# UNIVERZÁLNí PROCESY PRO TŘI ČÁSTICE

MARTIN ŠTEFAŇÁK

## Obsah

## 1. Úvod

Kvantové počítače procházejí v posledních letech bouřlivým vývojem. Praktická realizace kvantových počítačů je zatím spíše otázkou vzdálenější budoucnosti, jejich teoretické možnosti jsou však velmi zajímavé a v mnohém převyšují možnosti klasických počítačů - příkladem může být tzv. Shorův algoritmus, který dokáže efektivně provést rozklad daného čísla na prvočísla ( tj. doba potřebná k výpočtu roste s délkou vstupu pouze polynomiálně ). Mezi procesy, které kvantové počítače využívají, patří příprava provázaných stavů nebo "kopií" vstupu. Tyto procesy jsou příkladem tzv. univerzálních procesů. Jejich základní vlastností je to, že transformují všechny stavy kvantového systému "stejným způsobem". Linearita kvantové mechaniky však tyto procesy značně omezuje - díky ní například není možné připravit dokonalou kopii libovolného stavu.

Mým úkolem bylo prostudovat univerzální procesy pro dva N-hladinové kvantové systémy a na základě těchto znalostí vytvořit obdobný popis tříčásticových univerzálních procesů. Ověřil jsem tvar výstupní matice hustoty pro univerzální tříčásticové procesy. Ukázal jsem, že nejobecnější univerzální proces pro tři částice je popsán 23 parametry. Pro některé speciální volby těchto parametrů jsem nalezl vlastní hodnoty výstupní matice a určil jsem, kdy jsou (v závislosti na parametrech) pozitivní.

Text je uspořádán následovně : ve druhé části jsem shrnul výsledky pro dvě částice z článku [1] - definice univerzálního procesu jako zobrazení s jistou kovariantní vlastností a jeho obecný popis. Na závěr jsem přidal dva jednoduché příklady univerzálních procesů. Sekce 3. obsahuje výsledky pro tři částice - zobecnění definice univerzálního procesu pro tři systémy, obecnou strukturu univerzálního procesu a výsledky pro speciální volby parametrů. V páté části jsou shrnuty základní vlastnosti algeber $su(n)$, které potřebuji pro popis stavů ( matic hustoty ), univerzálních procesů a provázání.

## 2. Univerzální procesy pro dvě částice - shrnutí

**2.1. Základní příklady, definice univerzálního procesu.** Co se myslí pod pojmem univerzální proces? Základní myšlenka je taková, že univerzální proces transformuje všechny stavy kvantového systému "stejným způsobem". Příkladem by mohl být proces, který se pokusí vytvořit kopii libovolného vstupního stavu. Takový procesu by se dal využít například k určení stavu kvantového systému - díky tomu, že v kvantové mechanice se měřením ovlivňuje stav systému, není možné například určit hodnotu neznámého qubitu, pokud máme k dispozici pouze jednu jeho kopii. Kdybychom si mohli vyrobit dostatečně velký počet dokonalých kopií, mohli bychom provést velký počet měření a určit tak stav původního qubitu s dostatečně velkou přesností. Dokonalou kopii můžeme ale vyrobit jen v případě, kdy známe použitou bazi $|0\rangle$, $|1\rangle$ a stav neznámého qubitu je popsán jedním z těchto bazických vektorů - například pomocí operace CNOT a to tak, že neznámý qubit použijeme jako kontrolní a na druhý vstup v CNOT dáme qubit ve stavu $|0\rangle$. Pak skutečně dostaneme

$$|0\rangle|0\rangle \longrightarrow CNOT \longrightarrow |0\rangle|0\rangle,$$

$$|1\rangle|0\rangle \longrightarrow CNOT \longrightarrow |1\rangle|1\rangle.$$

Protože je to ale lineární transformace, nedokáže CNOT vyrobit kopii superpozice stavů $|0\rangle$ a $|1\rangle$. Pro vstup $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ totiž dostaneme

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|0\rangle \longrightarrow CNOT \longrightarrow \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle,$$

což zřejmě není kopie stavu $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

Jiným příkladem může být proces, kdy je libovolný vstupní stav provázán s daným referenčním stavem tak, že výstup neobsahuje žádné faktorizovatelné složky. Že toho není jednoduché dosáhnout je vidět na následujícím příkladě - uvažujme opět operaci CNOT a referenční stav $|0\rangle + |1\rangle$. Bude-li na vstupu $|0\rangle$ nebo $|1\rangle$, pak výstupní stav - $|01\rangle + |10\rangle$, respektive $|11\rangle + |00\rangle$, je skutečně provázaný. Díky své linearitě ale operace CNOT nedokáže provázat všechny vstupní stavy s referenčním - například vstup $|0\rangle + |1\rangle$ vede k výsledku $(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$, což je faktorizovaný stav. Hlavní omezení na univerzální procesy tedy dává linearita kvantové mechaniky.

Abych mohl přesněji definovat univerzální proces, rozeberu nejprve jednoduchý příklad, na kterém bude vidět základní vlastnost univerzálních procesů - vlastnost kovariance.

Mějme dva qubity, jeden v čistém stavu s vektorem polarizace $\vec{p}$, druhý v nepolarizovém stavu. Systém složený z těchto dvou qubitů je ve stavu popsaném maticí hustoty

$$\rho_{in}(\vec{p}) = |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| \otimes \frac{1}{2}I.$$

Nyní provedeme měření celkového spinu. Výstup bude mít tvar

$$\rho_{out}(\vec{p}) = \frac{P_J \rho_{in}(\vec{p}) P_J}{Tr(P_J \rho_{in}(\vec{p}) P_J)},$$

kde $P_J = \sum_M |JM\rangle\langle JM|$ je projektor na podprostor s celkovým spinem rovným J; v tomto případě jsou možné hodnoty $J = 1$ nebo $J = 0$, M ( projekce celkového spinu do osy $\vec{p}$ ) probíhá od -J do +J. Podle hodnoty J má výstup tvar

$$\rho_{out}(\vec{p}) = \frac{2}{3}|J=1, M=1\rangle\langle J=1, M=1| + \frac{1}{3}|J=1, M=0\rangle\langle J=1, M=0|, \tag{2.1}$$

$$\rho_{out}(\vec{p}) = |J=0, M=0\rangle\langle J=0, M=0|, \tag{2.2}$$

výsledkem pro J=1 je tedy kopie původního stavu ( první sčítanec v (2.1)) plus porucha, pro J=0 je výstup provázaný antisymetrický stav.

Oba tyto procesy mají následující vlastnost. Začneme-li se vstupem $|\vec{p_0}\rangle$, na výstupu bude stav $\rho_{out}(\vec{p_0})$. Přejdeme-li od $|\vec{p_0}\rangle$ unitární transformací $U(\vec{p})$ ke stavu $|\vec{p}\rangle = U(\vec{p})|\vec{p_0}\rangle$, pak výstup bude

$$\rho_{out}(\vec{p}) = U(\vec{p}) \otimes U(\vec{p})\rho_{out}(\vec{p_0})U^\dagger(\vec{p}) \otimes U^\dagger(\vec{p}).$$

Tuto vlastnost budu dále chápat jako definici univerzálního procesu.

**Definice 2.1.** Proces $\mathcal{P}$ je univerzální, pokud následující diagram je komutativní pro libovolnou unitární transformaci $U(p)$

$$\begin{array}{ccc} |p_0\rangle & \longrightarrow & |p\rangle = U(p)|p_0\rangle \\ \mathcal{P}\downarrow & & \downarrow\mathcal{P} \\ \rho_{out}(p_0) & \longrightarrow & \rho_{out}(p) = U(p)\otimes U(p)\rho_{out}(p_0)U^\dagger(p)\otimes U^\dagger(p). \end{array} \tag{2.3}$$

Výstupní stavy univerzálního procesu tedy tvoří dvoučásticovou reprezentaci grupy jednočásticových unitárních transformací $U(N)$.

2.2. **Obecná struktura univerzálního procesu pro dva N-hladinové systémy.** Uvažujme transformaci typu

$$\rho_{in}(p) \otimes \rho_{ref} \longrightarrow \rho_{out}(p),$$

kde $\rho_{ref}$ je blíže neurčený referenční stav a $\rho_{in}(p) = |p\rangle\langle p|$ je projektor na čistý stav se zobecněným Blochovým vektorem $p$. Abychom mohli klasifikovat všechny univerzální kvantové procesy, musíme najít obecný tvar a nalézt podmínky, při kterých je splněna podmínka kovariance ( tj. je to univerzální proces ), výstup závisí lineárně na vstupu a je to matice hustoty.

Využijeme toho, že libovolný stav N-hladinového systému můžeme rozepsat pomocí operátorů $A_{ij}$

$$\rho_{in}(p) = 1/N(I + p_{ij}A_{ij}).$$

Nejobecnější výstupní stav je popsán maticí hustoty

$$\rho_{out}(p) = 1/N^2 I \otimes I + \alpha_{ij}^{(1)}(p)A_{ij} \otimes I + \alpha_{ij}^{(2)}(p) I \otimes A_{ij} + K_{ijkl}(p)A_{ij} \otimes A_{kl}.$$

Nyní použijeme podmínku kovariance (2.3) a to, že proces musí lineárně záviset na vstupu. Z linearity plyne, že $\alpha_{ij}^{(1,2)}(p)$ a $K_{ijkl}(p)$ musí být linearní funkce $p$, tj.

$$\alpha_{ij}^{(1,2)}(p) = \alpha^{(1,2)}p_{ij} + \alpha_0^{(1,2)},$$

$$K_{ijkl}(p) = K_{ij}p_{kl} + K_{kl}p_{ij} + K_{ik}p_{jl} + K_{il}p_{jk} + K_{jk}p_{il} + K_{jl}p_{ik} + K_{ijkl}^0. \tag{2.4}$$

Abychom rozhodli, kdy je splněna podmínka kovariance (2.3), musíme porovnat matice $\rho_{out}(p)$ a $U(p)\otimes U(p)\rho_{out}(p_0)U^\dagger(p)\otimes U^\dagger(p)$, kde $U(p)$ je unitární matice převádějící stav $|p_0\rangle$ na stav $|p\rangle$. Platí tedy

$$|p_0\rangle\langle p_0| = 1/N(I+p^0_{ij}A_{ij}),$$

$$|p\rangle\langle p| = U(p)|p_0\rangle\langle p_0|U^\dagger(p) = 1/N^2(I+p^0_{ij}U(p)A_{ij}U^\dagger(p)). \tag{2.5}$$

Porovnáním jednotlivých členů $\rho_{out}(p)$ a $U(p)\otimes U(p)\rho_{out}(p_0)U^\dagger(p)\otimes U^\dagger(p)$ dostaneme rovnice

$$\alpha^{(1)}_{ij}(p)A_{ij}\otimes I = \alpha^{(1)}_{ij}(p_0)U(p)A_{ij}U^\dagger(p)\otimes I, \tag{2.6}$$

$$\alpha^{(2)}_{ij}(p)I\otimes A_{ij} = \alpha^{(2)}_{ij}(p_0)I\otimes U(p)A_{ij}U^\dagger(p), \tag{2.7}$$

$$K_{ijkl}(p)A_{ij}\otimes A_{kl} = K_{ijkl}(p_0)(U(p)\otimes U(p))(A_{ij}\otimes A_{kl})(U^\dagger(p)\otimes U^\dagger(p)). \tag{2.8}$$

Rovnice (2.6) a (2.7) jsou díky vztahům (2.5) splněny pro

$$\alpha^{(1,2)}_{ij}(p) = \alpha^{(1,2)}p_{ij}.$$

Ze vztahu (2.4) plyne, že ke splnění rovnice (2.8) je třeba, aby na obou stranách byly pouze členy, které jsou invariantní vůči unitárním transformacím typu $U\otimes U$ ( skalární část ), nebo se při nich transformují stejně jako generátory $A_{ij}$ při transformaci U ( vektorová část ). Při ověřování transformačních vlastností využijeme komutačních relací (5.4) a toho, že každou unitární matici $U$ můžeme zapsat ve tvaru

$$U = \exp(iV),$$

kde V je hermitovská matice, a tedy ji lze rozepsat pomocí generátorů $A_{ij}$. Dále použijeme vztah

$$\exp(A)B\exp(-A) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[A,[...,[A,B]]...]. \tag{2.9}$$

