Rešeršní práce: Gradace a gradované kontrakce Lieových algeber nízkých dimenzí

Petr Novotný

20.9.2001

Obsah:

0. Úvod

V roce 1951 I.E.Segal uvedl myšlenku kontrahování Lieových algeber na fyzikálním základě: Jsou-li dvě fyzikální teorie (např. relativistická a klasická mechanika) spojeny limitním procesem, pak asociované grupy invariance (Poincaréova a Galileiho grupa) jsou taktéž spojeny nějakým limitním procesem. Tuto myšlenku dále v roce 1953 studovali E.Inőnű E.P.Wigner, kteří zavedli takzvané jednoduché Inőnű-Wignerovy kontrakce.

Cílem této práce je prezentovat metodu gradovaných kontrakcí (tj. kontrakcí, které zachovávají vybrané gradace) jako způsob získávání neizomorfních algeber z dané Lieovy algebry L. Takové kontrakce se dají klasifikovat do dvou tříd: Inőnű-Wignerovy spojité kontrakce a nové diskrétní kontrakce. Gradace Lieovy algebry L je dána gradačním rozkladem na gradační podprostory $L_i \subset L$ a komutačními relacemi mezi těmito podprostory. Dvě gradace jsou ekvivalentní, jestliže se přidružené rozklady liší transformací z grupy automorfismů *Aut*L. Během obecné kontrakce zachovávající gradaci se se všemi prvky gradovaných podprostorů L_i zachází stejným způsobem a mění se pouze komutační relace mezi celými gradovanými podprostory. Vyšetřování všech možných gradovaných kontrakcí dané Lieovy algebry závisí na znalosti všech jejích gradací. Gradace Lieových algeber byly klasifikovány teprve nedávno. Kapitoly 2 a 3 jsou proto věnovány způsobu hledání tzv. jemných gradací Lieových algeber sl(n,C) a jejich reálných forem. Hlavní rozdíl mezi tradiční metodou kontrahování Lieových algeber a metodou gradovaných kontrakcí je nejlépe vidět na způsobu uplatnění Jacobiho identit. Zatímco tradiční parametrizace automaticky zaručuje platnost Jacobiho identit, v našem případě Jacobiho identity dávají systém kvadratických rovnic pro kontrakční parametry. Počet kontrakčních parametrů v tradičním přístupu nemůže přesáhnout řád gradační grupy, v našem případě roste kvadraticky s řádem.

V první kapitole jsou uvedeny základní definice týkající se gradací a kontrakcí a je zde popsána metoda gradovaných kontrakcí Lieových algeber. Dále se ve druhé resp. třetí kapitole zabýváme metodou hledání jemných gradací komplexních Lieových algeber sl(n,C) resp. jejich reálných forem a tato metoda je aplikována na Lieovu algebru sl(2,C). Ve čtvrté kapitole nacházíme gradované kontrakce Lieovy algebry sl(2,C) a jejích reálných forem. V poslední páté kapitole srovnáme soubor třírozměrných Lieových algeber získaných v kapitole 4. gradovanými kontrakcemi se známou klasifikací Lieových algeber dimenze tři.

1. Gradace a gradované kontrakce Lieových algeber

V této kapitole nejprve uvedeme základní pojmy a některé vlastnosti týkající se gradací a gradovaných kontrakcí Lieových algeber. Dále popíšeme obecně metodu hledání kontrakcí Lieových algeber zachovávajících vybrané gradace (gradovaných kontrakcí). Přitom nebudeme klást omezení na dimenzi algeber, může být konečná i nekonečná. Nebude-li uvedeno jinak, pak v celé této práci budeme Lieovou algebrou rozumět Lieovu algebru nad komplexním tělesem.

Definice 1.1: Gradace (graduace) Lieovy algebry L je rozklad Lieovy algebry $L = \oplus_{i\in I} L_i$ do direktního součtu jejích tzv. gradovaných podprostorů L_i takový, že:

$$(\forall i,j\in I)\ (\exists k\in I)\ ([L_i , L_j] \subseteq L_k).$$

Kde $[L_i , L_j] := \{[x,y] \mid x\in L_i,\ y\in L_j\}$ je lineární podprostor generovaný komutátory každého prvku L_i s každým prvkem L_j. Pro takový podprostor zřejmě platí $[L_i , L_j] = [L_j , L_i]$.

Definice 1.2: Buď L Lieova algebra. Gradace $L = \oplus_{i\in I} L_i$ a $L = \oplus_{j\in J} K_j$ jsou ekvivalentní, jestliže existuje automorfismus g Lieovy algebry L tak, že:

1) $\forall i\in I\ \exists j\in J$ tak, že $gL_i = K_j$
2) $\forall i,j\in I$ platí $[L_i , L_j] = [gL_i , gL_j]$.

Poznamenejme, že pro jakýkoliv automorfismus g Lieovy algebry L a jakoukoliv gradaci $L = \oplus_{i\in I} L_i$ je rozklad $L = \oplus_{i\in I} g(L_i)$ opět gradace (tj. $\forall i,j\in I\ \exists k\in I\ [gL_i,gL_j] = g[L_i,L_j] \subseteq gL_k$) a obě tyto gradace jsou ekvivalentní.

Definice 1.3: Buď L Lieova algebra. Gradace $L = \oplus_{j\in J} K_j$ se nazývá zjemněním dané gradace $L = \oplus_{i\in I} L_i$, pokud platí: $\forall j\in J\ \ \exists i\in I$ tak, že $K_j \subseteq L_i$. Zjemnění se nazývá vlastní, pokud mohutnost množiny J je větší než mohutnost množiny I.

Definice 1.4: Gradace, která nemá žádné vlastní zjemnění, se nazývá jemná gradace. Gradace, která je rozkladem na jednodimenzionální podprostory, se nazývá nejjemnější.

Poznamenejme, že pro každou gradaci $L = \oplus_{i\in I} L_i$ existuje jemná gradace $L = \oplus_{j\in J} \widetilde{L}_j$ tak, že každý podprostor L_i je direktním součtem některých podprostorů této jemné gradace, tj. existuje rozklad indexové množiny $J = \cup_{i\in I} J_i$ takový, že pro každé $i\in I$ platí $L_i = \oplus_{j\in J_i} \widetilde{L}_j$. Tedy jemné gradace jsou jakési stavební bloky pro ostatní gradace.

Mějme nyní poloprostou Lieovu algebru L a její gradaci $L = \oplus_{i\in I} L_i$. Je-li indexová množina I konečná, lze ji vnořit do konečné aditivní abelovské grupy (G ;+). Prvkům G\I se přiřadí nulové prostory. Operace $+ : G\times G\to G : i,j \mapsto r$ je dána pro prvky z $I\times I$ vlastností gradace $[L_i , L_j] \subseteq L_r$ (pokud $[L_i , L_j] = \{0\} = 0$ lze r volit libovolně). V takovém případě říkáme, že Lieova algebra L je gradovaná grupou G a o grupě G mluvíme jako o gradační grupě.

Buď nadále L Lieova algebra gradovaná konečnou abelovskou grupou G, tedy máme gradovaný rozklad L do direktního součtu gradovaných podprostorů L_j $\quad L = \oplus_{j\in G} L_j$ a komutátory podprostorů splňují vztah $[L_j , L_k] \subseteq L_{j+k}$ $\ j, k, j+k \in G$. Obecně se nebudeme zajímat o detailní strukturu L, ale budeme potřebovat určit, který komutátor $[L_j , L_k]$ je roven nulovému prostoru a který ne. Za tímto účelem zavedeme symetrickou matici $\kappa = (\kappa_{j,k})$:

$$\kappa_{j,k} = 0 \quad \text{pro} \quad [L_j , L_k] = 0$$
$$\kappa_{j,k} = 1 \quad \text{pro} \quad [L_j , L_k] \neq 0 \qquad j,k \in G.$$

Potom bez újmy a obecnosti můžeme užívat zápisu:

$$[L_j , L_k] \subseteq \kappa_{j,k} L_{j+k} \tag{1.1}$$

a mluvíme o G-gradované struktuře κ. Někdy, bude-li to nutné, budeme značit G-gradovanou strukturu L explicitně jako L^κ namísto L.

Definice 1.5: Buďte G konečná abelovská grupa, L^κ G-gradovaná Lieova algebra popsaná vztahy:

$$L = \oplus_{j\in G} L_j , \qquad [L_j , L_k] \subseteq \kappa_{j,k} L_{j+k} \qquad \forall j,k\in G.$$

G-gradovaná kontrakce L^ε z Lieovy algebry L^κ: $\quad L^\kappa \xrightarrow{\gamma} L^{\kappa\bullet\gamma} = L^\varepsilon$

je Lieova algebra L^ε s gradovaným rozkladem $L = \oplus_{j\in G} L_j$ a s kontrahovaným komutátorem $[,]_\varepsilon$:

$$[L_j , L_k]_e = \gamma_{j,k} [L_j , L_k] \subseteq \gamma_{j,k}\kappa_{j,k} L_{j+k} = \varepsilon_{j,k} L_{j+k} \tag{1.2}$$

daným komutátorem v L^κ a kontrakčními parametry $\varepsilon_{j,k} \in \mathbb{C}$.

G-gradovaná kontrakce (kontrakce zachovávající G-gradaci) Lieovy algebry je Lieova algebra se stejným vektorovým prostorem i gradovaným rozkladem jako ta původní a liší se od ní pouze komutátorem. Kontrakce je tedy určena maticemi κ a γ, nebo ekvivalentně maticí ε. Matice γ a ε se shodují v takovém případě L^κ, kdy všechny prvky matice κ jsou rovny 1, potom říkáme, že κ je generického typu a píšeme κ = (1). Matice kontrakčních parametrů ε se nazývá kontrakční matice nebo krátce jen kontrakce. Poznamenejme, že matice κ,γ,ε jsou podle definice symetrické vzhledem k transpozici:

$$\kappa = \kappa^T \quad \gamma = \gamma^T \quad \varepsilon = \varepsilon^T.$$

Neboť L^ε je Lieova algebra, matice ε nesmí porušovat Jacobiho identitu. Tato podmínka hraje hlavní roli při hledání gradovaných kontrakcí, a my se jí proto budeme ve zbytku práce ještě věnovat.

Na základě vztahu (1.2) zavedeme zvláštní maticové skládání • pro matice κ,γ a ε:

$$\varepsilon = \kappa\bullet\gamma = \gamma\bullet\kappa \tag{1.3}$$

definované pro prvky matic:

$$\varepsilon_{j,k} = \gamma_{j,k}\kappa_{j,k} \qquad \text{(bez sumace).}$$

Matice ε definovaná v (1.3) dává možné kontrakce L. Většina jejích nenulových prvků může být často transformována na 1 pomocí renormalizace (viz níže) gradovaných podprostorů kontrahované algebry, aniž by se změnila izomorfní třída, do které kontrahovaná algebra patří. Takové renormalizace je třeba v každém případě vyšetřovat zvlášť.

Speciální případ skládání (1.3) vznikne, když jsou komutační relace (1.1) změněny renormalizací bází gradovaných podprostorů libovolnou nenulovou konstantou:

$$L_j \longrightarrow a_j L_j \qquad j \in G,\ 0 \neq a_j \in \mathbb{C}.$$

Pak dostaneme: $[L_j, L_k] \subseteq \dfrac{a_j a_k}{a_{j+k}} \kappa_{j,k} L_{j+k} = \varepsilon_{j,k} L_{j+k}$ kde $\varepsilon = \gamma \bullet \kappa$

a γ je dáno vztahem $\gamma = (\gamma_{j,k}) = \left(\dfrac{a_j a_k}{a_{j+k}}\right)$. (1.4)

Renormalizace bází nezmění algebru, a tudíž nedojde ani k porušení Jacobiho identity. Proto taková γ určují kontrakci.

Definice 1.6: Říkáme, že gradovaná kontrakce je triviální pokud buď L^{ε} je izomorfní s L^{κ} nebo L^{ε} je abelovská (tj. každý prvek matice ε je roven 0, značíme $\varepsilon = (0)$).

Netriviální kontrakce je buď spojitá nebo diskrétní podle toho zda může být dosažena spojitou změnou $1 \rightarrow \gamma_{j,k}$ $\forall j,k \in G$ $\gamma_{j,k} \in \mathbb{C}$, bez porušení Jacobiho identity. Neboť během této spojité změny nesmí být Jacobiho identita porušena, musí být její platnost nezávislá na hodnotách $\gamma_{j,k}$. To nastane právě tehdy, má-li každý prvek $\gamma_{j,k}$ matice γ tvar (1.4) (připouštěje limitní hodnoty 0 v čitatelích). Tedy všechny spojité kontrakce jsou určeny maticemi tvaru (1.4) (připouštěje limitní hodnoty 0 v čitatelích). Kontrakce určené maticemi γ tvaru (1.4) (bez limitních hodnot) jsou triviální.

