Výzkumný úkol:
Speciální gradované kontrakce Lieovy algebry $sl(3,\mathbb{C})$

Jiří Hrivnák

23. srpna 2002

1 Úvod

V této práci se budeme věnovat problému gradovaných kontrakcí algebry $sl(3,\mathbb{C})$. Především se soustředíme na tzv. Pauliho gradaci $sl(3,\mathbb{C})$ a její gradované kontrakce. Základem pro naší úlohu je práce [1] z roku 1989. V práci [7] byly nalezeny gradované kontrakce pro prosté Lieovy algebry nízkých dimenzí. Systémy rovnic, které tehdy bylo nutno řešit nebyly díky nízké dimenzi těchto algeber příliš složité. Dimenze algebry $sl(3,\mathbb{C})$ je ale osm a je nutno řešit soustavu 48 kvadratických rovnic. Proto je nutno hledat jakékoliv zjednodušení, které by usnadnilo řešení tohoto systému. Fundamentální k tomuto účelu je proto práce [6], kde byla nalezena grupa symetrie Pauliho gradace, ze které uvidíme symetrie systému rovnic.

Nejprve zavedeme pojmy gradace a gradované kontrakce. Potom budeme klasifikovat všechny tzv. jemné gradace pro prosté Lieovy algebry. Dále se zaměříme na algebru $sl(n,\mathbb{C})$ a její Pauliho gradace. Po základních definicích gradovaných kontrakcí budeme uvažovat gradované kontrakce $sl(3,\mathbb{C})$ odpovídající Pauliho gradaci. Napíšeme systém rovnic, který je v tomto případě nutno řešit. Pak se budeme snažit co nejvíce systém zjednodušit a za použití grupy symetrie ho co nejelegantněji vyřešit. Nelze tvrdit, že uvedený postup využívající relace ekvivalence indukované grupou symetrie na neznámých je právě tím nejjednodušším, přesto vede k cíli a značně zjednodušuje nutný výpočet. Navíc znalost systému řešení může pomoci k hledání jednodušších postupů. Na závěr alespoň začneme diskusi jednotlivých řešení, jejich normalizovatelnost a důsledky, které z toho plynou pro gradované kontrakce.

2 Definice gradací Lieových algeber

Uveďme nejprve základní pojmy a definice týkající se gradace. Uvažujme $\mathcal{L}$ poloprostou Lieovu algebru nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Dimenze $\mathcal{L}$ může být konečná i nekonečná. Rozklad Lieovy algebry na direktní součet jejích podprostorů $\mathcal{L}_i, i \in I$

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i \tag{1}$$

se nazývá **gradace** Lieovy algebry $\mathcal{L}$, právě když platí

$$(\forall i, j \in I)(\exists k \in I)([\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subseteq \mathcal{L}_k). \tag{2}$$

Symbolem $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j]$ zde rozumíme lineární podprostor generovaný prvky, které vzniknou komutací všech prvků z $\mathcal{L}_i$ s prvky z $\mathcal{L}_j$. Podprostory $\mathcal{L}_i, i \in I$ se pak nazývají **gradační podprostory**.

Gradace Lieovy algebry těsně souvisejí s grupou jejích automorfismů. Připomeňme, že regulární lineární zobrazení g na $\mathcal{L}$, tzn. $g \in GL(\mathcal{L})$, je **automorfismus** na $\mathcal{L}$ pokud platí

$$g\,[X, Y] = [gX, gY] \tag{3}$$

pro všechna $X, Y \in \mathcal{L}$. Označme symbolem $\operatorname{Aut}\mathcal{L}$ grupu všech automorfismů na $\mathcal{L}$.

Některé gradace jsou mezi sebou vzájemně úzce spojeny. Pokud $\Gamma : \mathcal{L} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i$ je gradace $\mathcal{L}$, pak pro libovolný automorfismus $g \in \operatorname{Aut}\mathcal{L}$ je také

$$\tilde{\Gamma} : \mathcal{L} = \bigoplus_{i \in I} g(\mathcal{L}_i)$$

gradace $\mathcal{L}$. Takovéto dvě gradace Γ a $\tilde{\Gamma}$ se nazývají **ekvivalentní**.

Gradace $\Gamma : \mathcal{L} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i$ je **zjemnění** gradace $\tilde{\Gamma} : \mathcal{L} = \bigoplus_{j \in J} \tilde{\mathcal{L}}_j$ pokud pro všechna $i \in I$ existuje $j \in J$ takové, že $\mathcal{L}_i \subseteq \tilde{\mathcal{L}}_j$. Zjemnění se nazývá **vlastní** pokud je mohutnost množiny I větší než mohutnost množiny J. Gradace, pro kterou neexistuje vlastní zjemnění se nazývá **jemná**. Pokud jsou všechny gradační podprostory jednodimenzionální nazývá se gradace **nejjemnější** .

Vlastnost (2) definuje binární operaci na množině I. Pokud je $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = \{0\}$, můžeme k zvolit libovolně. V [1] je dokázáno, že tuto indexovou množinu I s touto binární operací lze vnořit do abelovské *aditivní* grupy G. Pak samozřejmě platí

$$[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subseteq \mathcal{L}_{i+j} \quad \text{kde } j, k, j+k \in G. \tag{4}$$

Pak říkáme, že Lieova algebra je gradovaná grupou G, ***G*-gradovaná**. Grupě G říkáme **gradační grupa**.

Vezměme nyní $g \in \operatorname{Aut}\mathcal{L}$ *diagonalizovatelný*. Nechť X a Y jsou vlastní vektory g odpovídající (určitě nenulovým) vlastním číslům λ a μ, takže platí

$$g\,X = \lambda X, \quad g\,Y = \mu Y.$$

Pak vidíme, že

$$g\,[X,Y] = [gX,gY] = \lambda\mu[X,Y].$$

tj. $[X,Y]$ je buď vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda\mu$, nebo nulový vektor. Tedy platí

$$[\mathcal{L}_\lambda, \mathcal{L}_\mu] \subseteq \mathcal{L}_{\lambda\mu}.$$

To znamená, že rozklad $\mathcal{L}$ na direktní součet vlastních podprostorů diagonalizovatelného automorfismu g je gradace, tj.

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Ker}(g - \lambda_i\,\mathrm{id}), \tag{5}$$

kde I je množina vlastních hodnot g. Pokud vezmeme další diagonalizovatelný automorfismus h, který komutuje s g, existují společné vlastní vektory (resp. podprostory), které určují novou (stejnou nebo jemnější) gradaci. Tímto způsobem každá množina diagonalizovatelných vzájemně komutujících automorfismů $g_1, g_2, \ldots, g_m \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{L}$ určuje gradaci.

Maximální ve smyslu inkluze množina diagonalizovatelných vzájemně komutujících automorfismů je podgrupa v $\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}$ a nazývá se **MAD-grupa** (**m**aximal **a**belian group of **d**iagonable automorphisms). Obráceně daná gradace (2) určuje podgrupu $\mathrm{Diag}\,\Gamma \subset \mathrm{Aut}\,\mathcal{L}$ obsahující takové automorfismy $g \in GL(\mathcal{L})$, které zachovávají Γ, tzn. $g(\mathcal{L}_i) = \mathcal{L}_i$, a navíc jsou diagonální,

$$gX = \lambda_i X \quad \forall X \in \mathcal{L}_i,\ i \in I,$$

kde $\lambda_i \neq 0$ závisí pouze na g a $i \in I$. V [1] je dokázána důležitá věta, která pro prosté Lieovy algebry determinuje všechny jejich jemné gradace.

Věta 2.1. Nechť $\mathcal{L}$ je konečnědimenzionální prostá Lieova algebra nad algebraicky uzavřeným tělesem charakteristiky nula. Pak gradace Γ je jemná, právě když $\mathrm{Diag}\,\Gamma$ je rovna některé MAD-grupě.

Klasifikaci jemných gradací prostých Lieových algeber jsme tím převedli na klasifikaci MAD-grup v $\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}$. Protože klasické prosté Lieovy algebry jsou podalgebrami $gl(n,\mathbb{C})$ vyšetřujme nyní MAD-grupy v grupě $\mathrm{Aut}\,gl(n,\mathbb{C})$. Po přidání dalších podmínek z nich obdržíme MAD-grupy ostatních algeber. Automorfismy $gl(n,\mathbb{C})$ mohou být napsány jako kombinace automorfismů *vnějších* a *vnitřních*. Pro všechna $X \in gl(n,\mathbb{C})$,

vnitřní automorfismy mají tvar

$$\mathrm{Ad}_A\,X = A^{-1}XA \quad \text{pro} \quad A \in GL(n,\mathbb{C}); \tag{6}$$

vnější automorfismy mají tvar

$$\mathrm{Out}_A\,X = -(A^{-1}XA)^T = \mathrm{Out}_I \mathrm{Ad}_A X, \quad \text{kde} \quad A \in GL(n,\mathbb{C}). \tag{7}$$

Vlastnosti automorfismů v MAD-grupách budeme chtít dále převést na vlastnosti odpovídajících matic v $GL(n,\mathbb{C})$. Vlastnosti vnitřních a vnějších automorfismů jsou shrnuty v následujícím tvrzení z [2]:

Tvrzení 2.2. Nechť $A, B, C \in GL(n,\mathbb{C})$. Pak platí

(1) Ad_A je diagonalizovatelný automorfismus, právě když je matice A diagonalizovatelná.

(2) Vnitřní automorfismy komutují, tj. $\mathrm{Ad}_A\ \mathrm{Ad}_B = \mathrm{Ad}_B\ \mathrm{Ad}_A$, právě když existuje $q \in \mathbb{C}$ takové, že

$$AB = qBA, \quad \text{kde } q \text{ splňuje } \quad q^n = 1. \tag{8}$$

(3) Out_C je diagonalizovatelný, právě když matice $C(C^T)^{-1}$ je diagonalizovatelná.

(4) Vnitřní a vnější automorfismy komutují, tzn. $\mathrm{Ad}_A\ \mathrm{Out}_C = \mathrm{Out}_C\ \mathrm{Ad}_A$, právě když

$$ACA^T = rC$$

Protože $\mathrm{Ad}_{\alpha A} = \mathrm{Ad}_A$ pro $\alpha \neq 0$, lze číslo r normovat k 1.

3 Pauliho gradace

Předpokládejme, že $\mathcal{G} \subset \operatorname{Aut} gl(n, \mathbb{C})$ je MAD-grupa bez vnějšího automorfismu. Uvažme množinu odpovídajících matic v $GL(n, \mathbb{C})$

$$G := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \operatorname{Ad}_A \in \mathcal{G}\} \tag{9}$$

Pak samozřejmě platí

$$\mathcal{G} = \operatorname{Ad} G := \{\operatorname{Ad}_A \mid A \in G\} \tag{10}$$

Podle bodů (1) a (2) tvrzení 2.2 je G maximální množina diagonalizovatelných matic z $GL(n, \mathbb{C})$ taková, že pro všechna $A, B \in G$ je $AB = q(A, B)BA$. To nás vede k následující definici. Podgrupa diagonalizovatelných matic $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ se nazývá **Ad-grupa** pokud

(i) Pro všechna $A, B \in G$ je komutátor $q(A, B) = ABA^{-1}B^{-1}$ nenulový násobek jednotkové matice, tzn. leží v centru $Z = \{\alpha I_n | \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} \subset GL(n, \mathbb{C})$

(ii) G je maximální ve smyslu inkluze, tzn. $(\forall M \notin G)(\exists A \in G)(q(A, M) \notin Z)$.

Každé MAD-grupě v $\operatorname{Aut} gl(n, \mathbb{C})$ bez vnějšího automorfismu, které nás dále budou především zajímat, přísluší podle vztahu (9) Ad-grupa v $GL(n, \mathbb{C})$ a analogicky obráceně podle vztahu (10) každé Ad-grupě v $GL(n, \mathbb{C})$ přísluší MAD-grupa bez vnějšího automorfismu.

Abychom mohli popsat Ad-grupy v $GL(n, \mathbb{C})$ zaveďme následující označení. Podgrupu $GL(n, \mathbb{C})$ tvořenou regulárními diagonálními maticemi označme $D(n)$. Definujme také speciální $k \times k$ matice

$$Q_k = \operatorname{diag}(1, \omega_k, \omega_k^2, \dots, \omega_k^{k-1}),$$

kde $\omega_k = \exp(2\pi i/k)$, a matici

$$P_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro $k = 1$ položme $Q_1 = P_1 = (1)$. Pro matice P_k, Q_k platí

$$P_k Q_k = \omega_k Q_k P_k \tag{11}$$

takže splňují rovnost (8) pro $q = \omega_k$. Konečnou podgrupu $GL(k, \mathbb{C})$ řádu k^3 definovanou

$$\Pi_k = \{\omega_k^l Q_k^i P_k^j \mid i, j, l = 0, 1, \dots, k-1\}. \tag{12}$$

nazveme **Pauliho grupou**. Ad-grupy v $GL(n, \mathbb{C})$ charakterizuje následující věta z [3].

Věta 3.1. *$G \subset GL(n,\mathbb{C})$ je Ad-grupa, právě když G je konjugovaná k některé z konečných grup*

$$\Pi_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes \Pi_{\pi_s} \otimes D(n/\pi_1 \dots \pi_s),$$

kde $\pi_1, \dots, \pi_s$ jsou mocniny prvočísel a jejich součin $\pi_1 \dots \pi_s$ dělí n, s výjimkou případu $\Pi_2 \otimes \cdots \otimes \Pi_2 \otimes D(1)$.