Transformaci $U\otimes U$ můžeme zapsat jako

$$U\otimes U = \exp(iV)\otimes\exp(iV) = (\exp(iV)\otimes I)(I\otimes\exp(iV)) =$$
$$= (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iV)^n\otimes I)(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}I\otimes(iV)^k) = (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iV\otimes I)^n)(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(I\otimes iV)^k) =$$
$$= \exp(iV\otimes I)\exp(I\otimes iV) = \exp(iV\otimes I + I\otimes iV).$$

Členy typu $c_{ijkl}A_{ij}\otimes A_{kl}$ se tedy při transformaci $U\otimes U$ mění na

$$(U\otimes U)(c_{ijkl}A_{ij}\otimes A_{kl})(U^\dagger\otimes U^\dagger) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{i^n}{n!}c_{ijkl}[V\otimes I + I\otimes V,$$
$$[...[V\otimes I + I\otimes V, A_{ij}\otimes A_{kl}]]...]) =$$
$$= c_{ijkl}A_{ij}\otimes A_{kl} + ic_{ijkl}([V,A_{ij}]\otimes A_{kl} + A_{ij}\otimes[V,A_{kl}]) + .... \tag{2.10}$$

Matice $V$ má tvar

$$V = v_{mn}A_{mn},\ v_{mn} = v^*_{nm}.$$

Díky linearitě komutátoru stačí ověřit chování pro $V = A_{mn}$. Členy z prvních komutátorů jsou

$$ic_{ijkl}([A_{mn},A_{ij}]\otimes A_{kl} + A_{ij}\otimes[A_{mn},A_{kl}]) =$$

$$= ic_{ijkl}(A_{mj}\otimes A_{kl}\delta_{in} - A_{in}\otimes A_{kl}\delta_{jm} + A_{ij}\otimes A_{ml}\delta_{kn} - A_{in}\otimes A_{kn}\delta_{lm}). \tag{2.11}$$

Pro invariantní člen musí všechny sčítance v (2.10) kromě nultého vymizet a tedy (2.11) musí být roven nule. To je možné jen v případě $c_{ijkl} = c\delta_{jk}\delta_{il}$; potom je skutečně

$$(2.11) = ic\delta_{jk}\delta_{il}(A_{mj}\otimes Akl\delta_{in} - A_{in}\otimes Akl\delta_{jm} + A_{ij}\otimes A_{ml}\delta_{kn} - A_{in}\otimes A_{kn}\delta_{lm}) =$$
$$= ic(A_{mj}\otimes A_{jn} - A_{in}\otimes A_{mi} + A_{in}\otimes A_{mi} - A_{mj}\otimes A_{jn}) = 0.$$

Invariantní člen je tedy $A_{ij}\otimes A_{ji}$.

Generátory $A_{ab}$ se při transformaci U mění na

$$UA_{ab}U^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}[A_{mn},[...[A_{mn},A_{ab}]...]] = A_{ab} + i[A_{mn},A_{ab}] + ... =$$
$$= A_{ab} + iA_{mb}\delta_{an} - iA_{an}\delta_{mb} + ....$$

Stejným způsobem se chová člen, pro který je $c_{ijkl} = c\delta_{ia}\delta_{lb}\delta_{jk}$ - potom je

$$(2.11) = ic\delta_{ia}\delta_{lb}\delta_{jk}(A_{mj}\otimes Akl\delta_{in} - A_{in}\otimes Akl\delta_{jm} + A_{ij}\otimes A_{ml}\delta_{kn} - A_{in}\otimes A_{kn}\delta_{lm}) =$$
$$= ic(A_{mi}\otimes A_{ib}\delta_{an} - A_{an}\otimes A_{mb} + A_{an}\otimes A_{mb} - A_{ai}\otimes A_{in}\delta_{mb}) =$$
$$= ic(A_{mi}\otimes A_{ib}\delta_{an} - A_{ai}\otimes A_{in}\delta_{mb}).$$

$A_{ki}\otimes A_{il}$ se tedy při transformacích typu $U\otimes U$ chová stejně jako $A_{kl}$ při transformaci $U$. Obdobně hermitovsky sdružený člen - $A_{ik}\otimes A_{li}$, se transformuje stejně jako $A_{lk}$. Ve vztahu (2.8) tedy platí rovnost, pokud je

$$K_{ijkl}(p) = c\delta_{il}\delta_{jk} + \beta p_{il}\delta_{jk} + \beta^* p_{jk}\delta_{il}.$$

Matice hustoty popisující výstupní stav tedy musí být tvaru

$$\rho_{out}(p) = 1/N^2 I\otimes I + \alpha^{(1)}p_{ij}A_{ij}\otimes I + \alpha(2)p_{ij}I\otimes A_{ij} + cA_{ij}\otimes A_{ji} +$$
$$+\beta p_{il}A_{ij}\otimes A_{jl} + \beta^* p_{il}A_{ji}\otimes A_{lj},$$

kde $\alpha^{(1,2)}$, $c\in\mathbb{R}, \beta\in\mathbb{C}$. Obecný univerzální proces je tedy popsán třemi reálnými parametry $(\alpha^{(1,2)}, c)$ a jedním komplexním $(\beta)$. Jejich hodnoty však nemohou být libovolné - $\rho_{out}(p)$ musí být statistický operátor, tj. pozitivní operátor s jednotkovou stopou. Musíme tedy najít vlastní čísla operáoru $\rho_{out}(p)$ v závislosti na parametrech $\alpha^{(1,2)}, c, \beta$ a určit, pro které hodnoty těchto parametrů jsou nezáporná. Díky podmínce kovariance se můžeme omezit na jeden konkrétní stav, například

$$\rho_{in}(p_{ij} = N\delta_{i1}\delta_{j1}) = |1\rangle\langle 1|.$$

Aby se výpočet vlastních čísel co nejvíce zjednodušil, je vhodné nejprve zapsat matici hustoty výstupního stavu ve tvaru direktního součtu. V maticové reprezentaci má výstup tvar

$$\rho_{out}(p_{ij} = N\delta_{i1}\delta_{j1}) = \sum_{i=1}^{4}\oplus p_i\rho_i, \tag{2.12}$$

kde

$$\rho_1 = |11\rangle\langle 11|, \tag{2.13}$$

$$\rho_2 = \sum_{j=2}^{N}(|1j\rangle\langle 1j|(\frac{1}{2(N-1)} + \frac{(\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)})N}{2p_2}) +$$

$$+|j1\rangle\langle j1|(\frac{1}{2(N-1)}+\frac{(\alpha^{(2)}-\alpha^{(1)})N}{2p_2})+$$

$$+|1j\rangle\langle j1|\frac{c+\beta N}{p_2}+|j1\rangle\langle 1j|\frac{c+\beta^* N}{p_2}), \tag{2.14}$$

$$\rho_3=\frac{1}{(N-1)}\sum_{j=2}^{N}|jj\rangle\langle jj|, \tag{2.15}$$

$$\rho_4=\sum_{i,j=2,i<j}^{N}(|ij\rangle\langle ij|\frac{1}{(N-1)(N-2)}+|ji\rangle\langle ji|\frac{1}{(N-1)(N-2)}+$$

$$+|ij\rangle\langle ji|\frac{c}{p_4}+|ji\rangle\langle ij|\frac{c}{p_4}). \tag{2.16}$$

Pravděpodobnosti $p_i(i=1,...,4)$ jsou dány vztahy

$$p_1=1/N^2+(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)})(N-1)+$$

$$+c(1-1/N)+(\beta+\beta^*)N(1-1/N)^2, \tag{2.17}$$

$$p_2=(N-1)(2/N^2+(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)})N(1-2/N)-$$

$$-2c/N-2(\beta+\beta^*)(1-1/N)), \tag{2.18}$$

$$p_3=(N-1)(1/N^2-\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}+$$

$$+c(1-1/N)+(\beta+\beta^*)1/N), \tag{2.19}$$

$$p_4=(N-1)(N-2)(1/N^2-\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}-$$

$$-c/N+(\beta+\beta^*)1/N). \tag{2.20}$$

Matice $\rho_1,...,\rho_4$ jsou normalizovány tak, že $Tr\rho_i=1, i=1,...,4$, a tedy podmínka $Tr\rho_{out}=1$ implikuje

$$p_1+p_2+p_3+p_4=1. \tag{2.21}$$

Vlastní čísla matic $\rho_i$ jsou

$$\lambda_1=p_1, \tag{2.22}$$

$$\lambda_{2\pm}=\frac{p_2}{2(N-1)}\pm\sqrt{(\frac{(\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)})N}{2})^2+|c+N\beta|^2}, \tag{2.23}$$

$$\lambda_3=\frac{p_3}{N-1}, \tag{2.24}$$

$$\lambda_{4\pm}=\frac{p_4}{(N-1)(N-2)}\pm|c|. \tag{2.25}$$

Tím je otázka pozitivity operátoru $\rho_{out}(p)$ vyřešena - $\rho_{out}(p)$ je pozitivní, právě tehdy když všechna vlastní čísla $\lambda_i$ a všechny pravděpodobnosti $p_i$ jsou nezáponá čísla a splňují podmínku (2.21).

Úplná klasifikace univerzálních procesů pro dvě částice je tedy následující - univerzální procesy jsou popsány parametry $\alpha^{(1,2)}, c, \beta$, přičemž jejich povolené hodnoty jsou určeny nerovnostmi

$$p_i \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, i = 1, ..., 4,$$

kde $p_i$ a $\lambda_i$ jsou dány vztahy (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), respektive (2.22), (2.23), (2.24), (2.25). Další vlastnosti univerzálních procesů pro dvě částice lze nalézt v článku [1].

2.3. **Příklady.** Univerzální kopírovací proces pro qubity ( viz. sekce (2.1), proces s $J = 1$ ) je popsán parametry

$$c = 0, \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 1/6, \beta = \beta^* = 1/12,$$

čemuž odpovídají hodnoty pravděpodobností

$$p_1 = 2/3, p_2 = 1/3, p_3 = p_4 = 0.$$

Obecněji univerzální kopírovací proces pro N-hladinový systém je popsán parametry

$$s = 0, \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \frac{N(N+1)-2}{2N^2(N+1)(N-1)}, \beta = \beta^* = \frac{1}{2N(N+1)}.$$

Pravděpodobnosti $p_i$ jsou v tomto případě

$$p_1 = \frac{2}{N+1}, p_2 = \frac{N-1}{N+1}, p_3 = p_4 = 0.$$

Výstupní stav tohoto procesu je popsán maticí hustoty

$$\rho_{copy} = \frac{2}{N+1}|11\rangle\langle 11| + \frac{1}{2(N+1)}\sum_{j=2}^{N}(|1j\rangle\langle 1j| + |j1\rangle\langle j1| + |1j\rangle\langle j1| + |j1\rangle\langle 1j|).$$

Univerzální provazovací proces pro qubity ( viz sekce (2.1), proces s $J = 0$ ) je popsán parametry

$$c = -1/2, \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \beta = 0.$$

Tomu odpovídají hodnoty pravděpodobností

$$p_2 = 1, p_1 = p_3 = p_4 = 0.$$

Obdobný proces pro N-hladinové systémy je popsán parametry

$$c = -\frac{1}{N(N-1)}, \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \beta = 0$$

a hodnotami pravděpodobností

$$p_2 = \frac{2}{N}, p_4 = \frac{N-2}{N}, p_1 = p_3 = 0.$$

Výstupní stav tohoto procesu je popsán maticí hustoty

$$\rho_{ent} = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i,j=1, i\neq j}^{N}(|ij\rangle\langle ij| - |ij\rangle\langle ji|).$$

## 3. Univerzální procesy pro tři N-hladinové systémy

Univerzální proces pro tři kvantové systémy definujeme obdodbně jako pro dvě částice - pomocí podmínky kovariance.