Poznámka 1.7:

1) Spojitou změnou $1 \rightarrow \gamma_{j,k}$ myslíme toto: $\gamma = \lim_{\tau \to 0} \gamma(\tau) =: \gamma(0)$,

kde $\gamma(\tau) = (\gamma(\tau)_{j,k})$, $0 \leq \tau \leq 1$ je matice tvaru (1.4) připouštěje limitní hodnoty 0 v čitatelích tj.

pro $0 < \tau \leq 1$ jsou: $\gamma(\tau)_{j,k} = \dfrac{a(\tau)_j\, a(\tau)_k}{a(\tau)_{j+k}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\forall j,k \in G$, $a(\tau)_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\forall j \in G$,

pro $\tau = 0$ jsou $\gamma(0)_{j,k} := \lim_{\tau \to 0} \gamma(\tau)_{j,k} = \lim_{\tau \to 0} \dfrac{a(\tau)_j\, a(\tau)_k}{a(\tau)_{j+k}} \in \mathbb{C}$, $a(0)_j := \lim_{\tau \to 0} a(\tau)_j \in \mathbb{C}$.

a $\gamma(1) = (1)$.

2) Ukazuje se, že renormalizační konstanty $a(\tau)_j$ při spojité změně $1 \rightarrow \gamma_{j,k}$ stačí volit ve tvaru $a(\tau)_j = \tau^{n_j}$, kde n_j jsou celá čísla.

Úloha najít netriviální kontrakce L^{ε} z L^{κ} spočívá v nalezení matic ε, které neporušují Jacobiho identitu. Obvykle má Lieova algebra L mnoho různých G-gradovaných struktur κ a úloha musí být vyřešena pro každou z nich. Některé případy jsou jednodušší než ostatní, což závisí na počtu nulových prvků matice κ. Nejkomplikovanější je generický případ κ, kdy všechny prvky matice κ jsou nenulové, čemuž odpovídá rovnost $\varepsilon = \gamma$. Předpokládejme, že jsme nalezli všechny netriviální γ v generickém případě. Užijeme-li jich v (1.3) dostaneme žádaná ε pro jakékoliv negenerické κ, i když různá γ nemusí nutně dávat různá ε a další možné hodnoty nenulových prvků matice ε je třeba vyšetřovat zvlášť.

Nyní popíšeme metodu hledání γ pro generický případ, tj. $\varepsilon = \gamma$. Jacobiho identita musí samozřejmě platit pro Lieovu algebru i před kontrakcí, ale nám, bez újmy na obecnosti, stačí požadovat:

$$[L_m , [L_j , L_k]] + [L_j , [L_k , L_m]] + [L_k , [L_m , L_j]] = 0 \quad \forall j,k,m\in G. \tag{1.5}$$

Po kontrakci máme Jacobiho identitu pro L^γ:

$$[L_m , [L_j , L_k]_\varepsilon]_\varepsilon + [L_j , [L_k , L_m]_\varepsilon]_\varepsilon + [L_k , [L_m , L_j]_\varepsilon]_\varepsilon = 0 \qquad \forall j,k,m\in G$$
$$[L_m , \gamma_{j,k}[L_j , L_k]]_\varepsilon + [L_j , \gamma_{k,m}[L_k , L_m]]_\varepsilon + [L_k , \gamma_{m,j}[L_m , L_j]]_\varepsilon = 0$$
$$\gamma_{m,j+k}\gamma_{j,k}[L_m , [L_j , L_k]] + \gamma_{j,k+m}\gamma_{k,m} [L_j , [L_k , L_m]] + \gamma_{k,m+j}\gamma_{m,j} [L_k , [L_m , L_j]] = 0. \tag{1.6}$$

Rovnosti (1.5) a (1.6) mohou v tomto generickém případě platit současně pouze tehdy je-li:

$$\gamma_{j,k}\gamma_{m,j+k} = \gamma_{k,m}\gamma_{j,k+m} = \gamma_{m,j}\gamma_{k,m+j} \qquad \forall j,k,m\in G. \tag{1.7}$$

Netriviální řešení rovnic (1.7) tedy dává kontrakce v generickém případě. Poznamenejme, že (1.6) jsou automaticky splněny pro $\gamma_{j,k}$ daná vztahem (1.4) (zahrnující limitní hodnoty 0 v čitatelích). Dále je zřejmé, že složení dvou řešení (1.7) γ_1 a γ_2 podle (1.3):

$$\gamma = \gamma_1\bullet\gamma_2$$

je opět řešení (1.7) a tedy udává kontrakci.

Předpokládáme-li Lieovu algebru s negenericky gradovanou strukturou, pak budou chybět některé členy v (1.5) a následně i v (1.6). V takovém případě odpovídající rovnice budou chybět v systému rovnic (1.7). Proto G-gradovaná kontrakce Lieovy algebry s negenericky gradovanou strukturou je určena podmnožinou rovností (1.7).
Pro negenericky gradované struktury κ můžeme užít řešení γ pro generický případ a pravidla skládání (1.3) k získání matic $\varepsilon = \gamma\bullet\kappa$ a tím i kontrakcí L^ε z L^κ. V každém případě matice ε určují kontrakce, a někdy lze dokonce touto cestou získat všechny kontrakce. Pro libovolné pevné κ je množina kontrakčních matic uzavřená vzhledem k operaci $\bullet$ až na (1.4). Je užitečné zavést následující konvenci: kdykoliv je $\varepsilon_{00} \neq 0$ renormalizujeme bázi gradovaného podprostoru L_0 tak, aby $\varepsilon_{00} = 1$.

Na závěr této kapitoly uvedeme jako příklad kontrakce Z_2 –gradované Lieovy algebry.
Uvažujme cyklickou grupu $Z_2 = (\{0,1\}; + (\mathrm{mod}\ 2))$ jako gradační grupu. Máme tedy gradační rozklad L :

$$L = L_0 \oplus L_1$$

s komutačními relacemi v generickém případě $0 \neq [L_j ,\ L_k] \subseteq L_{j+k} \quad j,k,j+k\ (\mathrm{mod}\ 2)$.
Obecné rovnice (1.7) se v tomto případě redukují na vztahy:

$$\gamma_{0,0}\gamma_{1,1} = \gamma_{0,1}\gamma_{1,1}$$
$$\gamma_{0,0}\gamma_{0,1} = \gamma_{0,1}^{\ 2}.$$

Ty lze přepsat ve tvaru:
$$\gamma_{1,1}(\gamma_{0,0} - \gamma_{0,1}) = 0$$
$$\gamma_{0,1}(\gamma_{0,0} - \gamma_{0,1}) = 0.$$

Odtud plyne, že soustava má dvě řešení:

1) $\gamma_{0,0} = \gamma_{0,1} \qquad \begin{pmatrix}\gamma_{0,0} & \gamma_{0,0}\\ \gamma_{0,0} & \gamma_{1,1}\end{pmatrix}$ 2) $\gamma_{0,1} = 0 = \gamma_{1,1} \qquad \begin{pmatrix}\gamma_{0,0} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$

Renormalizační matice tj. matice γ tvaru (1.4) je:

$$\gamma_r = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 \\ a_0 & \dfrac{a_1 a_1}{a_0} \end{pmatrix} \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Pomocí renormalizace gradačních podprostorů získáme dvě triviální řešení:

$$\gamma = (1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \qquad \gamma = (0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a tři netriviální normalizovaná řešení:

$$\gamma^{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z tvaru renormalizační matice γ_r vidíme, že pouze γ^{I}, γ^{II} jsou spojité kontrakce, neboť je lze získat limitním přechodem z matice γ_r (resp. spojitou změnou $1 \rightarrow \gamma_{i,j}$):

a) γ^{I} volbou renormalizačních konstant: $a_0 = 1$, $a_1 = \tau$,

potom $\gamma_r(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \tau^2 \end{pmatrix}$ a $\gamma_r(1) = (1)$, $\lim\limits_{\tau \to 0} \gamma_r(\tau) = \gamma^{I}$,

b) γ^{II} volbou: $a_0 = \tau^2$, $a_1 = \tau$,

pak $\gamma_r(\tau) = \begin{pmatrix} \tau^2 & \tau^2 \\ \tau^2 & 1 \end{pmatrix}$ a $\gamma_r(1) = (1)$, $\lim\limits_{\tau \to 0} \gamma_r(\tau) = \gamma^{II}$.

Řešení γ^{III} touto cesto získat nelze a proto diskrétní.

Tedy v generickém případě $\kappa = (1)$ máme tři Z_2-gradované kontrakce L^{κ}:

I.	$0 \neq [L_0, L_0]_\varepsilon \subseteq L_0$	$0 \neq [L_0, L_1]_\varepsilon \subseteq L_1$	$[L_1, L_1]_\varepsilon = 0$
II.	$[L_0, L_0]_\varepsilon = [L_0, L_1]_\varepsilon = 0$	$0 \neq [L_1, L_1]_\varepsilon \subseteq L_0$	
III.	$0 \neq [L_0, L_0]_\varepsilon \subseteq L_0$	$[L_0, L_1]_\varepsilon = [L_1, L_1]_\varepsilon = 0$	

Předpokládejme dále negenerický případ:

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

V tomto případě systém rovnic (1.7) neklade žádná omezení na γ.

Vzhledem k (1.3) nacházíme kontrakce dané maticemi:

$$\varepsilon = \gamma^{I} \bullet \kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = \gamma^{II} \bullet \kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = \gamma^{III} \bullet \kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy v tomto negenerickém případě máme dvě netriviální kontrakce:

II.	$[L_0, L_0]_\varepsilon = [L_0, L_1]_\varepsilon = 0$	$0 \neq [L_1, L_1]_\varepsilon \subseteq L_0$
IV.	$[L_0, L_0]_\varepsilon = [L_1, L_1]_\varepsilon = 0$	$0 \neq [L_0, L_1]_\varepsilon \subseteq L_1$.

2. Jemné gradace komplexní Lieovy algebry sl(2,C)

V této části popíšeme metodu hledání jemných gradací sl(n,C) pomocí MAD-grup (maximálních komutativních grup diagonalizovatelných automorfismů) v grupě automorfismů *Aut*gl(n,C). Hledáme pouze jemné gradace, neboť z nich lze poskládat všechny ostatní. Tuto metodu aplikujeme na algebru sl(2,C) a získáme její jemné gradace.

Definice 2.1: Buď V konečná množina, $E \subseteq \{\{u,v\} \mid u,v \in V\}$; $\phi : V \rightarrow N$ (N je množina přirozených čísel), $\psi : E \rightarrow V$. Potom $\Gamma = (V,E,\phi,\psi)$ se nazývá označený graf.
Dva označené grafy $\Gamma = (V,E,\phi,\psi)$ a $\widetilde{\Gamma} = (\widetilde{V}, \widetilde{E}, \widetilde{\phi}, \widetilde{\psi})$ jsou izomorfní, jestliže existuje bijekce $\pi : V \rightarrow \widetilde{V}$ tak, že platí:

1) $\phi(v) = \widetilde{\phi}(\pi(v)) \qquad \forall v \in V$
2) $\{u,v\} \in E \Leftrightarrow \{\pi(u),\pi(v)\} \in \widetilde{E} \qquad \forall u,v \in V$
3) $\pi(\psi\{u,v\}) = \widetilde{\psi}(\{\pi(u), \pi(v)\}) \quad \forall \{u,v\} \in E.$

Mohutnost množiny $\{u \in V \mid \{u,v\} \in E\}$ se nazývá stupeň vrcholu v a značí se d_v. Uspořádáme-li prvky $V = \{v_1, v_2,...,v_n\}$ tak, že $d_{v_1} \geq d_{v_2} \geq ... \geq d_{v_n}$, pak n-tice $\overline{d}(\Gamma) = (d_{v_1}, d_{v_2},..., d_{v_n})$ se nazývá grafová posloupnost a posloupnost $\overline{\phi}(\Gamma) = (\phi(v_1),\phi(v_2),...,\phi(v_n))$ se nazývá vrcholová posloupnost.

Lemma 2.2: Jsou-li dva grafy izomorfní, pak se jejich grafové i vrcholové posloupnosti shodují.

Každou gradaci můžeme spojit s označeným grafem následujícím způsobem :
je-li $L = \oplus_{i\in I} L_i$ gradace Lieovy algebry L ,pak
položíme $\quad V = I$, $\qquad E = \{\{i,j\} \mid [L_i , L_j] \neq 0 \}$
a definujme $\quad \phi(i) = dim\, L_i \ \ \forall i \in V$, $\qquad \psi(\{i,j\}) = k \ \text{ pro } \ 0 \neq [L_i , L_j] \subseteq L_k$.

Věta 2.3: Buďte $\oplus_{i\in I} L_i$ a $\oplus_{j\in J} K_j$ dvě ekvivalentní gradace Lieovy algebry L. Pak označené grafy $\Gamma(\oplus_{i\in I} L_i)$ a $\Gamma(\oplus_{j\in J} K_j)$ jsou izomorfní.

