DIPLOMOVÁ PRÁCE

LIEOVY ALGEBRY ZÍSKANÉ GRADOVANÝMI KONTRAKCEMI $sl(3,\mathbb{C})$ PRO PŘÍPAD PAULIHO GRADACE

Petr Novotný

16. května 2003

Poděkování

Rád bych poděkoval prof. Miloslavu Havlíčkovi a doc. Editě Pelantové za konzultace a cenné podněty, prof. Jiřímu Paterovi a prof. Pavlu Winternitzovi za konzultace, péči a věnovaný čas během mého pobytu v CRM, Université de Montreál, kde byl napsán program v systému Maple 8, realizující výpočty uvedené v této práci. Zvláště chci poděkovat svému školiteli prof. Jiřímu Tolarovi za jeho obětavé vedení během posledních tří let.

Obsah

Úvod

V roce 1951 I.E. Segal přišel s myšlenkou kontrahování Lieových algeber pro fyzikální teorie spojené limitním procesem. Tuto myšlenku dále v roce 1953 studovali Inönü a Wigner, kteří zavedli tzv. jednoduché Inönü-Wignerovy kontrakce (IW-kontrakce). V roce 1991 E. Weimar-Woods v práci [16] systematicky studuje takzvané zobecněné IW-kontrakce. V témže roce definují M. de Montigny a J. Patera v práci [12] gradované kontrakce, jimž se budeme věnovat v této práci.

Hlavní rozdíl mezi IW-kontrakcemi a gradovanými kontrakcemi spočívá v použití Jacobiho identit. Zatímco IW-kontrakce se získávají jako limity posloupností algeber splňujících Jacobiho identity (Jacobiho identity jsou automaticky splněny), při gradovaných kontrakcích dávají Jacobiho identity systém kvadratických rovnic pro kontrakční parametry. Složitost tohoto systému závisí na tvaru komutačních relací a počtu gradačních podprostorů.

Kontrahované algebry dané řešením systému kontrakčních rovnic je potřeba klasifikovat, tj. určit které z algeber jsou navzájem izomorfní, popřípadě identifikovat algebry s již známými algebrami. Zde nastává problém, neboť kompletně byly doposud klasifikovány pouze prosté Lieovy algebry konečných dimenzí. Dále byly v [16] klasifikovány Lieovy algebry dimenzí $n \leq 5$ a nilpotentní Lieovy algebry dimenze $n = 6$.

Cílem této práce je klasifikovat kontrahované Lieovy algebry dimenze 8, získané gradovanými kontrakcemi prosté Lieovy algebry $sl(3, \mathbb{C})$ při Pauliho gradaci. Systém kontrakčních rovnic pro tento případ je vyřešen v [19]. Neekvivalentních řešení tohoto systému je 180 (viz dodatek 1). Máme tedy klasifikovat 180 osmidimenzionálních Lieových algeber. Pro řešení této úlohy jsme napsali program (viz dodatek 3) v systému Maple 8 založený na algoritmech z [2]. Ačkoli úloha, zda dvě Lieovy algebry stejné dimenze jsou izomorfní, se může zdát jednoduchou, jde o úlohu značně komplikovanou. Určit, zda jsou dvě algebry izomorfní, můžeme pomocí jejich invariantů. Pokud jsou invarianty různé, pak jsou Lieovy algebry neizomorfní. Pokud jsou však invarianty stejné, pak stále není zaručeno, že dané algebry budou izomorfní. Izomorfismus lze však hledat i explicitně, v našem případě (dimenze 8) jde o řešení systému 224 kvadratických rovnic a jedné nerovnice pro 64 neznámých. Tento systém lze řešit s využitím počítače, avšak potom v případě nenalezení izomorfismu nelze tvrdit, že algebry jsou neizomorfní.