**Definice 3.1.** Proces $\mathcal{P}$ je univerzální, pokud je následující diagram komutativní pro libovolnou unitární transformaci $U(p)$

$$\begin{array}{ccc} |p_0\rangle & \longrightarrow & |p\rangle = U(p)|p_0\rangle \\ \mathcal{P}\downarrow & & \downarrow\mathcal{P} \\ \rho_{out}(p_0) & \longrightarrow & \rho_{out}(p) = U(p)\otimes U(p)\otimes U(p)\rho_{out}(p_0)U^\dagger(p)\otimes U^\dagger(p)\otimes U^\dagger(p). \end{array} \tag{3.1}$$

Výstupní stavy univerzálního procesu tedy tvoří tříčásticovou reprezentaci grupy jednočásticových unitárních transformací $U(N)$.

K popsání obecné struktury opět použijeme operátory $A_{ij}$. Nejobecnější výstupní stav je popsán maticí

$$\rho_{out}(p) = 1/N^3 I\otimes I\otimes I + v_{ij}^{(1)}(p)A_{ij}\otimes I\otimes I + v_{ij}^{(2)}(p)I\otimes A_{ij}\otimes I + v_{ij}^{(3)}(p)I\otimes I\otimes A_{ij}+$$
$$+w_{ijkl}^{(1)}(p)A_{ij}\otimes A_{kl}\otimes I + w_{ijkl}^{(2)}(p)A_{ij}\otimes I\otimes A_{kl} + w_{ijkl}^{(3)}(p)I\otimes A_{ij}\otimes A_{kl}+$$
$$u_{ijklmn}(p)A_{ij}\otimes A_{kl}\otimes A_{mn}. \tag{3.2}$$

Požadavky linearity a podmínku kovariance (3.1) splníme analogicky jako u dvoučásticového procesu - ve výstupu necháme pouze skalární a vektorové části a funkce v, w, u budou lineární v $p$. S použitím výsledků pro dvě částice je ihned zřejmé, že výrazy $A_{ij}\otimes A_{ji}\otimes I$, $A_{ij}\otimes I\otimes A_{ji}$ a $I\otimes A_{ij}\otimes A_{ji}$ jsou invariantní vůči transformacím typu $U\otimes U\otimes U$. Například pro $A_{ij}\otimes A_{ji}\otimes I$ s využitím vztahu (5.4) dostaneme

$$[A_{mn}\otimes I\otimes I + I\otimes A_{mn}\otimes I + I\otimes I\otimes A_{mn}, A_{ij}\otimes A_{ji}\otimes I] =$$
$$[A_{mn}, A_{ij}]\otimes A_{ji}\otimes I + A_{ij}\otimes[A_{mn}, A_{ji}]\otimes I = A_{mj}\otimes A_{jn}\otimes I - A_{in}\otimes A_{mi}\otimes I+$$
$$+A_{in}\otimes A_{mi}\otimes I - A_{mj}\otimes A_{jn}\otimes I = 0.$$

Navíc ale přibude netriviální tříčásticový skalár $A_{ij}\otimes A_{jk}\otimes A_{ki}$ a k němu hermitovsky sdružený člen $A_{ji}\otimes A_{kj}\otimes A_{ik}$. Že je skutečně invariantní se přesvědčíme snadno - stačí ověřit, že komutátor

$$[A_{mn}\otimes I\otimes I + I\otimes A_{mn}\otimes I + I\otimes I\otimes A_{mn}, A_{ij}\otimes A_{jk}\otimes A_{ki}] \tag{3.3}$$

je roven nule. Díky komutačním relacím (5.4) dostaneme

$$(3.3) = [A_{mn}, A_{ij}]\otimes A_{jk}\otimes A_{ki} + A_{ij}\otimes[A_{mn}, A_{jk}]\otimes A_{ki} + A_{ij}\otimes A_{jk}\otimes[A_{mn}, A_{ki}] =$$
$$= \delta_{in}A_{mj}\otimes A_{jk}\otimes A_{ki} - \delta_{jm}A_{in}\otimes A_{jk}\otimes A_{ki} + \delta_{jn}A_{ij}\otimes A_{mk}\otimes A_{ki}-$$
$$-\delta_{km}A_{ij}\otimes A_{jn}\otimes A_{ki} + \delta_{nk}A_{ij}\otimes A_{jk}\otimes A_{mi} - \delta_{mi}A_{ij}\otimes A_{jk}\otimes A_{kn} = 0.$$

Vektorovou část výstupního stavu získáme obdobně - členy typu $A_{ij}\otimes I\otimes I$ se zřejmě transformují jako generátory $A_{ij}$:

$$[A_{mn}\otimes I\otimes I + I\otimes A_{mn}\otimes I + I\otimes I\otimes A_{mn}, A_{ij}\otimes I\otimes I] = [A_{mn}, A_{ij}]\otimes I\otimes I =$$
$$= A_{mj}\otimes I\otimes I\delta_{in} - A_{in}\otimes I\otimes I\delta_{mj}.$$

Z výsledků pro dvě částice je dále vidět, že stejně se chovají i výrazy typu $A_{il} \otimes A_{lj} \otimes I, A_{ij} \otimes A_{kl} \otimes A_{lk}, A_{ik} \otimes A_{kl} \otimes A_{lj}$:

$$[A_{mn} \otimes I \otimes I + I \otimes A_{mn} \otimes I + I \otimes I \otimes A_{mn}, A_{il} \otimes A_{lj} \otimes I] = [A_{mn}, A_{il}] \otimes A_{lj} \otimes I+$$
$$+A_{il} \otimes [A_{mn}, A_{lj}] \otimes I = A_{ml} \otimes A_{lj} \otimes I\delta_{in} - A_{in} \otimes A_{mj} \otimes I + A_{in} \otimes A_{mj} \otimes I - A_{ik} \otimes A_{kn} \otimes I\delta_{mj}$$
$$= A_{ml} \otimes A_{lj} \otimes I\delta_{in} - A_{ik} \otimes A_{kn} \otimes I\delta_{mj},$$

$$[A_{mn} \otimes I \otimes I + I \otimes A_{mn} \otimes I + I \otimes I \otimes A_{mn}, A_{ij} \otimes A_{kl} \otimes A_{lk}] = [A_{mn}, A_{ij}] \otimes A_{kl} \otimes A_{lk}+$$
$$+A_{ij} \otimes [A_{mn}, A_{kl}] \otimes A_{lk} + A_{ij} \otimes A_{kl} \otimes [A_{mn}, A_{lk}] = (A_{mj}\delta_{in} - A_{in}\delta_{mj}) \otimes A_{kl} \otimes A_{lk}\delta_{in}+$$
$$+A_{ij}(\otimes A_{ml} \otimes A_{ln} - A_{kn} \otimes A_{mk} + A_{kn} \otimes A_{mk} - A_{ml} \otimes A_{ln}) =$$
$$= A_{mj} \otimes A_{kl} \otimes A_{lk}\delta_{in} - A_{in} \otimes A_{kl} \otimes A_{lk}\delta_{mj},$$

$$[A_{mn} \otimes I \otimes I + I \otimes A_{mn} \otimes I + I \otimes I \otimes A_{mn}, A_{ik} \otimes A_{kl} \otimes A_{lj}] = [A_{mn}, A_{ik}] \otimes A_{kl} \otimes A_{lj}+$$
$$+A_{ik} \otimes [A_{mn}, A_{kl}] \otimes A_{lj} + A_{ik} \otimes A_{kl} \otimes [A_{mn}, A_{lj}] = A_{mk} \otimes A_{kl} \otimes A_{lj}\delta_{in} - A_{in} \otimes A_{ml} \otimes A_{lj}+$$
$$+A_{in} \otimes A_{ml} \otimes A_{lj} - A_{ik} \otimes A_{kn} \otimes A_{mj} + A_{ik} \otimes A_{kn} \otimes A_{mj} - A_{ik} \otimes A_{kl} \otimes A_{ln}\delta_{mj} =$$
$$= A_{mk} \otimes A_{kl} \otimes A_{lj}\delta_{in} - A_{ik} \otimes A_{kl} \otimes A_{ln}\delta_{mj}.$$

Nejobecnější hermitovský operátor, který závisí lineárně na vstupu $|p\rangle$ a splňuje podmínku kovariance (3.1) má tedy tvar

$$\rho_{out}(p) = 1/N^3 I \otimes I \otimes I + s_1 A_{ij} \otimes A_{jk} \otimes A_{ki} + s_1^* A_{ji} \otimes A_{kj} \otimes A_{ik} + s_2 A_{ij} \otimes A_{ji} \otimes I+$$
$$+s_3 A_{ij} \otimes I \otimes A_{ji} + s_4 I \otimes A_{ij} \otimes A_{ji} + v_1 p_{ij} A_{ij} \otimes A_{kl} \otimes A_{lk}+$$
$$+v_2 p_{ij} A_{kl} \otimes A_{ij} \otimes A_{lk} + v_3 p_{ij} A_{kl} \otimes A_{lk} \otimes A_{ij}+$$
$$+v_4 p_{ij} A_{ik} \otimes A_{kl} \otimes A_{lj} + v_4^* p_{ji} A_{ki} \otimes A_{lk} \otimes A_{jl}+$$
$$+v_5 p_{ij} A_{ik} \otimes A_{lj} \otimes A_{kl} + v_5^* p_{ji} A_{ki} \otimes A_{jl} \otimes A_{lk} + v_6 p_{ij} A_{kl} \otimes A_{ik} \otimes A_{lj}+$$
$$+v_6^* p_{ji} A_{lk} \otimes A_{ki} \otimes A_{jl} + v_7 p_{ij} A_{ij} \otimes I \otimes I + v_8 p_{ij} I \otimes A_{ij} \otimes I + v_9 p_{ij} I \otimes I \otimes A_{ij}+$$
$$+v_{10} p_{ij} A_{il} \otimes A_{lj} \otimes I + v_{10}^* p_{ji} A_{li} \otimes A_{jl} \otimes I + v_{11} p_{ij} A_{il} \otimes I \otimes A_{lj} + v_{11}^* p_{ji} A_{li} \otimes I \otimes A_{jl}+$$
$$+v_{12} p_{ij} I \otimes A_{il} \otimes A_{lj} + v_{12}^* p_{ji} I \otimes A_{li} \otimes A_{jl}, \tag{3.4}$$

kde $s_1, v_4, v_5, v_6, v_{10}, v_{11}, v_{12} \in \mathbb{C}, s_2, s_3, s_4, v_1, v_2, v_3, v_7, v_8, v_9 \in \mathbb{R}$. Univerzální proces pro tři částice je tedy určen hodnotami 9 reálných a 7 komplexních parametrů.

Aby operátor (3.4) mohl popisovat stav tříčásticového systému, musí to být matice hustoty - pozitivní operátor se stopou rovnou 1. Musíme tedy určit vlastní čísla $\lambda_i$ operátoru $\rho_{out}(p)$ v závislosti na $s_1, ..., s_4, v_1, ..., v_{12}$ a řešit nerovnosti

$$\lambda_i(s_1, ..., s_4, v_1, ..., v_{12}) \geq 0,$$

které nám vymezí povolené hodnoty těchto paramerů. Díky podmínce kovariance (3.1) stačí hledat vlastní čísla pro jeden konkrétní vstup, například

$$\rho_{in}(p_{ij} = N\delta_{i1}\delta_{j1}) = |1\rangle\langle 1|.$$

Matice (3.4) má pro tuto volbu vstupního stavu tvar

$$\rho_{out}(p_{ij} = N\delta_{i1}\delta_{j1}) = 1/N^3 I \otimes I \otimes I \otimes I + s_1 A_{ij} \otimes A_{jk} \otimes A_{ki} + s_1^* A_{ji} \otimes A_{kj} \otimes A_{ik}+$$
$$+s_2 A_{ij} \otimes A_{ji} \otimes I + s_3 A_{ij} \otimes I \otimes A_{ji} + s_4 I \otimes A_{ij} \otimes A_{ji}+$$
$$+v_1 N A_{11} \otimes A_{kl} \otimes A_{lk} + v_2 N A_{kl} \otimes A_{11} \otimes A_{lk} + v_3 N A_{kl} \otimes A_{lk} \otimes A_{11}+$$
$$+v_4 N A_{1k} \otimes A_{kl} \otimes A_{l1} + v_4^* N A_{k1} \otimes A_{lk} \otimes A_{1l} + v_5 N A_{1k} \otimes A_{l1} \otimes A_{kl} + v_5^* N A_{k1} \otimes A_{1l} \otimes A_{lk}+$$
$$+v_6 N A_{kl} \otimes A_{1k} \otimes A_{l1} + v_6^* N A_{lk} \otimes A_{k1} \otimes A_{1l} + v_7 N A_{11} \otimes I \otimes I + v_8 N I \otimes A_{11} \otimes I+$$

$$+v_9 NI\otimes I\otimes A_{11}+v_{10}NA_{1l}\otimes A_{l1}\otimes I+v_{10}^{*}NA_{l1}\otimes A_{1l}\otimes I+v_{11}NA_{1l}\otimes I\otimes A_{l1}+$$

$$+v_{11}^{*}NA_{l1}\otimes I\otimes A_{j1}+v_{12}NI\otimes A_{1l}\otimes A_{l1}+v_{12}^{*}NI\otimes A_{l1}\otimes A_{1l}. \tag{3.5}$$

Kvůli velkému počtu parametrů se mi nepodařilo najít vlastní čísla v obecném případě. Zaměřil jsem se proto na speciální případy.