Buď nadále L Lieova algebra a označme *Aut*L grupu všech jejích automorfismů. Jsou-li x,y vlastní vektory diagonalizovatelného $g \in Aut$L odpovídající vlastním číslům λ,μ pak
$$g[x , y] = [gx , gy] = \lambda\mu[x , y]$$
tj. [x , y] je buď vlastní vektor k číslu $\lambda\mu$, nebo [x , y] = 0. A tedy platí $[L_\lambda , L_\mu] \subseteq L_{\lambda\mu}$ ($L_{\lambda\mu}$ je vlastní podprostor k vlastnímu číslu $\lambda\mu$ resp. $L_{\lambda\mu} = 0$, pokud $\lambda\mu$ není vlastní číslo g) pro libovolná vlastní čísla λ a μ, což znamená, že rozklad L do direktní sumy vlastních podprostorů L_i automorfismu g je gradace L. Uvažujme další diagonalizovatelný automorfismus $h \in Aut$L komutující s g. Potom pro libovolné $x \in L_i$ platí
$$ghx = hgx = h(\lambda_i x) = \lambda_i hx,$$
tj. hx je buď vlastní vektor g příslušející k vlastnímu číslu λ_i, nebo nula, ale v každé případě je $hx \in L_i$. Odtud plyne $hL_i \subseteq L_i$, tj. vlastní podprostory L_i automorfismu g jsou invariantní vzhledem k h. Rozklad L do direktního součtu společných vlastních podprostorů obou automorfismů g a h je tedy opět gradace L a navíc je zjemněním gradace dané automorfismem g. Přidáváním dalších automorfismů lze získat další „jemnější“ gradace. Jestliže $g_1,g_2,...,g_m \in$ *Aut*L jsou diagonalizovatelné vzájemně komutující automorfismy, pak z téhož důvodu je rozklad L do direktní sumy společných vlastních podprostorů všech $g_1,g_2,...,g_m$ gradace L. Bude-li $M \subset Aut$L množina vzájemně komutujících diagonalizovatelných automorfismů a

$N \subset M$, pak gradace odpovídající množině M (budeme značit *Gr*(M)) je zřejmě zjemněním gradace *Gr*(N) odpovídající množině N.

Neboť se dále budeme zajímat pouze o jemné gradace, budeme pracovat s maximální množinou $\mathcal{G} \subset Aut$L vzájemně komutujících diagonalizovatelných automorfismů. Taková množina $\mathcal{G}$ je ve skutečnosti podgrupa *Aut*L a nazývá se MAD-grupa (maximální abelovská grupa diagonalizovatelných prvků).

Poznámka 2.4: Je dokázáno, že je-li L prostá Lieova algebra nad algebraicky uzavřeným tělesem charakteristiky nula (např. těleso komplexních čísel), potom gradace $L = \oplus_{i\in I} L_i$ je jemná právě tehdy, když je gradací odpovídající nějaké MAD-grupě $\mathcal{G} \subset\subset Aut$L (tj. $Gr(\mathcal{G}) \equiv \oplus_{i\in I} L_i$). Navíc dvě jemné gradace jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy odpovídají-li konjugovaným MAD-grupám v *Aut*L.

Omezme se nyní na MAD-grupy v grupě automorfismů *Aut*gl(n,C), ta se skládá z podgrupy vnitřních automorfismů $Ad_A X = A^{-1}XA$ pro $A\in GL(n,C)$ $X\in gl(n,C)$
a množiny vnějších automorfismů $Out_A X = -(A^{-1}XA)^T = Ad_{(A^{-1})^T}\, Out_I X = Out_I Ad_A X$.

Následující lemma shrnuje vlastnosti automorfismů v *Aut* gl(n,C).

Lemma 2.5: Buďte Ad_A, Ad_B, $Out_C \in$ *Aut* gl(n,C). Potom:
(*i*) Ad_A je diagonalizovatelný $\Leftrightarrow$ matice A je diagonalizovatelná.
(*ii*) $Ad_A\, Ad_B = Ad_B\, Ad_A \Leftrightarrow \exists q\in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $AB = qBA$.
(Takové q je n-tá odmocnina z 1.)
(*iii*) Out_C je diagonalizovatelný $\Leftrightarrow$ matice $C(C^T)^{-1}$ je diagonalizovatelná.
(*iv*) $Ad_A Out_C = Out_C\, Ad_A \Leftrightarrow ACA^T = rC$.
(Jelikož platí $Ad_A = Ad_{\alpha A}$ pro $\alpha \neq 0$, lze skalár r normovat na 1.).

Toto lemma nám umožní formulovat problém popisu MAD-grup v *Aut*gl(n,C) pomocí matic v GL(n,C). Každé MAD-grupě přiřadíme speciální podgrupu v GL(n,C).

Předpokládejme, že $\mathcal{G}$ je MAD-grupa bez vnějšího automorfismu. Uvažujme $G = \{ A \in GL(n,C) \mid Ad_A \in \mathcal{G}\}$. Podle (*i*) a (*ii*) z lemmatu 2.5 je G maximální množina diagonalizovatelných matic z GL(n,C) taková, že pro všechna $A, B \in G$ $AB = q_{A,B}BA$. Z maximality G plyne, že G je podgrupa v GL(n,C). Pro takové podgrupy si zavedeme pojem Ad-podgrupy.

Definice 2.6: Podgrupa diagonalizovatelných matic $G \subset\subset GL(n,C)$ se nazývá Ad-podgrupa, jestliže platí: 1) $(\forall\ A,B\in G)\ (\exists\ q_{A,B}\in \mathbb{C}\setminus\{0\})\ (AB = q_{A,B}BA)$
2) G je maximální s touto vlastností.

K popisu Ad-podgrup v GL(n,C) budeme potřebovat následující značení:
Podgrupu GL(n,C) skládající se ze všech regulárních diagonálních matic budeme značit D(n).

Matici $k\times k$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ budeme značit P_k

a matici $diag(1,q_k,...,q_k^{k-1})$ značíme W_k, kde $q_k = \exp(i\frac{2\pi}{k})$,
$P_1 = W_1 = (1)$.
Grupu $\mathcal{P}_k = \{ W_k^i P_k^j \mid i,j = 0,1,... \}$ budeme nazývat Pauliho grupa.

Někdy se užívá tradiční značení pro Pauliho matice:

$$\sigma_1 = P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = i\sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = I_2.$$

Věta 2.7: Pro jakoukoliv Ad-podgrupu G grupy GL(n,C) existují mocniny prvočísel $\pi_1,...,\pi_s$ tak, že $\pi_1...\pi_s$ dělí n a G je konjugovaná k $\mathcal{P}_{\pi 1} \otimes ... \otimes \mathcal{P}_{\pi s} \otimes D(n/\pi_1...\pi_s)$. (2.1)
Navíc: jakákoliv grupa tvaru (2.1) je Ad-podgrupa, vyjma případu $\mathcal{P}_2 \otimes \mathcal{P}_2 \otimes ... \otimes \mathcal{P}_2 \otimes D(1)$.

Buď $\mathcal{G}$ MAD-grupa obsahující vnější automorfismus. Položme G = { A $\in$ GL(n,C) | $Ad_A \in \mathcal{G}$ } a $\tilde{G}$ = { D $\in$ GL(n,C) | $Out_D \in \mathcal{G}$ }, potom $\mathcal{G}$ = Ad G $\cup$ Out $\tilde{G}$, kde Ad G = { Ad_A | A $\in$ G} a Out $\tilde{G}$ = { Out_D | D $\in$ $\tilde{G}$ }. Vybereme pevně C $\in$ $\tilde{G}$ a vezmeme libovolné D $\in$ $\tilde{G}$. Neboť $\mathcal{G}$ je grupa, $(Out_C)^{-1}$, $(Out_C)^{-1}(Out_D) \in \mathcal{G}$. Protože $(Out_C)^{-1}(Out_D)$ je vnitřní automorfismus, existuje A $\in$ G tak, že $(Out_C)^{-1}(Out_D) = Ad_A$, tj. $Out_D = Out_C Ad_A = Out_{AC}$ a tedy $\tilde{G}$ = GC = { AC | A $\in$ G} a lze psát

$\mathcal{G}$ = Ad G $\cup$ Out $\tilde{G}$ = Ad G $\cup$ Out (GC) = Ad G $\cup$ Out_CAdG.

Proto stačí pracovat s podgrupou vnitřních automorfismů v $\mathcal{G}$ a jedním pevným vnějším automorfismem. Užitím lemmatu 2.5 dostaneme, že G je maximální podmnožina GL(n,C) splňující podmínky

(*i*) $ACA^T = rC \quad \forall A \in G$

(*ii*) $AB = qBA \quad \forall A, B \in G$

Kombinací podmínek (*i*) a (*ii*) lze ukázat, že jediné možné hodnoty q jsou ±1. Neboť $Ad_A = Ad_{\alpha A}$ a $Out_A = Out_{\alpha A}$ pro $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ (tj. matice A a αA dávají stejné automorfismy), vystačíme s maticemi A splňujícími $ACA^T = C$. Uvedená maximální množina G je grupou a zavedeme si pro ni pojem Out_C-podgrupa.

Definice 2.8: Buď C $\in$ GL(n,C) taková, že $C(C^T)^{-1}$ je diagonalizovatelná. Pak podgrupa diagonalizovatelných matic G $\subset\subset$ GL(n,C) se nazývá Out_C-podgrupa, jestliže platí:

1) ($\forall$ A, B$\in$G) (AB = ±BA)

2) ($\forall$ A$\in$G) ($ACA^T = C$)

3) G je maximální s těmito vlastnostmi.

Poznámka 2.9:

1) Nyní můžeme shrnout, že pro každou MAD-grupu $\mathcal{G}$ s vnějším automorfismem Out_C existuje Out_C-podgrupa G tak, že $\mathcal{G}$ = Ad G $\cup$ Out (GC) a pro každou Out_C-podgrupu G je množina Ad G $\cup$ Out (GC) MAD-grupa s vnějším automorfismem. Navíc MAD-grupa $\mathcal{G}$ s vnějším automorfismem Out_C a MAD-grupa *H* s vnějším automorfismem Out_D jsou konjugované právě tehdy, když jejich odpovídající Out_C a Out_D grupy jsou konjugované.

2) Jestliže se Ad-podgrupa G skládá pouze z komutujících či antikomutujících matic, může se stát, že existuje regulární matice C taková, že $ACA^T = r_A C$ pro každé A$\in$G. V takovém případě je množina $\tilde{G}$ = { A$\in$G | $ACA^T = C$} Out_C-podgrupa. Pokud pro Ad-podgrupu G taková matice C neexistuje, je $\mathcal{G}$ = {Ad_A | A$\in$G} MAD-grupa v *Aut* gl(n,C) bez vnějšího automorfismu. A vztah mezi Ad-podgrupami a MAD-grupami bez vnějšího automorfismu je opět jedno-jednoznačný. Navíc jsou-li G, H konjugované Ad-podgrupy, pak Ad G a Ad H jsou konjugované MAD-grupy.

Označíme pro nezáporná celá čísla p,s:

$$T_{2p,s} = \{ \mathit{diag}(\varepsilon_1,..,\varepsilon_s,\alpha_1,\alpha_1^{-1},...,\alpha_p,\alpha_p^{-1}) \mid \varepsilon_i = \pm 1,\ \alpha_i \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}$$

$$C = I_s \oplus \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{p\text{-krát}} = I_s \oplus (I_p \otimes P_2),$$

Věta 2.10: $T_{2p,s}$ je Out_C-podgrupa v GL(2p+s,C).

Věta 2.11: Buď G Out_C-podgrupa v GL(n,C), n liché. Pak existují nezáporná celá čísla p a s tak, že 2p + s = n a G je konjugovaná k $T_{2p,s}$.

Nyní aplikujeme tyto znalosti na případ prosté Lieovy algebry sl(2,C) a pokusíme se získat její jemné gradace. Věta 2.7 dává jedinou Ad-podgrupu:

$$G_1 = P_1 \otimes D(2) = \{ \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \}$$

a užitím věty 2.10 dostaneme dvě Out_C-podgrupy:

$$G_2 = T_{2,0} = \{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \} \qquad C = C_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$G_3 = T_{0,2} = \{ \begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\end{pmatrix} \mid \varepsilon_i = \pm 1,\ i = 1,2\} \qquad C = C_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Protože je Ad-podgrupa G_1 tvořena pouze komutujícími maticemi, zkusíme, zda existuje regulární matice D splňující $ADA^T = r_A D \quad \forall\, A \in G_1$:

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha a \alpha & \alpha b \beta\\ \beta c \alpha & \beta d \beta\end{pmatrix} = r_{\alpha,\beta}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \quad \forall\ \alpha,\beta \neq 0.$$

Tuto podmínku splňují matice tvaru $D = \begin{pmatrix}0 & b\\ c & 0\end{pmatrix}$, kde $b,c \neq 0$. Tedy podle poznámky 2.9.2 je pro zvolené D množina $G_4 = \{A \in G_1 \mid ADA^T = D\} = \{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \}$ Out_D-podgrupa.

