Rešeršní práce : Jordanovy algebry v kvantové fyzice

Jiří Hrivnák

17. srpna 2001

1 Úvod

V této práci se budeme zabývat Jordanovými algebrami a jejich významem v kvantové fyzice. Nejprve uvedeme jednu ze základních motivací jejich definice vycházející z kvantové fyziky. Poté uvedeme jejich základní matematické vlastnosti, zavedeme pojmy jednotky a inverzního prvku, ukážeme příklady konstrukce Jordanových algeber a příklady maticových Jordanových algeber. Výsledkem a cílem této části budou automorfismy některých konkrétních Jordanových algeber. Z nich následně odvodíme gradace na příkladu maticových algeber nízké dimenze. Nakonec se budeme zabývat podmínkami graduovaných kontrakcí pro Jordanovy algebry.

2 Definice Jordanovy algebry

Základní postulát kvantové mechaniky hovoří o komplexním Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ jako o prostoru stavů kvantového systému. Skalární součin na tomto prostoru označme $\langle\, ,\, \rangle$ a pro každé $\varphi \in \mathcal{H}$ normu $\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$. Označme množinu všech omezených lineárních operátorů $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Připomeňme, že lineární operátor A je omezený, právě když existuje $c > 0$ tak, že pro všechna $\varphi \in \mathcal{H}$ platí $\|A\varphi\| \leq c\,\|\varphi\|$. S obvykle definovanými operacemi a normou

$$\|A\| := \sup_{\|\varphi\|=1} \|A\varphi\|$$

je $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ Banachův prostor. S operací skládání zobrazení chápanou jako součin je to vzhledem ke vztahu $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ Banachova algebra. Dále uvažujme hermitovské sdružení $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ k operátoru $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ s vlastností

$$\langle \varphi, A\psi \rangle = \langle A^*\varphi, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

Označme nyní množinu hermitovských operátorů $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ tzn.

$$\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H}) := \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,|\, A^* = A\}$$

Budeme uvažovat takové pozorovatelné A, pro které platí $A \in \mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$. Prostor $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ je reálný uzavřený podprostor prostoru $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, tvoří tedy Banachův prostor nad $\mathbb{R}$. V analogii s komplexními čísly můžeme říci, že prostor $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je komplexní rozšíření prostoru $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$, protože každý operátor $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ lze jednoznačně napsat ve tvaru $A = ReA + iImA$, kde ReA, ImA jsou hermitovské operátory určené vztahy

$$ReA = \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad ImA = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

Obecně ale není pravda, že součin dvou hermitovských operátorů je hermitovský; součin hermitovských operátorů A, B je hermitovský operátor, právě když $AB = BA$. Protože operátor $A \in \mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ samozřejmě komutuje s libovolnou svojí mocninou, platí $A^n \in \mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a také $A^n A^m = A^{n+m} \in \mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ pro všechna $n, m \in \mathbb{N}$. Navíc zřejmě platí pro všechna $A, B \in \mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$, že výraz

$$A \circ B := \frac{1}{2}\big((A + B)^2 - A^2 - B^2\big) \tag{1}$$

je prvkem $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$, protože se jedná o reálný součet kvadrátů prvků z $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$. Tento výraz můžeme ještě upravit do tvaru

$$A \circ B = \frac{1}{4}\big((A + B)^2 - (A - B)^2\big) = \frac{1}{2}(AB + BA) \tag{2}$$

Všimněme si, že speciálně platí

$$A \circ A = \frac{1}{2}(AA + AA) = A^2 \tag{3}$$

Přikročme nyní k obecné abstraktní definici Jordanovy algebry.Nechť K je těleso s charakteristikou různou od dvou a X je vektorový prostor nad tělesem K. Dále nechť je definováno zobrazení $\circ : X \times X \to X, (u, v) \mapsto u \circ v$.Dvojice $\mathcal{A} = (X, \circ)$ se nazývá **Jordanova algebra**, právě když pro všechna $u, v, w \in \mathcal{A}$ a všechna $\lambda \in K$ platí

(J1) $u \circ (v + w) = u \circ v + u \circ w \quad (\lambda u) \circ v = \lambda(u \circ v)$

(J2) $u \circ v = v \circ u$

(J3) $u \circ (u^2 \circ v) = u^2 \circ (u \circ v)$

kde $u^2 = u \circ u$.

Zobrazení $\{., ., .\} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad (u, v, w) \mapsto \{u, v, w\} = (u \circ v) \circ w - u \circ (v \circ w)$ se nazývá **asociátor** Jordanovy algebry $\mathcal{A}$. Jordanova algebra A je *asociativní*, právě když $\{u, v, w\} = 0 \;\; \forall u, v, w \in \mathcal{A}$. Jordanova algebra je tedy komutativní, obecně *neasociativní* (lineární) algebra, ve které je splněna podmínka (J3).

V každé komutativní algebře platí

$$(u + v)^2 = u^2 + 2u \circ v + v^2 \tag{4}$$

a z této rovnice můžeme vyjádřit $u \circ v$ jako

$$u \circ v = \frac{1}{2}\big((u + v)^2 - u^2 - v^2\big) \tag{5}$$

a tato rovnost má vzhledem k (3) stejný tvar jako (1). Podobně dále platí

$$(u - v)^2 = u^2 - 2u \circ v + v^2 \tag{6}$$

a odečtením (6) od (4) získáme

$$u \circ v = \frac{1}{4}\big((u + v)^2 - (u - v)^2\big) \tag{7}$$

a tato rovnost má stejný tvar jako (2). Pokud sečteme rovnice (4) a (6) pak dostaneme

$$(u + v)^2 + (u - v)^2 = 2u^2 + 2v^2 \tag{8}$$

Ze vztahu (8) můžeme zpětně odvodit distributivní zákon pro součin $\circ$. Nahraďme nejprve ve vztahu (8) prvek u prvkem $u + w$ a potom prvkem $u - w$; dostaneme rovnosti

$$(u + w + v)^2 + (u + w - v)^2 = 2(u + w)^2 + 2v^2$$

$$(u - w + v)^2 + (u - w - v)^2 = 2(u - w)^2 + 2v^2$$

pokud tyto rovnice od sebe odečteme získáme

$$2(u + w)^2 - 2(u - w)^2 = (u + v + w)^2 - (u + v - w)^2 + (u - v + w)^2 - (u - v - w)^2$$

a po užití vztahu (7) ihned máme

$$2u \circ w = (u + v) \circ w + (u - v) \circ w$$

pokud zde nakonec nahradíme $u+v$ prvkem u a $u-v$ prvkem v získáme zpětně distributivní zákon $u \circ (v + w) = u \circ v + u \circ w$.

Ověřme nyní, že dvojice $(\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H}), \circ)$, kde $\circ$ je definováno vztahem (2), je Jordanova algebra nad tělesem $\mathbb{R}$. Výpočtem ověříme:

(i) $(\lambda A) \circ B = \frac{1}{2}(\lambda AB + B\lambda A) = \lambda \frac{1}{2}(AB + BA) = \lambda(A \circ B)$

(ii) $A \circ (B + C) = \frac{1}{2}\big(A(B + C) + (B + C)A\big) = \frac{1}{2}(AB + AC + BA + CA) = \frac{1}{2}(AB + BA) + \frac{1}{2}(AC + CA) = A \circ B + A \circ C$

(iii) $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA) = \frac{1}{2}(BA + AB) = B \circ A$

(iv) $A^2 \circ (B \circ A) = A^2 \circ \big(\frac{1}{2}(AB + BA)\big) = \frac{1}{4}(A^3B + A^2BA + ABA^2 + BA^3)$
$(A^2 \circ B) \circ A = \frac{1}{2}\big((A^2 \circ B)A + A(A^2 \circ B)\big) = \frac{1}{4}(A^3B + A^2BA + ABA^2 + BA^3)$

Význam vztahů (7) a (8) vzhledem k axiomatizaci kvantové mechaniky spočívá v tom, že obsahují pouze sčítání a umocňování; tyto dvě operace se jednodušeji empiricky interpretují. Pokud vezmeme vztah (8) jako empirický vztah mezi pozorovatelnými, můžeme z něj a ze vztahu (7) získat distributivní vlastnost $\circ$ v $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$.

Význam vlastnosti (J3) v definici Jordanovy algebry souvisí ještě s dalším součinem přítomným v $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ - komutátorem

$$\{A, B\} := \frac{1}{i\hbar}[A, B] = \frac{1}{i\hbar}(AB - BA) \tag{9}$$

a proto připojíme k abstraktní definici Jordanovy algebry ještě další součin. **Jordanova - Lieova algebra $\mathcal{A}$ se strukturní konstantou** $k \in \mathbb{R}$ je reálná Jordanova algebra, na které je definováno zobrazení $\{.,.\} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, (u, v) \mapsto \{u, v\}$, které splňuje pro všechna $u, v, w \in \mathcal{A}$ a všechna $\lambda \in \mathbb{R}$

(J-L1) $\{\lambda u, v\} = \lambda\{u, v\} \quad \{u, v + w\} = \{u, v\} + \{u, w\}$

(J-L2) $\{u, v\} = -\{v, u\}$

(J-L3) $\{u, v^2\} = 2\{u, v\} \circ v$

(J-L4) $\{u, v, w\} = k\{\{u, w\}, v\}$

kde $\{., ., .\}$ je asociátor Jordanovy algebry.