3.1. **Vektorová část.** V této části jsou spočítána vlastní čísla operátoru (3.5) pro některé speciální hodnoty parametrů $v_1$, ..., $v_{12}$.

Nejjednodušší je případ kdy $v_7$, $v_8$, $v_9 \neq 0$ a ostatní parametry jsou rovny nule. Matice (3.5) je diagonální a její vlastní čísla mají tvar

$$\lambda_1 = \frac{1}{N^3} - v_7 - v_8 - v_9,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{N^3} + (N-1)v_7 - v_8 - v_9,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{N^3} - v_7 + (N-1)v_8 - v_9,$$

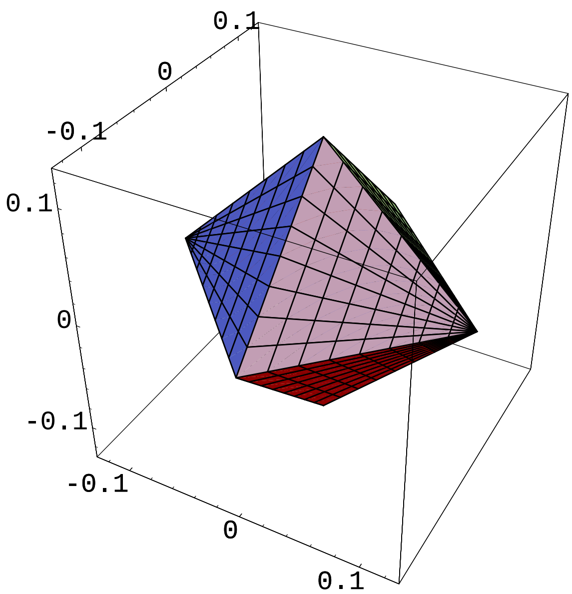
$$\lambda_4 = \frac{1}{N^3} - v_7 - v_8 + (N-1)v_9,$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{N^3} + (N-1)(v_7 + v_8) - v_9,$$

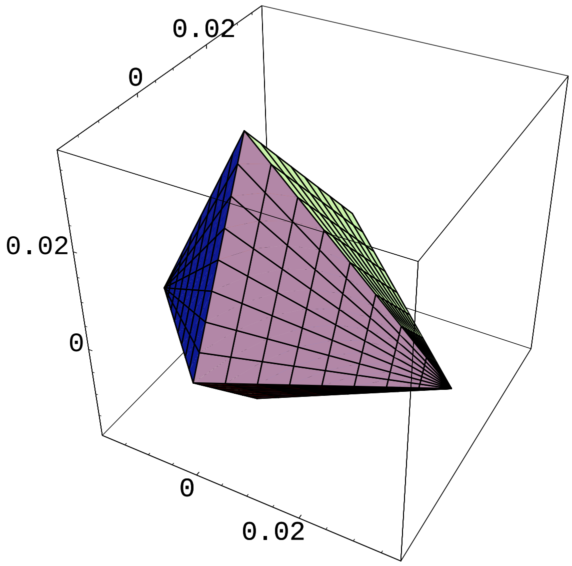
$$\lambda_6 = \frac{1}{N^3} + (N-1)(v_7 + v_9) - v_8,$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{N^3} + (N-1)(v_8 + v_9) - v_7,$$

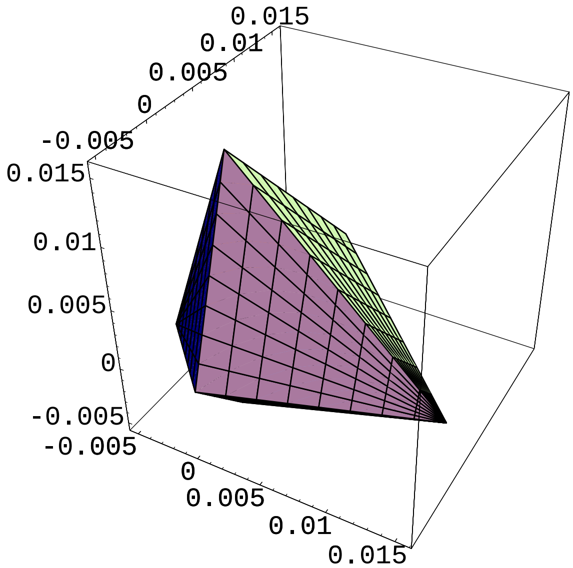
$$\lambda_8 = \frac{1}{N^3} + (N-1)(v_7 + v_8 + v_9).$$




Povolené hodnoty parametrů $v_7$, $v_8$, $v_9$ pro $N = 2$.




Povolené hodnoty parametrů $v_7$, $v_8$, $v_9$ pro $N = 3$.




Povolené hodnoty parametrů $v_7$, $v_8$, $v_9$ pro $N = 4$.

Další jednoduchý případ nastane, pokud budeme uvažovat nenulové pouze parametry $v_1$, $v_7$, $v_8$, $v_9$. Potom má matice (3.5) vlastní čísla

$$\lambda_1 = \frac{1}{N^3} - \frac{N-1}{N}v_1 - v_7 - v_8 - v_9,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{N^3} + \frac{(N-1)^2}{N}v_1 + (N-1)v_7 - v_8 - v_9,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{N^3} - \frac{N-1}{N}v_1 - v_7 + (N-1)(v_8+v_9),$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{N^3} + \frac{(N-1)^2}{N}v_1 + (N-1)(v_7+v_8+v_9),$$

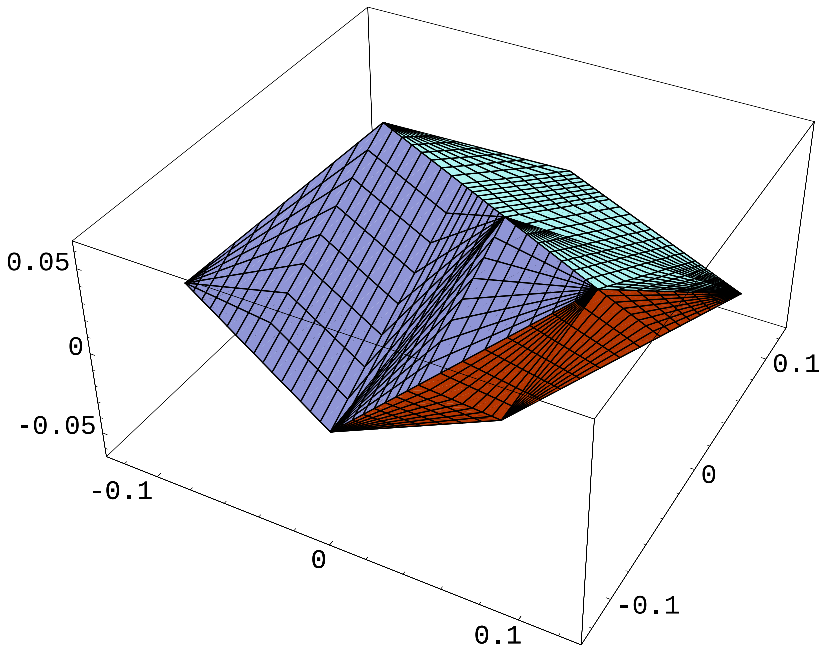
$$\lambda_{5\pm} = \frac{1}{N^3} - \frac{1}{N}v_1 - v_7 + \frac{N-2}{2}(v_8+v_9) \pm \sqrt{v_1^2 + \frac{N^2}{4}(v_8-v_9)^2},$$

$$\lambda_{6\pm} = \frac{1}{N^3} - \frac{N-1}{N}v_1 + (N-1)v_7 + \frac{N-1}{2}(v_8+v_9) \pm \sqrt{(N-1)^2v_1^2 + \frac{N^2}{4}(v_8-v_9)^2}, \quad N \geq 2;$$

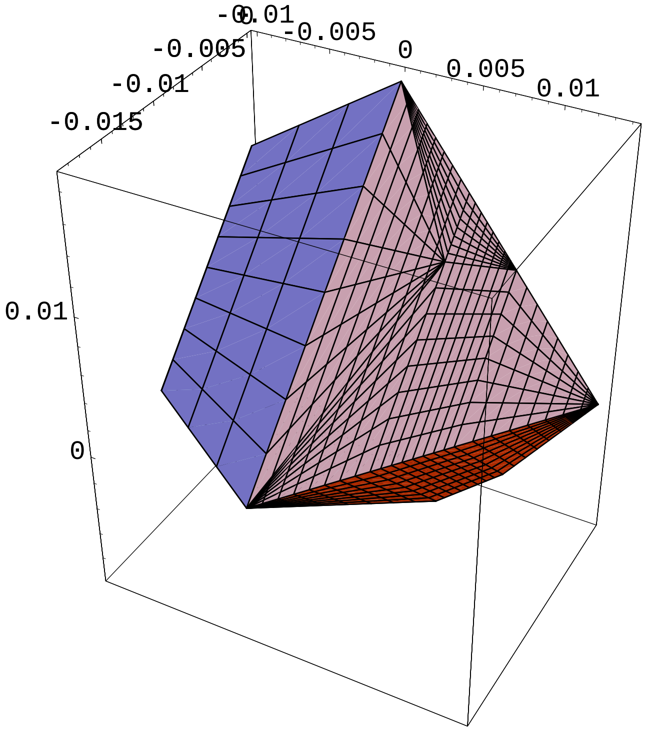
pro $N \geq 3$ navíc přibude

$$\lambda_7 = \frac{1}{N^3} + \frac{N+1}{N}v_1 - v_7 - v_8 - v_9,$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{N^3} - \frac{N^2-1}{N}v_1 + (N-1)v_7 - v_8 - v_9.$$




Povolené hodnoty parametrů $v_1$, $v_7$, $v_8$ pro případ $N=2$, $v_8 = v_9$.




Povolené hodnoty parametrů $v_1$, $v_7$, $v_8$ pro případ $N = 3$, $v_8 = v_9$.