Avšak Out_D-podgrupa G_4 a Out_C-podgrupa G_2 jsou konjugované, a tudíž pro libovolné přípustné D dávají (podle poznámky 2.9.1) konjugované MAD-grupy a tedy (viz poznámka

2.4) ekvivalentní gradace. Nám jde ale o neekvivalentní gradace, proto se těmito Out_D-podgrupami nadále zabývat nebudeme. Podle poznámky 2.9 dostáváme dvě MAD-grupy:

$$\mathcal{G}_1 = \mathrm{Ad}\, G_2 \cup \mathrm{Out}\,(G_2C_2) \quad \text{a} \quad \mathcal{G}_2 = \mathrm{Ad}\, G_3 \cup \mathrm{Out}\,(G_3C_3).$$

Nejprve najdeme jemnou gradaci odpovídající MAD-grupě $\mathcal{G}_1$:

$$\mathcal{G}_1 = \{\, \mathrm{Ad}_A \mid A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\} \cup \{\, \mathrm{Out}_A \mid A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}$$

Vyšetříme vnitřní automorfismy, tj. budeme hledat vlastní vektory resp. vlastní podprostory:

$$\mathrm{Ad}_A X = \lambda X \text{ , kde } X \in sl(n,C)$$
$$A^{-1}XA = \lambda X$$
$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1}a & \alpha^{-1}b \\ \alpha c & -\alpha a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \alpha^{-2}b \\ \alpha^{2}c & -a \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Dostáváme soustavu rovnic:

$$a = \lambda a, \qquad \alpha^{-2}b = \lambda b, \qquad \alpha^2 c = \lambda c$$

a z ní vlastní čísla a vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \alpha^{-2} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = \alpha^2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud $\alpha^4 = 1$ resp. $\alpha^2 = 1$ jsou λ_2 a λ_3 resp. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ totožná. Tedy volbou $\alpha^4 \neq 1$ dostáváme automorfismus, jehož vlastní podprostory „tvoří“ jemnou gradaci.
Pro kontrolu vyšetříme i vnější automorfismy:

$$\mathrm{Out}_A X = \lambda X, \text{ kde } X \in sl(n,C)$$
$$-(A^{-1}XA)^T = \lambda X$$
$$-\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} a & -\alpha^{-2}b \\ -\alpha^2 c & -a \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Opět dostaneme soustavu rovnic:

$$a = \lambda a, \qquad -\alpha^{-2}b = \lambda b, \qquad -\alpha^2 c = \lambda c$$

a odtud vlastní čísla a vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -\alpha^{-2} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = -\alpha^2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Máme tedy tentýž rozklad na vlastní podprostory i od vnějších automorfismů. Je vidět, že vnější automorfismus pro dané α působí stejně jako vnitřní automorfismus pro $i\alpha^{-1}$, a tedy lze všechny vnější automorfismy vyjádřit pomocí vnitřních (tj. jsou zde jen vnitřní).
Rozkladem sl(2,C) do společných vlastních podprostorů automorfismů z $\mathcal{G}_1$ jsme dostali gradaci sl(2,C):

$$sl(2,C) = Gr(\mathcal{G}_1) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]_{lin} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin}.$$

Zbývá nalézt jemnou gradaci určenou MAD-grupou $\mathcal{G}_2$:

$$\mathcal{G}_2 = \{\mathrm{Ad}_A \mid A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\} \cup \{\, \mathrm{Out}_A \mid A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}.$$

Matice A, které jsme ve výčtu neuvedli jsou jen násobky uvedených a tudíž dávají stejné automorfismy.
Opět začneme vyšetřováním vnitřních automorfismů:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$$

odtud vlastní číslo a vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Tento výsledek není nijak užitečný, zkusíme tedy druhý vnitřní automorfismus:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ -c & -a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$$

a dostaneme:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

To stále ještě nestačí k určení jemné gradace (tímto získanou gradaci lze sestavit z $Gr(\mathcal{G}_1)$), pokračujeme tedy vnějšími automorfismy:

$$-\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-a & -c\\ -b & a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$$

odtud máme vlastní čísla a vlastní vektory:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Zbývá poslední automorfismus:

$$-\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-a & c\\ b & a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$$

a ten dává:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Nalezením společných vlastních podprostorů dostáváme jemnou gradaci příslušející MAD-grupě $\mathcal{G}_2$:

$$\mathrm{sl}(2,\mathrm{C}) = Gr(\mathcal{G}_2) = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]_{lin} \oplus \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]_{lin} \oplus \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]_{lin}.$$

Získali jsme tedy dvě jemné gradace $Gr(\mathcal{G}_1)$, $Gr(\mathcal{G}_2)$ Lieovy algebry sl(2,C) a zbývá přesvědčit se, že nejsou ekvivalentní. Grafové i vrcholové posloupnosti obou gradací jsou stejné:

$$\bar{d}\,(Gr(\mathcal{G}_1)) = \bar{d}\,(Gr(\mathcal{G}_2)) = (2,2,2)$$
$$\bar{\phi}\,(Gr(\mathcal{G}_1)) = \bar{\phi}\,(Gr(\mathcal{G}_2)) = (1,1,1).$$

Přesto však jsou tyto gradace neekvivalentní, neboť žádný automorfismus z *Aut*gl(n,C) nemění hodnost matice. Pro obě gradace se užívá standardní označení:

$Gr(\mathcal{G}_1)$ ... Z_3-gradace
$Gr(\mathcal{G}_2)$ ... $Z_2 \times Z_2$-gradace.

3. Jemné gradace reálných forem su(2) a sl(2,C)

V této části nejprve uvedeme některé vlastnosti reálných forem sl(n,C) a jejich automorfismů. Dále využijeme znalosti MAD-grup v *Aut*sl(n,C) k nalezení MAD-grup na reálných formách sl(n,C). Nakonec opět celý postup aplikujeme na Lieovu algebru sl(n,C).

Každá reálná forma Lieovy algebry L je určená involutivním antiautomorfismem **J** a má tvar:

$$L_{\mathbf{J}} = \{ x \in L \mid \mathbf{J}x = x \}.$$

Označme $\mathbf{J}_0$ komplexní sdružení na L, tj. $(\forall A \in L)(\mathbf{J}_0 : A \to \overline{A})$. Takové $\mathbf{J}_0$ je nejjednodušší involutivní antiautomorfismus na L a každý antiautomorfismus na L má tvar $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 F$, kde F je automorfismus na L. Navíc F musí být vybráno tak, aby $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 F$ byl involutivní, tj.

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{J}_0 F)^2 = \text{Identita}.$$

Využitím tohoto vztahu dostáváme následující lemma.

Lemma 3.1: Každý involutivní antiautomorfismus na gl(n,C) má tvar $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 Ad_A$, kde A je cirkulární resp. anticirkulární matice (tj. $A\overline{A} = I$ resp. $A\overline{A} = -I$) , nebo $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 Out_E$, kde E je nesingulární hermitovská matice (tj. $E = E^* = (\overline{E})^T$).

Dále se budeme věnovat pouze Lieově algebře sl(n,C). Ta má následující typy reálných forem:

1. sl(n,R) odpovídající antiautomorfismu $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 Ad_A$, kde A je cirkulární matice, tj. $A\overline{A} = I$ (budeme užívat nejobvyklejší tvar sl(n,R), odpovídající $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$)
2. su(n-k,k) odpovídající $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 Out_{E_k}$, kde E_k je hermitovská matice s n-k kladnými a k zápornými vlastními čísly, $k \le n/2$
3. su*(n) odpovídající antiautomorfismu $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 Ad_K$, kde K je anticirkulární matice, tj. $K\overline{K} = -I$.

Třetí typ reálných forem je možný pouze tehdy, je-li n sudé, neboť pro liché n neexistuje v sl(n,C) anticirkulární matice. Reálné formy prvního resp. druhého typu odpovídající různým cirkulárním resp. anticirkuárním maticím jsou izomorfní. Stejně tak dvě reálné formy druhého typu odpovídající hermitovským maticím se stejnou signaturou jsou izomorfní.

Buď $L_{\mathbf{J}}$ reálná forma sl(n,C) a F automorfismus na $L_{\mathbf{J}}$. Neboť každý prvek $z \in$ sl(n,C) lze psát ve tvaru $z = x + iy$, $x,y \in L_{\mathbf{J}}$, můžeme přirozeně rozšířit automorfismus F na celé sl(n,C):

$$F^C(x+iy) = F(x) + iF(y).$$

Toto rozšíření se nazývá komplexifikace automorfismu F. Oba automorfismy F^C, F mají tvar Ad_A nebo Out_B , $A,B \in GL(n,C)$ kde

$$Ad_A X = A^{-1}XA$$
$$Out_C X = -(B^{-1}XB)^T.$$

Pokud je F diagonalizovatelný na $L_{\mathbf{J}}$, pak F^C je diagonalizovatelný na sl(n,C) a má reálné spektrum. Navíc, komutují-li dva reálné automorfismy F_1 a F_2 na $L_{\mathbf{J}}$, pak F_1^C a F_2^C komutují na sl(n,C).

Předpokládejme, že H je MAD-grupa na reálné formě $L_{\mathbf{J}}$, potom množina $H^C = \{ F^C \mid F \in H \}$ (komplexifikace množiny H) je grupa vzájemně komutujících diagonalizovatelných automorfismů na sl(n,C) a tudíž existuje MAD-grupa $\mathcal{G} \subset Aut$sl(n,C) taková, že $H^C \subseteq \mathcal{G}$.

Navíc, vybereme-li v $\mathcal{G}$ všechny automorfismy s reálným spektrem, pak dostaneme reálnou část MAD-grupy $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}^{R} = \{ F \in \mathcal{G} \mid F \text{ má reálné spektrum } \}$$

a pro tu platí $\quad H^{C} \subseteq \mathcal{G}^{R}$.

Buďte $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ dvě různé MAD-grupy v *Aut*sl(n,C). Může se stát, že $\mathcal{G}_1^{R}$ je vlastní podgrupa $\mathcal{G}_2^{R}$. V takovém případě, je-li $H^{C} \subseteq \mathcal{G}_1^{R}$ pak $H^{C} \subseteq \mathcal{G}_2^{R}$ a můžeme se tedy zaměřit na maximální $\mathcal{G}^{R}$, tj. takové, že neexistuje MAD-grupa $\mathcal{G}^{\wedge}$ v *Aut*sl(n,C) pro níž je $\mathcal{G}^{R}$ vlastní podgrupa $\mathcal{G}^{\wedge R}$.
Následující lemma shrnuje vlastnosti automorfismů na reálných formách.

Lemma 3.2:
1) Jakýkoliv diagonalizovatelný automorfismus na sl(n,R) má tvar Ad_A nebo Out_C, kde A a C jsou reálné regulární matice.
2) Jakýkoliv automorfismus na su(n-k,k) odpovídající antiautomorfismu $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 Out_{E_k}$ má tvar Ad_A nebo Out_C , kde A,C jsou regulární matice takové, že

$$AEA^* = \pm E_k \tag{3.1}$$

$$C(E_k^{-1})^T C^* = \pm E_k. \tag{3.2}$$

3) Jakýkoliv diagonalizovatelný automorfismus na su*(n) odpovídající antiautomorfismu $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 Ad_K$ má tvar Ad_A nebo Out_C , kde A,C jsou regulární matice splňující:

$$AK = \pm K\overline{A} \tag{3.3}$$

$$K\overline{C}K^T = \pm C. \tag{3.4}$$

Dále budeme potřebovat následující značení:

$$\sigma_0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \{ \pm\sigma_0, \pm\sigma_1, \pm\sigma_2, \pm\sigma_3 \}$$

D_n je grupa všech reálných regulárních diagonálních matic n×n.

$$T_{2p,s} = \{ diag(\varepsilon_1,..,\varepsilon_s,\alpha_1,\alpha_1^{-1},...,\alpha_p,\alpha_p^{-1}) \mid \varepsilon_i = \pm 1, \alpha_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\} \qquad \text{pro } s \geq 1$$

$$T_{2p,0} = \{ diag(\alpha_1,\varepsilon\alpha_1^{-1},...,\alpha_p,\varepsilon\alpha_p^{-1}) \mid \varepsilon = \pm 1, \alpha_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$$

$$\widetilde{T}_{2p,s} = \{ diag(\varepsilon_1,..,\varepsilon_s) \oplus \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \oplus ... \oplus \begin{pmatrix} 0 & \alpha_p \\ \alpha_p^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid \varepsilon_i = \pm 1, \alpha_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\} \quad \text{pro } s \geq 1$$

$$\widetilde{T}_{2p,0} = \{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \varepsilon\alpha_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \oplus ... \oplus \begin{pmatrix} 0 & \alpha_p \\ \varepsilon\alpha_p^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid \varepsilon = \pm 1, \alpha_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}.$$

Prozkoumáním seznamu MAD-grup v *Aut*sl(n,C) byly nalezeny dva typy „maximálních“ reálných částí, resp. každá reálná část MAD-grupy $\mathcal{G} \subset$ *Aut*sl(n,C) je konjugovaná k jedné z následujících grup, vyjma případu **K(r,0,2)**:

$$\mathbf{H(r,m)} \equiv \mathrm{Ad}\,(\underbrace{P\otimes \dots \otimes P}_{r\text{-krát}}\otimes D_m) \qquad \text{kde } n = 2^r m,\ m \geq 3$$

$$\mathbf{K(r,p,s)} \equiv \mathrm{Ad}\,(\underbrace{P\otimes \dots \otimes P}_{r\text{-krát}}\otimes T_{2p,s}) \cup \mathrm{Out}\,(\underbrace{P\otimes \dots \otimes P}_{r\text{-krát}}\otimes T_{2p,s}) \qquad \text{kde } n = 2^r(s+2p).$$

Významnou vlastností reálných částí MAD-grup **H(r,m)** a **K(r,p,s)** je, že všechny jejich automorfismy Ad_A a Out_C jsou dány reálnými maticemi A a C. To znamená, že platí následující věta.