Poznámka 1. Podgrupy $H_1, H_2 \subset G$ jsou konjugované pokud existuje $g \in G$ takové, že $H_1 = gH_2g^{-1} = \{ghg^{-1} \,|\, h \in H_2\}$. Konjugované Ad-grupy přísluší konjugovaným MAD-grupám a ty dávají ekvivalentní gradace.

Nás bude zajímat případ, kdy Ad-grupa je právě Π_n. Příslušná MAD-grupa v Aut $gl(n,\mathbb{C})$ je zřejmě řádu n^2 (matice lišící se konstantou dávají podle (6) stejné automorfismy)

$$\mathrm{Ad}\,\Pi_n = \{\mathrm{Ad}_{Q^iP^j} | (i,j) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n\}. \tag{13}$$

Nejjemnější gradace $gl(n,\mathbb{C})$ příslušná této MAD-grupě je podle [5] dána

$$gl(n,\mathbb{C}) = \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n} \mathcal{L}_{rs}, \tag{14}$$

kde $\mathcal{L}_{rs} := \{X_{rs}\}_{lin}$ a

$$X_{rs} = {Q_n}^r {P_n}^s \tag{15}$$

Tato gradace je nejjemnější, tzn. všechny podprostory jsou jednodimenzionální a je jich $n^2 = \dim gl(n,\mathbb{C})$. O tom, že (14) je gradace se přesvědčíme přímým výpočtem (vynecháváme explicitní značení dimenze u matic P_n, Q_n i symbol pro operaci *mod* n)

$$[X_{rs}, X_{r's'}] = Q^rP^sQ^{r'}P^{s'} - Q^{r'}P^{s'}Q^rP^s = (\omega^{sr'} - \omega^{rs'})X_{r+r',s+s'} \tag{16}$$

kde jsme použili, že vzhledem ke vztahu (11) platí

$$P^sQ^r = \omega^{sr}Q^rP^s \tag{17}$$

Takže naše gradační grupa G je rovna aditivní abelovské grupě $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ s operací součtu po složkách (*mod* n). Zásadní pro nás je si všimnout, že výsledkem operace (16) není nikdy matice X_{00} ; podmínky $r + r' \; mod\, n = 0, \;\; s + s' \; mod\, n = 0$ implikují v rovnosti (16)

$$[X_{rs}, X_{-r-s}] = 0 \cdot X_{00} = \{0\}.$$

Protože pro všechny matice X_{rs} kromě X_{00} platí

$$\mathrm{tr}\, X_{rs} = 0, \;\; (r,s) \neq (0,0)$$

můžeme tvrdit, že těchto $n^2 - 1$ matic tvoří gradaci algebry $sl(n,\mathbb{C})$:

$$sl(n,\mathbb{C}) = \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n\setminus(0,0)} \mathcal{L}_{rs} \tag{18}$$

4 Gradované kontrakce Lieových algeber

Zabývejme se nejprve obecně definicí gradované kontrakce. Mějme Lieovu algebru $\mathcal{L}$ gradovanou grupou G, tzn. platí vztahy (1) a (4). Pro klasifikaci gradovaných kontrakcí se nám bude hodit následující značení; určuje, který komutátor $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j]$ je nulový nebo nenulový. Tuto informaci nese matice $\kappa := (\kappa_{jk})$ definovaná

$$\begin{aligned} \kappa_{jk} = 0 \quad \text{pokud} \quad [\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = \{0\}, \\ \kappa_{jk} = 1 \quad \text{pokud} \quad [\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \neq \{0\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Matice κ je symetrická a samozřejmě také platí

$$[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subseteq \kappa_{jk}\mathcal{L}_{i+j} \quad \text{kde } j, k, j+k \in G. \tag{20}$$

Gradovanou Lieovu algebru (1) s vlastností (20) pak budeme explicitně značit $\mathcal{L}^\kappa$.

Definujme nyní na $\mathcal{L}$ (resp. na odpovídajícím vektorovém prostoru V) zobrazení $[\ ,\ ]_n$, které je bilineární a platí předpis

$$[x, y]_n := \gamma_{ij}[x, y] \quad \text{pro} \quad x \in \mathcal{L}_i,\ y \in \mathcal{L}_j, \gamma_{ij} \in \mathbb{C}. \tag{21}$$

Z bilinearity $[\ ,\ ]_n$ plyne, že jej podmínka (21) určuje na celém V. Dále vidíme, že platí

$$[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j]_n = \gamma_{ij}[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subseteq \gamma_{ij}\kappa_{ij}\mathcal{L}_{i+j} = \varepsilon_{ij}\mathcal{L}_{i+j}, \tag{22}$$

kde jsme zavedli tzv. kontrakční parametry ε_{ij} vztahem (nesčítá se)

$$\varepsilon_{ij} := \gamma_{ij}\kappa_{ij} \tag{23}$$

Pokud je $\mathcal{L}^\varepsilon := (V, [\ ,\ ]_n)$ Lieova algebra, nazývá se **gradovaná kontrakce** algebry $\mathcal{L}^\kappa$. Můžeme tvrdit, že kontrahování zachovává gradaci, protože pak evidentně také platí (nový komutátor se liší o násobek), že

$$\mathcal{L}^\varepsilon = \bigoplus_{i \in G} \mathcal{L}_i. \tag{24}$$

je gradace $\mathcal{L}^\varepsilon$.

Pokud má být $\mathcal{L}^\varepsilon$ Lieova algebra, musí parametry γ_{ij} resp. ε_{ij} splňovat jisté podmínky. Jak jsme řekli, musí být matice κ symetrická (z antisymetričnosti $[\ ,\ ]$). Především zde máme další podmínky pro $[\ ,\ ]_n$ vyplývající s Jacobiho identity. Tyto podmínky a jejich řešení budou tvořit těžiště naší další práce.

Definujme zvláštní maticové skládání $\bullet$ po složkách, tj. pro dvě matice $\kappa = (\kappa_{ij}), \gamma = (\gamma_{ij})$ definujme matici $\varepsilon := (\varepsilon_{ij})$ vztahem (23), píšeme $\varepsilon = \kappa \bullet \gamma$. Pak zřejmě také matice γ, ε jsou symetrické, tzn. platí

$$\kappa^T = \kappa, \quad \gamma^T = \gamma, \quad \varepsilon^T = \varepsilon \tag{25}$$

Vhodná matice ε určuje tedy gradovanou kontrakci. Samozřejmě bychom chtěli aby matice ε měla co nejjednodušší tvar, např. skládala se z jedniček a nul (pokud je to možné), a přitom výsledná gradovaná kontrakce byla izomorfní s původní. Neboli chceme vyšetřit třídy izomorfních gradovaných kontrakcí. To je (zatím) obecně pro nás neřešitelná úloha. Formulovat ji ale můžeme již nyní: dvě gradované kontrakce Lieovy algebry $\mathcal{L}^{\varepsilon}$ a $\mathcal{L}^{\widetilde{\varepsilon}}$ budou izomorfní, pokud existuje $f \in GL(\mathcal{L})$ takové, že

$$f\,[x_i, x_j]_n = [f x_i, f x_j]_{\widetilde{n}} \quad \text{pro všechna} \quad x_i \in \mathcal{L}_i,\ x_j \in \mathcal{L}_j, \tag{26}$$

kde

$$\begin{array}{ll} [x_i, x_j]_n = \gamma_{ij}[x_i, x_j] & \varepsilon = \gamma \bullet \kappa \\ [x_i, x_j]_{\widetilde{n}} = \widetilde{\gamma}_{ij}[x_i, x_j] & \widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\gamma} \bullet \kappa \end{array} \tag{27}$$

Příklad 1. Uveďme jednoduchý, ale důležitý příklad takového izomorfismu. Pokud vezmeme diagonální zobrazení, tj. zobrazení h definované

$$h x_i = a_i x_i \quad i \in G,\ x_i \in \mathcal{L}_i,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_i \neq 0, \tag{28}$$

pak $h \in GL(V)$ a z rovnosti ekvivalentní (26) máme, že

$$\gamma_{ij}[x_i, x_j] = [x_i, x_j]_n = h^{-1}[h x_i, h x_j]_{\widetilde{n}} = \widetilde{\gamma}_{ij}\frac{a_i a_j}{a_{i+j}}[x_i, x_j] \quad \text{pro všechna} \quad x_i \in \mathcal{L}_i,\ x_j \in \mathcal{L}_j. \tag{29}$$

Z čehož vidíme, že pokud pro parametry $\gamma_{ij}, \widetilde{\gamma}_{ij}$ platí $\gamma_{ij} = \widetilde{\gamma}_{ij}\frac{a_i a_j}{a_{i+j}}$ resp. pro odpovídající matice ε rovnost

$$\varepsilon = \alpha \bullet \widetilde{\varepsilon} \quad \text{kde} \quad \alpha := (\alpha_{ij});\ \alpha_{ij} = \frac{a_i a_j}{a_{i+j}} \tag{30}$$

pak vztah (26) platí pro zobrazení h, tj. kontrakce $\mathcal{L}^{\varepsilon}$ a $\mathcal{L}^{\widetilde{\varepsilon}}$ jsou izomorfní. Pak říkáme, že kontrakce ε vznikla *renormalizací* kontrakce $\widetilde{\varepsilon}$.

Pokud tedy máme danou algebru $\mathcal{L}$ a její pevnou gradaci $\mathcal{L}^{\kappa}$, ptejme se jak vypadají podmínky, které musí splňovat matice γ resp. matice ε. Matice γ a ε se liší pouze tím, že na těch pozicích (i, j), kdy $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = \{0\}$, jsou v matici ε nuly a v matici γ obecné prvky, které nás v podstatě nezajímají. To je dáno tím, že bude platit $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j]_n = \{0\}$ bez ohledu na to, co vystupuje v matici γ. Výsledná závorka tedy na těchto γ_{ij} *nezávisí* a nezávisí tedy na nich ani další podmínky, které od ní budeme vyžadovat (tj. aby to byla Lieova závorka). Věnujme se tedy výhradně matici ε. Může se ovšem stát, že platí $\kappa = (1)$ a tudíž $\gamma = \varepsilon$. Tento případ je nejobecnější; pokud napíšeme rovnice pro tento případ budou v ostatních případech chybět některé neznámé a rovnice. Víme, že platí

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \tag{31}$$

Jacobiho identita platná v $\mathcal{L}$ je ekvivalentní podmínce

$$[x_i, [x_j, x_k]] + [x_k, [x_i, x_j]] + [x_j, [x_k, x_i]] = 0 \tag{32}$$

platné pro všechna $x_i \in \mathcal{L}_i$, $x_j \in \mathcal{L}_j, x_k \in \mathcal{L}_k$ a všechna $i, j, k \in G$. Jacobiho identita musí platit i pro gradovanou kontrakci $\mathcal{L}^\varepsilon$ (nyní stejné jako $\mathcal{L}^\gamma$):

$$[x_i, [x_j, x_k]_n]_n + [x_k, [x_i, x_j]_n]_n + [x_j, [x_k, x_i]_n]_n = 0, \tag{33}$$

takže

$$\varepsilon_{i,j+k}\varepsilon_{jk}[x_i, [x_j, x_k]] + \varepsilon_{k,i+j}\varepsilon_{ij}[x_k, [x_i, x_j]] + \varepsilon_{j,k+i}\varepsilon_{ki}[x_j, [x_k, x_i]] = 0 \tag{34}$$

Rovnice (32) a (34) mohou v nejobecnějším případě platit pouze tehdy, pokud

$$\varepsilon_{i,j+k}\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{k,i+j}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{j,k+i}\varepsilon_{ki} \tag{35}$$

Všechna možná řešení tohoto systému rovnic s ohledem na (31) dávají možné gradované kontrakce $\mathcal{L}$ při dané gradaci $\mathcal{L}^\kappa$.

Povšimněme si již zde jedné vlastnosti systému (35). Pokud ε a $\widetilde{\varepsilon}$ jsou řešení (35) pak platí

$$\varepsilon_{i,j+k}\varepsilon_{jk}\widetilde{\varepsilon}_{i,j+k}\widetilde{\varepsilon}_{jk} = \varepsilon_{k,i+j}\varepsilon_{ij}\widetilde{\varepsilon}_{k,i+j}\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{j,k+i}\varepsilon_{ki}\widetilde{\varepsilon}_{j,k+i}\widetilde{\varepsilon}_{ki}$$

tzn. složení dvou řešení po složkách $\varepsilon_s = \varepsilon \bullet \widetilde{\varepsilon}$ je opět řešení (35).