Pokud budeme uvažovat pouze parametry $v_2$, $v_7$, $v_8$, $v_9$, dostaneme vlastní hodnoty operátoru (3.5) ve tvaru

$$\lambda_1 = \frac{1}{N^3} + \frac{1}{N}v_2 + (N-1)v_7 - v_8 - v_9,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{N^3} - \frac{N-1}{N}v_2 + (N-1)(v_7 + v_8) - v_9,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{N^3} + \frac{1}{N}v_2 - v_7 - v_8 + (N-1)v_9,$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{N^3} - \frac{N-1}{N}v_2 + (N-1)(v_8 + v_9) - v_7,$$

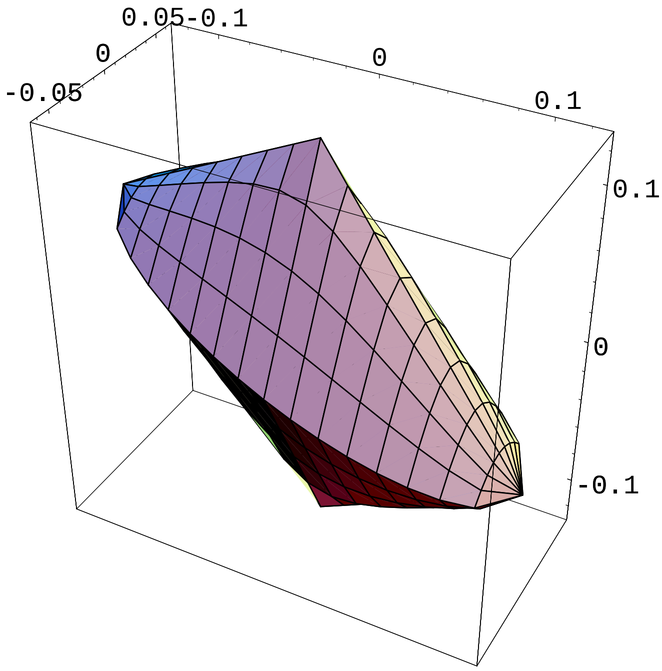
$$\lambda_{5\pm} = \frac{1}{N^3} + \frac{(N-1)(N^2-2)}{2N}v_2 + \frac{N-2}{2}(v_7 + v_9) + (N-1)v_8 \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{N^2(N-1)}{4}v_2^2 - \frac{(N-2)(N-1)N}{2}(v_2v_7 + v_2v_9) + \frac{N^2}{4}(v_7+v_9)^2},$$

$$\lambda_{6\pm} = \frac{1}{N^3} - \frac{N^2-2}{2N}v_2 + \frac{N-2}{2}(v_7 + v_9) - v_8 \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{N^2}{4}v_2^2 + \frac{(N-2)N}{2}(v_2v_7 + v_2v_9) + \frac{N^2}{4}(v_7+v_9)^2}, \quad N \geq 2;$$

pro $N \geq 3$ navíc přibude

$$\lambda_7 = \frac{1}{N^3} + \frac{1}{N}v_2 - v_7 - v_8 - v_9,$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{N^3} - \frac{N-1}{N}v_2 - v_7 - v_9 + (N-1)v_8.$$




Povolené hodnoty parametrů $v_2$, $v_7$, $v_8$ pro případ $N = 2$, $v_7 = v_9$.

Podobně v případě, kdy $v_3$, $v_7$, $v_8$, $v_9 \neq 0$ a ostatní parametry jsou rovny nule dostaneme vlastní čísla matice (3.5) ve tvaru

$$\lambda_1 = \frac{1}{N^3} - \frac{N-1}{N}v_3 - v_7 - v_8 - v_9,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{N^3} - \frac{N-1}{N}v_3 + (N-1)(v_7 + v_8) - v_9,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{N^3} + \frac{(N-1)^2}{N}v_3 - v_7 - v_8 + (N-1)v_9,$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{N^3} + \frac{(N-1)^2}{N}v_3 + (N-1)(v_7 + v_8 + v_9),$$

$$\lambda_{5\pm} = \frac{1}{N^3} + \frac{1}{N}v_3 + \frac{N-2}{2}(v_7+v_8) - v_9 \pm \sqrt{v_3^2 + \frac{N^2}{4}(v_7-v_8)^2},$$

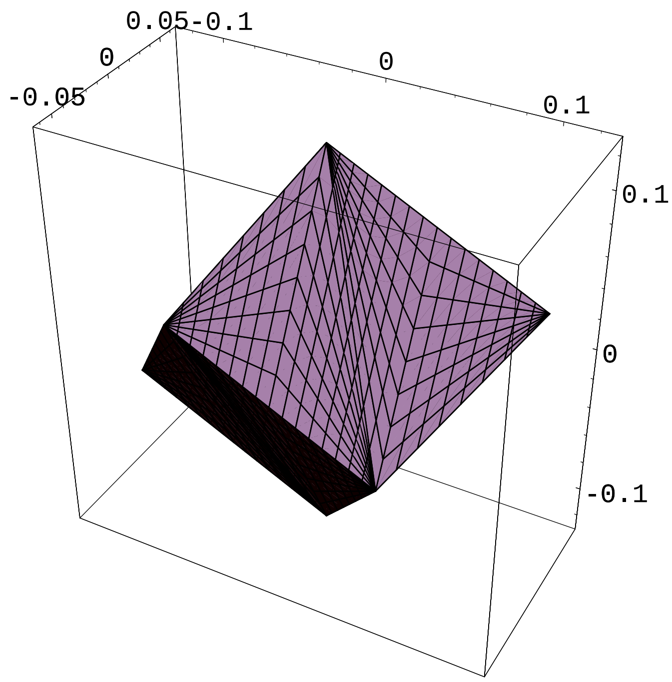
$$\lambda_{6\pm} = \frac{1}{N^3} - \frac{N-1}{N}v_3 + \frac{N-2}{2}(v_7+v_8) + (N-1)v_9 \pm$$

$$\pm\sqrt{(N-1)^2 v_3^2 + \frac{N^2}{4}(v_7-v_8)^2}, \quad N \geq 2;$$

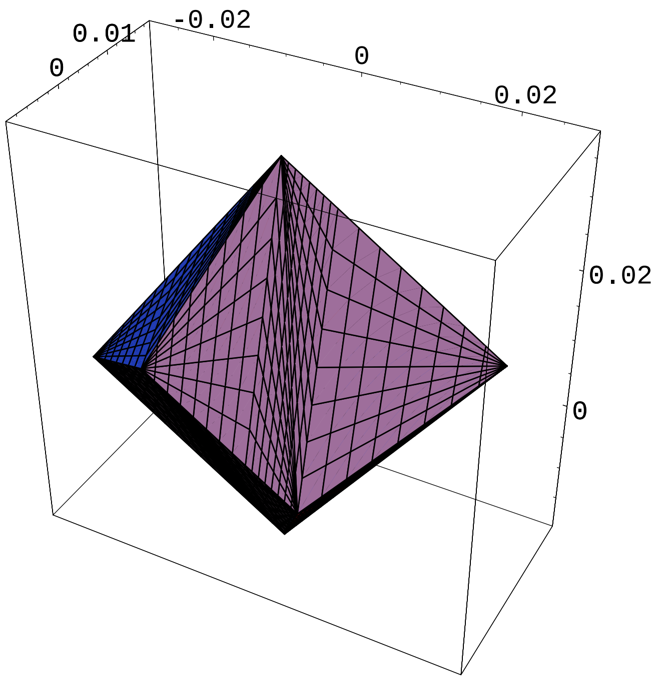
pro $N \geq 3$ navíc přibude

$$\lambda_7 = \frac{1}{N^3} + \frac{N+1}{N}v_3 - v_7 - v_8 - v_9,$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{N^3} - \frac{N^2-1}{N}v_3 - v_7 - v_8 + (N-1)v_9.$$




Povolené hodnoty parametrů $v_3$, $v_7$, $v_9$ pro případ $N = 2$, $v_7 = v_8$.




Povolené hodnoty parametrů $v_3$, $v_7$, $v_9$ pro případ $N = 3$, $v_7 = v_8$.

Poslední případ, kdy se mi podařilo najít vlastní hodnoty operátoru (3.5), je $v_{10} \neq 0$, ostatní parametry rovny nule. Vlastní čísla pak mají tvar

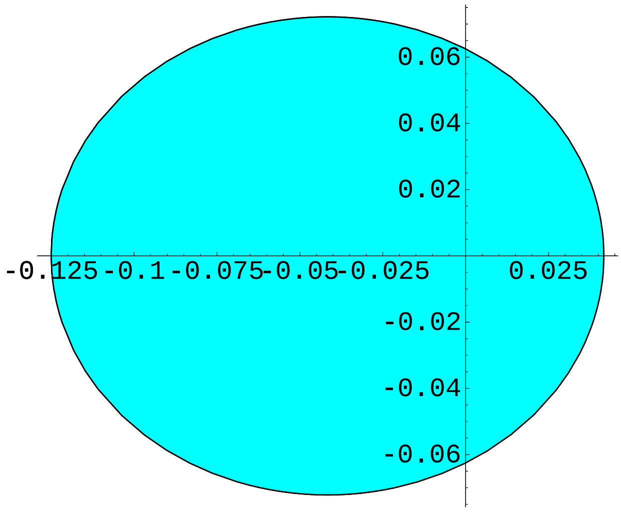
$$\lambda_1 = \frac{1}{N^3} + \frac{2}{N} Re(v_{10}),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{N^3} + \frac{2(N-1)^2}{N} Re(v_{10}),$$

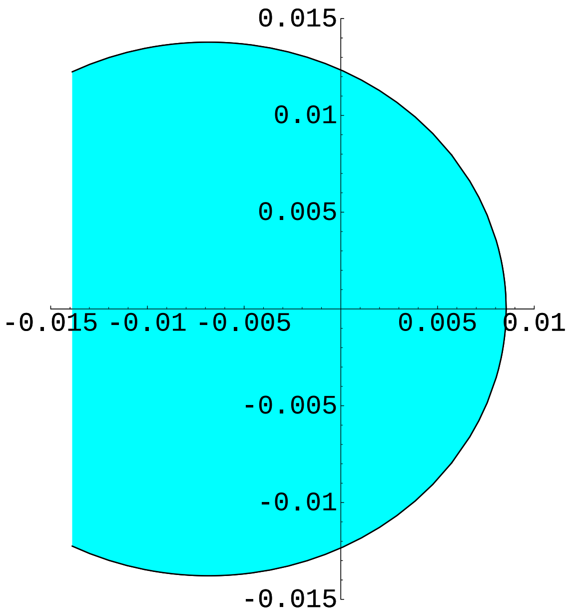
$$\lambda_3 = \frac{1}{N^3} - \frac{2(N-1)}{N} Re(v_{10}) - N|v_{10}|,$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{N^3} - \frac{2(N-1)}{N} Re(v_{10}) + N|v_{10}|.$$

Stejná vlastní čísla jsou i v případě $v_{11} \neq 0$, ostatní parametry rovny nule, respektive $v_{12} \neq 0$ a ostatní parametry rovny nule.




Povolené hodnoty parametru $v_{10}$ pro $N = 2$.




Povolené hodnoty parametru $v_{10}$ pro $N = 3$.

3.2. **Skalární část.** Výstup s nenulovou skalární částí má tvar

$\rho = 1/N^3 I + s_1 A_{ij} \otimes A_{jk} \otimes A_{ki} + s_1^* A_{ji} \otimes A_{kj} \otimes A_{ik} + s_2 A_{ij} \otimes A_{ji} \otimes I + s_3 A_{ij} \otimes I \otimes A_{ji} + s_4 I \otimes A_{ij} \otimes A_{ji}$.

Pro případ $s_1 = 0$ lze rozložit $\rho$ na direktní součet matic

$$\rho = \sum_{i=1}^{4} \oplus \rho_i,$$

kde

$$\rho_1 = 1/N(1/N^2 + (N-1)(s_2+s_3+s_4))\sum_{i=1}^{N}|iii\rangle\langle iii|, \tag{3.6}$$

$$\rho_2 = 1/N(1/N^2-s_2+(N-1)s_3-s_4)\sum_{i=2}^{N}|1ii\rangle\langle 1ii|+1/N(1/N^2+(N-1)s_2-s_3-s_4)\sum_{i=2}^{N}|ii1\rangle\langle ii1|+$$

$$+1/N(1/N^2-s_2-s_3+(N-1)s_4)\sum_{i=2}^{N}|i1i\rangle\langle i1i|+1/N(1/N^2-s_2-s_3-s_4)\sum_{i,j,k=1,i\neq j\neq k}|ijk\rangle\langle ijk|+$$

$$+s_2(\sum_{i=2}^{N}(|1ii\rangle\langle i1i|+|i1i\rangle\langle 1ii|)+\sum_{i,j,k=1,i\neq j\neq k}^{N}|ijk\rangle\langle jik|)+$$

$$+s_3(\sum_{i=2}^{N}(|ii1\rangle\langle i1i|+|i1i\rangle\langle ii1|)+\sum_{i,j,k=1,i\neq j\neq k}|ijk\rangle\langle ikj|)+$$

$$+s_4(\sum_{i=2}^{N}(|1ii\rangle\langle ii1|+|ii1\rangle\langle 1ii|)+\sum_{i,j,k=1,i\neq j\neq k}^{N}|ijk\rangle\langle kji|), \tag{3.7}$$

$$\rho_3 = 1/N(1/N^2-s_2+(N-1)s_3-s_4)\sum_{i=2}^{N}|i11\rangle\langle i11|+$$

$$+1/N(1/N^2-s_2-s_3+(N-1)s_4)\sum_{i=2}^{N}|1i1\rangle\langle 1i1|+1/N(1/N^2+(N-1)s_2-s_3-s_4)\sum_{i=2}^{N}|11i\rangle\langle 11i|+$$

$$+s_2\sum_{i=2}^{N}(|1i1\rangle\langle i11|+|i11\rangle\langle 1i1|)+$$

$$+s_3\sum_{i=2}^{N}(|11i\rangle\langle 1i1|+|1i1\rangle\langle 11i|)+s_4\sum_{i=2}^{N}(|11i\rangle\langle i11|+|i11\rangle\langle 11i|), \tag{3.8}$$

$$\rho_4 = 1/N(1/N^2-s_2+(N-1)s_3-s_4)\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}|ijj\rangle\langle ijj|+$$

$$+1/N(1/N^2-s_2-s_3+(N-1)s_4)\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}|iji\rangle\langle iji|+$$

$$+1/N(1/N^2+(N-1)s_2-s_3-s_4)\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}|iij\rangle\langle iij|+$$

$$+s_2\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}(|iji\rangle\langle jii|+|jii\rangle\langle iji|)+s_3\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}(|iij\rangle\langle iji|+|iji\rangle\langle iij|)+$$

$$+s_4\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}(|iij\rangle\langle jii|+|jii\rangle\langle iij|). \tag{3.9}$$