Věta 3.3: Buď H množina automorfismů na sl(n,R). Potom H je MAD-grupa na sl(n,R) právě tehdy, když H^C je konjugovaná s **H(r,m)** nebo **K(r,p,s)**.

Skutečnost, že dva diagonalizovatelné automorfismy na sl(n,C) s reálným spektrem komutují, lze pomocí matic přepsat následujícím způsobem:

$$[Ad_A, Ad_B] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AB = \pm BA$$
$$[Ad_A, Out_C] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ACA^T = \pm C$$
$$[Out_C, Out_D] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C(D^{-1})^T C^T = \pm D.$$

Zřejmě, automorfismy v **H(r,m)** a **K(r,p,s)** komutují a tedy splňují předchozí relace. Podívejme se na vnější automorfismus $Out_E \in$ **K(r,p,s)**, kde E je hermitovská matice. Neboť Out_E komutuje se všemi automorfismy v **K(r,p,s)** a všechny automorfismy Out_C, $Ad_A \in$ **K(r,p,s)** jsou určeny reálnými maticemi, dostáváme:

$$AEA^T = AEA^* = \pm E \quad \text{a} \quad C(E^{-1})^T C^T = C(E^{-1})^T C^* = \pm E.$$

Vzhledem k rovnostem (3.1) a (3.2) odtud plyne, že všechny automorfismy v **K(r,p,s)** jsou automorfismy reálné formy $L_{\mathbf{J}}$, kde $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 Out_E$. Pokud existuje mezi vnějšími automorfismy v **K(r,p,s)** automorfismus Out_E takový, že E je hermitovská matice s n-k kladnými a k zápornými vlastními hodnotami, pak **K(r,p,s)** je komplexifikace MAD-grupy na su(n-k,k). Následující věta říká, že neexistují jiné MAD-grupy na su(n-k,k).

Věta 3.4: Buď H množina automorfismů na su(n-k,k). Potom H je MAD-grupa na su(n-k,k) právě tehdy, když existuje **K(r,p,s)** tak, že **K(r,p,s)** a H^C jsou konjugované a **K(r,p,s)** obsahuje vnější automorfismus Out_E, kde E je hermitovská matice s n-k kladnými a k zápornými vlastními čísly.

Nyní se podívejme na grupy **H(r,m)** a **K(r,p,s)** s $r \geq 1$. Všechny tyto grupy obsahují vnitřní automorfismus Ad_K, kde $K = \sigma_2 \otimes I_{n/2}$ (takové K je anticirkulární matice). Neboť K komutuje se všemi automorfismy v **K(r,p,s)** a **H(r,m)** a všechny automorfismy Out_C a Ad_A v těchto grupách jsou určeny reálnými maticemi, máme:

$$AK = \pm KA = \pm K\overline{A} \quad \text{a} \quad KCK^T = K\overline{C}K^T = \pm C.$$

Podle rovností (3.3) a (3.4) to znamená, že všechny tyto automorfismy jsou automorfismy reálné formy $L_{\mathbf{J}}$, kde $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 Ad_K$ a tedy **H(r,m)** a **K(r,p,s)** jsou komplexifikace MAD-grup na su*(n). Navíc následující věta říká, že na su*(n) neexistují jiné nekonjugované MAD-grupy.

Věta 3.5: Buď H množina automorfismů na su*(n). Potom H je MAD-grupa na su*(n) právě tehdy, když H^C je konjugovaná s **H(r,m)** nebo s **K(r,p,s)** pro $r \geq 1$.

Nyní užijeme výše uvedených poznatků k získání jemných gradací reálných forem Lieovy algebry sl(2,C). Protože algebry sl(2,R) a su(1,1) jsou izomorfní a su*(2) = su(2), má Lieova algebra sl(2,C) až na izomorfismus jen dvě reálné formy:

$$\mathrm{sl}(2,\mathrm{R}) = \{\, X \in \mathrm{sl}(n,\mathrm{C}) \mid X = \overline{X} \,\} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathrm{su}(2) = \mathrm{su}(2,0) = \{\, X \in \mathrm{sl}(n,\mathrm{C}) \mid X = -X^* \,\} = \{ \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \}.$$

Nejprve se budeme zabývat jemnými gradacemi reálné formy sl(2,R). Podle věty 3.3 má sl(2,R) dvě MAD-grupy:

$$\mathbf{K(0,1,0)} = \mathrm{Ad}(\mathrm{T}_{2,0}) \cup \mathrm{Out}(\widetilde{\mathrm{T}}_{2,0})$$
$$\mathbf{K(1,0,1)} = \mathrm{Ad}(P \otimes \mathrm{T}_{0,1}) \cup \mathrm{Out}(P \otimes \widetilde{\mathrm{T}}_{0,1})$$

Začneme MAD-grupou **K(0,1,0):**

$$\mathbf{K(0,1,0)} = \mathrm{Ad}\,\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \varepsilon\alpha^{-1} \end{pmatrix} \mid \varepsilon = \pm 1,\ \alpha \in \mathbb{R}\ \{0\}\} \cup \mathrm{Out}\,\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \varepsilon\alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid \varepsilon = \pm 1,\ \alpha \in \mathbb{R}\ \{0\}\}.$$

Vyšetříme vnitřní automorfismy:

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \varepsilon\alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \varepsilon\alpha^{-2}b \\ \varepsilon\alpha^{2}c & -a \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Odtud vlastní čísla a vektory:

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = \varepsilon\alpha^{-2} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_3 = \varepsilon\alpha^{2} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vnější automorfismy při ε, α působí stejně jako vnitřní při -ε,α:

$$-\left(\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon\alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \varepsilon\alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon\alpha^{-2}b \\ -\varepsilon\alpha^{2}c & -a \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

a tedy má i stejná vlastní čísla:

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = -\varepsilon\alpha^{-2} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_3 = -\varepsilon\alpha^{2} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro $\alpha^2 \neq \alpha^{-2}$ dostáváme gradační podprostory gradace určené MAD-grupou **K(0,1,0)** (jde o Z_3-gradaci):

$$\mathrm{sl}(2,\mathrm{R}) = Gr(\mathbf{K(0,1,0)}) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)}.$$

Zbývá najít jemnou gradaci odpovídající MAD-grupě **K(1,0,1)**:

$$\mathbf{K(1,0,1)} = \mathrm{Ad}\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\} \cup$$
$$\cup\ \mathrm{Out}\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$$

Vyšetříme opět nejprve vnitřní automorfismy:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$$

odtud:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Druhý vnitřní automorfismus:

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a&c\\b&a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$$

dává:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Třetí vnitřní automorfismus:

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a&-c\\-b&a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$$

má vlastní čísla a vektory:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Poslední vnitřní automorfismus:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\-c&-a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$$

dává:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Vyšetřováním vnějších automorfismů bychom zjistili, že každý z nich působí stejně jako některý z vnitřních automorfismů (tj. všechny automorfismy jsou vnitřní). Rozklad do společných vlastních podprostorů je tedy gradace určená MAD-grupou **K(1,0,1)** ($Z_2 \times Z_2$-gradace):

$$sl(2,R) = Gr(\mathbf{K(1,0,1)}) = \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right]_{lin(R)} \oplus \left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right]_{lin(R)} \oplus \left[\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right]_{lin(R)}.$$

Získané gradace sl(2,R) nejsou ekvivalentní, ze stejného důvodu jako gradace sl(2,C).

Nakonec najdeme jemné gradace reálné formy su(2). Z věty 3.5 (su(2) = su*(2)) získáváme jedinou MAD-grupu:

$$\mathbf{K(1,0,1)} = \mathrm{Ad}(P \otimes T_{0,1}) \cup \mathrm{Out}(P \otimes \tilde{T}_{0,1}).$$

Věta 3.4 (su(2) = su(2,0)) dává taktéž pouze tuto MAD-grupu, neboť **K(0,1,0)** neobsahuje příslušnou hermitovskou matici (s dvěma kladnými vlastními čísly). Po zkušenostech z případu sl(2,R) víme, že stačí psát:

$$\mathbf{K(1,0,1)} = \mathrm{Ad}\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\}$$

Budeme tedy opět hledat vlastní čísla a vlastní vektory uvedených automorfismů:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}$$

odtud pouze jedno vlastní číslo:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Další automorfismus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ia & -b+ic \\ b+ic & ia \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}$$

dává dvě vlastní čísla:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Automorfismus:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ia & b-ic \\ -b-ic & ia \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}$$

má také dvě vlastní čísla:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbývající automorfismus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia & -b-ic \\ b-ic & -ia \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}$$

má taktéž dvě vlastní čísla:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme, pomocí společných vlastních podprostorů zkoumaných automorfismů, jemnou gradaci reálné formy su(2) ($Z_2 \times Z_2$-gradaci):

$$\mathrm{su}(2) = Gr(\boldsymbol{K(1,0,1)}) = \left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right]_{lin(R)} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)}.$$

Na závěr poznamenejme, že lineárním obalem u gradačních podprostorů je v celé této kapitole, na rozdíl od kapitoly předešlé, samozřejmě míněn reálný lineární obal, neboť pracujeme s reálnými formami a tedy i reálnými tělesy.

4. Odvození gradovaných kontrakcí sl(2,C), su(2), sl(2,R)

Nejdříve se podíváme, jaký vliv mají v našem třídimenzionálním případě gradované kontrakce na komutátor. Buďte e_i, i = 0,1,2 bazické vektory gradačních podprostorů L_i Lieovy algebry sl(2,C) při Z_3-gradaci. Komutační relace mezi bazickými vektory lze vyjádřit pomocí matice strukturních konstant vztahem:

$$([e_1,e_2]\ [e_2,e_0]\ [e_0,e_1]) = (e_0\ e_1\ e_2)\begin{pmatrix} c^0_{1,2} & c^0_{2,0} & c^0_{0,1} \\ c^1_{1,2} & c^1_{2,0} & c^1_{0,1} \\ c^2_{1,2} & c^2_{2,0} & c^2_{0,1} \end{pmatrix}. \qquad (4.1)$$

Při kontrakci dojde ke změně komutátoru: $[L_j, L_k]_e = \gamma_{j,k}[L_j, L_k]$, $\gamma_{j,k} = \gamma_{k,j}$, $j,k \in Z_3$ a tedy i ke změně komutačních relací:

$$([e_1,e_2]_\varepsilon\ [e_2,e_0]_\varepsilon\ [e_0,e_1]_\varepsilon) = (e_0\ e_1\ e_2)\begin{pmatrix} \gamma_{1,2}c^0_{1,2} & \gamma_{2,0}c^0_{2,0} & \gamma_{0,1}c^0_{0,1} \\ \gamma_{1,2}c^1_{1,2} & \gamma_{2,0}c^1_{2,0} & \gamma_{0,1}c^1_{0,1} \\ \gamma_{1,2}c^2_{1,2} & \gamma_{2,0}c^2_{2,0} & \gamma_{0,1}c^2_{0,1} \end{pmatrix}. \qquad (4.2)$$

Kde $\gamma_{j,k}$ nesmí porušovat Jacobiho identitu. Gradace Z_3 (resp. $Z_2 \times Z_2$) je zjemněním gradace Z_2, a tudíž možná změna komutačních relací je dána vztahem (4.2) za podmínek:

$$\gamma_{1,2} = \gamma_{1,1} \qquad \gamma_{0,2} = \gamma_{0,1}.$$

Označme: $\gamma_{II} = \begin{pmatrix} \gamma_{0,0} & \gamma_{0,1} \\ \gamma_{0,1} & \gamma_{1,1} \end{pmatrix}$, $\qquad \gamma_{III} = \begin{pmatrix} \gamma_{0,0} & \gamma_{0,1} & \gamma_{0,1} \\ \gamma_{0,1} & \gamma_{1,1} & \gamma_{1,1} \\ \gamma_{0,1} & \gamma_{1,1} & \gamma_{1,.1} \end{pmatrix}$.