5 Rovnice kontrakcí pro Pauliho gradaci sl(3,C)

Naším dlouhodobým záměrem je najít všechny gradované kontrakce algebry $sl(3,\mathbb{C})$, které vzniknou z její Pauliho gradace. Pauliho gradaci máme obecně pro algebru $sl(n,\mathbb{C})$ dánu vztahem (18). Napišme nejprve, jak konkrétně vypadá pro případ $n=3$. Matice P,Q mají v tomto případě tvar

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix},\tag{36}$$

kde $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Pauliho gradace má pak tvar

$$sl(3,\mathbb{C})=\mathcal{L}_{01}\oplus\mathcal{L}_{02}\oplus\mathcal{L}_{10}\oplus\mathcal{L}_{20}\oplus\mathcal{L}_{11}\oplus\mathcal{L}_{22}\oplus\mathcal{L}_{12}\oplus\mathcal{L}_{21}\tag{37}$$

kde $\mathcal{L}_{ij}=\{X_{ij}\}_{lin}$ a $X_{01}=\{Q\}$, $X_{02}=\{Q^2\}$, $X_{10}=\{P\}$, $X_{20}=\{P^2\}$, $X_{11}=\{PQ\}$, $X_{22}=\{P^2Q^2\}$, $X_{12}=\{PQ^2\}$, $X_{21}=\{P^2Q\}$. Gradační grupa je aditivní grupa $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$, ovšem žádný podprostor není značen prvkem $(0,0)$. Uveďme také explicitní tvar matice κ zavedené vztahem (19); je to symetrická matice 8×8 a je uvedena ve tvaru s pořadím indexů zavedeným vztahem (37), tj. pozice 11, 12, 13, … jsou značeny (01)(01), (01)(02), (01)(10), … a na každé této pozici je buď nula nebo jednička podle hodnoty $[\mathcal{L}_{01},\mathcal{L}_{01}]$, $[\mathcal{L}_{01},\mathcal{L}_{02}]$, $[\mathcal{L}_{01},\mathcal{L}_{10}]$, …

$$\kappa=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1&1&1\\0&0&1&1&1&1&1&1\\1&1&0&0&1&1&1&1\\1&1&0&0&1&1&1&1\\1&1&1&1&0&0&1&1\\1&1&1&1&0&0&1&1\\1&1&1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&1&0&0\end{pmatrix}\tag{38}$$

Odtud ihned vidíme, že naše úloha nalézt všechny gradované kontrakce, tj. nalézt matice kontrakčních parametrů ε má vzhledem k symetričnosti této matice 24 neznámých. Pro jednotnost ji vypišme (zahrneme již i symetrii, neznámé pod diagonálou jsou jednoznačně určeny prvky nad diagonálou)

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}0&0&\varepsilon_{(01)(10)}&\varepsilon_{(01)(20)}&\varepsilon_{(01)(11)}&\varepsilon_{(01)(22)}&\varepsilon_{(01)(12)}&\varepsilon_{(01)(21)}\\0&0&\varepsilon_{(02)(10)}&\varepsilon_{(02)(20)}&\varepsilon_{(02)(11)}&\varepsilon_{(02)(22)}&\varepsilon_{(02)(12)}&\varepsilon_{(02)(21)}\\\varepsilon_{(01)(10)}&\varepsilon_{(02)(10)}&0&0&\varepsilon_{(10)(11)}&\varepsilon_{(10)(22)}&\varepsilon_{(10)(12)}&\varepsilon_{(10)(21)}\\\varepsilon_{(01)(20)}&\varepsilon_{(02)(20)}&0&0&\varepsilon_{(20)(11)}&\varepsilon_{(20)(22)}&\varepsilon_{(20)(12)}&\varepsilon_{(20)(21)}\\\varepsilon_{(01)(11)}&\varepsilon_{(02)(11)}&\varepsilon_{(10)(11)}&\varepsilon_{(20)(11)}&0&0&\varepsilon_{(11)(12)}&\varepsilon_{(11)(21)}\\\varepsilon_{(01)(22)}&\varepsilon_{(02)(22)}&\varepsilon_{(10)(22)}&\varepsilon_{(20)(22)}&0&0&\varepsilon_{(22)(12)}&\varepsilon_{(22)(21)}\\\varepsilon_{(01)(12)}&\varepsilon_{(02)(12)}&\varepsilon_{(10)(12)}&\varepsilon_{(20)(12)}&\varepsilon_{(11)(12)}&\varepsilon_{(22)(12)}&0&0\\\varepsilon_{(01)(21)}&\varepsilon_{(02)(21)}&\varepsilon_{(10)(21)}&\varepsilon_{(20)(21)}&\varepsilon_{(11)(21)}&\varepsilon_{(22)(21)}&0&0\end{pmatrix}\tag{39}$$

Vektory $X_{ij}, (i,j) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus (0,0)$ tvoří bázi $sl(3,\mathbb{C})$ a Jacobiho identita má pro náš případ tedy tvar

$$[X_{ij},[X_{kl},X_{mn}]_N]_N + [X_{mn},[X_{ij},X_{kl}]_N]_N + [X_{kl},[X_{mn},X_{ij}]_N]_N = 0, \tag{40}$$

kde $[X_{kl},X_{mn}]_N = \varepsilon_{(kl)(mn)}[X_{kl},X_{mn}]$ a má platit pro všechny trojice indexů $(ij),(kl),(mn)$. Samozřejmě ihned obecně vidíme, že pro trojici v níž se dva indexy opakují je splněna automaticky. Všimněme si dále, že tyto rovnice nezávisí na pořadí indexů. Pokud vyjdeme z pořadí, které je cyklickou záměnou předchozího, nová rovnice je samozřejmě totožná s původní; další možnost dává rovnici lišící se znaménkem. Počet rovnic je tedy počet kombinací bez opakování tzn. máme $\binom{8}{3} = 56$ trojic. Upravujme (40) dále

$$\varepsilon_{(ij)(k+m,l+n)}\varepsilon_{(kl)(mn)}[X_{ij},[X_{kl},X_{mn}]] + \quad \text{cyklicky} \quad = 0, \tag{41}$$

kde slovem cyklicky rozumíme dva členy vzniklé z vypsaného cyklickou záměnou indexů: $(ij) \mapsto (mn)$, $(kl) \mapsto (ij)$, $(mn) \mapsto (kl)$, a $(ij) \mapsto (kl)$, $(kl) \mapsto (mn)$, $(mn) \mapsto (ij)$. Nyní použijeme komutační relace (16) a nejprve máme

$$[X_{ij},[X_{kl},X_{mn}]] = (\omega^{lm} - \omega^{kn})(\omega^{j(k+m)} - \omega^{i(l+n)})X_{i+k+m,j+l+n} \tag{42}$$

Pokud toto dosadíme do (41) dostaneme

$$\left[\varepsilon_{(ij)(k+m,l+n)}\varepsilon_{(kl)(mn)}(\omega^{lm} - \omega^{kn})(\omega^{j(k+m)} - \omega^{i(l+n)}) + \quad \text{cyklicky} \quad \right]X_{i+k+m,j+l+n} = 0, \tag{43}$$

Z (43) vidíme, že budou rovněž nulové rovnice, pro které platí $i+k+m = 0 \wedge j+l+n = 0$. To nastane v osmi případech. Celkem zatím máme 48 rovnic. Uveďme příklad výpočtu (43) pro danou konkrétní trojici, např. (01)(02)(10). Dosazením dostaneme, že

$$[\varepsilon_{(02)(10)}\varepsilon_{(01)(12)}(\omega^2 - 1)(\omega - 1) + 0 + \varepsilon_{(10)(01)}\varepsilon_{(02)(11)}(1-\omega)(\omega^2-1)]X_{10} = 0 \tag{44}$$

Podobně dopadnou také zbývající rovnice. Vždy jeden ze tří členů vypadne, a zbylé dva se budou lišit o znaménko. Při vypisování rovnic také hned zahrneme symetrii, tj. například místo $\varepsilon_{(10)(01)}$ rovnou píšeme $\varepsilon_{(01)(10)}$, abychom dostali neznámé vypsané v matici (39). Také uvádíme, ze které trojice podprostorů $(ij)(kl)(mn)$ daná rovnice vznikla; číslo, které této trojici odpovídá v lexikografickém uspořádání, je tištěno kurzívou. Doplňkový význam matice z $SL(2,\mathbb{Z}_3)$ vysvětlíme v další kapitole.

Číslo rovnice		Podprostory	L.p.	$SL(2,\mathbb{Z}_3)$
1	$\varepsilon_{(02)(10)}\varepsilon_{(01)(12)} - \varepsilon_{(01)(10)}\varepsilon_{(02)(11)} = 0$	*(01)(02)(10)*	*1*	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
2	$\varepsilon_{(02)(20)}\varepsilon_{(01)(22)} - \varepsilon_{(01)(20)}\varepsilon_{(02)(21)} = 0$	*(01)(02)(20)*	*4*	$\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)$
3	$\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(01)(10)} - \varepsilon_{(01)(11)}\varepsilon_{(02)(12)} = 0$	*(01)(02)(11)*	*2*	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
4	$\varepsilon_{(02)(22)}\varepsilon_{(01)(21)} - \varepsilon_{(01)(22)}\varepsilon_{(02)(20)} = 0$	*(01)(02)(22)*	*6*	$\left(\begin{smallmatrix}2&2\\0&2\end{smallmatrix}\right)$
5	$\varepsilon_{(02)(12)}\varepsilon_{(01)(11)} - \varepsilon_{(01)(12)}\varepsilon_{(02)(10)} = 0$	*(01)(02)(12)*	*3*	$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
6	$\varepsilon_{(02)(21)}\varepsilon_{(01)(20)} - \varepsilon_{(01)(21)}\varepsilon_{(02)(22)} = 0$	*(01)(02)(21)*	*5*	$\left(\begin{smallmatrix}2&1\\0&2\end{smallmatrix}\right)$
7	$\varepsilon_{(10)(21)}\varepsilon_{(01)(12)} - \varepsilon_{(10)(12)}\varepsilon_{(22)(21)} = 0$	*(10)(12)(21)*	*35*	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)$
8	$\varepsilon_{(20)(21)}\varepsilon_{(11)(12)} - \varepsilon_{(20)(12)}\varepsilon_{(02)(21)} = 0$	*(12)(20)(21)*	*46*	$\left(\begin{smallmatrix}2&0\\1&2\end{smallmatrix}\right)$
9	$\varepsilon_{(10)(22)}\varepsilon_{(02)(11)} - \varepsilon_{(10)(11)}\varepsilon_{(22)(21)} = 0$	*(10)(11)(22)*	*33*	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$
10	$\varepsilon_{(20)(22)}\varepsilon_{(11)(12)} - \varepsilon_{(20)(11)}\varepsilon_{(01)(22)} = 0$	*(11)(20)(22)*	*44*	$\left(\begin{smallmatrix}2&0\\2&2\end{smallmatrix}\right)$
11	$\varepsilon_{(01)(20)}\varepsilon_{(10)(21)} - \varepsilon_{(01)(10)}\varepsilon_{(20)(11)} = 0$	*(01)(10)(20)*	*9*	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\2&0\end{smallmatrix}\right)$
12	$\varepsilon_{(02)(20)}\varepsilon_{(10)(22)} - \varepsilon_{(02)(10)}\varepsilon_{(20)(12)} = 0$	*(02)(10)(20)*	*21*	$\left(\begin{smallmatrix}0&2\\1&0\end{smallmatrix}\right)$
13	$\varepsilon_{(01)(21)}\varepsilon_{(22)(12)} - \varepsilon_{(01)(12)}\varepsilon_{(10)(21)} = 0$	*(01)(12)(21)*	*14*	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\2&1\end{smallmatrix}\right)$
14	$\varepsilon_{(02)(21)}\varepsilon_{(20)(12)} - \varepsilon_{(01)(12)}\varepsilon_{(02)(12)} = 0$	*(02)(12)(21)*	*27*	$\left(\begin{smallmatrix}0&2\\1&2\end{smallmatrix}\right)$
15	$\varepsilon_{(01)(22)}\varepsilon_{(20)(11)} - \varepsilon_{(01)(11)}\varepsilon_{(22)(12)} = 0$	*(01)(11)(22)*	*13*	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\2&2\end{smallmatrix}\right)$
16	$\varepsilon_{(02)(22)}\varepsilon_{(11)(21)} - \varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(10)(22)} = 0$	*(02)(11)(22)*	*25*	$\left(\begin{smallmatrix}0&2\\1&1\end{smallmatrix}\right)$
17	$\varepsilon_{(20)(11)}\varepsilon_{(01)(10)} - \varepsilon_{(10)(11)}\varepsilon_{(20)(21)} = 0$	*(10)(11)(20)*	*31*	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\2&0\end{smallmatrix}\right)$
18	$\varepsilon_{(20)(22)}\varepsilon_{(10)(12)} - \varepsilon_{(10)(22)}\varepsilon_{(02)(20)} = 0$	*(10)(20)(22)*	*38*	$\left(\begin{smallmatrix}2&2\\1&0\end{smallmatrix}\right)$
19	$\varepsilon_{(20)(21)}\varepsilon_{(10)(11)} - \varepsilon_{(10)(21)}\varepsilon_{(01)(20)} = 0$	*(10)(20)(21)*	*37*	$\left(\begin{smallmatrix}2&1\\2&0\end{smallmatrix}\right)$
20	$\varepsilon_{(20)(12)}\varepsilon_{(02)(10)} - \varepsilon_{(10)(12)}\varepsilon_{(20)(22)} = 0$	*(10)(12)(20)*	*34*	$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&0\end{smallmatrix}\right)$
21	$\varepsilon_{(11)(21)}\varepsilon_{(02)(12)} - \varepsilon_{(11)(12)}\varepsilon_{(20)(21)} = 0$	*(11)(12)(21)*	*41*	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&2\end{smallmatrix}\right)$
22	$\varepsilon_{(22)(21)}\varepsilon_{(10)(12)} - \varepsilon_{(22)(12)}\varepsilon_{(01)(21)} = 0$	*(12)(21)(22)*	*48*	$\left(\begin{smallmatrix}2&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$
23	$\varepsilon_{(22)(12)}\varepsilon_{(01)(11)} - \varepsilon_{(11)(12)}\varepsilon_{(20)(22)} = 0$	*(11)(12)(22)*	*42*	$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&2\end{smallmatrix}\right)$
24	$\varepsilon_{(22)(21)}\varepsilon_{(10)(11)} - \varepsilon_{(11)(21)}\varepsilon_{(02)(22)} = 0$	*(11)(21)(22)*	*45*	$\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$