Vlastní čísla mají tvar

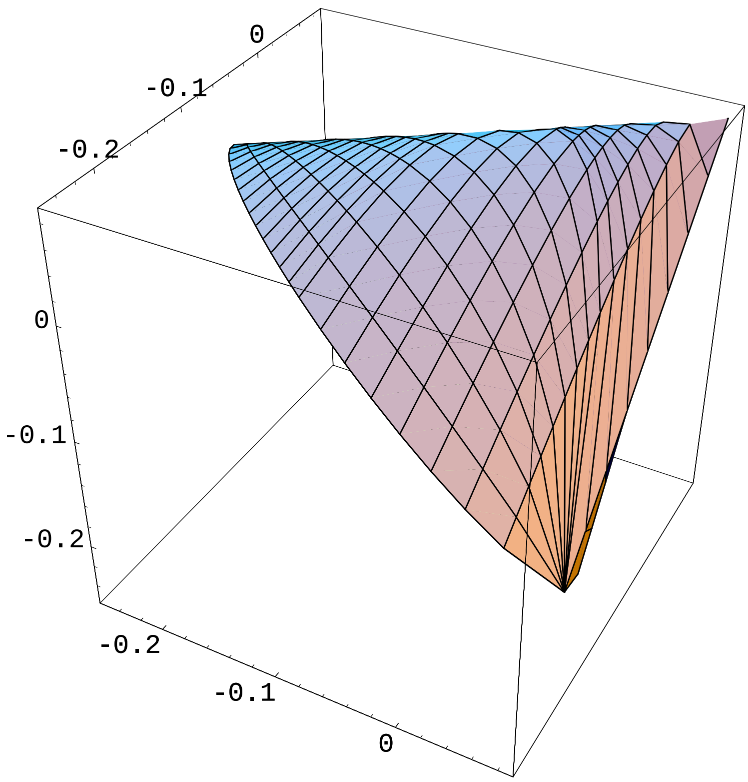
$$\lambda_1 = 1/N^3(1 + N^2(N-1)(s_2+s_3+s_4)),$$

$$\lambda_2 = 1/N^3 - 1/N(s_2+s_3+s_4) - \sqrt{s_2^2 - s_2s_3 + s_3^2 - s_2s_4 - s_3s_4 + s_4^2},$$

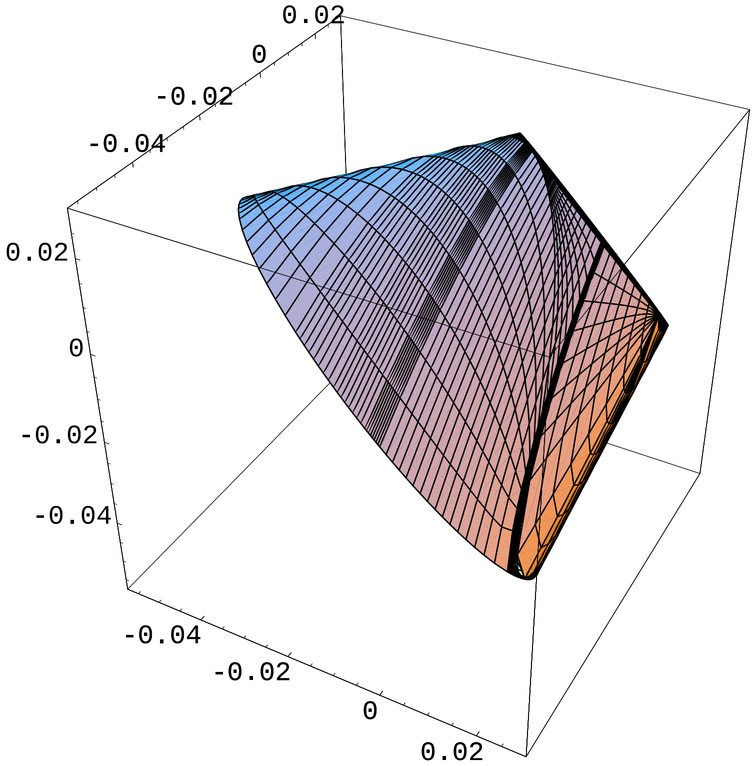
$$\lambda_3 = 1/N^3 - 1/N(s_2+s_3+s_4) + \sqrt{s_2^2 - s_2s_3 + s_3^2 - s_2s_4 - s_3s_4 + s_4^2},$$

pro $N \geq 2$; pro $N \geq 3$ přibude navíc

$$\lambda_4 = 1/N^3(1 - N^2(N+1)(s_2+s_3+s_4)).$$




Povolené hodnoty parametrů $s_2, s_3, s_4$ pro N=2.




Povolené hodnoty parametů $s_2, s_3, s_4$ pro N=3.

Pro případ $s_1 \neq 0$ lze rozložit výstupní stav na direktní součet tří matic:

$$\rho_1 = 1/N(1/N^2 + (N-2)(N-1)/N(s_1+s_1^*) + (N-1)(s_2+s_3+s_4))|111\rangle\langle 111|+$$

$$+1/N(1/N^2 - (N-2)/N(s_1+s_1^*) + (N-1)s_2 - s_3 - s_4)\sum_{i=2}^{N}|ii1\rangle\langle ii1|+$$

$$+1/N(1/N^2 - (N-2)/N(s_1+s_1^*) - s_2 + (N-1)s_3 - s_4)\sum_{i=2}^{N}|1ii\rangle\langle 1ii|+$$

$$+1/N(1/N^2 - (N-2)/N(s_1+s_1^*) - s_2 - s_3 + (N-1)s_4)\sum_{i=2}^{N}|i1i\rangle\langle i1i|+$$

$$+s_2\sum_{i=2}^{N}(|1ii\rangle\langle i1i| + |i1i\rangle\langle 1ii|) + s_4\sum_{i=2}^{N}(|1ii\rangle\langle ii1| + |ii1\rangle\langle 1ii|)+$$

$$+s_1\sum_{i,j,k=2, i\neq j\neq k}^{N}|iki\rangle\langle jjk| + s_1^*\sum_{i,j,k=2, i\neq j\neq k}^{N}|jjk\rangle\langle iki|+$$

$$+1/N((N-1)s_1 - s_1^*)\sum_{i=2}^{N}(|111\rangle\langle ii1| + |i1i\rangle\langle 111|) + 1/N((N-1)s_1^* - s_1)\sum_{i=2}^{N}(|ii1\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle i1i|)+$$

$$+1/N(s_1+s_1^*)\sum_{i,j,k=2,i\neq j\neq k}^{N}(|iki\rangle\langle jkj|+|iik\rangle\langle jjk|)+$$
$$+(s_3+1/N((N-1)s_1-s_1^*))\sum_{i=2}^{N}|i1i\rangle\langle ii1|+$$
$$+(s_3+1/N((N-1)s_1^*-s_1))\sum_{i=2}^{N}|ii1\rangle\langle i1i|, \tag{3.10}$$

$$\rho_2=1/N(1/N^2-(N-2)/N(s_1+s_1^*)+(N-1)s_2-s_3-s_4)(\sum_{i=2}^{N}|11i\rangle\langle 11i|+\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}|iij\rangle\langle iij|)+$$
$$+1/N(1/N^2-(N-2)/N(s_1+s_1^*)-s_2+(N-1)s_3-s_4)(\sum_{i=2}^{N}|i11\rangle\langle i11|+\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}|ijj\rangle\langle ijj|)+$$
$$+1/N(1/N^2-(N-2)/N(s_1+s_1^*)-s_2-s_3+(N-1)s_4)(\sum_{i=2}^{N}|1i1\rangle\langle 1i1|+\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}|iji\rangle\langle iji|)+$$
$$+1/N(1/N^2+(N-2)(N-1)/N(s_1+s_1^*)+(N-1)(s_2+s_3+s_4))\sum_{i=2}^{N}|iii\rangle\langle iii|+$$
$$+s_2(\sum_{i=2}^{N}(|1i1\rangle\langle i11|+|i11\rangle\langle 1i1|)+\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}(|ijj\rangle\langle jij|+|jij\rangle\langle ijj|))+$$
$$+s_4(\sum_{i=2}^{N}(|11i\rangle\langle i11|+|i11\rangle\langle 11i|)+\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}(|ijj\rangle\langle jji|+|jji\rangle\langle ijj|))+$$
$$+s_1\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}(|1i1\rangle\langle jji|+|iji\rangle\langle 11j|)+s_1^*\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}(|jji\rangle\langle 1i1|+|11j\rangle\langle iji|)+$$
$$+1/N(s_1+s_1^*)\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}(|iij\rangle\langle 11j|+|11j\rangle\langle iij|+|1i1\rangle\langle jij|+|jij\rangle\langle 1i1|)+$$
$$+(s_3+1/N((N-1)s_1-s_1^*))(\sum_{i=2}^{N}|1i1\rangle\langle 11i|+\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}|iji\rangle\langle iij|)+$$
$$+(s_3+1/N((N-1)s_1^*-s_1))(\sum_{i=2}^{N}|11i\rangle\langle 1i1|+\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}|iij\rangle\langle iji|)+$$
$$+1/N((N-1)s_1-s_1^*)(\sum_{i=2}^{N}(|1i1\rangle\langle iii|+|iii\rangle\langle 11i|)+\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}(|iji\rangle\langle jjj|+|jjj\rangle\langle iij|))+$$
$$+1/N((N-1)s_1^*-s_1)(\sum_{i=2}^{N}(|iii\rangle\langle 1i1|+|11i\rangle\langle iii|)+$$
$$+\sum_{i,j=2,i\neq j}^{N}(|jjj\rangle\langle iji|+|iij\rangle\langle jjj|)), \tag{3.11}$$

$$\rho_3 = 1/N(1/N^2 + 2/N(s_1 + s_1^*) - s_2 - s_3 - s_4) \sum_{i,j,k=2,i\neq j\neq k}^{N} |ijk\rangle\langle ijk| +$$
$$+ s_2 \sum_{i,j,k=2,i\neq j\neq k}^{N} |ijk\rangle\langle jik| + s_4 \sum_{i,j,k=2,i\neq j\neq k}^{N} |ikj\rangle\langle jki| +$$
$$+(s_3 - 1/N(s_1 + s_1^*)) \sum_{i,j,k=2,i\neq j\neq k}^{N} |ikj\rangle\langle ijk|. \tag{3.12}$$

Vlastní čísla lze spočítat pro nízké hodnoty N, ale mají dosti složitý tvar.