Všimněme si, že pro všechna $u, v, w \in \mathcal{A}$ platí

$$\begin{aligned} \{u, v, w\} + \{v, w, u\} + \{w, u, v\} = (u \circ v) \circ w - u \circ (v \circ w) + (v \circ w) \circ u - \\ -v \circ (w \circ u) + (w \circ u) \circ v - w \circ (u \circ v) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Z toho ze vztahu (J-L4) plyne pro $k \neq 0$

$$\{\{u, v\}, w\} + \{\{v, w\}, u\} + \{\{w, u\}, v\} = 0 \tag{11}$$

a to znamená, že je splněna Jacobiho identita pro součin $\{.,.\}$ a $\mathcal{A}$ je tedy Lieova algebra.

Už jsme ověřili, že $(\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H}), \circ)$ je reálná Jordanova algebra. Nyní můžeme ověřit, že $(\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H}), \circ, \{.,.\})$, kde $\{.,.\}$ je definováno vztahem (9) je Jordanova - Lieova algebra se strukturní konstantou $k = \frac{\hbar^2}{4}$. Splnění podmínek (J-L1) a (J-L2) je zřejmé. Ověřme dále:

(J-L3): $2i\hbar\{A, B\} \circ B = 2\big((AB - BA) \circ B\big) = (AB - BA)B + B(AB - BA) = AB^2 - B^2A = i\hbar\{A, B^2\}$

(J-L4): $\{A, B, C\} = (A \circ B) \circ -A \circ (B \circ C) = \frac{1}{4}(CAB + BAC - ACB - BCA)$

$\frac{\hbar^2}{4}\{\{A, C\}, B\} = \frac{\hbar}{4i}\{AC - CA, B\} = \frac{1}{4}(CAB + BAC - ACB - BCA)$

Nyní osvětlíme význam požadavku (J3) v definici Jordanovy algebry. Vzhledem ke vztahu (J-L4) platí pro pevné $A, C \in \mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$

$$\{A, B, C\} = 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H}) \tag{12}$$

právě když

$$[[A, C], B] = 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H}) \tag{13}$$

Zvolme ve vztahu (13) speciálně za operátor B projektor na jednodimenzionální podprostor určený jednotkovým vektorem $\varphi \in \mathcal{H}$, tzn.

$$P_\varphi \psi = \langle \psi, \varphi \rangle \varphi \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| = 1 \tag{14}$$

Nyní máme

$$[A, C]P_\varphi \psi = P_\varphi [A, C]\psi \tag{15}$$

neboli

$$\langle \psi, \varphi \rangle [A, C]\varphi = \langle [A, C]\psi, \varphi \rangle \varphi \tag{16}$$

Zvolme nakonec $\varphi = \psi$ a vidíme, že zobrazení $[A, C]$ musí mít tvar $[A, C]\varphi = \alpha\varphi,\ \alpha \in \mathbb{C}$. Vzhledem k tomu, že platí $[A, C]^* = -[A, C]$, máme

$$\alpha = \langle [A, C]\varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, [A, C]^*\varphi \rangle = \langle \varphi, -[A, C]\varphi \rangle = -\overline{\langle [A, C]\varphi, \varphi \rangle} = -\overline{\alpha}$$

a platí tedy

$$[A, C] = i\lambda I, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{17}$$

Připomeňme, že spektrum $\sigma(A)$ omezeného operátoru A je neprázdné a pro spektrální poloměr platí $r(A) := \sup_{\nu \in \sigma(A)} |\nu| \leq \|A\|$. Vezměme nyní $a \in \mathbb{R}, a > \|A\|$ a položme $A_a := A + aI$. Protože $a \notin \sigma(A)$ je A_a bijekce prostoru $\mathcal{H}$; existuje $A_a^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Pro $\mu \in \mathbb{C}$ tedy máme

$$A_a C - \mu I = A_a (C A_a - \mu I)(A_a)^{-1} \tag{18}$$

a z toho plyne

$$\sigma(A_a C) = \sigma(C A_a) \tag{19}$$

Dále po použití vztahu (17) získáme

$$A_a C - \mu I = AC + aC - \mu I = i\lambda I + CA + aC - \mu I = CA_a - (\mu - i\lambda)I$$

z čehož plyne

$$\mu \in \sigma(A_a C) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu - i\lambda \in \sigma(C A_a) \tag{20}$$

Protože ale platí (19), získáme z (20) indukcí:

$$\mu \in \sigma(A_a C) \quad \Leftrightarrow \quad \mu - in\lambda \in \sigma(A_a C) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{21}$$

Protože $\sigma(A_a C)$ je neprázdné a omezené, musí platit $\lambda = 0$, a tudíž na závěr máme

$$[A, C] = 0 \tag{22}$$

Axiom (J3) má v $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ tvar

$$A^2 \circ (B \circ A) = (A^2 \circ B) \circ A \qquad \forall B \in \mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$$

neboli

$$\{A^2, B, A\} = 0 \qquad \forall B \in \mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$$

Závěrem vidíme ze vztahu (22), že požadavek v definici Jordanovy algebry (J3) na Jordanovský součin $\circ$ v Jordanově - Lieově algebře pozorovatelných $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ vyjadřuje a tím axiomatizuje fakt $[A, A^2] = 0$.

3 Vlastnosti Jordanovy algebry

Nechť $\mathcal{A} = (X, \circ)$ je Jordanova algebra nad tělesem K. Budeme předpokládat, že platí $\dim X < \infty$ a $\operatorname{char} K = 0$. Pro dané $u \in \mathcal{A}$ označme zobrazení $L(u) : X \to X, v \mapsto u \circ v$, tzn.

$$L(u)v = u \circ v \tag{23}$$

Z vlastnosti (J1) Jordanovy algebry a vzhledem k (J2) platí pro všechna $u, v, w \in \mathcal{A},\ \lambda \in K$

$$L(u)(\alpha v + w) = u \circ (\alpha v + w) = \alpha(u \circ v) + u \circ w = \alpha L(u)v + L(u)w$$

$$L(\alpha u + v)w = (\alpha u + v) \circ w = \alpha(u \circ w) + v \circ w = \alpha L(u)w + L(v)w$$

tzn. $L(u)$ je lineární zobrazení a L je lineární v u. Pro alternativní zápis (J2) máme $L(u)v = L(v)u$ a (J3) $L(u)L(u^2) = L(u^2)L(u)$. Nahraďme nyní u ve vztahu (J3) vektorem $\lambda u + w,\ \lambda \in K$:

$$(\lambda u + w)\circ\big((\lambda u + w)^2 \circ v\big) = (\lambda u + w)^2 \circ\big((\lambda u + w) \circ v\big)$$

Po roznásobení a úpravách máme (znak $\circ$ je pro tuto chvíli vynechán)

$$\lambda^3 u(u^2 v) + \lambda^2\big(2u[(uw)v] + w(u^2 v)\big) + \lambda\big(u(w^2 v) + 2w[(uw)v]\big) + w(w^2 v) =$$

$$= \lambda^3 u^2(uv) + \lambda^2\big(2(uw)(uv) + u^2(wv)\big) + \lambda\big(w^2(uv) + 2(uw)(wv)\big) + w^2(wv)$$

Porovnáním koeficientů u mocnin λ máme tzv. *polarizační formuli*

$$2(u \circ v) \circ (u \circ w) + u^2 \circ (v \circ w) = 2u \circ \big(v \circ (u \circ w)\big) + (u^2 \circ v) \circ w \tag{24}$$

Pokud na tuto rovnost nahlížíme jako na rovnost lineárních zobrazení s argumentem w ihned máme

$$2L(u \circ v)L(u) + L(u^2)L(v) = 2L(u)L(v)L(u) + L(u^2 \circ v) \tag{25}$$

Pokud na polarizační formuli nahlížíme jako na rovnost lineárních zobrazení s argumentem v máme za druhé (místo w nakonec píšeme v)

$$2L(u)L(u \circ v) + L(v)L(u^2) = 2L(u \circ v)L(u) + L(u^2)L(v) \tag{26}$$

Budeme říkat, že prvky $u, v \in \mathcal{A}$ **komutují**, právě když platí

$$u \circ (v \circ x) = v \circ (u \circ x) \qquad \forall x \in \mathcal{A} \tag{27}$$

tzn. platí $L(u)L(v) = L(v)L(u)$, neboli lineární zobrazení $L(u)$ a $L(v)$ komutují. V tomto názvosloví vyjadřuje vlastnost (J3), že u a u^2 komutují. Ze vztahu (26) také vidíme, že u a $u \circ v$ komutují, právě když u^2 a v komutují. Mocniny prvku $u \in \mathcal{A}$ jsou definovány jako obvykle:

$$u^1 = u, \quad u^{m+1} = u \circ u^m \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