Obvykle jsou zkoumány gradované kontrakce prostých Lieových algeber, neboť u těchto se očekává nejvíce výsledků. Lieova algebra $A_2 = sl(3, \mathbb{C})$ má po Lieově algebře $A_1 = sl(2, \mathbb{C})$ druhou nejnižší dimenzi mezi prostými klasickými Lieovými algebrami řady A_n. Gradované kontrakce Lieovy algebry $sl(2, \mathbb{C})$ jsou pro všechny jemné gradace popsány v [18]. Gradované kontrakce $sl(3,\mathbb{C})$ pro případ toroidální gradace byly nalezeny v [13, 14]. V těchto pracích bylo získáno 34 neizomorfních Lieových algeber dimenze 8. V [15] jsou nalezeny gradované kontrakce pro Lieovu algebru $so(N+1)$ pro $N \in \mathbb{N}$. Zkoumání gradovaných kontrakcí $sl(3,\mathbb{C})$ je krokem na cestě k nalezení gradovaných kontrakcí pro $sl(n,\mathbb{C})$.

V první kapitole uvedeme základní definice a vlastnosti Lieových algeber čerpané převážně z [1]. Druhou kapitolu věnujeme popisu gradací, přičemž se zaměříme na Pauliho gradaci $sl(3,\mathbb{C})$. V kapitole třetí zavedeme pojem gradovaných kontrakcí a uvedeme systém kontrakčních rovnic pro Pauliho gradaci $sl(3,\mathbb{C})$. Čtvrtá kapitola je věnována identifikaci Lieových algeber. Uvedeme v ní postupně algoritmy z [2] pro nalezení direktního rozkladu a Leviho rozkladu Lieovy algebry a nalezení nilradikálu. Dále zde popíšeme postup použitý při identifikaci. V páté kapitole popíšeme postup hledání gradovaných kontrakcí pro případ Lieovy algebry $sl(2,\mathbb{C})$. V poslední šesté kapitole nejprve názorně předvedeme postup uplatněný při identifikaci na příkladu jedné ze získaných algeber. Poté shrneme výsledky identifikace Lieových algeber získaných gradovanými kontrakcemi Lieovy algebry $sl(3,\mathbb{C})$. V dodatku 1 uvedeme neekvivalentní řešení systému kontrakčních rovnic pro Pauliho gradaci $sl(3,\mathbb{C})$. Dodatek 2 obsahuje komutační relace identifikovaných algeber. Dodatkem 3 je zdrojový text našeho programu v systému Maple 8 užitého při identifikaci.

Kapitola 1

Lieovy algebry, definice a vlastnosti

Nejprve uvedeme některé základní definice a vlastnosti týkající se Lieových algeber. Lemma teorémy a jejich důsledky uvedeme bez důkazů. Tyto lze nalézt v [1].

1.1 Lineární algebra

Definice 1.1.1. *Lineární algebrou* $\mathcal{A}$ *nad tělesem* $\mathbb{F}$ nazýváme uspořádanou dvojici $(A, \cdot)$, kde A je vektorový (lineární) prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, na kterém je definováno bilineární zobrazení součin $\cdot : A \times A \longrightarrow A$, tj. zobrazení splňující:

$$\forall x, y \in A,\ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \qquad (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y) = \alpha (x \cdot y); \tag{1.1}$$

$$\forall x, y, z \in A, \qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z. \tag{1.2}$$

Poznámka 1.1.2.

1. Lineární algebra (dále jen algebra) nad tělesem $\mathbb{F}$ se nazývá *reálná*, resp. *komplexní*, je-li $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ tj. je-li reálný, resp. komplexní její nosný vektorový prostor.

2. *Dimenzí* resp. *bází* algebry $\mathcal{A}$ nazýváme dimenzi, resp. bázi vektorového prostoru A.

3. Algebra $\mathcal{A}$ se nazývá *asociativní*, resp. *komutativní (abelovská)*, je-li asociativní, resp. komutativní její součin.

Definice 1.1.3. Buďte $\mathcal{A} = (A, \cdot_A)$, $\mathcal{B} = (B, \cdot_B)$ algebry nad týmž tělesem $\mathbb{F}$. Zobrazení $h : A \longrightarrow B$ nazýváme *homomorfismem*, resp. *izomorfismem* algeber $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, jestliže je homomorfismem, resp. izomorfismem vektorových prostorů A, B a splňuje:

$$\forall x, y \in A, \qquad h(x \cdot_A y) = h(x) \cdot_B h(y). \tag{1.3}$$

Homomorfismus, resp. izomorfismus $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ nazýváme *endomorfismem*, resp. *automorfismem* algebry $\mathcal{A}$.