Číslo rovnice		Podprostory	L.p.	$SL(2,\mathbb{Z}_3)$
25	$\varepsilon_{(10)(11)}\varepsilon_{(01)(21)}-\varepsilon_{(01)(11)}\varepsilon_{(10)(12)}=0$	*(01)(10)(11)*	*7*	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
26	$\varepsilon_{(20)(22)}\varepsilon_{(02)(12)}-\varepsilon_{(02)(22)}\varepsilon_{(20)(21)}=0$	*(02)(20)(22)*	*29*	$\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)$
27	$\varepsilon_{(11)(12)}\varepsilon_{(01)(20)}-\varepsilon_{(01)(12)}\varepsilon_{(10)(11)}=0$	*(01)(11)(12)*	*11*	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
28	$\varepsilon_{(22)(21)}\varepsilon_{(02)(10)}-\varepsilon_{(02)(21)}\varepsilon_{(20)(22)}=0$	*(02)(21)(22)*	*30*	$\left(\begin{smallmatrix}2&2\\2&0\end{smallmatrix}\right)$
29	$\varepsilon_{(10)(12)}\varepsilon_{(01)(22)}-\varepsilon_{(01)(10)}\varepsilon_{(11)(12)}=0$	*(01)(10)(12)*	*8*	$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
30	$\varepsilon_{(20)(21)}\varepsilon_{(02)(11)}-\varepsilon_{(02)(20)}\varepsilon_{(22)(21)}=0$	*(02)(20)(21)*	*28*	$\left(\begin{smallmatrix}2&1\\0&2\end{smallmatrix}\right)$
31	$\varepsilon_{(01)(21)}\varepsilon_{(10)(22)}-\varepsilon_{(01)(10)}\varepsilon_{(11)(21)}=0$	*(01)(10)(21)*	*10*	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)$
32	$\varepsilon_{(02)(20)}\varepsilon_{(22)(12)}-\varepsilon_{(02)(12)}\varepsilon_{(20)(11)}=0$	*(02)(12)(20)*	*26*	$\left(\begin{smallmatrix}2&0\\1&2\end{smallmatrix}\right)$
33	$\varepsilon_{(11)(21)}\varepsilon_{(02)(10)}-\varepsilon_{(10)(21)}\varepsilon_{(01)(11)}=0$	*(10)(11)(21)*	*32*	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$
34	$\varepsilon_{(22)(12)}\varepsilon_{(01)(20)}-\varepsilon_{(20)(12)}\varepsilon_{(02)(21)}=0$	*(12)(20)(21)*	*47*	$\left(\begin{smallmatrix}2&0\\2&2\end{smallmatrix}\right)$
35	$\varepsilon_{(20)(21)}\varepsilon_{(01)(11)}-\varepsilon_{(01)(21)}\varepsilon_{(20)(22)}=0$	*(01)(20)(21)*	*16*	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\2&0\end{smallmatrix}\right)$
36	$\varepsilon_{(10)(12)}\varepsilon_{(02)(22)}-\varepsilon_{(02)(12)}\varepsilon_{(10)(11)}=0$	*(02)(10)(12)*	*20*	$\left(\begin{smallmatrix}0&2\\1&0\end{smallmatrix}\right)$
37	$\varepsilon_{(22)(21)}\varepsilon_{(01)(10)}-\varepsilon_{(01)(22)}\varepsilon_{(20)(21)}=0$	*(01)(21)(22)*	*18*	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\2&1\end{smallmatrix}\right)$
38	$\varepsilon_{(11)(12)}\varepsilon_{(02)(20)}-\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(10)(12)}=0$	*(02)(11)(12)*	*23*	$\left(\begin{smallmatrix}0&2\\1&2\end{smallmatrix}\right)$
39	$\varepsilon_{(20)(22)}\varepsilon_{(01)(12)}-\varepsilon_{(01)(20)}\varepsilon_{(22)(21)}=0$	*(01)(20)(22)*	*17*	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\2&2\end{smallmatrix}\right)$
40	$\varepsilon_{(10)(11)}\varepsilon_{(02)(21)}-\varepsilon_{(02)(10)}\varepsilon_{(11)(12)}=0$	*(02)(10)(11)*	*19*	$\left(\begin{smallmatrix}0&2\\1&1\end{smallmatrix}\right)$
41	$\varepsilon_{(01)(20)}\varepsilon_{(11)(21)}-\varepsilon_{(01)(11)}\varepsilon_{(20)(12)}=0$	*(01)(11)(20)*	*12*	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\2&0\end{smallmatrix}\right)$
42	$\varepsilon_{(02)(22)}\varepsilon_{(10)(21)}-\varepsilon_{(02)(10)}\varepsilon_{(22)(12)}=0$	*(02)(10)(22)*	*22*	$\left(\begin{smallmatrix}2&2\\1&0\end{smallmatrix}\right)$
43	$\varepsilon_{(11)(21)}\varepsilon_{(02)(20)}-\varepsilon_{(20)(11)}\varepsilon_{(01)(21)}=0$	*(11)(20)(21)*	*43*	$\left(\begin{smallmatrix}2&1\\2&0\end{smallmatrix}\right)$
44	$\varepsilon_{(22)(12)}\varepsilon_{(01)(10)}-\varepsilon_{(10)(22)}\varepsilon_{(02)(12)}=0$	*(10)(12)(22)*	*36*	$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&0\end{smallmatrix}\right)$
45	$\varepsilon_{(20)(12)}\varepsilon_{(02)(11)}-\varepsilon_{(20)(11)}\varepsilon_{(01)(12)}=0$	*(11)(12)(20)*	*40*	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&2\end{smallmatrix}\right)$
46	$\varepsilon_{(10)(22)}\varepsilon_{(02)(21)}-\varepsilon_{(10)(21)}\varepsilon_{(01)(22)}=0$	*(10)(21)(22)*	*39*	$\left(\begin{smallmatrix}2&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$
47	$\varepsilon_{(01)(22)}\varepsilon_{(20)(12)}-\varepsilon_{(01)(12)}\varepsilon_{(10)(22)}=0$	*(01)(12)(22)*	*15*	$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&2\end{smallmatrix}\right)$
48	$\varepsilon_{(02)(21)}\varepsilon_{(20)(11)}-\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(10)(21)}=0$	*(02)(11)(21)*	*24*	$\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$

6 Grupa symetrie Pauliho gradace

Na první pohled není vůbec zřejmé jak postupovat při řešení uvedeného systému rovnic $\mathcal{S}$. Jedná se o systém 48 polynomů druhého řádu o 24 proměnných. Při řešení rovnic zpravidla pomáhá znalost jejich symetrií. V systému $\mathcal{S}$ vystupují rovnice vzniklé úpravou Jacobiho identit, začněme proto následující úvahou. Definujme **grupu symetrie** $\operatorname{Aut}\Gamma$ gradace (1) jako takovou podgrupu $\operatorname{Aut}\mathcal{L}$, která obsahuje automorfismy g s vlastností

$$g\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{\pi_g(i)}, \tag{45}$$

kde $\pi_g : I \longrightarrow I$ je permutace na množině I. Takto máme zároveň dánu permutační reprezentaci Δ_Γ grupy $\operatorname{Aut}\Gamma$ na množině I, definovanou jako

$$\Delta_\Gamma(g) := \pi_g \tag{46}$$

Jádro této permutační reprezentace je stabilizátor Γ v $\operatorname{Aut}\Gamma$,

$$\text{Stab }\Gamma = \ker\Gamma = \{g \in \text{Aut }\mathcal{L} \mid g\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i \ \ \forall i \in I\}. \tag{47}$$

Stabilizátor je tedy normální podgrupa v $\operatorname{Aut}\Gamma$ a také podle věty o izomorfismu platí

$$\text{Aut }\Gamma/\text{Stab }\Gamma \simeq \Delta_\Gamma \text{ Aut }\Gamma. \tag{48}$$

Právě permutační grupa Δ_Γ Aut Γ bude zásadní pro náš případ jako grupa symetrie systému $\mathcal{S}$. K jejímu určení nyní použijeme vztah (48). Pro jemné gradace příslušné k MAD-grupě $\mathcal{G}$ platí $\operatorname{Stab}\Gamma = \mathcal{G}$. Definujme **normalizátor** MAD-grupy $\mathcal{G}$ jako množinu

$$\mathcal{N}(\mathcal{G}) := \left\{h \in \operatorname{Aut}\mathcal{L} \mid h^{-1}\mathcal{G}h \subset \mathcal{G}\right\}. \tag{49}$$

Vezměme nyní $h \in \mathcal{N}(\mathcal{G})$ a podprostor $\mathcal{L}_i$ z *jemné* gradace (1) příslušné MAD-grupě $\mathcal{G}$. Potom pro každé $f \in \mathcal{G}$ existuje $g \in \mathcal{G}$ takové, že $h^{-1}fh = g$. Protože platí $g\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i$ vidíme, že $f(h\mathcal{L}_i) = h\mathcal{L}_i$. Neboli $h\mathcal{L}_i$ je pro každé $f \in \mathcal{G}$ jeho vlastní podprostor, musí tedy platit $h\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_j$, $j \in I$. Tím jsme ukázali inkluzi $\mathcal{N}(\mathcal{G}) \subset \operatorname{Aut}\Gamma$. Obráceně pro $h \in \operatorname{Aut}\Gamma$ platí $h\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{\pi_h(i)}$. Pro libovolné $f \in \mathcal{G}$ vidíme, že

$$fh\mathcal{L}_i = f\mathcal{L}_{\pi_h(i)} = \mathcal{L}_{\pi_h(i)} = h\mathcal{L}_i.$$

Odtud máme, že $h^{-1}fh\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i$, takže musí platit $h^{-1}fh \in \mathcal{G}$, tzn. $h \in \mathcal{N}(\mathcal{G})$. Tím jsme celkově dokázali platnost vztahu

$$\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \operatorname{Aut}\Gamma. \tag{50}$$

V našem případě, kdy gradace Γ je dána vztahem (37) platí podle [4] vztah $\mathcal{G} = \operatorname{Ad}\Pi_3$. O faktu, že $\operatorname{Stab}\Gamma = \operatorname{Ad}\Pi_3$ se nyní můžeme přesvědčit i přímo

$$\operatorname{Ad}_P X_{rs} = PQ^rP^sP^{-1} = \omega^r X_{rs}, \quad \operatorname{Ad}_Q X_{rs} = QQ^rP^sQ^{-1} = \omega^{-s} X_{rs}.$$

Definujme nyní grupu matic

$$H_n = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Z}_n,\ ad - bc = \pm 1 \bmod n, \right\}. \tag{51}$$

Tato grupa obsahuje jako svoji podgrupu matice s determinantem rovným jedné, která se označuje jako $SL(2, \mathbb{Z}_n)$. V [6] je dokázána zásadní věta

Věta 6.1. Faktorgrupa $\mathcal{N}(\mathrm{Ad}\,\Pi_n)/\mathrm{Ad}\,\Pi_n$ je izomorfní grupě H_n,

$$\mathcal{N}(\mathrm{Ad}\,\Pi_n)/\mathrm{Ad}\,\Pi_n \simeq H_n \tag{52}$$

Příslušná permutace odpovídající matici $A \in H_n$ a tedy akce prvku π_A naší permutační grupy na indexech gradační grupy $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ je dána vztahem

$$\pi_A\,(i\ j) = (i\ j)\,A, \tag{53}$$

kde v tomto vztahu míníme maticové násobení modulo n.