V *neasociativní* algebře obecně neplatí $u^r \circ u^s = u^{r+s}$. My však máme

Věta 3.1. Nechť $\mathcal{A}$ je Jordanova algebra. Pak pro všechna $u \in \mathcal{A}$ platí

$$u^r \circ u^s = u^{r+s} \qquad \forall r, s \in \mathbb{N} \tag{28}$$

Důkaz. Dokažme nejprve, že $L(u^m)$ je polynom v $L(u)$ a v $L(u^2)$. To je zřejmé pro $m = 1$ a $m = 2$. Předpokládejme, že pro $L(u^r)$, $r \leq m$ tvrzení platí. Z toho ihned plyne, že u a u^r komutují (protože $L(u)$ a $L(u^2)$ komutují a $L(u^r)$ je v těchto proměnných polynom) a platí tedy

$$u^{m-1} \circ (u \circ u) = u \circ (u^{m-1} \circ u) = u \circ u^m = u^{m+1}$$

neboli

$$u^2 \circ u^{m-1} = u^{m+1} \tag{29}$$

Nahrazením u^{m-1} za v ve vzorci (25) dostaneme s využitím (29)

$$L(u^{m+1}) = 2L(u^m)L(u) + L(u^2)L(u^{m-1}) - 2L(u)L(u^{m-1})L(u) \tag{30}$$

S využitím indukčního předpokladu tedy platí, že $L(u^{m+1})$ je polynom v $L(u)$ a v $L(u^2)$. Odtud vidíme, že u^r a u^s komutují pro všechna $r, s \in \mathbb{N}$, protože $L(u^r)$ a $L(u^s)$ jsou oba polynomy v $L(u)$ a $L(u^2)$, které komutují. Speciálně u a u^r komutují. Pro $r + s = 2$ je tvrzení (28) zřejmé. Předpokládejme nyní, že (28) platí pro $r + s \leq m$, $r, s \in \mathbb{N}$. Pro $r + s = m + 1$ a $s > 1$ máme

$$u^r \circ u^s = u^r \circ (u \circ u^{s-1}) = u \circ (u^r \circ u^{s-1}) = u \circ (u^{r+s-1}) = u^{r+s}$$

□

Poznámka 1. Tvrzení věty (3.1) můžeme rozšířit následujícím způsobem. Pokud $u, v \in \mathcal{A}$ komutují platí

$$u^r \circ (u^s \circ v) = u^{r+s} \circ v \qquad \forall r, s \in \mathbb{N} \tag{31}$$

Důkaz. Tvrzení je triviální pro $r + s = 2$. Pro $s = 1$ máme (u, v komutují)

$$u^r \circ (u \circ v) = u \circ (u^r \circ v) = v \circ (u \circ u^r) = v \circ u^{r+1} \tag{32}$$

Nyní opět předpokládejme, že tvrzení platí pro $r + s \leq m$. Pro $r + s = m + 1$ a $s > 1$ máme

$$u^r \circ (u^s \circ v) = u^r \circ \big(v \circ (u^{s-1} \circ u)\big) = u^r \circ \big(u \circ (u^{s-1} \circ v)\big) =$$
$$= u \circ \big(u^r \circ (u^{s-1} \circ v)\big) = u \circ (u^{r+s-1} \circ v) = v \circ (u^{r+s-1} \circ u) = v \circ u^{r+s}$$

□

Důležitým příkladem asociativní podalgebry algebry $\mathcal{A}$ je **centrum** $Z(\mathcal{A})$ algebry $\mathcal{A}$, obsahující prvky $z \in \mathcal{A}$, které komutují s každým $u \in \mathcal{A}$. Z definice platí pro $z \in Z(\mathcal{A})$ a $u, v \in \mathcal{A}$

$$u \circ (z \circ v) = z \circ (u \circ v) = v \circ (z \circ u) = (u \circ z) \circ v \tag{33}$$

Dále pro všechna $z, w \in Z(\mathcal{A})$, $u, v \in \mathcal{A}$ a všechna $\lambda \in K$ s využitím (33) platí

(i)

$$u\circ\big(\lambda z+w)\circ v\big)= u\circ\big((\lambda z)\circ v+w\circ v\big)= \lambda\big(u\circ(z\circ v)\big)+u\circ(w\circ v) =$$
$$= \lambda\big(z\circ(u\circ v)\big)+w\circ(u\circ v) = (\lambda z+w)\circ(u\circ v)$$

(ii)

$$u\circ\big((z\circ w)\circ v\big)= u\circ\big(z\circ(w\circ v)\big)= z\circ\big(u\circ(w\circ v)\big)=$$
$$= z\circ\big(w\circ(u\circ v)\big)= z\circ\big((u\circ v)\circ w\big)= (u\circ v)\circ(z\circ w)$$

Tím jsme ověřili, že $Z(\mathcal{A})$ je podalgebra, rovnice (33) dále říká, že $Z(\mathcal{A})$ je *asociativní* podalgebra $\mathcal{A}$.

Budeme říkat, že algebra $\mathcal{A}$ má **jednotku**, když existuje prvek $c \in \mathcal{A}$ tak, že platí $c\circ u = u\circ c = u$, $\forall u \in \mathcal{A}$. Je zřejmé, že $\mathcal{A}$ má nejvýše jednu jednotku. Prvek $e \in \mathcal{A}$ se nazývá **idempotentní**, pokud $e \neq 0$ a $e^2 = e$. Pokud ve vztahu (30) nahradíme $u = e = e^2$ a $m = 2$ získáme

$$2L^3(e) - 3L^2(e) + L(e) = 0 \tag{34}$$

Vlastní hodnoty lineární transformace $L(e)$ musí tedy splňovat rovnici

$$2\tau^3 - 3\tau^2 + \tau = 0 \tag{35}$$

a mohou tedy být pouze $0, \frac{1}{2}$ a 1. Protože platí $L(e)e = e^2 = e$ je jedna vlastní hodnota rovna 1. Jelikož je $\operatorname{tr} L(e)$ součet vlastních hodnot a všechny jsou kladné, platí $\operatorname{tr} L(e) \neq 0$. Analogicky jako pro matice je definována nilpotentnost. Prvek $v \in \mathcal{A}$ se nazývá **nilpotentní**, pokud existuje $r \in \mathbb{N}$ tak, že $v^r = 0$. Definujme pro $m \in \mathbb{N}$ lineární obal $K_m[u] := span\{u^m, u^{m+1}, u^{m+2}, \cdots\}$. Je zřejmé, že $K_m[u]$ je asociativní podalgebra algebry $\mathcal{A}$. Pokud je u nilpotentní pak každý prvek $v \in K_m[u]$ je nilpotentní. Obráceně platí

Lemma 3.2. Jestliže $u \in \mathcal{A}$ není nilpotentní, pak existují $m \in \mathbb{N}$ a idempotentní $e \in \mathcal{A}$ tak, že $e \in K_m[u]$.

Důkaz. Protože platí $\mathcal{A} \supset K_1[u] \supset K_2[u] \supset \cdots \supset K_m[u] \supset \cdots$, $\mathcal{A}$ má konečnou dimenzi a $K_m[u] \neq 0$ musí existovat $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$u^m \circ K_m[u] = K_{2m}[u] = K_m[u]$$

Protože $K_m[u]$ má konečnou dimenzi a lineární zobrazení

$$K_m[u] \to K_m[u], v \mapsto u^m \circ v$$

má v jádru pouze nulový vektor, je to bijekce $K_m[u]$. Musí tedy existovat vzor $0 \neq e \in K_m[u]$ prvku u^m, tzn. $u^m = u^m \circ e$. Pak platí $u^n = u^n \circ e$, $\forall n \geq m$ a protože $e \in K_m[u]$, platí $e^2 = e$. □

Lemma 3.3. *Nechť $\mathcal{A}$ je Jordanova algebra. Prvek $u \in \mathcal{A}$ je nilpotentní, právě když existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{tr} L(u^r) = 0, \quad \forall r \geq m$.*