3.3. **Tenzory provázání pro qubity.** Mějme na vstupu stav $\rho_{in}(p_{ij} = 2\delta_{i1}\delta_{j1}) = |1\rangle\langle 1|$, výstup univerzálního procesu potom bude popsán maticí

$$\rho_{out}(p_{ij} = 2\delta_{i1}\delta_{j1}) = 1/8 I\otimes I\otimes I\otimes I + s_1 A_{ij}\otimes A_{jk}\otimes A_{ki} + s_1^* A_{ji}\otimes A_{kj}\otimes A_{ik} +$$
$$+ s_2 A_{ij}\otimes A_{ji}\otimes I + s_3 A_{ij}\otimes I\otimes A_{ji} + s_4 I\otimes A_{ij}\otimes A_{ji} +$$
$$+2v_1 A_{11}\otimes A_{kl}\otimes A_{lk} + 2v_2 A_{kl}\otimes A_{11}\otimes A_{lk} + 2v_3 A_{kl}\otimes A_{lk}\otimes A_{11} +$$
$$+2v_4 A_{1k}\otimes A_{kl}\otimes A_{l1} + 2v_4^* A_{k1}\otimes A_{lk}\otimes A_{1l} + 2v_5 A_{1k}\otimes A_{l1}\otimes A_{kl} + 2v_5^* A_{k1}\otimes A_{1l}\otimes A_{lk} +$$
$$+2v_6 A_{kl}\otimes A_{1k}\otimes A_{l1} + 2v_6^* A_{lk}\otimes A_{k1}\otimes A_{1l} + 2v_7 A_{11}\otimes I\otimes I + 2v_8 I\otimes A_{11}\otimes I +$$
$$+2v_9 I\otimes I\otimes A_{11} + 2v_{10} A_{1l}\otimes A_{l1}\otimes I + 2v_{10}^* A_{l1}\otimes A_{1l}\otimes I + 2v_{11} A_{1l}\otimes I\otimes A_{l1} +$$
$$+2v_{11}^* A_{l1}\otimes I\otimes A_{j1} + 2v_{12} I\otimes A_{1l}\otimes A_{l1} + 2v_{12}^* I\otimes A_{l1}\otimes A_{1l}.$$

Mezi maticemi $A_{ij}$ a $\Lambda_i$ pro $N = 2$ platí následující jednoduché vztahy ( viz. definice (5.5)):

$$A_{11} = -\frac{1}{2}\Lambda_3, A_{12} = \frac{1}{2}(\Lambda_1 - i\Lambda_2), A_{21} = \frac{1}{2}(\Lambda_1 + i\Lambda_2), A_{22} = \frac{1}{2}\Lambda_3.$$

V bazi $\{\Lambda_i\}\otimes\{\Lambda_j\}\otimes\{\Lambda_k\}$ má tedy matice $\rho_{out}(p_{ij} = 2\delta_{i1}\delta_{j1})$ tvar

$$\rho_{out}(p_{ij} = 2\delta_{i1}\delta_{j1}) = \frac{1}{8} I\otimes I\otimes I - v_7\Lambda_3\otimes I\otimes I - v_8 I\otimes\Lambda_3\otimes I - v_9 I\otimes I\otimes\Lambda_3 +$$
$$+((\frac{s_2}{2} + Re(v_{10}))\delta_{ij} + Im(v_{10})\varepsilon_{ij3})\Lambda_i\otimes\Lambda_j\otimes I + ((\frac{s_3}{2} + Re(v_{11}))\delta_{ij} + Im(v_{11})\varepsilon_{ij3})\Lambda_i\otimes I\otimes\Lambda_j +$$
$$+((\frac{s_4}{2} + Re(v_{12}))\delta_{ij} + Im(v_{12})\varepsilon_{ij3}) I\otimes\Lambda_i\otimes\Lambda_j + (Im(s_1)\varepsilon_{ijk} - \frac{v_1}{2}\delta_{i3}\delta_{jk} - \frac{v_2}{2}\delta_{j3}\delta_{ik} - \frac{v_3}{2}\delta_{k3}\delta_{ij} +$$
$$+\frac{1}{2}Re(v_4)(\delta_{j3}\delta_{ik} - \delta_{i3}\delta_{jk} - \delta_{k3}\delta_{ij}) + \frac{1}{2}Im(v_4)(\delta_{i3}\varepsilon_{jk3} + \delta_{k3}\varepsilon_{ij3} - \delta_{j3}\varepsilon_{ik3}) +$$
$$+\frac{1}{2}Re(v_5)(\delta_{k3}\delta_{ij} - \delta_{i3}\delta_{jk} - \delta_{j3}\delta_{ik}) + \frac{1}{2}Im(v_5)(\delta_{i3}\varepsilon_{jk3} + \delta_{j3}\varepsilon_{ik3} - \delta_{k3}\varepsilon_{ij3}) +$$
$$+\frac{1}{2}Re(v_6)(\delta_{i3}\delta_{jk} - \delta_{j3}\delta_{ik} - \delta_{k3}\delta_{ij}) + \frac{1}{2}Im(v_6)(\delta_{j3}\varepsilon_{ik3} + \delta_{k3}\varepsilon_{ij3} - \delta_{i3}\varepsilon_{jk3}))\Lambda_i\otimes\Lambda_j\otimes\Lambda_k.$$

Vektory polarizace tedy jsou $p^{(1)} = (0, 0, -8v_7)$,
$$p^{(2)} = (0, 0, -8v_8),$$
$$p^{(3)} = (0, 0, -8v_9).$$

Korelační tenzory mají prvky $K_{ij}(1,2) = 8((\frac{s_2}{2} + Re(v_{10}))\delta_{ij} + Im(v_{10})\varepsilon_{ij3})$,
$$K_{ij}(1,3) = 8((\frac{s_3}{2} + Re(v_{11}))\delta_{ij} + Im(v_{11})\varepsilon_{ij3}),$$
$$K_{ij}(2,3) = 8((\frac{s_4}{2} + Re(v_{12}))\delta_{ij} + Im(v_{12})\varepsilon_{ij3}),$$

$$K_{ijk}(1,2,3) = 8(Im(s_1)\varepsilon_{ijk} - \frac{v_1}{2}\delta_{i3}\delta_{jk} - \frac{v_2}{2}\delta_{j3}\delta_{ik} - \frac{v_3}{2}\delta_{k3}\delta_{ij} +$$
$$+\frac{1}{2}Re(v_4)(\delta_{j3}\delta_{ik} - \delta_{i3}\delta_{jk} - \delta_{k3}\delta_{ij}) + \frac{1}{2}Im(v_4)(\delta_{i3}\varepsilon_{jk3} + \delta_{k3}\varepsilon_{ij3} - \delta_{j3}\varepsilon_{ik3}) +$$
$$+\frac{1}{2}Re(v_5)(\delta_{k3}\delta_{ij} - \delta_{i3}\delta_{jk} - \delta_{j3}\delta_{ik}) + \frac{1}{2}Im(v_5)(\delta_{i3}\varepsilon_{jk3} + \delta_{j3}\varepsilon_{ik3} - \delta_{k3}\varepsilon_{ij3}) +$$
$$+\frac{1}{2}Re(v_6)(\delta_{i3}\delta_{jk} - \delta_{j3}\delta_{ik} - \delta_{k3}\delta_{ij}) + \frac{1}{2}Im(v_6)(\delta_{j3}\varepsilon_{ik3} + \delta_{k3}\varepsilon_{ij3} - \delta_{i3}\varepsilon_{jk3})).$$

## 4. Závěr

Ve své práci jsem zobecnil definici univerzálního procesu pro případ tří částic. Podařilo se mi nalézt obecný tvar výstupního stavu a ukázal jsem, že nejobecnější univerzální proces pro tři částice je popsán devíti reálnými a sedmi komplexními parametry. Ve speciálních případech jsem určil vlastní hodnoty matice výstupního stavu a našel oblasti parametrů, pro než jsou tato vlastní čísla nezáporná, a tedy tato matice je maticí hustoty. V obecném případě se mi ale nepodařilo nalézt vlastní hodnoty výstupního stavu pro velkou algebraickou obtížnost tohoto problému. V dalším studiu univerzálních procesů bych chtěl nejprve analyzovat vlastnosti výstupních stavů univerzálních procesů z kapitol (3.1) a (3.2), a dále se zaměřit na speciální typy procesů, například kopírovací nebo provazující proces, a pokusit se v těchto případech nejprve snížit počet volných parametrů tak, aby se hledání vlastních čísel co nejvíce zjednodušilo.

## 5. Matematický dodatek - algebra $su(N)$, matice hustoty a popis provázání

Algebra $su(N)$ je reálná Lieova algebra antihermitovských matic $N\times N$ s nulovou stopou, její dimenze je $N^2-1$. Protože každou antihermitovskou $A$ matici lze psát ve tvaru $A=iB$, kde $B$ je hermitovská matice, budu pracovat s hermitovskými maticemi.

Algebru $su(N)$ můžeme použít k popisu stavů N-hladinového systému. Protože každou hermitovskou matici $N\times N$ lze rozložit na lineární kombinaci jednotky a generátorů algebry $su(N)$

$$A = TrAI + a_i\Lambda_i,\ [\{i\Lambda_i\}]_\lambda = su(N),$$

můžeme libovolnou matici hustoty $\rho$ zadat hodnotami $N^2-1$ souřadnic v nějaké bazi $su(N)$. Zde uvedu dvě baze algebry $su(N)$, které použiji v následujícím textu - první pro popis univerzálních procesů, druhou pro popis provázaných stavů.

Jedna z možných bazí algebry $su(N)$ je tvořena operátory $A_{ij}$, které jsou reprezentovány $N\times N$ maticemi s prvky

$$(A_{ij})^{(kl)} = \delta_{ik}\delta_{jl} - 1/N\delta_{ij}\delta_{kl}. \tag{5.1}$$

Tyto matice zřejmě splňují podmínku $TrA_{ij}=0$ - z definice (5.1) dostaneme

$$TrA_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jk} - 1/N\delta_{ij}\delta_{kk} = \delta_{ij} - 1/N\delta_{ij}N = 0.$$

Z definice (5.1) je dále vidět, že platí vztah

$$A_{ij}^{\dagger} = A_{ji}. \tag{5.2}$$

Všechny matice $A_{ij}$ ale nejsou lineárně nezávislé - splňují totiž podmínku

$$\sum_{i=1}^{N} A_{ii} = 0. \tag{5.3}$$

Skutečně, pro (kl)-tý prvek matice (5.3) platí

$$\sum_{i=1}^{N}(\delta_{ik}\delta_{il} - 1/N\delta_{ii}\delta_{kl}) = \delta_{kl} - 1/NN\delta_{kl} = 0.$$

$N^2-1$ matic

$$i(A_{jk}+A_{kj}), (A_{jk}-A_{kj}), 1\le j<k\le N,$$
$$iA_{jj},\ j<N,$$

jsou lineárně nezávislé, antihermitovské a mají nulovou stopu - generují tedy algebru $su(N)$.

Spočítáme ještě komutační relace - z definice (5.1) dostaneme

$$\begin{aligned}
[A_{ij},A_{mn}]^{(kl)} &= A_{ij}^{(ka)}A_{mn}^{(al)} - A_{mn}^{(ka)}A_{ij}^{(al)} = (\delta_{ik}\delta_{ja} - 1/N\delta_{ij}\delta_{ka})(\delta_{ma}\delta_{nl} - 1/N\delta_{mn}\delta_{al}) - \\
&\quad -(\delta_{mk}\delta_{na} - 1/N\delta_{mn}\delta_{ka})(\delta_{ia}\delta_{jl} - 1/N\delta_{ij}\delta_{al}) = \\
&= \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} - 1/N\delta_{mn}\delta_{ik}\delta_{jl} - 1/N\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + 1/N^2\delta_{ij}\delta_{mn}\delta_{kl} - \delta_{mk}\delta_{ni}\delta_{jl} + \\
&\quad +1/N\delta_{ij}\delta_{mk}\delta_{nl} + 1/N\delta_{mn}\delta_{jl}\delta_{ki} - 1/N^2\delta_{mn}\delta_{ij}\delta_{kl} = \\
&= \delta_{jm}(\delta_{ik}\delta_{nl} - 1/N\delta_{in}\delta_{kl}) - \delta_{in}(\delta_{mk}\delta_{jl} - 1/N\delta_{mj}\delta_{kl}) = (A_{in}\delta_{mj} - A_{mj}\delta_{in})^{(kl)},
\end{aligned}$$

a tedy platí

$$[A_{ij},A_{mn}] = A_{in}\delta_{mj} - A_{mj}\delta_{in}. \tag{5.4}$$

Libovolnou matici hustoty $\rho$ popisující stav N-hladinového systému můžeme rozepsat pomocí baze $A_{ij}$ ve tvaru

$$\rho = 1/N(I + p_{ij}A_{ij}).$$

Faktor $1/N$ odpovídá normalizaci $Tr\rho = 1$. Pro koeficienty $p_{ij}$ ze vztahů (5.3), (5.2) plyne $p_{NN} = 0$, respektive $p_{ij} = p^*_{ji}$. Matice hustoty $\rho$ je tedy určena hodnotou $N^2 - 1$ reálných koeficientů

$$Re(p_{ij}), Im(p_{ij}), i < j,$$
$$p_{ii}, i < N - 1,$$

které tvoří složky vektoru polarizace ( zobecněného Blochova vektoru ).