Zkoumejme nyní obecně vztah kontrakčních rovnic a permutační grupy $\Delta_\Gamma\,\mathrm{Aut}\,\Gamma$ v případě nejjemnější gradace. Vezměme $\pi \in \Delta_\Gamma\,\mathrm{Aut}\,\Gamma$ a mějme dvě závorky definované vztahy

$$\begin{aligned} [x_i, x_j]_N &= \varepsilon_{ij}[x_i, x_j] \\ [x_i, x_j]_{N_\pi} &= \varepsilon_{\pi(i)\pi(j)}[x_i, x_j] \end{aligned}$$

Vezměme nyní nějaký automorfismus jako reprezentanta takové třídy v $\mathrm{Aut}\,\Gamma/\mathrm{Stab}\Gamma$, která odpovídá permutaci π. Takový automorfismus bude určitě tvaru $gx_i = \lambda_i x_{\pi(i)}$, kde λ_i jsou vhodné nenulové koeficienty a $x_i \in \mathcal{L}_i$. Nyní máme, že

$$\begin{aligned} g[x_i, x_j]_{N_\pi} &= \varepsilon_{\pi(i)\pi(j)} g[x_i, x_j] = \varepsilon_{\pi(i)\pi(j)}[gx_i, gx_j] = \lambda_i\lambda_j\varepsilon_{\pi(i)\pi(j)}[x_{\pi(i)}, x_{\pi(j)}] \\ &= \lambda_i\lambda_j[x_{\pi(i)}, x_{\pi(j)}]_N = [gx_i, gx_j]_N \end{aligned} \tag{54}$$

a výsledné závorky s indexy N, N_π jsou izomorfní. Všimněme si dále toho, že ze vztahu (3) plyne, že permutace $\pi \in \Delta_\Gamma\,\mathrm{Aut}\,\Gamma$ musí vzhledem k operaci $+$ na indexové množině I splňovat vztah

$$\pi(i + j) = \pi(i) + \pi(j), \quad i, j \in I \tag{55}$$

Vyberme rovnici ze systému $\mathcal{S}$, kterou obecně zapíšeme ve tvaru (41)

$$\varepsilon_{(ij)(k+m,l+n)}\varepsilon_{(kl)(mn)}[X_{ij}, [X_{kl}, X_{mn}]] + \quad \text{cyklicky} \quad = 0,$$

a platí $i + k + m \neq 0 \wedge j + l + n \neq 0$. Aplikujme nyní na indexy $(ij)(kl)(mn)$ permutaci π. Potom vzhledem ke vztahu (55) dostaneme

$$\varepsilon_{\pi(ij),\pi(kl)+\pi(mn)}\varepsilon_{\pi(kl)\pi(mn)}[X_{\pi(ij)}, [X_{\pi(kl)}, X_{\pi(mn)}]] + \quad \text{cyklicky} \quad = 0, \tag{56}$$

což je rovnice vzniklá z trojice podprostorů $\pi(ij)$, $\pi(kl)$, $\pi(mn)$ a je tedy obsažena v systému $\mathcal{S}$. Takto můžeme z jedné pevně zvolené rovnice získat další rovnice, jejichž indexy leží na jedné **orbitě**, tj. takové trojice indexů v nichž nezáleží na pořadí, které lze mezi sebou převést aplikací nějakého $\pi \in \Delta_\Gamma \operatorname{Aut}\Gamma$. Navíc vidíme, že systém je invariantní vůči substituci $\varepsilon_{(ij)(kl)} \mapsto \varepsilon_{\pi(ij)\pi(kl)}$ pro libovolně pevně zvolené $\pi \in \Delta_\Gamma \operatorname{Aut}\Gamma$. To nás vede k závěru, že pokud máme řešení $\mathcal{S}$ např. zapsané ve tvaru matice ε pak matice, kde místo prvků $\varepsilon_{(ij)(kl)}$ vystupují prvky $\varepsilon_{\pi(ij)\pi(kl)}$ z ε je také řešení systému $\mathcal{S}$. Takovou matici označme symbolem ε^π. Pokud je permutace π_A definovaná vztahem (53), pak zkráceně zapisujeme $\varepsilon^A := \varepsilon^{\pi_A}$. Na množině řešení $\mathcal{R}$ systému $\mathcal{S}$ můžeme takto zavést relaci ekvivalence: dvě řešení ε_1 a ε_2 jsou **ekvivalentní**, píšeme $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$, pokud existuje $\pi \in \Delta_\Gamma \operatorname{Aut}\Gamma$ takové, že platí $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^\pi$. Navíc víme, že gradované kontrakce odpovídající ekvivalentním řešením budou izomorfní. Zaveďme ještě následující označení: pro řešení $\varepsilon \in \mathcal{R}$ označme počet nul mezi jeho 24 neznámými symbolem $\nu(\varepsilon)$. Zřejmě platí, že nutná podmínka pro platnost $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$ je $\nu(\varepsilon_1) = \nu(\varepsilon_2)$. Tímto způsobem můžeme pro dané řešení vybírat kandidáty na řešení s ním ekvivalentní.

Pro náš případ je permutační grupa izomorfní grupě H_3, která má 48 prvků, a existují právě *dvě* 24 bodové orbity trojic indexů. Jako reprezentanty z každé třídy můžeme zvolit např. trojice *(01)(02)(10)* a *(01)(10)(11)*. Navíc platí, že všech 24 bodů z jedné orbity lze získat z libovolného reprezentanta akcí 24 prvků z $SL(2,\mathbb{Z}_3) \subset H_3$. Tato matice z $SL(2,\mathbb{Z}_3)$ je pak zřejmě dána pro pevnou volbu reprezentanta jednoznačně. Náš systém rovnic $\mathcal{S}$ lze pak elegantně zapsat ve tvaru

$$\varepsilon_{(02)(10)A}\varepsilon_{(01)(12)A} - \varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(02)(11)A} = 0 \tag{57}$$

$$\varepsilon_{(10)(11)A}\varepsilon_{(01)(21)A} - \varepsilon_{(01)(11)A}\varepsilon_{(10)(12)A} = 0 \quad \forall A \in SL(2,\mathbb{Z}_3) \tag{58}$$

kde jsme použili zkráceného zápisu $\varepsilon_{(ij)(kl)A} := \varepsilon_{(ij)A,(kl)A}$. Rovnice 1-24 (podsystém $\mathcal{S}_1$) v tabulce systému vznikly rozepsáním (57) a rovnice 25-48 (podsystém $\mathcal{S}_2$) rozepsáním (58). Která matice přísluší dané rovnici je zřejmé z tabulky systému $\mathcal{S}$.

Bližším pohledem na systém $\mathcal{S}$ například zjistíme, že sečtením rovnic 1 a 3 dostaneme rovnici 5. Rovnice 5 je tedy při splnění rovnic 1 a 3 splněna automaticky a můžeme ji tedy ze systému vyškrtnout. Otázku zda existují nějaké další podobné trojice rovnic vyřešíme následující úvahou: rovnici 1 lze zapsat ve tvaru

$$\varepsilon_{(01)(10)X}\varepsilon_{(02)(11)X} - \varepsilon_{(01)(10)}\varepsilon_{(02)(11)} = 0, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{59}$$

To je dáno tím, že čtveřice indexů $[(02)(10)][(01)(12)]$ a $[(01)(10)][(02)(11)]$ leží na stejné orbitě vzhledem k akci grupy $SL(2,\mathbb{Z}_3)$, přičemž nezáleží na pořadí dvojic indexů v hranatých závorkách a na pořadí hranatých závorek. V podsystému $\mathcal{S}_1$ je podle (57) dále obsažena rovnice generovaná z 1 maticí X

$$\varepsilon_{(01)(10)X^2}\varepsilon_{(02)(11)X^2} - \varepsilon_{(01)(10)X}\varepsilon_{(02)(11)X} = 0 \tag{60}$$

Sečtením rovnic (59) a (60) získáme vztah

$$\varepsilon_{(01)(10)X^2}\varepsilon_{(02)(11)X^2} - \varepsilon_{(01)(10)}\varepsilon_{(02)(11)} = 0, \tag{61}$$

což je díky platnosti $X^3 = 1$ rovnice generovaná z rovnice 1 maticí X^2. Třídy ekvivalence levého rozkladu grupy $SL(2, \mathbb{Z}_3)$ podle cyklické podgrupy $\{1, X, X^2\}$ pak generují právě hledané trojice závislých rovnic. Počet těchto tříd je podle Lagrangeovy věty $24/3 = 8$. Tím jsme získali 8 rovnic (z každé třídy jedna), které ze systému $\mathcal{S}_1$ vyřadíme. Naproti tomu v systému $\mathcal{S}_2$ čtveřice indexů $[(10)(11)][(01)(21)]$ a $[(10)(11)][(01)(21)]$ na stejné orbitě *neleží*, a stejné součiny neznámých se zde tudíž nevyskytují. Počet rovnic systému $\mathcal{S}$ jsme tímto zredukovali na 40.

7 Užití grupy symetrie k řešení kontrakčních rovnic

Nyní stojíme před otázkou jak co nejvýhodněji dále využít grupu symetrie našeho systému $\mathcal{S}$. Nejprve si můžeme připomenout výsledek z [7], kde byly nalezeny všechny matice gradovaných kontrakcí i pro případ Pauliho gradace $sl(2,\mathbb{C})$. Výsledkem bylo šest matic, přičemž se zde podle naší terminologie vyskytovaly *dvě* tříprvkové třídy ekvivalence. Tento příklad je však poněkud triviální, protože systém rovnic byl pro tento případ prázdný.

Abychom mohli vůbec začít s řešením systému $\mathcal{S}$, zdá se být nezbytné předpokládat nenulovost nějaké neznámé. Po rozvětvené diskusi bychom museli položit tuto neznámou rovnou nule a diskutovat dále. Takto lze postupovat a získat celou množinu řešení $\mathcal{R}$. Výsledný *zápis* množiny $\mathcal{R}$ může mít ovšem různý počet prvků, podle toho jak výhodně a rozumně jsme při diskusi a řešení postupovali. Tímto způsobem lze zapsat množinu $\mathcal{R}$ pomocí 280 kontrakčních matic s parametry (zpracováno počítačem). Každý prvek výsledného zápisu zpravidla obsahuje několik parametrů; k určení gradované kontrakce (výsledné Lieovy algebry) je ovšem podstatné znát nulovost nebo nenulovost jednotlivých neznámých. Proto je navíc potřeba zkoumat nulovost nebo nenulovost parametrů obsažených v každé matici ze zápisu množiny $\mathcal{R}$. Například platí, že zápis množiny řešení v našem smyslu, tzn. pomocí parametrů, pro případ $sl(2,\mathbb{C})$ má pouze *jeden* prvek. Z lidského hlediska je proto nezbytné, za použití grupy symetrie výpočetní postup i zápis co nejvíce zredukovat. Ideálním stavem pro náš případ by bylo, když bychom mohli určovat přímo třídy nebo zástupce tříd ekvivalentních řešení. Tomuto ideálu se budeme snažit co nejvíce přiblížit, tj. budeme se snažit vyloučit ta řešení, o kterých již dopředu víme, že budou ekvivalentní s řešeními již určenými. Ze zkušenosti s řešením systému také víme, že diskuse se začíná značně rozvětvovat právě v okamžiku, kdy položíme jednu nebo více neznámých rovných nule. Právě tento fakt se budeme snažit co nejvíce zohlednit. Také se nabízí možnost využít faktu, že násobením dvou řešení po složkách získáme opět řešení systému $\mathcal{S}$. Takto z jedné pevné matice $\varepsilon \in \mathcal{R}$ můžeme generovat sadu dalších matic $\varepsilon \bullet \varepsilon^{\pi_1}$, $\varepsilon \bullet \varepsilon^{\pi_2}, \dots, (\varepsilon \bullet \varepsilon^{\pi_1}) \bullet (\varepsilon \bullet \varepsilon^{\pi_2}), \dots$ atd. Nemáme ale zaručeno (také uvidíme, že *neplatí*), že lze z jedné vhodně zvolené matice získat *všechna* řešení. Z tohoto důvodu tuto vlastnost množiny $\mathcal{R}$ nebudeme k systematickému řešení využívat.

Relativně výhodnou cestou může být následující postup řešení:

1. Nejprve se dohodneme, které konkrétní rovnice z trojic závislých rovnic vyškrtneme. V celém postupu užíváme lexikografické číslování rovnic, tedy číslo, které je uvedeno v předposledním sloupci tabulky systému $\mathcal{S}$. Schematicky zapsáno platí: *1* + *2* = *3*, *4* + *5* = *6*, *9* + *31* = *37*, *14* + *35* = *48*, *13* + *42* = *44*, *21* + *34* = *38*, *27* + *41* = *46*, *33* + *25* = *45*. Tím rozumíme, že součet rovnic *1* a *2* dá rovnici *3*, atd. Vyškrtneme pak rovnice za rovnítkem, tzn. *3*, *6*, *37*,...

2. Řešení, v němž jsou všechny neznámé rovné nule budeme nazývat nulové; pokud jsou všechny neznámé rovné stejné konstantě je to také řešení - takovéto řešení nazýváme *triviální*. Každé triviální řešení tvoří pro danou hodnotu konstanty jednoprvkovou třídu ekvivalence. Začněme tím, že si uvědomíme, že všechny indexy u neznámých $\varepsilon_{(ij)(kl)}$ vystupující nad diagonálou v matici (39) - tuto množinu označme $\mathcal{I}$, leží na jedné 24 bodové orbitě vzhledem k akci grupy H_3, dokonce i $SL(2,\mathbb{Z}_3)$, kde nezáleží na pořadí kulatých

závorek. To pro nás znamená, že v každé nenulové třídě ekvivalence na $\mathcal{R}$ existuje řešení, které má nenulovou hodnotu na zvoleném místě ε_k, $k \in \mathcal{I}$. Tuto neznámou zvolme pro celý další postup pevně, např. ε_k, $k := (02)(10)$. Jinak řečeno, pokud definujeme

$$\mathcal{M}^k := \{\varepsilon \in \mathcal{R} \mid \varepsilon_k \neq 0\}\,, \tag{62}$$

pak v každé třídě ekvivalence na $\mathcal{R}$ existuje prvek z $\mathcal{M}^k$. Proto se v dalším postupu omezíme na množinu $\mathcal{M}^k$. Orientačně uveďme, že zápis množiny $\mathcal{M}^k$ pomocí kontrakčních matic s parametry má stále ještě 70 prvků (zpracováno počítačem). Další kroky směřují ke zjednodušení zápisu a výpočtu této množiny.

