA, VOL. T76, 1998
- [13] BARNETT S. M., PHOENIX S. J. D.: ENTROPY AS A MEASURE OF QUANTUM OPTICAL CORRELATION, PHYSICAL REVIEW A, VOL. 40
- [14] BARNETT S. M., PHOENIX S. J. D.: INFORMATION THEORY, SQUEEZING, AND QUANTUM CORRELATIONS, PHYSICAL REVIEW A, VOL. 44