Důkaz. $(\Rightarrow)$: Ukažme, že z $u^r = 0$ pro nějaké $r \geq 2$ vyplývá $L(u)$ nilpotentní.
Ze vztahu (30) pro $m = 2$ máme

$$L(u^3) = 3L(u^2)L(u) - 2L^3(u) \tag{36}$$

takže pro $r = 2$ vidíme $L^3(u) = 0$, tzn. $L(u)$ je nilpotentní a tvrzení platí. Předpokládejme dále, že $u^{r+1} = 0$ a tvrzení platí pro r. To speciálně znamená, že z $(u^2)^r = u^{r+1} \circ u^{r-1} = 0$ a podobně z $(u^3)^r = 0$ vyplývá, že $L(u^2)$ a $L(u^3)$ jsou nilpotentní. Pak z (36) plyne, že $L^3(u)$ je součet dvou nilpotentních lineárních zobrazení, která komutují, tudíž $L(u)$ je nilpotentní. Pokud je tedy u nilpotentní je samozřejmě také u^r, $\forall r \geq 1$ nilpotentní a tudíž $L(u^r)$ je nilpotentní. Nilpotentní lineární zobrazení má všechna vlastní čísla nulová, tudíž $\operatorname{tr} L(u^r) = 0, \ \forall r \geq 1$.
$(\Leftarrow)$: Postupujme nepřímo. Nechť u není nilpotentní a existuje m_1 takové, že $\operatorname{tr} L(u^r), \ \forall r \geq m_1$. Podle lemmatu (3.2) existuje m_2 tak, že $K_{m_2}[u]$ obsahuje idempotentní $e \in K_{m_2}[u] = K_m[u]$, kde $m := \max\{m_1, m_2\}$. Pak pro všechna $v \in K_m[u]$ platí $\operatorname{tr} L(v) = 0$ a tudíž i $\operatorname{tr} L(e) = 0$, což je spor. □

Mějme Jordanovu algebru $\mathcal{A} = (X, \circ)$. Podmnožinu $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ budeme nazývat **ideál**, pokud je $\mathcal{I}$ podprostor vektorového prostoru X a platí

$$u \circ d \in \mathcal{I} \quad \forall\, u \in \mathcal{A}, \forall\, d \in \mathcal{I}$$

Důležitým příkladem ideálu je **radikál** Jordanovy algebry $\mathcal{A}$ definovaný

$$rad\ \mathcal{A} := \{a \in \mathcal{A} \mid \operatorname{tr} L(a \circ u) = 0, \ \forall\, u \in \mathcal{A}\}$$

Jordanova algebra $\mathcal{A}$ se nazývá **poloprostá**, právě když $rad\ \mathcal{A} = \{0\}$.

Věta 3.4. *Pro každé $a \in \mathcal{A}$ platí $a \in rad\ \mathcal{A}$, právě když pro každé $x \in \mathcal{A}$ je $a \circ x$ nilpotentní.*

Důkaz. $(\Rightarrow)$: Pro $a \in rad\ \mathcal{A}$ platí $a \circ x \in rad\ \mathcal{A}$, $\forall x \in \mathcal{A}$, takže speciálně platí $\operatorname{tr} L((a \circ x) \circ (a \circ x)^r) = \operatorname{tr} L((a \circ x)^{r+1}) = 0, \ \forall r \in \mathbb{N}$. Takže podle (3.3) je $a \circ x$ nilpotentní.
$(\Leftarrow)$: Pokud pro všechna $x \in \mathcal{A}$ je $a \circ x$ nilpotentní pak z (3.3) plyne, že $\operatorname{tr} L(a \circ x) = 0$, $\forall x \in \mathcal{A}$ tzn. $a \in rad\ \mathcal{A}$. □

Věta 3.5. *Nechť $\mathcal{I}$ je ideál v Jordanově algebře $\mathcal{A}$. Pak platí*

$$rad\ \mathcal{I} = \mathcal{I} \cap rad\ \mathcal{A} \tag{37}$$

Důkaz. $\supset$: Pokud $a \in \mathcal{I} \cap rad\ \mathcal{A}$, tzn. $a \in \mathcal{I}$ a platí $\operatorname{tr} L(a \circ u) = 0, \ \forall u \in \mathcal{A}$ pak samozřejmě $\operatorname{tr} L(a \circ u) = 0, \ \forall u \in \mathcal{I}$, takže $a \in rad\ \mathcal{I}$.

$\subset$: Dokažme nejprve, že z $u \in rad\ \mathcal{I},\ u^2 \in rad\ \mathcal{A}$ plyne $u \in rad\ \mathcal{A}$. Nahraďme v polarizační formuli $v = w$, dostaneme

$$2(u \circ v)^2 = 2u \circ \big(v \circ (u \circ v)\big) + (u^2 \circ v) \circ v - u^2 \circ v^2$$

Nyní máme inkluze

$$u \circ \big(v \circ (u \circ v)\big) \in u \circ (v \circ \mathcal{I}) \subset u \circ \mathcal{I} \subset rad\ \mathcal{I}$$

$$(u^2 \circ v) \circ v \in (rad\ \mathcal{A} \circ v) \circ v \cap (\mathcal{I} \circ v) \circ v \subset rad\ \mathcal{A} \cap \mathcal{I} \subset rad\ \mathcal{I}$$

$$u^2 \circ v^2 \in rad\ \mathcal{A} \circ v^2 \cap \mathcal{I} \circ v^2 \subset rad\ \mathcal{A} \cap \mathcal{I} \subset rad\ \mathcal{I}$$

takže $(u \circ v)^2 \in rad\ \mathcal{I}$. Z (3.4) plyne $(u \circ v)^2 \circ x$ je nilpotentní pro $x \in \mathcal{I}$, speciálně $(u \circ v)^3$ je nilpotentní, takže závěrem zřejmě $u \circ v$ je nilpotentní. To platí pro každé $v \in \mathcal{A}$, z čehož opět podle (3.4) vyplývá $u \in rad\ \mathcal{A}$.
Pro $u \in rad\ \mathcal{I}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $u^{2^m} = 0 \in rad\ \mathcal{A}$, podle předchozího tedy máme $u^{2^{m-1}} \in rad\ \mathcal{A}$. Opakováním úvahy dojdeme k závěru $u \in rad\ \mathcal{A}$. $\square$

Poznámka 2. Z věty (3.5) vidíme, že každý ideál v poloprosté Jordanově algebře $\mathcal{A}$ je poloprostá Jordanova algebra.

Uvažujme nyní jistý rozklad vektorového prostoru $\mathcal{A}$. Již víme, že pro idempotentní $e \in \mathcal{A}$ platí $\psi(L(e)) = 0, \psi(\tau) = 2\tau^3 - 3\tau^2 + \tau$. Definujme tři podprostory

$$\mathcal{A}_\lambda := \{x \in \mathcal{A} \mid e \circ x = \lambda x\ \} \qquad \lambda = 0, \frac{1}{2}, 1$$

Dále definujme tři polynomy

$$\psi_0(\tau) = 2\tau^2 - 3\tau + 1$$

$$\psi_{\frac{1}{2}} = -4\tau^2 + 4\tau$$

$$\psi_1(\tau) = 2\tau^2 - \tau$$

Položme nyní $x_\lambda := \psi_\lambda(L(e))x$. Protože součet polynomů je 1 platí $x = x_0 + x_{\frac{1}{2}} + x_1$. Jelikož $(\tau - \lambda)\psi_\lambda(\tau)$ je pro každé $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1$ násobek $\psi(\tau)$ platí $x_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda$. Takže pro vektorový prostor $\mathcal{A}$ máme obecně rozklad na direktní součet podprostorů

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_{\frac{1}{2}} + \mathcal{A}_1 \tag{38}$$

Jordanova algebra $\mathcal{A}$ je **direktní součet** podalgeber $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_r$, jestliže je direktní součet vektorových prostorů $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_r$ a platí $\mathcal{I}_\nu \circ \mathcal{I}_\mu = \{0\}, \nu \neq \mu$. Direktní součet podalgeber zapisujeme symbolicky $\mathcal{A} = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_r$. Každá taková podalgebra $\mathcal{I}_\nu$ se nazývá **prvek direktního součtu** $\mathcal{A}$. Každý prvek direktního součtu je zřejmě ideál v $\mathcal{A}$. Algebra $\mathcal{A}$ je **nerozložitelná** pokud neexistuje direktní součet $\mathcal{A}$ na dvě netriviální podalgebry. $\mathcal{A}$ je **prostá**, jestliže je poloprostá a nerozložitelná. Budeme říkat, že ideál $\mathcal{I} \neq \{0\}$ je **minimální** pokud pro každý ideál $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ platí $\mathcal{J} = \{0\}$ nebo $\mathcal{J} = \mathcal{I}$.

Věta 3.6. Každá poloprostá Jordanova algebra je direktní součet prostých algeber, prvky direktního součtu jsou právě minimální ideály v $\mathcal{A}$ a rozklad je až na pořadí sčítanců jednoznačný.

Důkaz. Důkaz rozdělme na několik kroků.