3. Na množině $\mathcal{I}^k := \mathcal{I} \setminus \{k\}$ definujme zvláštní relaci ekvivalence indukovanou indexem k: pro $i, j \in \mathcal{I}^k$ definujme

$$i \equiv^k j \quad \Leftrightarrow \quad (\exists A \in H_3)(i = jA \wedge kA = k) \ \vee \ (\exists B \in H_3)(j = kB^{-1} \wedge kB = i) \tag{63}$$

Rozklad množiny $\mathcal{I}^k$ na třídy ekvivalence podle $\equiv^k$ má 9 prvků a je uveden v následující tabulce

$\mathcal{I}_1^k$	(11)(12), (11)(21), (22)(12), (22)(21)
$\mathcal{I}_2^k$	(02)(11), (02)(12), (10)(22), (10)(12)
$\mathcal{I}_3^k$	(01)(22), (01)(21), (20)(11), (20)(21)
$\mathcal{I}_4^k$	(01)(11), (20)(22)
$\mathcal{I}_5^k$	(01)(10), (02)(20)
$\mathcal{I}_6^k$	(02)(22), (10)(11)
$\mathcal{I}_7^k$	(02)(21), (10)(21)
$\mathcal{I}_8^k$	(01)(12), (20)(12)
$\mathcal{I}_9^k$	(01)(20)

Význam ekvivalence $\equiv^k$ je následující: pokud určíme všechna řešení z $\mathcal{M}^k$ za *dodatečného předpokladu* $\varepsilon_i \neq 0$, $i \in \mathcal{I}^k$ pak všechna řešení z $\mathcal{M}^k$ určená za dodatečného předpokladu $\varepsilon_j \neq 0, j \equiv^k i$ budou s předchozími ekvivalentní. Jinak řečeno, pro všechna $\varepsilon_1 \in \left\{\varepsilon \in \mathcal{M}^k \mid \varepsilon_i \neq 0, i \in \mathcal{I}^k\right\}$ existuje $\varepsilon_2 \in \left\{\varepsilon \in \mathcal{M}^k \mid \varepsilon_j \neq 0, j \in \mathcal{I}^k, j \equiv^k i\right\}$ tak, že platí $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$ a obráceně.

4. Nyní uveďme vlastní výpočetní postup:

   (a) Zvolíme například množinu

$$\mathcal{R}_1 := \left\{\varepsilon \in \mathcal{M}^k \mid \varepsilon_{(22)(21)} \neq 0\right\} \tag{64}$$

   a vypočteme ji.

(b) Zvolíme další množinu, kterou vypočteme

$$\mathcal{R}_2 := \left\{\varepsilon \in \mathcal{M}^k \mid \varepsilon_{(02)(11)} \neq 0\right\} \tag{65}$$

(c) **Klíčová úvaha:** pokud pro řešení $\varepsilon \in \mathcal{M}^k$ existuje $i \in \mathcal{I}_1^k$ tak, že $\varepsilon_i \neq 0$, *nebo* pokud existuje $j \in \mathcal{I}_2^k$ tak, že $\varepsilon_j \neq 0$, pak toto řešení ε je ekvivalentní nějakému řešení z $\mathcal{R}_1$ nebo z $\mathcal{R}_2$. Jinak musí platit: pro všechna $i \in \mathcal{I}_1^k$ je $\varepsilon_i = 0$ *a zároveň* pro všechna $j \in \mathcal{I}_2^k$ je $\varepsilon_j = 0$ (!)

(d) Zbývá tedy vypočíst množinu

$$\mathcal{R}_3 := \left\{\varepsilon \in \mathcal{M}^k \;\middle|\; \begin{matrix} \varepsilon_{(11)(12)} = \varepsilon_{(11)(21)} = \varepsilon_{(22)(12)} = \varepsilon_{(22)(21)} = 0 \\ \varepsilon_{(02)(11)} = \varepsilon_{(02)(12)} = \varepsilon_{(10)(22)} = \varepsilon_{(10)(12)} = 0 \end{matrix}\right\} \tag{66}$$

Tím máme určen až na ekvivalenci celý systém řešení systému $\mathcal{S}$.

ad (a) Uveďme podrobně výpočet množiny $\mathcal{R}_1$. Nejprve si všimněme, že z rovnice *30* plyne $\varepsilon_{(02)(21)} \neq 0$, $\varepsilon_{(20)(22)} \neq 0$. Před dvojtečkou schématického zápisu je uvedeno číslo rovnice, ze které bezprostředně plyne uvedená rovnost. Je zde také provedeno dosazení již vypočtených neznámých.

$$\begin{array}{lcl}
\mathit{30} & : & \varepsilon_{(22)(21)} = \frac{\varepsilon_{(02)(21)}\varepsilon_{(20)(22)}}{\varepsilon_{(02)(10)}} \\
\mathit{39} & : & \varepsilon_{(10)(22)} = \frac{\varepsilon_{(10)(21)}\varepsilon_{(01)(22)}}{\varepsilon_{(02)(21)}} \\
\mathit{16} & : & \varepsilon_{(01)(21)} = \frac{\varepsilon_{(20)(21)}\varepsilon_{(01)(11)}}{\varepsilon_{(20)(22)}} \\
\mathit{24} & : & \varepsilon_{(20)(11)} = \frac{\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(10)(21)}}{\varepsilon_{(02)(21)}} \\
\mathit{32} & : & \varepsilon_{(11)(21)} = \frac{\varepsilon_{(10)(21)}\varepsilon_{(01)(11)}}{\varepsilon_{(02)(10)}} \\
\mathit{18} & : & \varepsilon_{(01)(10)} = \frac{\varepsilon_{(20)(21)}\varepsilon_{(01)(22)}}{\varepsilon_{(22)(21)}} = \frac{\varepsilon_{(01)(22)}\varepsilon_{(20)(21)}\varepsilon_{(02)(10)}}{\varepsilon_{(02)(21)}\varepsilon_{(20)(22)}} \\
\mathit{1} & : & \varepsilon_{(01)(12)} = \frac{\varepsilon_{(01)(10)}\varepsilon_{(02)(11)}}{\varepsilon_{(02)(10)}} = \frac{\varepsilon_{(01)(22)}\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(20)(21)}}{\varepsilon_{(02)(21)}\varepsilon_{(20)(22)}} \\
\mathit{17} & : & \varepsilon_{(01)(20)} = \frac{\varepsilon_{(20)(22)}\varepsilon_{(01)(12)}}{\varepsilon_{(22)(21)}} = \frac{\varepsilon_{(01)(22)}\varepsilon_{(02)(10)}\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(20)(21)}}{\varepsilon_{(02)(21)}\varepsilon_{(20)(22)}} \\
\mathit{28} & : & \varepsilon_{(02)(20)} = \frac{\varepsilon_{(20)(21)}\varepsilon_{(02)(11)}}{\varepsilon_{(22)(21)}} = \frac{\varepsilon_{(20)(21)}\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(02)(10)}}{\varepsilon_{(02)(21)}\varepsilon_{(20)(22)}} \\
\mathit{33} & : & \varepsilon_{(10)(11)} = \frac{\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(10)(22)}}{\varepsilon_{(22)(21)}} = \frac{\varepsilon_{(01)(22)}\varepsilon_{(02)(10)}\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(10)(21)}}{\varepsilon^2_{(02)(21)}\varepsilon_{(20)(22)}} \\
\mathit{21} & : & \varepsilon_{(20)(12)} = \frac{\varepsilon_{(20)(22)}\varepsilon_{(10)(22)}}{\varepsilon_{(02)(10)}} = \frac{\varepsilon_{(01)(22)}\varepsilon_{(10)(21)}\varepsilon_{(20)(21)}\varepsilon_{(02)(11)}}{\varepsilon^2_{(02)(21)}\varepsilon_{(20)(22)}} \\
\mathit{34} & : & \varepsilon_{(10)(12)} = \frac{\varepsilon_{(02)(10)}\varepsilon_{(20)(12)}}{\varepsilon_{(20)(22)}} = \frac{\varepsilon_{(01)(22)}\varepsilon_{(02)(10)}\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(10)(21)}\varepsilon_{(20)(21)}}{\varepsilon^2_{(20)(22)}\varepsilon^2_{(02)(21)}} \\
\mathit{19} & : & \varepsilon_{(11)(12)} = \frac{\varepsilon_{(10)(11)}\varepsilon_{(02)(21)}}{\varepsilon_{(02)(10)}} = \frac{\varepsilon_{(01)(22)}\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(10)(21)}}{\varepsilon_{(02)(21)}\varepsilon_{(20)(22)}} \\
\mathit{22} & : & \varepsilon_{(22)(12)} = \frac{\varepsilon_{(02)(22)}\varepsilon_{(10)(21)}}{\varepsilon_{(02)(10)}} \\
\mathit{29} & : & \varepsilon_{(02)(12)} = \frac{\varepsilon_{(02)(22)}\varepsilon_{(20)(21)}}{\varepsilon_{(20)(22)}}
\end{array}$$

V tuto chvíli jsme využili 15 rovnic. Nyní nastává zajímavý okamžik: ostatní rovnice jsou buď automaticky splněny, nebo je jejich platnost implikována platností *dvou* rovnic *2* a *15.* Po dosazení mají tyto rovnice tvar

$$2 \quad : \quad \varepsilon_{(01)(22)}\varepsilon_{(02)(10)}\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(20)(21)} = \varepsilon_{(01)(11)}\varepsilon_{(02)(22)}\varepsilon_{(02)(21)}\varepsilon_{(20)(21)}$$

$$15 \quad : \quad \varepsilon_{(02)(22)}\varepsilon_{(02)(21)}\varepsilon_{(10)(21)}\varepsilon_{(01)(11)} = \varepsilon_{(02)(10)}\varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(10)(21)}\varepsilon_{(01)(22)}$$

Diskuse těchto dvou rovnic již není složitá, proto uvedeme jen výsledek: množinu $\mathcal{R}_1$ lze zapsat pomocí čtyř matic s parametry

$$\varepsilon_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_7 & 0 & x_9 & x_{10} & 0 & t_{12} \\ 0 & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{18} & 0 & 0 \\ x_3 & x_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & x_{10} & 0 & t_{18} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{12}\,t_{18}}{t_7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{12}x_{18}}{t_7} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x_4x_{20}t_7}{t_{12}t_{18}} & \frac{x_{20}x_9x_4t_7}{t_{18}t_{12}^2} & t_3 & x_4 & \frac{x_4x_{20}x_9}{t_{12}t_{18}} & \frac{x_{20}t_3}{t_{18}} \\ 0 & 0 & t_7 & \frac{x_{20}x_9t_7}{t_{12}t_{18}} & x_9 & \frac{x_9x_4t_7}{t_3t_{12}} & \frac{x_9x_4t_7x_{20}}{t_3t_{12}t_{18}} & t_{12} \\ \frac{x_4x_{20}t_7}{t_{12}t_{18}} & t_7 & 0 & 0 & \frac{x_9x_{16}x_4t_7}{t_{12}^2t_{18}} & \frac{x_{16}x_4}{t_{12}} & \frac{x_{20}x_9x_4x_{16}t_7}{t_{18}^2t_{12}^2} & x_{16} \\ \frac{x_{20}x_9x_4t_7}{t_{18}t_{12}^2} & \frac{x_{20}x_9t_7}{t_{12}t_{18}} & 0 & 0 & \frac{x_9x_{16}}{t_{12}} & t_{18} & \frac{x_{20}x_9x_{16}x_4}{t_{12}^2t_{18}} & x_{20} \\ t_3 & x_9 & \frac{x_9x_{16}x_4t_7}{t_{12}^2t_{18}} & \frac{x_9x_{16}}{t_{12}} & 0 & 0 & \frac{x_9x_{16}x_4}{t_{12}t_{18}} & \frac{x_{16}t_3}{t_7} \\ x_4 & \frac{x_9x_4t_7}{t_3t_{12}} & \frac{x_{16}x_4}{t_{12}} & t_{18} & 0 & 0 & \frac{x_9x_4x_{16}}{t_3t_{12}} & \frac{t_{12}t_{18}}{t_7} \\ \frac{x_4x_{20}x_9}{t_{12}t_{18}} & \frac{x_9x_4t_7x_{20}}{t_3t_{12}t_{18}} & \frac{x_{20}x_9x_4x_{16}t_7}{t_{18}^2t_{12}^2} & \frac{x_{20}x_9x_{16}x_4}{{t_{12}}^2t_{18}} & \frac{x_9x_{16}x_4}{t_{12}t_{18}} & \frac{x_9x_4x_{16}}{t_3t_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{x_{20}t_3}{t_{18}} & t_{12} & x_{16} & x_{20} & \frac{x_{16}t_3}{t_7} & \frac{t_{12}t_{18}}{t_7} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{t_4\,x_{20}\,t_7}{t_{12}\,t_{18}} & 0 & 0 & t_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_7 & 0 & 0 & x_{10} & \frac{x_{10}\,x_{20}}{t_{18}} & t_{12} \\ \frac{t_4\,x_{20}\,t_7}{t_{12}x_{18}} & t_7 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{16}\,t_4}{t_{12}} & 0 & x_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{18} & 0 & x_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_4 & x_{10} & \frac{x_{16}\,t_4}{t_{12}} & t_{18} & 0 & 0 & \frac{x_{10}\,x_{16}}{t_7} & \frac{t_{12}\,t_{18}}{t_7} \\ 0 & \frac{x_{10}\,x_{20}}{t_{18}} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{10}\,x_{16}}{t_7} & 0 & 0 \\ 0 & t_{12} & x_{16} & x_{20} & 0 & \frac{t_{12}\,t_{18}}{t_7} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_7 & \frac{x_{20}\,x_9\,t_7}{t_{12}\,t_{18}} & x_9 & x_{10} & \frac{x_{10}\,x_{20}}{t_{18}} & t_{12} \\ 0 & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{16} \\ 0 & \frac{x_{20}\,x_9\,t_7}{t_{12}\,t_{18}} & 0 & 0 & \frac{x_9\,x_{16}}{t_{12}} & t_{18} & 0 & x_{20} \\ 0 & x_9 & 0 & \frac{x_9\,x_{16}}{t_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{10} & 0 & t_{18} & 0 & 0 & \frac{x_{10}\,x_{16}}{t_7} & \frac{t_{12}\,t_{18}}{t_7} \\ 0 & \frac{x_{10}\,x_{20}}{t_{18}} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{10}\,x_{16}}{t_7} & 0 & 0 \\ 0 & t_{12} & x_{16} & x_{20} & 0 & \frac{t_{12}\,t_{18}}{t_7} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V zápisu matic užíváme konvenci, že nenulové parametry (řešení bylo odvozeno za předpokladu jejich nenulovosti) v dané matici značíme písmenem t a ostatní, které mohou být i nulové písmenem x. Tuto konvenci užíváme i dále.