Jinou bázi algebry $su(N)$ definujeme pomocí operátorů $P_{jk} := |j\rangle\langle k|$, kde kety $|j\rangle$ tvoří ortonormální bázi N-rozměrného Hilbertova prostoru. Hermitovské operátory

$$w_l = -\sqrt{\frac{2}{l(l+1)}}(P_{11} + P_{22} + ... + P_{ll} - lP_{l+1,l+1}), l = 1, ..., N-1,$$
$$u_{jk} = P_{jk} + P_{kj}, 1 \le j < k \le N,$$
$$v_{jk} = i(P_{jk} - P_{kj}), 1 \le j < k \le N, \tag{5.5}$$

jsou zřejmě lineárně nezávislé a mají nulovou stopu. $N^2 - 1$ operátorů $i\Lambda_j$, kde

$$\{\Lambda_j\} := \{u_{12}, u_{13}, ..., v_{12}, v_{13}, ..., w_1, w_2, ..., w_{N-1}\},$$

tedy tvoří bazi algebry $su(N)$. Matice $\Lambda_i$ splňují relaci

$$Tr(\Lambda_i\Lambda_j) = 2\delta_{ij}. \tag{5.6}$$

K důkazu použijeme jednoduchých vztahů

$$P_{kl}P_{mn} = |k\rangle\langle l|m\rangle\langle n| = P_{kn}\delta_{lm},$$
$$TrP_{kl} = \delta_{kl},$$
$$Tr(P_{kl}P_{mn}) = \delta_{lm}\delta_{kn}.$$

Pomocí nich a definice (5.5) dostaneme

$$Tr(u_{jk}v_{mn}) = iTr((P_{jk}+P_{kj})(P_{mn}-P_{nm})) = i(\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kn}+\delta_{kn}\delta_{jm}-\delta_{km}\delta_{jn}) = 0,$$
$$Tr(u_{jk}u_{mn}) = (\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{kn}\delta_{jm} + \delta_{km}\delta_{jn}) = 2(\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kn}),$$
$$Tr(v_{jk}v_{mn}) = -(\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{kn}\delta_{jm} + \delta_{km}\delta_{jn}) = 2(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}),$$
$$Tr(u_{jk}w_l) = Tr(v_{jk}w_l) = 0,$$
$$Tr(w_lw_k) = \frac{2}{\sqrt{l(l+1)}\sqrt{k(k+1)}}(l - l) = 0, l < k,$$
$$Tr(w_lw_l) = \frac{2}{l(l+1)}(l^2 + l) = 2,$$

z čehož skutečně plyne (5.6).

Libovolná matice hustoty N-hladinového systému má v bazi $\Lambda_i$ tvar

$$\rho = \frac{1}{N}I + \frac{1}{2}p_j\Lambda_j, \tag{5.7}$$

kde ( díky vztahu (5.6) )

$$p_j = Tr(\Lambda_j\rho).$$

$p_j$ tvoří složky $N^2 - 1$-rozměrného vektoru polarizace $p$, jsou reálné díky tomu, že $\rho$ i $\Lambda_i$ jsou hermitovské matice.

Výhoda volby baze $\Lambda_i$ k popisu stavů spočíva v tom, že unitární transformaci

$$\rho \longrightarrow \rho' = U\rho U^\dagger$$

lze jednoduše popsat jako rotaci vektoru polarizace $\vec{p}$. $\rho'$ můžeme rozepsat způsobem obdobným (5.7)

$$\rho' = 1/NI + p'_i\Lambda_i.$$

Koeficienty $p'_i$ jsou

$$p'_i = Tr(\Lambda_i\rho') = Tr(\Lambda_i U\rho U^\dagger) = Tr(U^\dagger\Lambda_i U\rho).$$

Matice $U^\dagger\Lambda_i U$ je hermitovská a má nulovou stopu, lze ji tedy rozložit do baze $\Lambda_i$

$$U^\dagger\Lambda_i U = 1/2Tr(U^\dagger\Lambda_i U\Lambda_j)\Lambda_j =: T_{ij}(U)\Lambda_j,$$

kde $T_{ij}(U) = 1/2Tr(U^\dagger\Lambda_i U\Lambda_j)$ definuje $(N^2-1)\times(N^2-1)$ matici. Celkem tedy dostáváme

$$p'_i = Tr(U^\dagger\Lambda_i U\rho) = T_{ij}(U)Tr(\Lambda_j\rho) = T_{ij}(U)p_j.$$

Použijeme-li dvě unitární transformace $U_1$ a $U_2$ po sobě, snadno zjistíme, že mezi maticemi $T(U_2U_1), T(U_1)$ a $T(U_2)$ platí vztah

$$T(U_2U_1) = T(U_2)T(U_1).$$

$T$ je tedy $(N^2-1)$-rozměrná reprezentace grupy $SU(N)$.

Bazi $\Lambda_i$ využijeme k popisu provázání dvou a tříčásticových stavů. Matice hustoty popisující stav dvou N-hladinových kvantových systémů má v bazi $\{\Lambda_i\}\otimes\{\Lambda_j\}$ tvar

$$\rho = \frac{1}{N^2}I\otimes I + \frac{1}{2N}p_i^{(1)}\Lambda_i\otimes I + \frac{1}{2N}p_i^{(2)}I\otimes\Lambda_i + \frac{1}{4}K_{ij}\Lambda_i\otimes\Lambda_j.$$

Vektory polarizace $p^{(1)}, p^{(2)}$, kde

$$p_i^{(1)} = Tr(\rho\Lambda_i\otimes I),$$
$$p_i^{(2)} = Tr(\rho I\otimes\Lambda_i),$$

popisují vlastnosti jednotlivých částic. Tenzor druhého řádu $\mathbf{K}$ s prvky

$$K_{ij} = Tr(\rho\Lambda_i\otimes\Lambda_j)$$

charakterizuje korelace mezi těmito částicemi. Stavy jednotlivých částic jsou popsány redukovanými maticemi hustoty, které mají tvar

$$\rho^{(1)} = Tr_2\rho = \frac{1}{N}I + \frac{1}{2}p_i^{(1)}\Lambda_i,$$
$$\rho^{(2)} = Tr_1\rho = \frac{1}{N}I + \frac{1}{2}p_i^{(2)}\Lambda_i.$$

Jejich direktní součin je matice

$$\rho^{(1)}\otimes\rho^{(2)} = \frac{1}{N^2}I\otimes I + \frac{1}{2N}p_i^{(1)}\Lambda_i\otimes I + \frac{1}{2N}p_i^{(2)}I\otimes\Lambda_i + \frac{1}{4}p_i^{(1)}p_j^{(2)}\Lambda_i\otimes\Lambda_j.$$

Rozdíl mezi $\rho$ a $\rho^{(1)}\otimes\rho^{(2)}$ definuje tenzor $\mathbf{M}$:

$$\rho - \rho^{(1)}\otimes\rho^{(2)} = M_{ij}\Lambda_i\otimes\Lambda_j, \tag{5.8}$$

kde

$$M_{ij} = K_{ij} - p_i^{(1)}p_j^{(2)}. \tag{5.9}$$

Ze vztahu (5.8) je zřejmé, že tenzor $\mathbf{M}$ vymizí pro každý stav, který lze zapsat ve tvaru direktního součinu jednočásticových stavů, a je nenulový pro všechny provázané stavy. $\mathbf{M}$ proto nazýváme tenzorem provázání. Každý dvoučásticový stav je jednoznačně zadán hodnotami tenzoru provázání $M_{ij}$ a vektorů $p_i^{(1)}, p_i^{(2)}$. Při lokálních transformacích, tj. při transformacích typu

$$U = U(1) \otimes U(2),$$

kde $U(m)$ působí jen na m-tou částici, se vektory polarizace $p^{(m)}$ transformují podle reprezentace $T(m)$ a tenzor $\mathbf{K}$ podle reprezentace $T(1) \otimes T(2)$

$$p_i^{(m)} \longrightarrow p_i^{\prime(m)} = T_{ik}(U(m)) p_k^{(m)},$$

$$K_{ij} \longrightarrow K_{ij}^{\prime} = T_{ik}(U(1)) T_{jn}(U(2)) K_{kn}.$$

Ze vztahu (5.9) plyne, že tenzor $\mathbf{M}$ se transformuje podle stejné reprezentace grupy $U(N)$ jako tenzor $\mathbf{K}$, tj. platí

$$M_{ij} \longrightarrow M_{ij}^{\prime} = T_{ik}(U(1)) T_{jn}(U(2)) M_{kn}.$$

Pro případ tří částic je situace poněkud složitější. Obecná matice hustoty takového systému má tvar

$$\rho = 1/N^3 I \otimes I \otimes I + p_i^{(1)} \Lambda_i \otimes I \otimes I + p_i^{(2)} I \otimes \Lambda_i \otimes I + p_i^{(3)} I \otimes I \otimes \Lambda_i + K_{ij}(1,2) \Lambda_i \otimes \Lambda_j \otimes I +$$

$$+ K_{ij}(1,3) \Lambda_i \otimes I \otimes \Lambda_j + K_{ij}(2,3) I \otimes \Lambda_i \otimes \Lambda_j + K_{ijk}(1,2,3) \Lambda_i \otimes \Lambda_j \otimes \Lambda_k.$$

Vektor $p^{(n)}$ popisuje vlastnosti n-té částice, tenzor $\mathbf{K}(m,n)$ charakterizuje korelace mezi m-tou a n-tou částicí a tenzor třetího řádu $\mathbf{K}(1,2,3)$ popisuje korelace mezi všemi třemi částicemi. Provázání je v tomto případě popsáno čtyřmi tenzory provázání $\mathbf{M}(m,n), m < n, \mathbf{M}(1,2,3)$, které definujeme jako rozdíl odpovídajícího korelačního tenzoru a součinu vektorů polarizace a tenzorů provázání nižších řádů:

$$M_{ij}(m,n) = K_{ij}(m,n) - p_i^{(m)} p_j^{(n)},$$

$$M_{ijk}(1,2,3) = K_{ijk}(1,2,3) - p_i^{(1)} M_{jk}(2,3) - p_j^{(2)} M_{ik}(1,3) - p_k^{(3)} M_{ij}(1,2) - p_i^{(1)} p_j^{(2)} p_k^{(3)}.$$

Tenzor $\mathbf{M}(m,n)$ popisuje provázání m-té a n-té částice, tenzor $\mathbf{M}(1,2,3)$ popisuje provázání všech tří částic. Každý stav tříčásticového systému je jednoznačně zadán hodnotami tenzorů $M_{ijk}(1,2,3)$, $M_{ij}(1,2)$, $M_{ij}(1,3)$, $M_{ij}(2,3)$ a vektorů polarizace $p_i^{(m)}, m = 1,2,3$. Další podrobnosti a příklady lze nalézt v článku [2].

## Seznam použité literatury

[1] G. Alber, A. Delgado, I. Jex : QIC **1** (2001) 33

[2] J. Schlienz, G. Mahler : Phys. Rev. **A 52** (1995) 4396

[3] Bouwmeester D., Ekert A., Zeilinger A.: The physics of quantum information, Springer, Berlin, 2000.

[4] J. Gruska : Quantum computing, McGraw Hill, London, 1999

[5] V. Bužek, M. Hillery : Phys. Rev. **A 54** (1996) 1844, Phys. Rev. **A 62** (2000) 022303

[6] N. Gisin, S. Massar : Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 2153

[7] W. K. Wooters, W. H. Zurek : Nature **299** (1982) 802