Definice 1.1.4. *Podalgebrou* $\mathcal{B}$ algebry $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ nazýváme uspořádanou dvojici $(B, \cdot_B)$, kde $B \subset\subset A$ je lineární podprostor prostoru A takový, že $\forall x, y \in B,\ x \cdot y \in B$ a $\cdot_B$ je zúžení operace $\cdot$ na prostor B. Podalgebru značíme $\mathcal{B} \subset\subset \mathcal{A}$.

Poznámka 1.1.5. Algebry budeme nadále označovat kaligrafickými písmeny a jejich nosné prostory odpovídajícími latinskými písmeny. Dále budeme zjednodušeně psát $x \in \mathcal{A}$ namísto $x \in A$ a pokud bude zřejmé, jak jsou definovány příslušné operace, pak budeme $\mathcal{A}$ zjednodušeně zapisovat jako lineární prostor či jako množinu.

Definice 1.1.6. Podalgebru $\mathcal{I} \subset\subset \mathcal{A}$ algebry $\mathcal{A}$ nazýváme *pravým*, resp. *levým ideálem* algebry $\mathcal{A}$, pokud $\forall x \in \mathcal{A},\ \forall y \in \mathcal{I}$ platí $x \cdot y \in \mathcal{I}$, resp. $y \cdot x \in \mathcal{I}$. Pokud je $\mathcal{I}$ současně levým i pravým ideálem, pak se nazývá *(oboustranným) ideálem.*

Poznámka 1.1.7. Podalgebru, resp. ideál $\mathcal{B}$ algebry $\mathcal{A}$ nazýváme *vlastní* podalgebrou, resp. *vlastním* ideálem, pokud $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$. Vlastní podalgebru, resp. ideál, různou od nulové podalgebry (označíme ji $0 = (0, \cdot)$) nazýváme *netriviální* podalgebrou, resp. *netriviálním* ideálem.

Definice 1.1.8. Buď $\mathcal{I}$ oboustranný ideál algebry $\mathcal{A}$, pak lineární faktorprostor $\mathcal{A}/\mathcal{I} = \{[a] = a + \mathcal{I} |\ a \in \mathcal{A}\}$ s indukovaným součinem $[a] \cdot [b] = [a \cdot b],\ \forall a, b \in \mathcal{A}$ nazýváme *faktoralgebrou* $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ algebry $\mathcal{A}$ podle ideálu $\mathcal{I}$. Prvky $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ jsou třídy ekvivalence $\sim$ v $\mathcal{A}$ indukované ideálem $\mathcal{I}$, tj. ekvivalence definované vztahem $x, y \in \mathcal{A},\ x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{I}$.

1.2 Lieova algebra

Definice 1.2.1. Lineární algebra $\mathcal{L}$ se nazývá *Lieovou algebrou*, jestliže v ní platí následující identity:

1. $\forall x \in \mathcal{L}, \qquad x \cdot x = 0;$
2. $\forall x, y, z \in \mathcal{L}, \qquad (x \cdot y) \cdot z + (y \cdot z) \cdot x + (z \cdot x) \cdot y = 0.$

Poznámka 1.2.2.

1. Součin v Lieově algebře $\mathcal{L}$ se nazývá *komutátor* a značí se $[x, y] \equiv x \cdot y,\ \forall x, y \in \mathcal{L}$.
2. Z první vlastnosti komutátoru v definici 1.2.1 plyne:
$$[x, y] = -[y, x], \qquad \forall x, y \in \mathcal{L}, \tag{1.4}$$
tj. komutátor je antisymetrický a každá Lieova algebra je tudíž antikomutativní.
3. Z antisymetrie komutátoru plyne, že v Lieově algebře je každý ideál oboustranný.
4. Druhá vlastnost v definici 1.2.1 se nazývá *Jacobiho identita*:
$$\forall x, y, z \in \mathcal{L}, \qquad [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0. \tag{1.5}$$

5. Buď $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ asociativní algebra, pak $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} = (A, [\,,])$, kde $[x,y] = x \cdot y - y \cdot x, \ \forall x, y \in A$ je Lieova algebra tzv. Lieova algebra asociativní algebry $\mathcal{A}$.