ad (b) Výpočet množiny $\mathcal{R}_2$ nebudeme podrobně rozepisovat. V předchozím případě se závěrečná diskuse (tzn. okamžik kdy musíme přidat další předpoklady abychom mohli postoupit v řešení) týkala pouze dvou rovnic; to nyní nenastane, závěrečná diskuse vychází z 18 rovnic a je tudíž značně složitější a výsledek lze zapsat pomocí 16 kontrakčních matic:

$$
\varepsilon_{2,1} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t_7 & x_8 & t_9 & x_{10} & 0 & 0 \\
0 & t_7 & 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & x_8 & 0 & 0 & x_{17} & x_{18} & 0 & 0 \\
x_3 & t_9 & x_{13} & x_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{10} & 0 & x_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\varepsilon_{2,2} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t_7 & 0 & t_9 & x_{10} & 0 & 0 \\
0 & t_7 & 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 & 0 \\
x_3 & t_9 & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & x_{10} & 0 & x_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\varepsilon_{2,3} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{x_3\,x_{11}}{t_9} & x_2 & x_3 & x_4 & \frac{x_3\,x_{11}}{t_7} & x_6 \\
0 & 0 & t_7 & 0 & t_9 & 0 & x_{11} & 0 \\
\frac{x_3\,x_{11}}{t_9} & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & t_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_3\,x_{11}}{t_7} & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\varepsilon_{2,4} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{x_3\,x_{11}}{t_9} & x_2 & x_3 & 0 & \frac{x_3\,x_{11}}{t_7} & x_6 \\
0 & 0 & t_7 & x_8 & t_9 & 0 & x_{11} & 0 \\
\frac{x_3\,x_{11}}{t_9} & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & t_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_3\,x_{11}}{t_7} & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\varepsilon_{2,5} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{x_3x_{11}}{t_9} & x_2 & x_3 & x_4 & \frac{x_3\,x_{11}}{t_7} & 0 \\
0 & 0 & t_7 & 0 & t_9 & x_{10} & x_{11} & 0 \\
\frac{x_3\,x_{11}}{t_9} & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & t_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & x_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_3\,x_{11}}{t_7} & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\varepsilon_{2,6} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{x_3\,x_{11}}{t_9} & x_2 & x_3 & 0 & \frac{x_3\,x_{11}}{t_7} & 0 \\
0 & 0 & t_7 & x_8 & t_9 & x_{10} & x_{11} & 0 \\
\frac{x_3\,x_{11}}{t_9} & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & t_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_3\,x_{11}}{t_7} & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\varepsilon_{2,7} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{t_{12}x_8x_{13}x_{18}}{t_7t_{17}t_9} & \frac{x_8x_{13}x_{18}}{t_{17}x_7} & t_3 & \frac{x_{13}x_{18}t_{12}}{t_{17}t_7} & \frac{t_{12}x_8x_{13}x_{18}}{t_{17}{t_7}^2} & \frac{t_3t_{12}x_8}{t_7t_9} \\
0 & 0 & t_7 & x_8 & t_9 & \frac{x_{13}x_{18}t_9}{t_{17}t_3} & \frac{t_{12}x_8x_{13}x_{18}}{t_{17}t_3t_7} & t_{12} \\
\frac{t_{12}x_8x_{13}x_{18}}{t_7t_{17}t_9} & t_7 & 0 & 0 & x_{13} & \frac{x_{13}t_{12}x_{18}}{t_7t_9} & \frac{x_{13}t_{12}x_8}{t_7t_9} & \frac{t_{12}t_{17}}{t_9} \\
\frac{x_8x_{13}x_{18}}{t_{17}t_7} & x_8 & 0 & 0 & t_{17} & x_{18} & \frac{t_{12}x_8x_{13}x_{18}}{{t_7}^2t_9} & \frac{x_8t_{12}x_{18}}{t_7t_9} \\
t_3 & t_9 & x_{13} & t_{17} & 0 & 0 & \frac{x_{13}t_{12}}{t_7} & \frac{t_{12}t_{17}t_3}{t_9t_7} \\
\frac{x_{13}x_{18}t_{12}}{t_{17}t_7} & \frac{x_{13}x_{18}t_9}{t_{17}t_3} & \frac{x_{13}t_{12}x_{18}}{t_7t_9} & x_{18} & 0 & 0 & \frac{x_{13}x_{18}t_{12}}{t_3t_7} & \frac{t_{12}x_{18}}{t_7} \\
\frac{t_{12}x_8x_{13}x_{18}}{t_{17}{t_7}^2} & \frac{t_{12}x_8x_{13}x_{18}}{t_{17}t_3t_7} & \frac{x_{13}t_{12}x_8}{t_7t_9} & \frac{t_{12}x_8x_{13}x_{18}}{{t_7}^2t_9} & \frac{x_{13}t_{12}}{t_7} & \frac{x_{13}x_{18}t_{12}}{t_3t_7} & 0 & 0 \\
\frac{t_3t_{12}x_8}{t_7t_9} & t_{12} & \frac{t_{12}t_{17}}{t_9} & \frac{x_8t_{12}x_{18}}{t_7t_9} & \frac{t_{12}t_{17}t_3}{t_9t_7} & \frac{t_{12}x_{18}}{t_7} & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\varepsilon_{2,8} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t_7 & x_8 & t_9 & x_{10} & \frac{t_{12}x_8x_{10}}{t_7t_9} & t_{12} \\
0 & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{12}t_{17}}{t_9} \\
0 & x_8 & 0 & 0 & t_{17} & x_{18} & 0 & \frac{x_8t_{12}x_{18}}{t_7t_9} \\
0 & t_9 & 0 & t_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{10} & 0 & x_{18} & 0 & 0 & \frac{x_{10}t_{12}t_{17}}{t_9t_7} & \frac{t_{12}x_{18}}{t_7} \\
0 & \frac{t_{12}x_8x_{10}}{t_7t_9} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{10}t_{12}t_{17}}{t_9t_7} & 0 & 0 \\
0 & t_{12} & \frac{t_{12}t_{17}}{t_9} & \frac{x_8t_{12}x_{18}}{t_7t_9} & 0 & \frac{t_{12}x_{18}}{t_7} & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\varepsilon_{2,9} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t_7 & x_8 & t_9 & x_{10} & \frac{t_{12}x_8x_{10}}{t_7t_9} & t_{12} \\
0 & t_7 & 0 & 0 & t_{13} & 0 & \frac{t_{13}t_{12}x_8}{t_7t_9} & \frac{t_{12}x_{17}}{t_9} \\
0 & x_8 & 0 & 0 & x_{17} & 0 & 0 & 0 \\
0 & t_9 & t_{13} & x_{17} & 0 & 0 & \frac{t_{13}t_{12}}{t_7} & 0 \\
0 & x_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{10}t_{12}x_{17}}{t_9t_7} & 0 \\
0 & \frac{t_{12}x_8x_{10}}{t_7t_9} & \frac{t_{13}t_{12}x_8}{t_7t_9} & 0 & \frac{t_{13}t_{12}}{t_7} & \frac{x_{10}t_{12}x_{17}}{t_9t_7} & 0 & 0 \\
0 & t_{12} & \frac{t_{12}x_{17}}{t_9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\varepsilon_{2,10} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t_7 & 0 & t_9 & x_{10} & 0 & t_{12} \\
0 & t_7 & 0 & 0 & t_{13} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & t_9 & t_{13} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{13}t_{12}}{t_7} & 0 \\
x_4 & x_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{13}t_{12}}{t_7} & 0 & 0 & 0 \\
0 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\varepsilon_{2,11} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{x_3t_{12}t_8x_{10}}{t_7{t_9}^2} & \frac{t_8x_{10}x_3}{t_7t_9} & x_3 & \frac{x_{10}t_{12}x_3}{t_7x_9} & \frac{x_3t_{12}t_8x_{10}}{{t_7}^2t_9} & \frac{x_3t_{12}t_8}{t_7t_9} \\
0 & 0 & t_7 & t_8 & t_9 & x_{10} & \frac{t_{12}t_8x_{10}}{t_7x_9} & t_{12} \\
\frac{x_3t_{12}t_8x_{10}}{t_7{t_9}^2} & t_7 & 0 & 0 & t_{13} & 0 & \frac{t_{13}t_{12}t_8}{t_7t_9} & 0 \\
\frac{t_8x_{10}x_3}{t_7t_9} & t_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & t_9 & t_{13} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{13}t_{12}}{t_7} & 0 \\
\frac{x_{10}t_{12}x_3}{t_7x_9} & x_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_3t_{12}t_8x_{10}}{{t_7}^2t_9} & \frac{t_{12}t_8x_{10}}{t_7t_9} & \frac{t_{13}t_{12}t_8}{t_7t_9} & 0 & \frac{t_{13}t_{12}}{t_7} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_3t_{12}t_8}{t_7t_9} & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\varepsilon_{2,12} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{x_3x_{11}}{t_9} & \frac{x_6x_{10}}{t_{12}} & x_3 & \frac{x_6x_{10}}{t_8} & \frac{x_3x_{11}}{t_7} & x_6 \\
0 & 0 & t_7 & t_8 & t_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\
\frac{x_3x_{11}}{t_9} & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_6x_{10}}{t_{12}} & t_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & t_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_6x_{10}}{t_8} & x_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_3x_{11}}{t_7} & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_6 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\varepsilon_{2,13} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{x_3x_{11}}{t_9} & 0 & x_3 & x_4 & \frac{x_3x_{11}}{t_7} & 0 \\
0 & 0 & t_7 & 0 & t_9 & x_{10} & x_{11} & t_{12} \\
\frac{x_3x_{11}}{t_9} & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & t_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & x_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_3x_{11}}{t_7} & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\varepsilon_{2,14} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{x_3x_{11}}{t_9} & 0 & x_3 & x_4 & \frac{x_3x_{11}}{t_7} & x_6 \\
0 & 0 & t_7 & 0 & t_9 & 0 & x_{11} & t_{12} \\
\frac{x_3x_{11}}{t_9} & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & t_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_3x_{11}}{t_7} & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_6 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\varepsilon_{2,15} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t_7 & 0 & t_9 & x_{10} & 0 & t_{12} \\
0 & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{18} & 0 & 0 \\
x_3 & t_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & x_{10} & 0 & t_{18} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{12}t_{18}}{t_7} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{12}t_{18}}{t_7} & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\varepsilon_{2,16} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{x_3t_{12}t_8x_{10}}{t_7{t_9}^2} & \frac{t_8x_{10}x_3}{t_7t_9} & x_3 & \frac{x_{10}t_{12}x_3}{t_7x_9} & \frac{x_3t_{12}t_8x_{10}}{{t_7}^2t_9} & \frac{x_3x_{12}t_8}{t_7t_9} \\
0 & 0 & t_7 & t_8 & t_9 & x_{10} & \frac{t_{12}t_8x_{10}}{t_7x_9} & t_{12} \\
\frac{x_3t_{12}t_8x_{10}}{t_7{t_9}^2} & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{t_8x_{10}x_3}{t_7t_9} & t_8 & 0 & 0 & 0 & t_{18} & 0 & \frac{t_8t_{12}t_{18}}{t_7t_9} \\
x_3 & t_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_{10}t_{12}x_3}{t_7t_9} & x_{10} & 0 & t_{18} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{12}t_{18}}{t_7} \\
\frac{x_3t_{12}t_8x_{10}}{{t_7}^2t_9} & \frac{t_{12}t_8x_{10}}{t_7t_9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{x_3t_{12}t_8}{t_7t_9} & t_{12} & 0 & \frac{t_8t_{12}t_{18}}{t_7t_9} & 0 & \frac{t_{12}t_{18}}{t_7} & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

ad (c) Nyní zbývá vypočíst množinu $\mathcal{R}_3$. Jak jsme předeslali, diskuse je značně rozvětvená, pokud položíme některé neznámé rovné nule. Z rovnice *1* a *21* vidíme, že musí platit $\varepsilon_{(01)(12)} = 0$, $\varepsilon_{(20)(12)} = 0$. V tomto případě je tedy nulových 10 (!) neznámých. Přesto výsledná diskuse obsahuje 16 rovnic a výsledek lze zapsat pomocí 14 kontrakčních matic. Protože se jedná o matice značně řídké, je výsledek uveden v následující tabulce. Jedno řešení (tj. jedna kontrakční matice) odpovídá jednomu sloupci tabulky.