Pokud matice γ_{II} neporušuje Jacobiho identitu v případě Z_2-gradované kontrakce, pak ani matice γ_{III} neporušuje Jacobiho identitu v případě Z_3-gradované kontrakce, a tudíž vyhovuje příslušné soustavě rovnic (příslušnému podsystému systému (1.7)).
Odtud je vidět, že všechny Z_2-gradované kontrakce sl(n,C) lze získat kontrahováním Z_3-gradované (resp. $Z_2 \times Z_2$-gradované) sl(n,C), a proto se jimi nebudeme zabývat.

I. Z_3-gradované kontrakce Lieovy algebry sl(n,C):

V tomto případě máme gradační rozklad do tří podprostorů:

$$sl(2,C) = L_0 \oplus L_1 \oplus L_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]_{lin} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin}.$$

Tento případ není generický a matice κ má tvar: $\qquad \kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.3)$

Nyní budeme hledat vyhovující matice $\gamma = (\gamma_{i,j})$, $\gamma_{i,j} \in \mathbb{C}$, tj. neporušující Jacobiho identitu:

$$[L_i,[L_j,L_j]_\varepsilon]_\varepsilon + [L_j,[L_j,L_i]_\varepsilon]_\varepsilon + [L_j,[L_i,L_j]_\varepsilon]_\varepsilon = 0 \qquad \forall i,j \in Z_3 \qquad (4.4)$$

$$\gamma_{j,j}\underbrace{[L_i,[L_j,L_j]]_\varepsilon}_{=0} + \gamma_{j,i}\underbrace{[L_j,[L_j,L_i]]_\varepsilon}_{\subset L_{j+i}} + \gamma_{i,j}\underbrace{[L_j,[L_i,L_j]]_\varepsilon}_{\subset L_{j+i}} = 0 \qquad \forall i,j \in Z_3$$

$$\gamma_{j,i}\gamma_{j,j+i}[L_j,[L_j,L_i]]_\varepsilon + \gamma_{i,j}\gamma_{j,i+j}[L_j,[L_i,L_j]]_\varepsilon = 0 \qquad \forall i,j \in Z_3.$$

Odtud dostaneme podmínku: $\gamma_{j,i}\gamma_{j,j+i} = \gamma_{i,j}\gamma_{j,i+j} \quad \forall i,j \in Z_3$, ale ta je splněna vždy.
Zbývá Jacobiho identita:

$$[L_0,[L_1,L_2]_\varepsilon]_\varepsilon + [L_1,[L_2,L_0]_\varepsilon]_\varepsilon + [L_2,[L_0,L_1]_\varepsilon]_\varepsilon = 0 \tag{4.5}$$

$$\gamma_{1,2}\underbrace{[L_0,[L_1,L_2]]_\varepsilon}_{\subset L_0} + \gamma_{2,0}\underbrace{[L_1,[L_2,L_0]]_\varepsilon}_{\subset L_2} + \gamma_{0,1}\underbrace{[L_2,[L_0,L_1]]_\varepsilon}_{\subset L_1} = 0$$

$$\gamma_{1,2}\gamma_{0,0}0 + \gamma_{2,0}\gamma_{1,2}[L_1,[L_2,L_0]] + \gamma_{0,1}\gamma_{2,1}[L_2,[L_0,L_1]] = 0$$

Odtud máme podmínku: $\gamma_{2,0}\gamma_{1,2} = \gamma_{0,1}\gamma_{2,1}$.
A tu lze přepsat do tvaru: $\gamma_{1,2}(\gamma_{0,1}-\gamma_{0,2}) = 0$. (4.6)
Tato rovnice má dvě řešení:

pro $\gamma_{1,2} = 0$ $\quad \gamma_I = \begin{pmatrix} \gamma_{0,0} & \gamma_{0,1} & \gamma_{0,2} \\ \gamma_{0,1} & \gamma_{1,1} & 0 \\ \gamma_{0,2} & 0 & \gamma_{2,2} \end{pmatrix}$ a pro $\gamma_{0,1} = \gamma_{0,2}$ $\quad \gamma_{II} = \begin{pmatrix} \gamma_{0,0} & \gamma_{0,1} & \gamma_{0,1} \\ \gamma_{0,1} & \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{0,1} & \gamma_{1,2} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix}$.

A jejich složení s maticí κ dává možné kontrakční matice:

$$\varepsilon_I = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{0,1} & \gamma_{0,2} \\ \gamma_{0,1} & 0 & 0 \\ \gamma_{0,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_{II} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{0,1} & \gamma_{0,1} \\ \gamma_{0,1} & 0 & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{0,1} & \gamma_{1,2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Nyní najdeme kontrakce dané renormalizací bází gradačních podprostorů:

$$L_j \to a_j L_j, \quad a_j \in \mathbb{C}, a_j \neq 0, \quad j = 0,1,2 \qquad \gamma_{i,j} = \frac{a_i a_j}{a_{i+j}} \qquad i,j = 0,1,2$$

Renormalizační matice γ_r bude: $\quad \gamma_r = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 & a_0 \\ a_0 & \frac{a_1 a_1}{a_2} & \frac{a_1 a_2}{a_0} \\ a_0 & \frac{a_1 a_2}{a_0} & \frac{a_2 a_2}{a_1} \end{pmatrix}$ (4.8)

a po složení s maticí κ dostaneme kontrakce ε_r dané renormalizací:

$$\varepsilon_r = \gamma_r \bullet \kappa = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & a_0 \\ a_0 & 0 & \frac{a_1 a_2}{a_0} \\ a_0 & \frac{a_1 a_2}{a_0} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Je-li $\gamma_{1,0} \neq 0$ lze pomocí renormalizace (složením s vhodným γ_r) získat „izomorfní“ tvary:

$$\varepsilon_I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & q \\ 1 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro $\gamma_{1,0} = 0$ máme:

$$\varepsilon'_I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_{0,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{0,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon'_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{1,2} \\ 0 & \gamma_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud dále renormalizací pro $q \neq 0$, resp. $\gamma_{0,2} \neq 0$, resp. $\gamma_{1,2} \neq 0$:

$$\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nakonec pro $q = 0$ nebo pro $p = 1$ dostaneme: $\varepsilon^{III} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Kontrakce ε^0 a $(0) = \varepsilon'_{I}$ (při $\gamma_{0,2} = 0$) jsou triviální.
Získali jsme tedy Z_3-gradované kontrakce Lieovy algebry sl(2,C):

$$\varepsilon^{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{III} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{IV} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad p \in \mathbb{C},\ p \neq 1.$$

Kontrakce ε^{II} a ε^{III} jsou spojité (neboť je lze získat jako limitní hodnoty tvaru ε_r (4.9)) a kontrakce ε^{I} a ε^{IV} diskrétní (nelze získat z tvaru ε_r limitním přechodem).

II. $Z_2 \times Z_2$-gradované kontrakce Lieovy algebry sl(n,C):

Gradační rozklad má tvar:

$$sl(2,C) = L_{00} \oplus L_{01} \oplus L_{10} \oplus L_{11} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]_{lin} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin},$$

kde $L_{00} = \{0\}$. Toto také není generický případ a matice κ má tvar:

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Z Jacobiho identit má (po zkušenosti z minula) smysl prověřovat pouze:

$$[L_{01},[L_{10},L_{11}]_\varepsilon]_\varepsilon + [L_{10},[L_{11},L_{01}]_\varepsilon]_\varepsilon + [L_{11},[L_{01},L_{10}]_\varepsilon]_\varepsilon = 0 \tag{4.11}$$

$$\gamma_{10,11}\underbrace{[L_{01},[L_{10},L_{11}]]_\varepsilon}_{\subset L_{01}} + \gamma_{11,01}\underbrace{[L_{10},[L_{11},L_{01}]]_\varepsilon}_{\subset L_{10}} + \gamma_{01,10}\underbrace{[L_{11},[L_{01},L_{10}]]_\varepsilon}_{\subset L_{11}} = 0$$

$$\gamma_{10,11}\gamma_{01,01}0 + \gamma_{2,0}\gamma_{1,2}0 + \gamma_{01,10}\gamma_{11,11}0 = 0.$$

A ani ta nedává žádné omezení na γ, a proto je γ tvaru: $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{00,00} & \gamma_{00,01} & \gamma_{00,10} & \gamma_{00,11} \\ \gamma_{00,01} & \gamma_{01,01} & \gamma_{01,10} & \gamma_{01,11} \\ \gamma_{00,10} & \gamma_{01,10} & \gamma_{10,10} & \gamma_{10,11} \\ \gamma_{00,11} & \gamma_{01,11} & \gamma_{10,11} & \gamma_{11,11} \end{pmatrix}$

a odtud složením s maticí κ dostáváme možné kontrakce:

$$\varepsilon = \gamma \bullet \kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{01,10} & \gamma_{01,11} \\ 0 & \gamma_{01,10} & 0 & \gamma_{10,11} \\ 0 & \gamma_{01,11} & \gamma_{10,11} & 0 \end{pmatrix}$$

Kontrakční matice dané renormalizací mají tentokráte tvar:

$$\varepsilon_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{01}a_{10}}{a_{11}} & \frac{a_{01}a_{11}}{a_{10}} \\ 0 & \frac{a_{01}a_{10}}{a_{11}} & 0 & \frac{a_{10}a_{11}}{a_{01}} \\ 0 & \frac{a_{01}a_{11}}{a_{10}} & \frac{a_{10}a_{11}}{a_{01}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Vhodnou volbou renormalizačních konstant a_{01}, a_{10}, a_{11} a volbou $\gamma_{i,j}$ dostaneme z matice ε vyjma triviálních tato řešení:

$$\varepsilon^{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{III} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon^{IV} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{VI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všechna tato řešení lze získat jako limitní hodnoty tvaru ε_r a tedy jsou spojitá.

III. Z_3-gradované kontrakce reálné formy sl(2,R):

Gradační rozklad má nyní až na reálné lineární obaly stejný tvar jako v případě Z_3-gradace sl(2,C):

$$sl(2,R) = L_0 \oplus L_1 \oplus L_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)}.$$

Matice κ bude stejná jako v (4.3). Jediným rozdílem oproti případu I. je použití reálného tělesa a tedy volba $\gamma = (\gamma_{i,j})$, $\gamma_{i,j} \in \mathbb{R}$, a renormalizačních konstant $a_i \in \mathbb{R}$. Jacobiho identity jsou stejné jako (4.4) a (4.5) a dávají opět podmínku (4.6). Řešení rovnice (4.6) jsou po složení s maticí κ matice tvaru (4.7) (tentokráte však reálné) a lze je vhodnou renormalizací (složením s vhodně volenými reálnými maticemi γ_r (4.8)) převést na nyní reálné tvary:

$$\varepsilon^{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{III} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{IV} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad p \in \mathbb{R},\, p \neq 1.$$

Řešení ε^{II} a ε^{III} jsou opět spojitá a řešení ε^{I} a ε^{IV} diskrétní.

IV. $Z_2 \times Z_2$-gradované kontrakce reálné formy sl(2,R):

Gradační rozklad je zase až na reálný lineární obal shodný s rozkladem sl(2,C):

$$sl(2,R) = L_{00} \oplus L_{01} \oplus L_{10} \oplus L_{11} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)},$$

kde $L_{00} = \{0\}$. I matice κ má opět tvar (4.10). Tento případ se liší od případu II. (stejně jako I. a III.) pouze použitím reálného tělesa a tedy Jacobiho identita (4.11) neklade žádné omezení na matici γ (reálnou) a po složení s maticí κ dostáváme možné kontrakce:

$$\varepsilon = \gamma \bullet \kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{01,10} & \gamma_{01,11} \\ 0 & \gamma_{01,10} & 0 & \gamma_{10,11} \\ 0 & \gamma_{01,11} & \gamma_{10,11} & 0 \end{pmatrix}.$$

Kontrakční matice daná renormalizací bude reálná matice tvaru (4.12). Při úpravě matice ε pomocí renormalizace se projeví reálnost tělesa:

Pro $\gamma_{01,10} \neq 0$ označme $\gamma_{01,10}^{-1} = a$,

$\gamma_{01,11} \neq 0$ $\gamma_{01,11}^{-1} = b$,

$\gamma_{10,11} \neq 0$ $\gamma_{10,11}^{-1} = c$,

K renormalizaci chceme užít taková $a_i \in \mathbb{R}$ aby:

$$a = \frac{a_{01}a_{10}}{a_{11}}, \qquad b = \frac{a_{01}a_{11}}{a_{10}}, \qquad c = \frac{a_{10}a_{11}}{a_{01}}. \tag{4.13}$$

Tomu odpovídají: $a_{01}^2 = ab, \quad a_{10}^2 = ac, \quad a_{11}^2 = bc$.