Příklad 1.2.3. Buď V vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem $\mathbb{F}$. Množina $End(V)$ všech jeho endomorfismů (doplněná operacemi součet a násobení číslem z tělesa na lineární prostor) tvoří spolu s operací skládání zobrazení asociativní algebru. Lieovu algebru této asociativní algebry budeme značit $gl(V) = End_{\mathcal{L}}(V)$. Speciálně je-li $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ a $dim V = n$, pak $\mathbb{C}^{n,n}$ spolu se součinem matic tvoří asociativní algebru a její Lieova algebra

$$gl(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n,n} \tag{1.6}$$

je tzv. *maticovou reprezentací* Lieovy algebry $gl(V)$. Množina všech matic z $gl(n, \mathbb{C})$ s nulovou stopou

$$sl(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} \mid Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} = 0\} \tag{1.7}$$

tvoří Lieovu podalgebru v $gl(n, \mathbb{C})$.

Poznámka 1.2.4. Buď $\mathcal{A}$ algebra nad tělesem $\mathbb{F}$ dimenze $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ a nechť $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ je báze algebry $\mathcal{A}$, pak čísla $c_{i,j}^{k} \in \mathbb{F}$ z rovností

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j}^{k} e_k, \qquad \forall i, j \in \hat{n} = \{1, 2, \dots, n\} \tag{1.8}$$

nazýváme *strukturní konstanty* algebry $\mathcal{A}$ v bázi $\{e_i\}_{i=1}^{n}$. Algebra $\mathcal{A}$ je Lieova algebra právě tehdy, když $\forall i, j, k \in \hat{n}$ platí:

$$e_i \cdot e_i = 0, \qquad e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i, \qquad (e_i \cdot e_j) \cdot e_k + (e_j \cdot e_k) \cdot e_i + (e_k \cdot e_i) \cdot e_j = 0.$$

Tyto podmínky jsou ekvivalentní podmínkám

$$c_{i,i}^{k} = 0, \qquad c_{i,j}^{k} = -c_{j,i}^{k}, \qquad \sum_{r=1}^{n} (c_{i,j}^{r} c_{r,k}^{s} + c_{j,k}^{r} c_{r,i}^{s} + c_{k,i}^{r} c_{r,j}^{s}) = 0, \qquad \forall i, j, k, s \in \hat{n}. \tag{1.9}$$

Značení 1.2.5. Buďte A, B lineární podprostory nosného prostoru L Lieovy algebry $\mathcal{L} = (L, [\,,])$ nad tělesem $\mathbb{F}$ (zjednodušeně budeme říkat podprostory Lieovy algebry $\mathcal{L}$), potom

$$[A, B] = Span_{\mathbb{F}}\{\, [a, b] \mid a \in A, \ b \in B\} \tag{1.10}$$

bude značit lineární podprostor Lieovy algebry $\mathcal{L}$ generovaný všemi komutátory $[a, b]$ prvků $a \in A, \ b \in B$. Obdobný zápis budeme užívat i pro podalgebry.

Poznámka 1.2.6. Je zřejmé, že pro podprostory $A, B, C \subseteq \mathcal{L}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$, platí:

$$[A, B] = [B, A], \qquad [A + B, C] = [A, C] + [B, C], \qquad [A \cap B, C] \subseteq [A, C] \cap [B, C], \tag{1.11}$$

$$[[A, B], C] \subseteq [[A, C], B] + [[B, C], A], \tag{1.12}$$

kde $\cup$ a $+$ značí průnik a součet lineárních prostorů.

Poznámka 1.2.7. S využitím značení 1.2.5 přepíšeme definice pro podalgebru a ideál Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Buď A podprostor Lieovy algebry $\mathcal{L} = (L, [\,,\,])$ a nechť $\mathcal{A} = (A, [\,,\,]_A)$, potom:

1. $\mathcal{A}$ je podalgebra $\mathcal{L}$, pokud $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \subseteq \mathcal{A}$;
2. $\mathcal{A}$ je ideál $\mathcal{L}$, pokud $[\mathcal{A}, \mathcal{L}] \subseteq \mathcal{A}$.

Poznámka 1.2.8. Ze vztahů (1.11) a (1.12) pro $C = \mathcal{L}$ plyne, že komutátor $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, součet $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, resp. průnik $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ dvou ideálů $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je opět ideálem v $\mathcal{L}$.