	$\varepsilon_{3,1}$	$\varepsilon_{3,2}$	$\varepsilon_{3,3}$	$\varepsilon_{3,4}$	$\varepsilon_{3,5}$	$\varepsilon_{3,6}$	$\varepsilon_{3,7}$	$\varepsilon_{3,8}$	$\varepsilon_{3,9}$	$\varepsilon_{3,10}$	$\varepsilon_{3,11}$	$\varepsilon_{3,12}$	$\varepsilon_{3,13}$	$\varepsilon_{3,14}$
$\varepsilon_{(01)(10)}$	x_1	x_1	x_1	x_1	0	t_1	x_1	x_1	x_1	0	t_1	0	t_1	x_1
$\varepsilon_{(01)(20)}$	0	0	0	0	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	0	0	x_2	x_2	$\frac{x_1x_{17}}{t_{16}}$
$\varepsilon_{(01)(11)}$	x_3	x_3	t_3	0	0	0	x_3	x_3	x_3	0	0	x_3	x_3	0
$\varepsilon_{(01)(22)}$	t_4	0	0	0	0	0	0	t_4	t_4	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{(01)(12)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{(01)(21)}$	0	0	t_6	x_6	0	0	t_6	t_6	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{(02)(10)}$	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7
$\varepsilon_{(02)(20)}$	0	x_8	x_8	x_8	x_8	x_8	x_8	$\frac{x_2x_{12}}{t_4}$	0	x_8	x_8	x_8	x_8	x_8
$\varepsilon_{(02)(11)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{(02)(22)}$	x_{10}	x_{10}	0	0	0	0	0	$\frac{x_2x_{12}}{t_6}$	x_{10}	0	0	x_{10}	x_{10}	0
$\varepsilon_{(02)(12)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{(02)(21)}$	t_{12}	x_{12}	t_{12}	x_{12}	0	0	0	x_{12}	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{(10)(11)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	x_{13}	x_{13}	x_{13}	x_{13}	x_{13}	$\frac{x_1x_{17}}{t_{20}}$
$\varepsilon_{(10)(22)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{(10)(12)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{(10)(21)}$	0	0	0	x_{16}	0	0	0	0	0	t_{16}	t_{16}	0	0	t_{16}
$\varepsilon_{(20)(11)}$	0	0	0	0	x_{17}	0	0	0	0	x_{17}	0	x_{17}	0	x_{17}
$\varepsilon_{(20)(22)}$	0	0	0	0	x_{18}	x_{18}	$\frac{x_{20}x_3}{t_6}$	0	x_{18}	x_{18}	x_{18}	x_{18}	x_{18}	x_{18}
$\varepsilon_{(20)(12)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{(20)(21)}$	0	0	0	x_{20}	t_{20}	t_{20}	x_{20}	0	0	0	0	0	0	t_{20}
$\varepsilon_{(11)(12)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{(11)(21)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{(22)(12)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{(22)(21)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Příklad 2. Nyní můžeme začít s vyhodnocováním řešení. Uveďme příklad dalšího postupu.

a) Vezmeme například matici $\varepsilon_{1,2}$ a nechť všechny parametry v ní obsažené jsou nenulové. Ptáme se, zda ji lze renormalizovat na tvar matice (38). Pak by výsledná gradovaná kontrakce odpovídající této kontrakční matici byla izomorfní algebře $sl(3,\mathbb{C})$ pro libovolné nenulové hodnoty parametrů. Renormalizační matice α nás podle (30) zajímá ve tvaru:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a_{01}a_{10}}{a_{11}} & \frac{a_{01}a_{20}}{a_{21}} & \frac{a_{01}a_{11}}{a_{12}} & \frac{a_{01}a_{22}}{a_{20}} & \frac{a_{01}a_{12}}{a_{10}} & \frac{a_{01}a_{21}}{a_{22}} \\ 0 & 0 & \frac{a_{02}a_{10}}{a_{12}} & \frac{a_{02}a_{20}}{a_{22}} & \frac{a_{02}a_{11}}{a_{10}} & \frac{a_{02}a_{22}}{a_{21}} & \frac{a_{02}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{02}a_{21}}{a_{20}} \\ \frac{a_{01}a_{10}}{a_{11}} & \frac{a_{02}a_{10}}{a_{12}} & 0 & 0 & \frac{a_{10}a_{11}}{a_{21}} & \frac{a_{10}a_{22}}{a_{02}} & \frac{a_{10}a_{12}}{a_{22}} & \frac{a_{10}a_{21}}{a_{01}} \\ \frac{a_{01}a_{20}}{a_{21}} & \frac{a_{02}a_{20}}{a_{22}} & 0 & 0 & \frac{a_{20}a_{11}}{a_{01}} & \frac{a_{20}a_{22}}{a_{12}} & \frac{a_{20}a_{12}}{a_{02}} & \frac{a_{20}a_{21}}{a_{11}} \\ \frac{a_{01}a_{11}}{a_{12}} & \frac{a_{02}a_{11}}{a_{10}} & \frac{a_{10}a_{11}}{a_{21}} & \frac{a_{20}a_{11}}{a_{01}} & 0 & 0 & \frac{a_{11}a_{12}}{a_{20}} & \frac{a_{11}a_{21}}{a_{02}} \\ \frac{a_{01}a_{22}}{a_{20}} & \frac{a_{02}a_{22}}{a_{21}} & \frac{a_{10}a_{22}}{a_{02}} & \frac{a_{20}a_{22}}{a_{12}} & 0 & 0 & \frac{a_{22}a_{12}}{a_{01}} & \frac{a_{22}a_{21}}{a_{10}} \\ \frac{a_{01}a_{12}}{a_{10}} & \frac{a_{02}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{10}a_{12}}{a_{22}} & \frac{a_{20}a_{12}}{a_{02}} & \frac{a_{11}a_{12}}{a_{20}} & \frac{a_{22}a_{12}}{a_{01}} & 0 & 0 \\ \frac{a_{01}a_{21}}{a_{22}} & \frac{a_{02}a_{21}}{a_{20}} & \frac{a_{10}a_{21}}{a_{01}} & \frac{a_{20}a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{21}}{a_{02}} & \frac{a_{22}a_{21}}{a_{10}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Konstatujme, že soustava 24 rovnic, která vznikla z maticové rovnosti $\varepsilon_{1,2} \bullet \ \alpha = \kappa$ má řešení v $\mathbb{C}$. Matici $\varepsilon_{1,2}$ tedy lze pro případ jejích nenulových parametrů renormalizovat na matici κ tudíž odpovídající gradovaná kontrakce je izomorfní $sl(3,\mathbb{C})$.

b) Položme nyní v matici $\varepsilon_{1,2}$ parametr $x_{16} = 0$, ostatní nenulové a výslednou matici označme $\varepsilon_{1,2}^{16p}$. Soustava rovnic $\varepsilon_{1,2}^{16p} \bullet \alpha = \varepsilon_{1,2}^{16,I}$ kde

$$\varepsilon_{1,2}^{16,I} = \begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

má opět řešení v $\mathbb{C}$, tudíž $\varepsilon_{1,2}^{16p}$ lze normalizovat na tvar matice $\varepsilon_{1,2}^{16,I}$. Aplikujme nyní na matici $\varepsilon_{1,2}^{16,I}$ všechny permutace odpovídající $A \in H_3$. Množina $E_9 := \left\{ (\varepsilon_{1,2}^{16,I})^A \;\middle|\; A \in H_3 \right\}$ má 8 prvků:

$$\varepsilon_{1,2}^{16,I} = \begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{1,2}^{16,II} = \begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{1,2}^{16,III} = \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&1&0\\ 0&1&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{1,2}^{16,IV} = \begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{1,2}^{16,V} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&0&0&1&1\\ 1&0&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{1,2}^{16,VI} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{1,2}^{16,VII} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_{1,2}^{16,VIII} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

c) Uvažujme matici $\varepsilon_{1,2}^{20p}$ tj. vzniklou z $\varepsilon_{1,2}$ substitucí $x_{20} = 0$ a ostatní parametry předpokládáme nenulové. Analogické značení budeme užívat i dále. Platí, že matici $\varepsilon_{1,2}^{20p}$ lze normalizovat na tvar matice $\varepsilon_{1,2}^{16,VI}$. Tím jsme vyčerpali všechny prvky $\varepsilon \in \mathcal{R}_1$, pro které platí $\nu(\varepsilon) = 9$. Snadným rozborem zjistíme, že se v $\mathcal{R}_1$ *nevyskytuje* žádné řešení ε s vlastností $1 \leq \nu(\varepsilon) < 9$.

d) Ta řešení z množiny $\mathcal{R}_2$, jež mají na místech z $\mathcal{I}_1^k$ nenulový prvek, jsou ekvivalentní nějakému řešení z $\mathcal{R}_1$. Toho jsme samozřejmě mohli využít již při definici množiny $\mathcal{R}_2$. Položení čtyř neznámých rovných nule by však diskusi příliš nezjednodušilo, resp. výsledný nejvýhodnější algoritmický postup by byl až na značení podobný s naším. Rozborem zbývajících řešení $\varepsilon \in \mathcal{R}_2$, $\varepsilon_i = 0$, $i \in \mathcal{I}_1^k$ zjistíme, že se zde již žádné s devíti nebo méně nulami ($1 \leq \nu(\varepsilon) \leq 9$) nevyskytuje. Protože pro $\varepsilon \in \mathcal{R}_3$ platí $\nu(\varepsilon) \geq 15$, jsme oprávněni k tomuto závěru: *všechna řešení $\varepsilon \in \mathcal{R}$ systému rovnic $\mathcal{S}$, pro která platí $\nu(\varepsilon) = 9$ lze normalizovat na řešení z osmiprvkové množiny E_9. Navíc platí, že*

$$\min\big\{\nu(\varepsilon) \in \{1,2,3,\dots\} \;\big|\; \varepsilon \in \mathcal{R}\big\} = 9$$

Vraťme se k již zmíněné hypotetické možnosti generovat systém řešení (nebo jeho větší část) z nějaké vhodné matice z $\mathcal{R}$ operací násobení po složkách. Je jasné, že kandidát na tuto matici musí ležet v E_9. Množinu vzniklou vzájemným pronásobením po složkách všech matic z E_9 mezi sebou označme P. Je téměř na první pohled vidět, že platí

$$\min\{\nu(\varepsilon) \mid \varepsilon \in P \setminus E_9\} = 12$$

a že například matice vzniklá normalizací z $\varepsilon_{1,3}^p$, $\nu(\varepsilon_{1,3}^p) = 12$ neleží v P. Tedy jsme uvedli řešení, které generováním z ideálního kandidáta *nevzniklo*.

Příklad 3. Můžeme ještě uvést základní postřehy týkající se třídy izomorfních gradovaných kontrakcí odpovídajících třídě normalizovaných řešení E_9. Diskutujme například matici $\varepsilon_{1,2}^{16,I}$ a odpovídajícího zástupce - Lieovu algebru $\mathcal{L}^{\varepsilon_{1,2}^{16,I}}$. Lineární podprostor $\mathcal{L}_2$ definovaný jako

$$\mathcal{L}_2 := \{X_{10},\, X_{20},\, X_{11},\, X_{22},\, X_{12},\, X_{21}\}_{lin} \tag{67}$$

tvoří podalgebru algebry $\mathcal{L}^{\varepsilon_{1,2}^{16,I}}$ a podprostor $\mathcal{L}_1 := \{X_{10},\, X_{11},\, X_{12}\}$ je centrum této podalgebry. Otázce rozkladu těchto Lieových algeber na semidirektní součin se budeme věnovat v další práci.

Reference

[1] J. Patera, H. Zassenhaus, Linear Algebra & Its Appl. **112** (1989) 87-159

[2] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová, *On the fine gradings of simple classical Lie algebras*, Int. J. Mod. Phys. **12** (1997), 189–194.

[3] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová *On the maximal Abelian subgroups of diagonable automorphisms of simple classical Lie algebras*, in “XXI International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics”, World Scientific, Singapore 1997, 116-120.

[4] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová *On Lie Gradings II*, Linear Algebra and Its Appl. **277** (1998) 97-125.

[5] J. Patera, H. Zassenhaus, *The Pauli matrices in n dimensions and finest gradings of simple Lie algebras of type A_{n-1},* J. Math. Phys. **29** (1988), 665–673.

[6] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová, J. Tolar, *Automorphisms of the fine grading of $sl(n, \mathbb{C})$ associated with the generalized Pauli matrices*, J. Math. Phys. Vol. 43, No.2 (2002), pp. 1083-1094

[7] M. de Montigny and J. Patera, *Discrete and continuous graded contractions of Lie algebras and superalgebras*, J. Phys. A: Math. Gen. **24** (1991), 525-549.

Obsah

1 Úvod **1**

2 Definice gradací Lieových algeber **2**

3 Pauliho gradace **5**

4 Gradované kontrakce Lieových algeber **7**

5 Rovnice kontrakcí pro Pauliho gradaci sl(3,C) **10**

6 Grupa symetrie Pauliho gradace **14**

7 Užití grupy symetrie k řešení kontrakčních rovnic **18**

Odkazy **27**

Obsah **28**