Odtud vidíme, že hledaná a_i existují pouze pro $a,b,c > 0$ resp. $a,b,c < 0$, v tomto případě dostaneme renormalizací z matice ε triviální řešení:

$$\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ze vztahu (4.13) dále plyne, že při renormalizaci lze změnit znaménka pouze u všech tří čísel a,b,c najednou.

Pokud budou dvě z čísel a,b,c kladná (resp. záporná) a jedno záporné (resp. kladné), např. $a,b > 0$ a $c < 0$, lze hledat renormalizační a_i konstanty ve tvaru:

$$a = \frac{a_{01}a_{10}}{a_{11}}, \qquad b = \frac{a_{01}a_{11}}{a_{10}}, \qquad -c = \frac{a_{10}a_{11}}{a_{01}},$$

odtud: $a_{01}^2 = ab, \quad a_{10}^2 = -ac, \quad a_{11}^2 = -bc$.

Tomu odpovídají řešení:

$$\varepsilon^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{\mathrm{III}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je-li dále jedno z čísel $\gamma_{01,10}$, $\gamma_{01,11}$, $\gamma_{10,11}$ rovno nule a ostatní nenulová, dostáváme řešení:

$$\varepsilon^{\mathrm{IV}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{\mathrm{V}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{\mathrm{VI}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon^{\mathrm{VII}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{\mathrm{VIII}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{\mathrm{IX}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nakonec pro dvě nulová a jedno nenulové číslo $\gamma_{i,j}$ máme řešení:

$$\varepsilon^{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{XI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{XII} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení $\varepsilon^{IV}, \varepsilon^{VI}, \varepsilon^{VIII}, \varepsilon^{X}, \varepsilon^{XI}, \varepsilon^{XII}$ jsou spojitá (lze je získat jako limitu tvaru ε_r (4.12)) a řešení $\varepsilon^{I}, \varepsilon^{II}, \varepsilon^{III}, \varepsilon^{V}, \varepsilon^{VII}, \varepsilon^{IX}$ jsou diskrétní.

V. $Z_2 \times Z_2$-gradované kontrakce reálné formy su(2):

Gradační rozklad je:

$$su(2) = L_{00} \oplus L_{01} \oplus L_{10} \oplus L_{11} = \left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right]_{lin(R)} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{lin(R)},$$

kde $L_{00} = \{0\}$.

Neboť tento případ je stejný jako případ předchozí jsou i výsledky stejné, a máme tedy kontrakční matice ε^{I} ... ε^{XII}. Řešení $\varepsilon^{IV}, \varepsilon^{VI}, \varepsilon^{VIII}, \varepsilon^{X}, \varepsilon^{XI}, \varepsilon^{XII}$ jsou opět spojitá a řešení $\varepsilon^{I}, \varepsilon^{II}, \varepsilon^{III}, \varepsilon^{V}, \varepsilon^{VII}, \varepsilon^{IX}$ jsou diskrétní.

5. Srovnání s klasifikací komplexních a reálných algeber dimenze 3

V této kapitole srovnáme výsledky z předešlé kapitoly se známou klasifikací Lieových algeber dimenze tři (viz dodatek Tabulka 6.1). K takovému srovnání je potřeba vědět jak vypadají izomorfní Lieovy algebry. Vidíme, že dvě Lieovy algebry stejné konečné dimenze n L_1 a L_2 jsou izomorfní, existují-li v nich báze $X=\{x_i \mid i = 1,2,...,n\}$ a $Y=\{y_i \mid i = 1,2,...,n\}$ tak, že platí:

$$[x_i , x_j]_1 = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j}^{k} x_k , \qquad [y_i , y_j]_2 = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j}^{k} y_k , \qquad \forall i,j = 1,2,...,n.$$

Izomorfismem je zde zřejmě zobrazení f: $x_i \to y_i$, i = 1,2,...,n.
Dále víme, že přejdeme-li od báze X k bázi $E=\{e_i \mid i = 1,2,...,n\}$ v Lieově algebře L_1, pak se strukturní konstanty $c_{i,j}^{k}$ resp. komutátor $[,]_1$ změní na strukturní konstanty $\tilde{c}_{i,j}^{k}$ resp. komutátor $[\,,]_1^{\sim}$ ale algebra se samozřejmě nezmění. Odtud $(L_1,[\,,]_1^{\sim})$ je izomorfní s $(L_2,[,]_2)$.
Přechod od báze X k bázi E je v našem třírozměrném případě dán komplexní resp. reálnou regulární maticí A řádu 3×3 a lze jej zapsat ve tvaru:

$$(e_1, e_2, e_3) = (x_1, x_2, x_3)A. \tag{5.1}$$

Příslušná změna matice strukturních konstant bude:

$$\tilde{C} = \det(A)A^{-1}C(A^{-1})^T . \tag{5.2}$$

Triviálním případem je např. permutace prvků baze, nebo jejich násobení nenulovým číslem z tělesa. Dvě Lieovy algebry dimenze 3 (nad týmž tělesem T) jsou tedy izomorfní ⇔ existuje-li regulární matice $A \in T^{3,3}$ tak, že jejich matice strukturních konstant splňují vztah (5.2).

Začneme gradovanými kontrakcemi Lieovy algebry sl(2,C). V následujících dvou tabulkách uvedeme získané netriviální kontrakce této algebry, a pomocí vhodných úprav báze (viz (5.1)) určíme jejich izomorfní třídu (typ algebry).

TABULKA 5.1 Z_3-gradované kontrakce Lieovy algebry sl(2,C).

Z_3-gradovaná sl(2,C)	ε^I	ε^{II}	ε^{III}	ε^{IV} $p \in \mathbb{C}, p \neq 1$
$[e_2 ,e_3] = e_1$	0	e_1	0	0
$[e_3 ,e_1] = 2e_3$	$2e_3$	0	$2e_3$	$2pe_3$
$[e_1 ,e_2] = 2e_2$	0	0	$2e_2$	$2e_2$
Typ kontrakce*:	d	s	s	d
Typ algebry:	$A_{2,1}$	$A_{3,1}$	$A_{3,4}$	$p = -1$ $A_{3,3}$ $p = 0$ $A_{2,1}$ $p \neq 0,\pm1$ $A_{3,5}^{p}$

* s...spojitá, d...diskrétní, T...triviální

TABULKA 5.2 $Z_2 \times Z_2$-gradované kontrakce Lieovy algebry sl(2,C).

$Z_2 \times Z_2$-gradovaná sl(2,C)	ε^I	ε^{II}	ε^{III}	ε^{IV}	ε^{V}	ε^{VI}
$[e_2 ,e_3] = -2e_1$	0	$-2e_1$	$-2e_1$	0	0	$-2e_1$
$[e_3 ,e_1] = -2e_2$	$-2e_2$	0	$-2e_2$	0	$-2e_2$	0
$[e_1 ,e_2] = 2e_3$	$2e_3$	$2e_3$	0	$2e_3$	0	0
Typ kontrakce:	s	s	s	s	s	s
Typ algebry:	$A_{3,4}$	$A_{3,4}$	$A_{3,6}$	$A_{3,1}$	$A_{3,1}$	$A_{3,1}$

Všechny gradované kontrakce sl(2,C) (včetně triviálních) tedy jsou algebry:

A_0	abelovská
$A_{2,1}$	rozložitelná
$A_{3,1}$	Heisenbergova
$A_{3,3}$	dilatační
$A_{3,4} = A_{3,6}$	eukleidovská
$A^p_{3,5} = A^p_{3,7}$	jednoparametrická množina komplexních Lieových algeber
$A_{3,8} = A_{3,9}$	sl(2,C)

(zde pod $A_{i,j}$ rozumíme komplexifikaci příslušných reálných algeber)
Ze všech komplexních Lieových algeber dimenze tři jsme nezískali pouze algebru $A_{3,2}$.

Nyní se podívejme na reálný případ, tedy na reálné formy Lieovy algebry sl(2,C). Nejprve se budeme věnovat reálné formě sl(2,R). V následujících dvou tabulkách (stejně jako u sl(2,C)) uvedeme získané gradované kontrakce a určíme jejich typy.

TABULKA 5.3 Z_3-gradované kontrakce reálné formy sl(2,R).

Z_3-gradovaná sl(2,R)	ε^{I}	ε^{II}	ε^{III}	ε^{IV} $p \in \mathbb{R}, p \neq 1$
$[e_2, e_3] = e_1$	0	e_1	0	0
$[e_3, e_1] = 2e_3$	$2e_3$	0	$2e_3$	$2pe_3$
$[e_1, e_2] = 2e_2$	0	0	$2e_2$	$2e_2$
Typ kontrakce*:	d	s	s	d
Typ algebry:	$A_{2,1}$	$A_{3,1}$	$A_{3,4}$	$p = -1$ $A_{3,3}$ $p = 0$ $A_{2,1}$ $p \neq 0, \pm 1$ $A^p_{3,5}$

TABULKA 5.4 $Z_2 \times Z_2$-gradované kontrakce reálné formy sl(2,R).

$Z_2 \times Z_2$-gradovaná sl(2,R)	ε^{I}	ε^{II}	ε^{III}	ε^{IV}	ε^{V}	ε^{VI}	ε^{VII}	ε^{VIII}	ε^{IX}	ε^{X}	ε^{XI}	ε^{XII}
$[e_2, e_3] = -2e_1$	$2e_1$	$-2e_1$	$-2e_1$	0	0	$-2e_1$	$2e_1$	$-2e_1$	$2e_1$	0	0	$-2e_1$
$[e_3, e_1] = -2e_2$	$-2e_2$	$2e_2$	$-2e_2$	$-2e_2$	$2e_2$	0	0	$-2e_2$	$-2e_2$	0	$-2e_2$	0
$[e_1, e_2] = 2e_3$	$2e_3$	$2e_3$	$-2e_3$	$2e_3$	$2e_3$	$2e_3$	$2e_3$	0	0	$2e_3$	0	0
Typ kontrakce:	T	T	d	s	d	s	d	s	d	s	s	s
Typ algebry:	$A_{3,8}$	$A_{3,8}$	$A_{3,9}$	$A_{3,4}$	$A_{3,6}$	$A_{3,4}$	$A_{3,6}$	$A_{3,6}$	$A_{3,4}$	$A_{3,1}$	$A_{3,1}$	$A_{3,1}$

Celkem tedy všechny gradované kontrakce (včetně triviálních) reálné formy sl(2,R) jsou algebry:

A_0	abelovská
$A_{2,1}$	rozložitelná
$A_{3,1}$	Heisenbergova
$A_{3,3}$	dilatační
$A_{3,4}$	1+1-Poinacaréova
$A^p_{3,5}$	jednoparametrická množina reálných Lieových algeber
$A_{3,6}$	eukleidovská
$A_{3,8}$	sl(2,R)
$A_{3,9}$	su(2).

Do úplného výčtu chybí pouze algebry $A_{3,2}$, $A^p_{3,7}$.

Zbývá uvést gradované kontrakce reálné formy su(2):

TABULKA 5.5 $Z_2 \times Z_2$-gradované kontrakce reálné formy su(2).

$Z_2 \times Z_2$-gradovaná su(2)	ε^{I}	ε^{II}	ε^{III}	ε^{IV}	ε^{V}	ε^{VI}	ε^{VII}	ε^{VIII}	ε^{IX}	ε^{X}	ε^{XI}	ε^{XII}
$[e_2, e_3] = -2e_1$	$2e_1$	$-2e_1$	$-2e_1$	0	0	$-2e_1$	$2e_1$	$-2e_1$	$2e_1$	0	0	$-2e_1$
$[e_3, e_1] = -2e_2$	$-2e_2$	$2e_2$	$-2e_2$	$-2e_2$	$2e_2$	0	0	$-2e_2$	$-2e_2$	0	$-2e_2$	0
$[e_1, e_2] = -2e_3$	$-2e_3$	$-2e_3$	$2e_3$	$-2e_3$	$-2e_3$	$-2e_3$	$-2e_3$	0	0	$-2e_3$	0	0
Typ kontrakce:	d	d	d	s	d	s	d	s	d	s	s	s
Typ algebry:	$A_{3,8}$	$A_{3,8}$	$A_{3,8}$	$A_{3,6}$	$A_{3,4}$	$A_{3,6}$	$A_{3,4}$	$A_{3,6}$	$A_{3,4}$	$A_{3,1}$	$A_{3,1}$	$A_{3,1}$

Všechny gradované kontrakce (včetně triviálních) reálné formy su(2) jsou algebry:

A_0 abelovská
$A_{3,1}$ Heisenbergova
$A_{3,4}$ 1+1-Poincaréova
$A_{3,6}$ eukleidovská
$A_{3,8}$ sl(2,R)
$A_{3,9}$ su(2).