(1) Dokažme nejprve obecně, že každý ideál $\mathcal{I} \neq \{0\}$ je prvek nějakého direktního součtu $\mathcal{A}$. Podle poznámky 2 je $\mathcal{I}$ poloprostá Jordanova algebra. Lze dokázat, že každá poloprostá Jordanova algebra má jednotku - viz např. [3], str.63. Takže existuje jednotka $e \in \mathcal{I}$. Jistě platí $e^2 = e$, takže e je idempotentní v $\mathcal{A}$. Vezměme tedy rozklad (38). Nahrazením $u = e,\ e \circ v = \lambda v,\ e \circ w = \nu w$ v polarizační formuli (24) dostaneme pro $v \in \mathcal{A}_\lambda,\ w \in \mathcal{A}_\nu$

$$(1 - 2\nu)[e \circ (v \circ w) - \lambda(v \circ w)] = 0$$

Pro $\lambda = \nu = 0$ dostaneme $e \circ (v \circ w) = 0$, takže $\mathcal{A}_0$ je podalgebra $\mathcal{A}$, pro $\lambda = \nu = 1$ máme $e \circ (v \circ w) = v \circ w$ tzn. $\mathcal{A}_1$ je podalgebra. Pro $\lambda = 0, \nu = 1$ dostaneme $e \circ (v \circ w) = 0$, pro $\lambda = 1, \nu = 0$ máme $e \circ (v \circ w) - v \circ w = 0$, tzn. $v \circ w = 0$, takže $\mathcal{A}_0 \circ \mathcal{A}_1 = \{0\}$. Pro $x \in \mathcal{A}_\lambda,\ \lambda = \frac{1}{2}, 1$ z definice $\mathcal{A}_\lambda$ máme $x = \frac{1}{\lambda} e \circ x \in \mathcal{I}$. Protože e je jednotka v $\mathcal{I}$ musí být $\lambda = 1$, tzn. $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}} = \{0\}$ a $\mathcal{A}_1 = \mathcal{I}$. Jelikož $\mathcal{I} \circ \mathcal{A}_0 = \{0\}$, máme $\mathcal{A} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{A}_0$.

(2) Dokažme, že pokud $\mathcal{I} \neq \{0\}$ je ideál v $\mathcal{A}$ a $\mathcal{J}$ je ideál v $\mathcal{I}$, pak $\mathcal{J}$ je ideál v $\mathcal{A}$. Víme, že platí $\mathcal{A} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{A}_0$. Protože $\mathcal{J}$ je ideál v $\mathcal{I}$, platí $\mathcal{J} \circ \mathcal{I} \subset \mathcal{J}$. Dále máme $\mathcal{J} \circ \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{I} \circ \mathcal{A}_0 = \{0\}$, takže $\mathcal{J} \circ \mathcal{A} \subset \mathcal{J}$.

(3) Pokud $\mathcal{J}, \mathcal{I}$ jsou ideály v $\mathcal{A}$ a $\mathcal{J}$ je minimální, pak $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ nebo $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \mathcal{I} \circ \mathcal{J} = \{0\}$. Je zřejmé, že $\mathcal{J} \cap \mathcal{I}$ je ideál v $\mathcal{I}$. Protože $\mathcal{J}$ je minimální, platí $\mathcal{J} \cap \mathcal{I} = \mathcal{J}$ nebo $\mathcal{J} \cap \mathcal{I} = \{0\}$. V druhém případě navíc platí $\mathcal{J} \circ \mathcal{I} \subset \mathcal{J} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.

(4) Ukažme, že existuje alespoň jeden rozklad $\mathcal{A} = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_r$ na prosté algebry $\mathcal{I}_\nu, \nu = 1 \dots r$. Pokud je $\mathcal{A}$ prostá, je tvrzení triviální. Pokud není prostá, existuje její rozklad, a tedy netriviální ideál takový, že $\mathcal{A} = \mathcal{I} + \mathcal{A}_0$. Protože dimenze $\mathcal{A}$ je konečná, můžeme tento postup opakovat, až získáme hledaný rozklad na prosté algebry.

(5) $\mathcal{I}_\nu$ jsou *právě* minimální ideály v $\mathcal{A}$. Pokud $\mathcal{I}$ je minimální ideál v $\mathcal{A}$, musí podle (3) pro nějaké ν platit $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_\nu$. Druhá možnost v (3) je vyloučena, protože by platilo $\mathcal{I} \circ \mathcal{I}_\nu = \{0\},\ \forall \nu$, takže $\mathcal{I} \circ \mathcal{A} = \{0\}$, tzn. $\mathcal{I} = \{0\}$. Předpokládejme, že nějaký $\mathcal{I}_\nu$ není minimální. Pak v něm existuje netriviální ideál $\mathcal{J}$. Z (1) víme, že $\mathcal{J}$ je prvek direktního součtu $\mathcal{I}_\nu$, takže $\mathcal{I}_\nu$ není prostá.

□

Mějme nyní Jordanovu algebru $\mathcal{A}$ s jednotkou c. Definujme $u^0 := c,\ u \in \mathcal{A}$; víme, že platí $u^r \circ u^s = u^{r+s},\ r, s \in \mathbb{N}_0$. Označme lineární obal mocnin u $K[u]$, tzn. $K[u] := span\{c, u, u^2, u^3, \dots\}$. Víme, že $K[u]$ je asociativní podalgebra $\mathcal{A}$. Z poznámky 1 plyne, že pokud u, v komutují platí

$$x \circ (y \circ v) = (x \circ y) \circ v,\ \forall x, z \in K[u] \tag{39}$$

Abychom mohli definovat inverzní prvek v $\mathcal{A}$ ukažme nejprve

Lemma 3.7. Nechť $u \in \mathcal{A}$. Pak existuje $v \in \mathcal{A}$ tak, že $u \circ v = c$ a u, v komutují, právě když u není dělitel nuly v $K[u]$. Pak v je jednoznačně určeno a $v \in K[u]$.

Důkaz. $(\Rightarrow)$: Nechť $u \circ v = c$ a u, v komutují. Pokud $u \circ w = 0$, kde $w \in K[u]$, platí podle (39) $w = w \circ (u \circ v) = (u \circ w) \circ v = 0$.
$(\Leftarrow)$: Pokud u není dělitel nuly v $K[u]$, pak lineární zobrazení $K[u] \to K[u]$, $x \mapsto u \circ x$ má v jádru pouze 0, je tedy bijektivní, takže existuje vzor prvku c. Tzn. existuje jednoznačně určené $x \in K[u]$, $c = u \circ x$. Protože mocniny prvku vzájemně komutují, komutuje i u a v. Nechť nyní v je *jakýkoli* prvek v $\mathcal{A}$, splňující $u \circ v = c$ a u, v komutují. Z (39) platí

$$x = x \circ (u \circ v) = (x \circ u) \circ v = v$$

□

Pokud platí $u \circ v = c$ a u, v komutují, nazveme v **inverzním** prvkem k u a značíme $u^{-1} := v$. Protože $u^{-1} \in K[u]$ a $K[u]$ je asociativní, platí $u^m \circ (u^{-1})^m = c$, $m \in \mathbb{N}$. Z toho plyne $(u^{-1})^{-1} = u$, $(u^{-1})^m = (u^m)^{-1}$. Pokud u^{-1} existuje, definujme mocniny $u^{-m} := (u^{-1})^m, m \in \mathbb{N}$. Ze vztahu (39) máme pokud u, v komutují

$$u^r \circ (u^s \circ v) = u^{r+s} \circ v \qquad \forall r, s \in \mathbb{Z} \tag{40}$$

A speciálně $u^r \circ u^s = u^{r+s} \in K[u]$, $\forall r, s \in \mathbb{Z}$
Definujme velice významnou lineární transformaci tzv. **kvadratickou reprezentaci** $P(u)$ vztahem

$$P(u) := 2L^2(u) - L(u^2) \tag{41}$$

Označme I identické zobrazení na $\mathcal{A}$. Protože evidentně platí $L(c) = I$, máme také $P(c) = I$. Pomocí kvadratické reprezentace můžeme charakterizovat inverzní prvek.