Definice 1.2.9. *Centrem* $C(\mathcal{L})$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ nazýváme ideál:

$$C(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} |\ \forall y \in \mathcal{L},\ [x, y] = 0\}. \tag{1.13}$$

Derivovanou algebrou $D(\mathcal{L})$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ nazýváme ideál:

$$D(\mathcal{L}) = [\mathcal{L}, \mathcal{L}]. \tag{1.14}$$

Definice 1.2.10. Buď $\mathcal{L}$ Lieova algebra.

1. Posloupnost ideálů $D^0(\mathcal{L}) \supseteq D^1(\mathcal{L}) \supseteq D^2(\mathcal{L}) \supseteq \ldots \supseteq D^k(\mathcal{L}) \supseteq \ldots$ definovanou vztahy:

   $$D^0(\mathcal{L}) = \mathcal{L}, \qquad D^{k+1}(\mathcal{L}) = [D^k(\mathcal{L}), D^k(\mathcal{L})], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.15}$$

   nazýváme *derivovanou posloupností* Lieovy algebry $\mathcal{L}$.

2. Posloupnost ideálů $\mathcal{L}^0 \supseteq \mathcal{L}^1 \supseteq \mathcal{L}^2 \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{L}^k \supseteq \ldots$ definovanou vztahy:

   $$\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}, \qquad \mathcal{L}^{k+1} = [\mathcal{L}^k, \mathcal{L}], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.16}$$

   nazýváme *dolní centrální posloupnost* Lieovy algebry $\mathcal{L}$.

3. Posloupnost ideálů $C^0(\mathcal{L}) \subseteq C^1(\mathcal{L}) \subseteq C^2(\mathcal{L}) \subseteq \ldots \subseteq C^k(\mathcal{L}) \subseteq \ldots$ definovanou vztahy:

   $$C^0(\mathcal{L}) = 0, \qquad C^{k+1}(\mathcal{L})/C^k(\mathcal{L}) = C(\mathcal{L}/C^k(\mathcal{L})), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.17}$$

   nazýváme *horní centrální posloupnost* Lieovy algebry $\mathcal{L}$.

Poznámka 1.2.11. Je-li $\mathcal{L}$ Lieova algebra, pak pro $i, j, k \in \mathbb{N}$ platí

$$[\mathcal{L}^i, \mathcal{L}^j] \subseteq \mathcal{L}^{i+j}, \qquad [\mathcal{L}, C^{i+1}(\mathcal{L})] \subseteq C^i(\mathcal{L}). \tag{1.18}$$

Poznámka 1.2.12. Je-li $h : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ homomorfismus Lieových algeber, pak

$$h(D^k(\mathcal{L}_1)) = D^k(h(\mathcal{L}_1)), \qquad h((\mathcal{L}_1)^k) = (h(\mathcal{L}_1))^k. \tag{1.19}$$

Je-li $h : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ izomorfismus Lieových algeber, pak navíc

$$h(C^k(\mathcal{L}_1)) = C^k(h(\mathcal{L}_1)). \tag{1.20}$$

Definice 1.2.13. Lieova algebra $\mathcal{L}$ se nazývá

1. *řešitelná*, pokud existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $D^k(\mathcal{L}) = 0$;
2. *nilpotentní*, pokud existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\mathcal{L}^k = 0$;
3. *poloprostá (polojednoduchá)*, pokud neobsahuje žádný nenulový řešitelný ideál, tj. jediný řešitelný ideál v $\mathcal{L}$ je 0;
4. *prostá (jednoduchá)*, pokud neobsahuje netriviální ideály a $D(\mathcal{L}) \neq 0$, tj. $dim(\mathcal{L}) > 1$ a jedinými ideály v $\mathcal{L}$ jsou 0 a $\mathcal{L}$.

Poznámka 1.2.14.

1. Ideál $\mathcal{I}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je *řešitelný, nilpotentní, poloprostý, prostý* právě tehdy, když $\mathcal{I}$ je řešitelná, nilpotentní, poloprostá, prostá Lieova algebra.
2. Z definice 1.2.13 je zřejmé, že každá nilpotentní Lieova algebra je řešitelná a každá prostá Lieova algebra je poloprostá.
3. Lieova algebra $\mathcal{L}$ je poloprostá, pokud nemá nenulový komutativní ideál.
4. Lieova algebra $\mathcal{L}$ je nilpotentní právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $C^k(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.