Ze všech reálných Lieových algeber dimenze tři zde chybí: $A_{2,1}$, $A_{3,2}$, $A_{3,3}$, $A^{p}_{3,5}$, $A^{p}_{3,7}$.

Za závěr můžeme ještě srovnat netriviální spojité gradované kontrakce reálných forem sl(2,R) a su(2) se spojitými Inőnű-Wignerovými kontrakcemi získanými v článku [9] .V obou případech byly kontrahováním sl(2,R) získány tyto algebry:

$A_{3,1}$ Heisenbergova
$A_{3,4}$ 1+1-Poincaréova
$A_{3,6}$ eukleidovská

Taktéž kontrahováním algebry su(2) bylo v obou pracích dosaženo týchž výsledků:

$A_{3,1}$ Heisenbergova
$A_{3,6}$ eukleidovská.

6. Dodatek

Definice: Grupou rozumíme uspořádanou dvojici $G = (M, \cdot)$, kde M je neprázdná množina a $\cdot$ je binární asociativní operace na M tak, že:

1) $\exists e \in M \quad \forall g \in M \quad g \cdot e = e \cdot g = g$ ... existuje jednotka
2) $\forall g \in M \quad \exists g^{-1} \in M \quad g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ ...existuje inverzní prvek.

Definice: Buď $G = (M, \cdot)$ grupa. Množina $\emptyset \neq N \subseteq M$ se nazývá uzavřená v G, pokud $\forall a,b \in N$ platí $a \cdot b^{-1} \in N$. Je-li N uzavřená v G pak $H = (N, \cdot_N)$ je podgrupa grupy G (kde $\cdot_N$ je zúžení operace $\cdot$ na množinu N), značení $H \subset\subset G$.
Definice: Grupa $G = (M, \cdot)$ se nazývá komutativní (abelovská), je-li komutativní operace $\cdot$.
Definice: Grupa $G = (M, \cdot)$ se nazývá cyklická, jeli generovaná nějakým svým prvkem, tj. $\exists a \in M$ tak, že $G = \langle a \rangle = \{a^k \mid k \in Z$ (celé číslo)$\}$.
Definice: Řekneme, že podgrupy H,K grupy G jsou konjugované $\Leftrightarrow \exists\, g \in G$ tak, že $H = gKg^{-1} = \{gkg^{-1} \mid k \in K\}$.

Definice: Lineární algebrou nazýváme vektorový prostor A nad tělesem T na Němž je definováno bilineární zobrazení součin $\cdot : A \times A \to A$.
Poznámky:

1) Lineární algebra (dále jen algebra) je reálná resp. komplexní, je-li těleso reálné resp. komplexní.
2) Dimenze resp. báze algebry A je totožná s dimenzí resp. bází jako vektorového prostoru A.
3) Algebra je asociativní resp. komutativní (abelovská), je-li asociativní resp. komutativní její součin.

Definice: Neprázdnou množinu $B \subseteq A$ nazveme podalgebrou algebry A, pokud $(\forall x,y \in A)$ $(\forall \alpha \in T)$ $(x + y \in B,\ \alpha x \in B,\ x \cdot y \in B)$. Značíme $B \subset\subset A$.
Poznámky:

1) $B \subset\subset A$, $B \neq A$ … vlastní podalgebra
2) $B \subset\subset A$, $E \neq B \neq A$ … netriviální podalgebra kde $E = ((\{0\},+,\cdot),T)$

Definice: Podalgebru I algebry A nazveme levým resp. pravým ideálem pokud $\forall x \in A\ \forall y \in I$ platí $x \cdot y \in I$ resp. $y \cdot x \in I$. Pokud je I současně pravým i levým ideálem pak se nazývá ideálem (oboustranným).
Definice: Algebra A se nazývá prostá (jednoduchá), neexistují-li v ní netriviální ideály I $(E \neq I \neq A)$ tj. jedinými ideály v A jsou E a A.
Definice: Lieova algebra je algebra v níž platí identity $x^2 = 0$, $(x \cdot y)\cdot z+(y \cdot z)\cdot x+(z \cdot x)\cdot y = 0$.
Poznámky:

1) Součin v Lieově algebře se značí $x \cdot y \equiv [x,y]$.
2) Každá Lieova algebra je antikomutativní tj. $[x,y] = - [y,x]$.
3) Lieova algebra A_L asociativní algebry A je Lieova algebra, která vznikne z A záměnou součinu v A tzv. komutátorem prvků $x,y \in A$ $[x,y] = x \cdot y - y \cdot x$.
4) V Lieově algebře je každý ideál oboustranný.

Definice: Lieova algebra A se nazývá řešitelná $\Leftrightarrow$ existuje takové kladené celé číslo n, že $A^{(n)} = 0$, kde posloupnost $A^{(n)}$ je definována indukcí: $A^{(1)} = A$, $A^{(n+1)} = [A^{(n)}, A^{(n)}]$.
Definice: Ideál B Lieovy algebry A nazýváme řešitelný $\Leftrightarrow$ je-li řešitelná Lieova algebra B.
Lieova algebra se nazývá poloprostá, neobsahuje-li žádný řešitelný ideál různý od E.

Definice: Zobrazení f: $A \to B$ nazveme homomorfismus algeber A,B (nad týmž tělesem T) pokud $\forall x,y \in A$ $\forall \alpha \in T$ platí: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $\quad f(\alpha x)=\alpha f(x)$ $\quad f(x \cdot y)=f(x) \cdot f(y)$. Je-li f navíc bijektivní (prosté a na) nazýváme jej izomorfismem a o algebrách A a B říkáme, že jsou izomorfní.

Prostý homomorfismus A na A nazýváme automorfismus algebry A.

Definice: Automorfismus g algebry A je diagonalizovatelný jestliže v A existuje báze X taková, že ${}^{X}A$ (matice zobrazení A v bázi X) je diagonální.

Definice: Matice $A \in T^{n,n}$ je diagonalizovatelná, je-li podobná nějaké diagonální matici (tj. existují-li regulární matice $B \in T^{n,n}$ a diagonální matice $D \in T^{n,n}$ tak, že platí $A = B^{-1}DB$).

Definice: Buď A algebra (nad tělesem T), dim(A) = n (přirozené), $X = \{x_1,...,x_n\}$ její báze. Pak čísla $c_{ij}^{k} \in T$ z rovností $x_i \cdot x_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} x_k$; $i,j \in \hat{n}$ nazýváme strukturní konstanty algebry v bázi X.

Poznámka: Algebra A je Lieova pokud platí:

$$c_{ii}^{k} = 0\ ,\ c_{ij}^{k} = -c_{ji}^{k}\ ,\ \sum_{k=1}^{n} \left(c_{jk}^{l} c_{il}^{k} + c_{ki}^{l} c_{jl}^{m} + c_{ij}^{l} c_{kl}^{m}\right) = 0 \quad \forall i,j,k,m \in \hat{n}\,.$$

Definice: Říkáme, že prvek $m \in M$ je maximální prvek množiny M, platí-li $\forall x \in M$ $(x \geq m \Rightarrow x = m)$.

Definice: Buďte $A \in T^{m,m}$, $B \in T^{n,n}$. Potom $A \oplus B$ je blokově diagonální matice řádu $(m+n)\times(m+n)$ definovaná: $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

a $A \otimes B$ je čtvercová matice řádu $mn \times mn$ definovaná blokově:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & K & a_{1,m}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & K & a_{2,m}B \\ M & M & & M \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & K & a_{m,m}B \end{pmatrix}.$$

Maticové Lieovy grupy a algebry:

$GL(n,C) = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} \mid det(A) \neq 0\}$	$gl(n,C) = \mathbb{C}^{n,n}$
$SL(n,C) = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} \mid det(A) = 1\}$	$sl(n,C) = \{ A \in \mathbb{C}^{n,n} \mid tr(A) = \sum_{j=1}^{n} (A)_{jj} = 0\}$
$U(n) = \{A \in GL(n,C) \mid AA^* = A^*A = I_n \}$	$u(n,C) = \{ A \in gl(n,C) \mid A + A^* = 0\}$
$SU(n) = \{A \in SL(n,C) \mid AA^* = A^*A = I_n \}$	$su(n,C) = \{ A \in sl(n,C) \mid A + A^* = 0\}$
$GL(n,R) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid det(A) \neq 0\}$	$gl(n,R) = \mathbb{R}^{n,n}$
$SL(n,R) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid det(A) = 1\}$	$sl(n,R) = \{ A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid tr(A) = 0\}$
$O(n) = \{A \in GL(n,R) \mid AA^T = A^TA = I_n \}$	$o(n) = so(n) = \{ A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A + A^T = 0\}$
$SO(n) = \{A \in SL(n,R) \mid AA^T = A^TA = I_n \}$	

Klasifikace reálných Lieových algeber dimenze tři:

TABULKA 6.1 Reálné Lieovy algebry dimenze tři.

Lieovy algebry: názvy a označení	$[e_2, e_3] =$	$[e_3, e_1] =$	$[e_1, e_2] =$	$C = \begin{pmatrix} c^1_{2,3} & c^1_{3,1} & c^1_{1,2} \\ c^2_{2,3} & c^2_{3,1} & c^2_{1,2} \\ c^3_{2,3} & c^2_{3,1} & c^3_{1,2} \end{pmatrix}$	
A_0 abelovská	0	0	0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$A_{2,1}$ $L^{(1)}_{SSA-}$ rozložitelná	0	e_1	0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$A_{3,1}$ L_S Heisenbergova	e_1	0	0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$A_{3,2}$ L_{SA}	$e_1 + e_2$	$-e_1$	0	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$A_{3,3}$ L_A $D \times T_2$ dilatační	e_2	$-e_1$	0	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$A_{3,4}$ ISO(1,1) L_{SS-} E(1,1) 1+1-Poincaréova	e_1	$-e_2$	0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$A^a_{3,5}$ $L^{(\lambda)}_{SSA-}$	ae_2	$-e_1$	0	$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$0 < \lvert a \rvert < 1$ $0 < \lambda \neq 1$ $a = (1+\lambda)/(1-\lambda)$
$A_{3,6}$ ISO(2) L_{SS+} E(2) eukleidovská	e_1	e_2	0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$A^a_{3,7}$ $L^{(\lambda)}_{SSA+}$	$e_1 + ae_2$	$-ae_1 + e_2$	0	$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$0 < a$ $0 < \lambda$ $a = \lambda$
$A_{3,8}$ SL(2,R) L_{SSS-} SO(2,1) SU(1,1)	e_1	$-e_2$	$-e_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	
$A_{3,9}$ SU(2) L_{SSS+} SO(3)	e_1	e_2	e_3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	

V komplexním případě splývají následující dvojice algeber:

$A_{3,4}$, $A_{3,6}$ $\rightarrow$ L_{SS}

$A^a_{3,5}$, $A^a_{3,7}$ $\rightarrow$ $L^{(\lambda)}_{SSA}$

$A_{3,8}$, $A_{3,9}$ $\rightarrow$ L_{SSS}.

Literatura:

[1] M. de Montigny, J. Patera: Discrete and continuous graded contractions of Lie algebras and superalgebras, J.Phys. A: Math. Gen. 24 (1991), 525-547

[2] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová: On the fine gradings of simple classical Lie algebras, International Journal of Modern Physics A 12 (1997), 189-194

[3] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová: On the maximal Abelian subgroups of diagonalizable automorphisms of simpl classical Lie algebras, XXI ICGTMP World Scientific Singapore 1997, 116-120

[4] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová: On Lie gradings II, Linear Algebra and its Applications 227 (1998), 97-125

[5] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová: On Lie gradings III. Gradings of the real forms of classical Lie algebras, Linear Algebra and its Applications 314 (2000), 1-47

[6] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová: On Fine Gradings of Real Forms of sl(n,C), Lie theory and its applications in physics II, World Scientific (1997), 119-129

[7] R.L Bryant: An introduction to Lie groups and symplectic geometry, in: Geometry and Quantum Field Theory (D.S. Freed, K.K Uhlenbeck, eds.), Amer. Math. Society 1995, 19-45

[8] J. Patera, R. T. Sharp and P. Winternitz: Invariants of real low dimensional Lie algebras, J. Math. Phys., Vol 17, No. 6, June 1976, 986-994

[9] Evelyn Weimar-Woods: The tree-dimensional real Lie algebras and their contractions, J. Math. Phys. 32 (8), August 1991

[10] A.Z. Petrov: Prostranstva einsteinova, FLM, Moskva 1961, str. 82-87.