Věta 3.8. Nechť $u \in \mathcal{A}$. Inverzní prvek u^{-1} existuje, právě když $\det P(u) \neq 0$. Pak navíc platí

(a) $u^{-1} = P^{-1}(u)u = P(u^{-1})u$

(b) $P(u)P(u^{-1}) = I$

(c) $L(u^{-1}) = L(u)P^{-1}(u) = P^{-1}(u)L(u)$

Důkaz. $(\Rightarrow)$: Předpokládejme, že u^{-1} existuje. Pro každé $m \in \mathbb{Z}$ mocnina u^m patří do $K[u]$, takže zobrazení $L(u^m)$ vzájemně komutují. Nahrazením $v = u^{-1}$ v rovnici (25) dostaneme $L(u) = P(u)L(u^{-1})$, nahrazením $v = u^{-2}$ dostaneme $2L(u)L(u^{-1}) - P(u)L(u^{-2}) = I$. Substitucí první rovnice do druhé dostaneme $P(u)P(u^{-1}) = I$, takže $\det P(u) \neq 0$.
$(\Leftarrow)$: Postupujme nepřímo. Pokud u^{-1} neexistuje, vyplývá z lemmatu (3.7), že u je dělitel nuly v $K[u]$. To znamená, že existuje $x \in K[u]$, $x \neq 0$ takové, že $u \circ x = 0$. Takže $P(u)x = 2u \circ (u \circ x) - u^2 \circ x = u \circ (u \circ x) = 0$, $P(u)$ tedy není regulární, tudíž $\det P(u) = 0$. Pokud $\det P(u) \neq 0$ máme

$$P^{-1}(u)u = P(u^{-1})u = 2u^{-1} \circ (u^{-1} \circ u) - u^{-2} \circ u = u^{-1}$$

□

4 Maticové Jordanovy algebry

Popišme nejprve obecně metodu konstrukce Jordanovy algebry z asociativní algebry. Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{M}$ je asociativní algebra se součinem $(u, v) \mapsto uv$ na X. Definujme algebru $\mathcal{A} = (X, \circ)$ vztahem

$$u \circ v = \frac{1}{2}(uv + vu) \tag{42}$$

Zcela analogickými výpočty jako v první kapitole ověříme, že $\mathcal{A}$ je Jordanova algebra. Také dále vidíme, že mocniny v $\mathcal{M}$ a mocniny v $\mathcal{A}$ jsou shodné. Prvky v $\mathcal{A}$ komutují, tzn. $u\circ(v\circ z) = v \circ (u \circ z)$, $\forall z \in \mathcal{A}$ právě když $(uv - vu)z = z(uv - vu)$, neboli $uv - vu$ patří do *centra* $\mathcal{M}$. Kvadratická reprezentace je dána vztahem $P(u)v = 2u \circ (u \circ v) - u^2 \circ v = uvu$. Pokud je c jednotka v $\mathcal{M}$, platí $u \circ c = \frac{1}{2}(uc + cu) = u$, takže c je jednotka i v $\mathcal{A}$. Pokud existuje v *inverzní prvek* k u v $\mathcal{M}$, to znamená $uv = vu = c$, je díky asociativitě $\mathcal{M}$ jednoznačně určen.

Tvrzení 4.1. Inverzní prvek v $\mathcal{M}$ existuje, právě když existuje inverzní prvek v $\mathcal{A}$. Tyto dva inverzní prvky si jsou rovny.

Důkaz. $(\Rightarrow)$:Nechť pro $v \in \mathcal{M}$ platí $uv = vu = c$. Pak u, v komutují a platí $u \circ v = c$, takže v je inverzní prvek k u v $\mathcal{A}$.
$(\Leftarrow)$: Nechť existuje inverzní prvek v k u v $\mathcal{A}$. Pak platí $\det P(u) \neq 0, v = P^{-1}(u)u$. Dále máme

$$P(u)(c - uv) = u(c - uv) = u^2 - u(P(u)v) = u^2 - u^2 = 0$$

takže $uv = c$. Analogicky získáme $vu = c$. □

Uvažujme dále $\mathcal{M}$ jako asociativní algebru lineárních transformací na vektorovém prostoru X nad tělesem K. Protože dimenze n prostoru X je konečná, jsou prvky $\mathcal{M}$ reprezentovány $n \times n$ maticemi. Maticovou Jordanovu algebru, vzniklou z této asociativní algebry označme $\mathcal{U}$. Pro maticové algebry $\mathcal{U}$ můžeme najít také jiné vyjádření radikálu. Všimněme si, že jelikož mocniny prvků z $\mathcal{U}$ a z $\mathcal{M}$ jsou stejné, jsou pojmy nilpotentní, resp. idempotentní v $\mathcal{U}$ ekvivalentní se známými pojmy nilpotentní resp. idempotentní pro matice z $\mathcal{M}$. Za tím účelem dokažme nejprve

Lemma 4.2. Nechť $u, v, w \in \mathcal{U}$. Položme $z = u \circ (v \circ w) - (u \circ v) \circ w$. Pak $\operatorname{tr} z = 0$.

Důkaz. Máme

$$4u \circ (v \circ w) = u(vw + wv) + (vw + wv)u, \quad 4(u \circ v) \circ w = (uv + vu)w + w(uv + vu)$$

takže $4z = uwv + vwu - vuw - wuv = (uw)v - v(uw) + v(wu) - (wu)v$. Protože platí $\operatorname{tr} UV = \operatorname{tr} VU$ dostáváme $\operatorname{tr}[(uw)v - v(uw)] = \operatorname{tr}[v(wu) - (wu)v] = 0$. □

Věta 4.3. Platí

$$rad\, \mathcal{U} = \{a \in \mathcal{U} \mid \operatorname{tr}(a \circ u) = 0,\ \forall\, u \in \mathcal{U}\} \tag{43}$$

Důkaz. Označme $\mathcal{L} := \{a \in \mathcal{U} \mid \operatorname{tr}(a \circ u) = 0,\ \forall\, u \in \mathcal{U}\}$.
$(\subset)$: Pokud $a \in rad\, \mathcal{U}$ pak podle věty (3.4) je $a \circ x$ pro každé $x \in \mathcal{U}$ nilpotentní matice, takže $\operatorname{tr}(a \circ x) = 0$.
$(\supset)$: Mějme $a, r \in \mathcal{L}$ a $\lambda \in K$. Pro $s := \lambda a + r$ dostaneme $\operatorname{tr}(x \circ s) = \lambda \operatorname{tr}(x \circ a) + \operatorname{tr}(x \circ r) = 0$, takže $\mathcal{L}$ je podprostor $\mathcal{U}$. Pro $y \in \mathcal{U},\ a \in \mathcal{L}$ položme $z := x \circ (y \circ a) - (x \circ y) \circ a$. Pak podle (4.2) platí $\operatorname{tr} z = 0$. Protože $a \in \mathcal{L}$, platí $0 = \operatorname{tr}((x \circ y) \circ a) = \operatorname{tr}(x \circ (y \circ a))$. Tudíž $\mathcal{L}$ je ideál v $\mathcal{U}$. Dále z definice $\mathcal{L}$ speciálně platí $\operatorname{tr}(a^{r-1} \circ a) = \operatorname{tr}(a^r) = 0,\ \forall k \geq 2$. Dokažme sporem, že pak a je nilpotentní. Pokud a není nilpotentní existuje podle (3.2) idempotentní $e \in K_m[a],\ e^2 = 0,\ e \neq 0$. Vlastní čísla takového e musí splňovat $\lambda^2 - \lambda = 0$, mohou to být tedy pouze nuly a jedničky. Z rovnosti $e(eq) = eq$ kde q je n-vektor, vidíme že jedno vlastní číslo je rovno 1. Takže $\operatorname{tr} e \neq 0$. Z výroku pro $\operatorname{tr} a^r$ ale vidíme, že $\operatorname{tr} w = 0,\ \forall w \in K_m[a]$, což je spor. Tudíž a je nilpotentní. Protože $\mathcal{L}$ je ideál, platí $a \circ x \in \mathcal{L}$ je nilpotentní pro všechna $x \in \mathcal{U}$. Tudíž opět podle (3.4) platí $a \in rad\, \mathcal{U}$. □

Příklad 1. Uvažme následující typy maticových algeber

1. Jordanova algebra všech komplexních, resp. reálných čtvercových matic řádu n nad tělesem $\mathbb{C}$, resp. $\mathbb{R}$.

2. Jordanova algebra všech komplexních hermitovských resp. reálných symetrických matic řádu n nad tělesem $\mathbb{R}$.

Poznamenejme k 2., že hermitovské, resp. symetrické matice sice netvoří asociativní algebru, ale podle první kapitoly víme, že se součinem $\circ$ přesto tvoří Jordanovu algebru. Úvahy o inverzním prvku a jednotce pro ně můžeme stejným způsobem zopakovat; dojdeme ke shodným výsledkům. Víme tedy, že algebry 1., 2. obsahují jednotkovou matici e a tato v nich tvoří jednotku. Také platí, že inverzní matice u^{-1} je inverzní prvek k u.
Dokažme, že maticové algebry $\mathcal{U}$ typu 1., 2. jsou *prosté*. Uvažujme ideál $\mathcal{I} \subset \mathcal{U},\ \mathcal{I} \neq \{0\}$. Označme matice, které mají na místě (i, i) na diagonále jedničku a jinde nuly, symbolem e_i. Pak zřejmě platí $e = e_1 + \cdots + e_n$. Protože $\mathcal{I}$ je nenulový existuje $a \neq 0,\ a \in \mathcal{I}$. Prvek a musí mít alespoň na jednom místě nenulový prvek, $a_{ij} \neq 0$. Nechť

(a) Alespoň jeden diagonální prvek a je nenulový - označme ho a_{ii}. Pak ideál $\mathcal{I}$ musí obsahovat také prvek

$$2e_i \circ (e_i \circ a) - e_i \circ a = \frac{1}{2}(e_i(e_i a + a e_i) + (e_i a + a e_i)e_i - e_i a - a e_i) = e_i a e_i$$

Obklad e_i znamená, že pouze na i-tém místě matice na diagonále zůstane nenulové číslo a_{ii}. To tedy znamená, že $\mathcal{I}$ musí obsahovat prvek e_i.

(b) Nyní předpokládejme $a_{ij} \neq 0,\ i \neq j$. Ideál $\mathcal{I}$ musí dále obsahovat prvek $e_i \circ (a \circ e_j)$. Protože platí $e_i e_j = 0,\ {e_i}^2 = e_i,\ i \neq j$, vypočteme

$$4e_i \circ (a \circ e_j) = e_i(a e_j + e_j a) + (a e_j + e_j a)e_i = e_i a e_j + e_j a e_i =: c$$

Všimněme si, že matice $e_i a e_j$ má nenulový pouze prvek na (i, j) místě. Vezměme nyní matici $d \in \mathcal{U}$, která má nenulové prvky pouze na místech $(i, j$ a (j, i). Poznamenejme, že prvky $d_{ij} \neq 0$ a $d_{ji} \neq 0$ musí pro 2. splňovat požadavky kladené na d. Ideál $\mathcal{I}$ musí dále obsahovat $d \circ c$. Výpočtem zjistíme

$$2d \circ c = (d_{ji} c_{ij} + c_{ji} d_{ij})(e_i + e_j)$$

To znamená, že ideál $\mathcal{I}$ obsahuje matici, která má některý diagonální prvek různý od nuly, stejně jako za (a); ideál $\mathcal{I}$ tedy obsahuje některé e_i.

Každý nenulový ideál tedy obsahuje některé e_i. Nyní pro libovolné $j = 1 \ldots n$ vezměme matici d. Ideál $\mathcal{I}$ potom obsahuje $2e_i \circ d = e_i d + d e_i = d$, takže také $d^2 = d_{ij} d_{ji}(e_i + e_j)$. Závěrem vidíme, že $\mathcal{I}$ obsahuje také všechna e_j, $j = 1 \ldots n$, tudíž obsahuje i $e_1 + \cdots + e_n = e$. Ideál $\mathcal{I}$ tedy obsahuje jednotku, takže $\mathcal{I} = \mathcal{U}$. Protože zřejmě podle (4.3) platí $rad\, \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$, musí být $rad\, \mathcal{U} = \{0\}$; $\mathcal{U}$ je tedy poloprostá. Algebra $\mathcal{U}$ neobsahuje žádný netriviální ideál a je tedy prostá.

Všimněme si ještě obecně vnoření reálných Jordanových algeber do komplexních. S náznakem tohoto postupu jsme se setkali v první kapitole, kde reálná Jordanova algebra $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ je vnořena do $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Nechť tedy $\mathcal{A} = (X, \circ)$ je reálná Jordanova algebra. Budeme postupovat zcela analogicky jako při vnoření reálných čísel do komplexních. Množinu uspořádaných dvojic $X \times X$ zapíšeme *symbolicky* ve tvaru

$$X(i) := \{x + iy \mid x, y \in X\}$$

Tento zápis samozřejmě naznačuje jak jsou definovány operace násobení komplexním číslem a sčítání vektorů. Tak vznikne komplexní vektorový prostor $X(i)$. Definujme nyní na $X(i)$ operaci $\circ_c$ vztahem

$$(x + iy) \circ_c (u + iv) = [x \circ u - y \circ v] + i[(y \circ u + x \circ v)]$$

Každou lineární transformaci T na X můžeme rozšířit na $X(i)$ takto

$$T(z) := Tx + iTy, \ z = x + iy \in X(i) \tag{44}$$

Pro $z = x + iy \in X(i)$ definujme lineární transformaci $L(z)$ na $X(i)$ vztahem

$$L(z) := L(x) + iL(y)$$

Nyní s využitím (44) pro $w = u + iv \in X(i)$ můžeme napsat

$$L(z)w = L(x)w + iL(y)w = L(x)(u+iv) + iL(y)(u+iv) = L(x)u + iL(x)v + i(L(y)u + iL(y)v) =$$

$$= L(x)u - L(y)v + i(L(x)v - L(y)u) = (x + iy) \circ_c (u + iv) = z \circ_c w$$

Nyní chceme ověřit komutativitu $\circ_c$ a vlastnost (J3) v definici Jordanovy algebry. Komutativitu ověříme snadno:

$$z \circ_c w = x \circ u - y \circ v + i((y \circ u) + (x \circ v)) = u \circ x - v \circ y + i((u \circ y) + (v \circ x) = w \circ_c z$$

Dále napišme rovnosti

$$L(z)L(z^2) = \big(L(x) + iL(y)\big)\big(L(x^2) - L(y^2) + 2iL(x \circ y)\big) =$$
$$= L(x)L(x^2) - L(x)L(y^2) - 2L(y)L(x \circ y) + i\big(2L(x)L(x \circ y) + L(y)L(x^2) - L(y)L(y^2)\big)$$

a analogicky

$$L(z^2)L(z) = \big(L(x^2) - L(y^2) + 2iL(x \circ y)\big)\big(L(x) + iL(y)\big) =$$
$$= L(x^2)L(x) - L(y^2)L(x) - 2L(x \circ y)L(y) + i\big(2L(x \circ y)L(x) + L(x^2)L(y) - L(y^2)L(y)\big)$$

Pokud vezmeme v úvahu rovnost $L(x)L(x^2) = L(x^2)L(x)$ a rovnost (26) platné v $\mathcal{A}$, vidíme, že pro všechna $z \in X(i)$ platí $L(z)L(z^2) = L(z^2)L(z)$, takže $\mathcal{A}(i) = (X(i), \circ_c)$ je komplexní Jordanova algebra.

5 Automorfismy a gradace

Mějme $\mathcal{A}$ Jordanovu algebru. Regulární lineární operátor W na $\mathcal{A}$ se nazývá **automorfismus** Jordanovy algebry, právě když pro všechna $x, y \in \mathcal{A}$ platí

$$W(x \circ y) = Wx \circ Wy \tag{45}$$

Pokud je $\mathcal{A}$ reálná, můžeme automorfismus W na $\mathcal{A}$ rozšířit podle vztahu (44) na $\mathcal{A}(i)$. Ukažme, že platí

Tvrzení 5.1. Regulární lineární zobrazení W je automorfismus na $\mathcal{A}$, právě když W je automorfismus na $\mathcal{A}(i)$.

Důkaz. Pokud pro $z = x+iy$, $w = u+iv$ rozepíšeme rovnost $W(z \circ_c w) = Wz \circ_c Ww$ získáme

$$W(x\circ u) - W(y \circ v) + i[W(y\circ u) + W(x \circ v)] = Wx\circ Wu - Wy \circ Wv + i[Wy\circ Wu + Wx \circ Wv]$$

Takže pokud W je automorfismus na $\mathcal{A}$ rovnost platí a W je automorfismus na $\mathcal{A}(i)$. Obráceně, porovnáním reálné a imaginární části v této rovnici máme

$$W(x \circ u) - W(y \circ v) = Wx \circ Wu - Wy \circ Wv$$

$$W(y \circ u) + W(x \circ v) = Wy \circ Wu + Wx \circ Wv$$

Pokud zvolíme $x = y$ a tyto rovnice sečteme dostaneme $W(x \circ u) = Wx \circ Wu$, $\forall x, u \in \mathcal{A}$. $\square$

Příklad 2. Nechť A je reálná Jordanova algebra všech symetrických reálných matic řádu n. Zaveďme lineární zobrazení W_r na $\mathcal{A}$ pro $x \in \mathcal{A}$ vztahem

$$W_r x = r x r^T$$

kde r je libovolná reálná regulární matice řádu n a r^T značí její transpozici. Rozepsáním vztahu (45) pro W_r máme

$$r(xy + yx)r^T = rxr^T ryr^T + ryr^T rxr^T$$

Takže W_r je automorfismus, právě tehdy když platí $rr^T = e$ tzn. r je ortogonální. Lze dokázat, že všechny automorfismy na $\mathcal{A}$ mají tento tvar, neboli pro každý automorfismus W na $\mathcal{A}$ existuje r ortogonální tak, že $W = W_r$. Důkaz viz [3]. Prostor $\mathcal{A}(i)$ označme $\mathcal{U}_s$. Podle (44) nyní také víme jak vypadají všechny automorfismy na $\mathcal{U}_s$.

Nechť $\mathcal{A}$ je prostá Jordanova algebra. Víme, že neexistuje její rozklad na direktní součet netriviálních podalgeber. Zaveďme tedy obecnější pojem. Jordanova algebra $\mathcal{A}$ je **gradací** prostorů $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_r$, jestliže je direktní součet vektorových prostorů $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_r$ a platí

$$(\forall i, j \in \hat{r})(\exists k \in \hat{r})(\mathcal{A}_i \circ \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_k)$$

Gradaci zapisujeme symbolicky $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_r$. Také definujme komutativní operaci $+$ mezi indexy $i, j \in \hat{r}$ vztahem $i + j := k$. Mezi $\mathcal{A}_i$ také triviálně započítáváme nulový prostor. Gradaci algebry $\mathcal{A}$ můžeme získat pomocí automorfismů na $\mathcal{A}$. Nechť W je diagonalizovatelný automorfismus a $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_r$ jsou jeho vlastní podprostory příslušné vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Pak pro $u_i \in \mathcal{A}_i, u_j \in \mathcal{A}_j$ platí

$$W(u_i \circ u_j) = Wu_i \circ Wu_j = \lambda_i \lambda_j (u_i \circ u_j)$$

Z toho vidíme, že $u_i \circ u_j$ leží v nějakém vlastním podprostoru W příslušnému vlastnímu číslu $\lambda_i \lambda_j$, nebo $u_i \circ u_j = 0$. Z tohoto a z faktu, že W je diagonalizovatelný plyne, že $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_r$ je gradace $\mathcal{A}$. Pokud nyní vezmeme automorfismus V, který komutuje s W pak pro $u_i \in \mathcal{A}_i$ platí $W(Vu_i) = VWu_i = \lambda_i Vu_i$. Odtud vidíme, že $V\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_i$. Případné vlastní vektory $V \in \mathcal{A}_i$ mohou gradaci **zjemnit**. To znamená, že více podprostorů, v gradaci určené automorfismem V, leží v nějakém $\mathcal{A}_i$. Tak vznikne nová gradace

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_{i-1} \oplus \mathcal{A}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_{i_k} \oplus \mathcal{A}_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_r$$

V každé prosté Jordanově algebře existuje jednotka. Pokud c je jednotka v $\mathcal{A}$ a W je automorfismus na $\mathcal{A}$, pak platí $Wu = W(c \circ u) = Wc \circ Wu$, $\forall u \in \mathcal{A}$. Z jednoznačnosti c plyne pro každý automorfismus vztah $Wc = c$. Odtud vidíme, že jednotka v $\mathcal{A}$ je vlastní vektor všech automorfismů příslušný vlastnímu číslu 1, a je tedy vždy obsažena v nějakém $\mathcal{A}_i$ v gradaci získané pomocí automorfismů. Speciálně pokud všechny podprostory $\mathcal{A}_i$ budou jednodimenzionální, tzv. **nejjemnější** gradace, bude zde vystupovat podprostor určený c.

Příklad 3. Zkoumejme gradace Jordanovy algebry $\mathcal{U}_s$ z příkladu 2. Po úvaze dojdeme k závěru, že prostor $\mathcal{U}_s$ má samozřejmě tento tvar

$$\mathcal{U}_s = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

kde součin $\circ$ prvků $u, v \in \mathcal{U}_s$ je dán vztahem (42). Automorfismy na $\mathcal{U}_s$ můžeme rozdělit do dvou skupin podle tvaru ortogonální matice r.

(1)

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ resp. } r_1' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ resp. } r_2' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$r_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Poznamenejme, že automorfismy určené maticemi r_i a $r_i^{'}$, $i = 1, 2$ jsou stejné. V zápisu gradace píšeme pouze bázi prostorů $\mathcal{A}_i$, vynecháváme tedy znak lineárního obalu. Automorfismus určený maticí r_2 dává gradaci

$$\mathcal{G}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Výpočtem zjistíme, že automorfismy v první skupině komutují a postupem výše uvedeným tak určují nejjemnější gradaci

$$\mathcal{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Automorfismy v první skupině jsou diagonalizovatelné i nad tělesem $\mathbb{R}$; tato gradace by existovala i pro reálný případ. Naproti tomu automorfismy v druhé skupině mají nezávisle na hodnotě φ tři jednonásobná vlastní čísla, kromě jedničky s nenulovou imaginární částí. Gradace reprezentující tento případ má tvar

$$\mathcal{G}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Automorfismy na $\mathcal{U}_s$ evidentně zachovávají nulovost nebo nenulovost determinantu zobrazované matice. Protože druhé dvě matice v gradaci $\mathcal{G}_1$ jsou regulární a v $\mathcal{G}_2$ jsou singulární tyto dvě gradace nejsou *izomorfní*, tzn. neexistuje automorfismus převádějící jednu v druhou.

Zabývejme se nyní způsobem, jak z dané Jordanovy algebry udělat novou, neizomorfní algebru. Jedna možnost pomocí tzv. **graduovaných kontrakcí**. Mějme prostou Jordanovu algebru $\mathcal{A} = (X, \circ)$ a její gradaci $\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_r$. Definujme nový součin $\circ_n$ pro $u \in \mathcal{A}_i, v \in \mathcal{A}_j$ vztahem

$$u \circ_n v := \varepsilon_{ij}(u \circ v) \tag{46}$$

kde ε_{ij} budeme volit jedničku nebo nulu. Pokud má být $\mathcal{A}_n = (X, \circ_n)$ Jordanova algebra, musí být splněna komutativita součinu $\circ_n$ a axiom (J3). To znamená, že platí

$$\varepsilon_{ij}(u \circ v) = u \circ_n v = v \circ_n u = \varepsilon_{ji}(v \circ u) = \varepsilon_{ji}(u \circ v)$$

takže pokud $u \circ v \neq 0$ máme $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Axiom (J3) má pro součin $\circ_n$ tvar

$$u \circ_n [(u \circ_n u) \circ_n v] = (u \circ_n u) \circ_n (u \circ_n v)$$

Pokud tento vzorec rozepíšeme symbolicky pro prostory $\mathcal{A}_i$ s použitím operace $+$ dostaneme

$$\varepsilon_{ii}\varepsilon_{i+i,j}\varepsilon_{i,(i+i)+j}\mathcal{A}_{i+[(i+i)+j]} = \varepsilon_{ii}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{i+i,i+j}\mathcal{A}_{(i+i)+(i+j)} \tag{47}$$

Příklad 4. Prozkoumejme konkrétně tyto podmínky pro algebru $\mathcal{U}_s$ s gradacemi $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ z příkladu 3. Pro případ $\mathcal{G}_0 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ máme pravidla pro operaci $+$: $1+2=2,\ 1+1=1,\ 2+2=1$; jsou čtyři možnosti kombinace indexů i,j ve vzorci (47). Vyhodnocením získáme jednu netriviální podmínku

$$\varepsilon_{12}\varepsilon_{22} = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}$$

K tomu přistupuje z komutativity podmínka $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$. Celkem je pět možností (včetně dvou triviálních) jak může matice (ε_{ij}) vypadat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V případě gradace $\mathcal{G}_1 = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3$ dostaneme pravidla pro operaci $+$:$1+1=1,\ 2+2=1,\ 3+3=1\ ,2+3=0,\ 1+2=2,\ 1+3=3$. Vyhodnocením (47) získáme *dvě* netriviální podmínky

$$\varepsilon_{22}\varepsilon_{21}\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}\varepsilon_{21}\varepsilon_{12},\ \varepsilon_{33}\varepsilon_{13} = \varepsilon_{33}\varepsilon_{11}$$

K tomu další dvě z komutativity

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12},\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$$

Nakonec v případě gradace $\mathcal{G}_2 = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3$ máme pravidlo pro $+$:$1+1=1,\ 1+2=2,\ 1+3=3,\ 2+2=0,\ 3+3=0,\ 2+3=1$. Vyhodnocením (47) nedostaneme *žádnou* netriviální podmínku. Pouze z komutativity dostaneme *tři* podmínky tvaru

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12},\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31},\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$$

Reference

[1] G. G. Emch: Mathematical and Conceptual Foundations of 20th Century Physics, North Holland, Amsterdam 1984

[2] G. G. Emch: Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Wiley - Interscience, New York 1972

[3] M. Koecher: The Minnesota Notes on Jordan Algebras and Their Applications, Springer, New York 1999 (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1710)

[4] H. Braun, M. Koecher: Jordan-Algebren, Springer, Berlin 1966

[5] T. A. Springer, F. D. Veldkamp: Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups, Springer, Berlin 2000 [B 16037]

[6] A. A. Albert: On Jordan Algebras of Linear Transformations, Trans. Am. Math. Soc. 59 (1946), 524-555

Obsah

1 Úvod **1**

2 Definice Jordanovy algebry **2**

3 Vlastnosti Jordanovy algebry **7**

4 Maticové Jordanovy algebry **14**

5 Automorfismy a gradace **18**

Odkazy **21**

Obsah **22**