1.3 Vlastnosti Lieových algeber

Lemma 1.3.1. *Každá podalgebra a každý homomorfní obraz řešitelné Lieovy algebry je řešitelný. Pokud Lieova algebra $\mathcal{L}$ obsahuje řešitelný ideál $\mathcal{R}$ takový, že faktoralgebra $\mathcal{L}/\mathcal{R}$ je řešitelná, pak $\mathcal{L}$ je řešitelná.*

Lemma 1.3.2. *Součet dvou řešitelných, resp. nilpotentních ideálů Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je opět řešitelný, resp. nilpotentní ideál v $\mathcal{L}$.*

Definice 1.3.3. *Radikál* $R(\mathcal{L})$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je součet všech jejích řešitelných ideálů.

Definice 1.3.4. *Nilradikál* $NR(\mathcal{L})$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je součet všech jejích nilpotentních ideálů.

Poznámka 1.3.5. Neboť každý nilpotentní ideál Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je řešitelný platí

$$NR(\mathcal{L}) \subseteq R(\mathcal{L}). \tag{1.21}$$

Poznámka 1.3.6. Buď $\mathcal{L}$ konečnědimenzionální Lieova algebra a nechť $\mathcal{R}$ je řešitelný ideál maximální dimenze. Z lemma 1.3.2 plyne, že je-li $\mathcal{B}$ libovolný řešitelný ideál v $\mathcal{L}$, pak $\mathcal{R}+\mathcal{B}$ je řešitelný ideál. Díky maximální dimenzi $\mathcal{R}$ máme $\mathcal{R}+\mathcal{B} = \mathcal{R}$. Tedy pro konečnědimenzionální Lieovy algebry existuje právě jeden maximální řešitelný ideál (*radikál*) obsahující všechny ostatní řešitelné ideály a $\mathcal{R}$ je radikál Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Obdobnou úvahou pro nilpotentní ideály dostáváme, že v konečnědimenzionální Lieově algebře existuje právě jeden maximální nilpotentní ideál (*nilradikál*) obsahující všechny ostatní nilpotentní ideály.

Teorém 1.3.7. *Buď konečnědimenzionální $\mathcal{L}$ Lieova algebra nad tělesem charakteristiky 0. Nechť $\mathcal{R}$ je její radikál a $\mathcal{N}$ její nilradikál. Pak $[\mathcal{L}, \mathcal{R}] \subseteq \mathcal{N}$.*

Důsledek 1.3.8. *Derivovaná algebra každé konečnědimenzionální řešitelné Lieovy algebry nad tělesem charakteristiky nula je nilpotentní.*

Definice 1.3.9. Buďte $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ podalgebry Lieovy algebry $\mathcal{L}$, jejichž nosné prostory splňují vztah $L = L_1 \oplus L_2$. Pak říkáme, že Lieova algebra $\mathcal{L}$ je:

1. *direktním (přímým) součtem* svých ideálů $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$, pokud

$$[L_1, L_2] = 0, \qquad [L_i, L_i] \subseteq L_i, \qquad i = 1, 2, \tag{1.22}$$

   značíme $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$;

2. *semidirektním (polopřímým) součtem* svého ideálu $\mathcal{L}_1$ a podalgebry $\mathcal{L}_2$, pokud

$$[L_1, L_2] \subseteq L_1, \qquad [L_i, L_i] \subseteq L_i, \qquad i = 1, 2, \tag{1.23}$$

   značíme $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \bar{\oplus} \mathcal{L}_2$.

Definice 1.3.10. Existuje-li direktní rozklad Lieovy algebry $\mathcal{L}$, pak říkáme, že Lieova algebra $\mathcal{L}$ je *rozložitelná*, v opačném případě říkáme, že $\mathcal{L}$ je *nerozložitelná.*

Teorém 1.3.11 (Strukturní teorém). *Konečnědimenzionální Lieova algebra $\mathcal{L}$ nad tělesem charakteristiky nula je poloprostá právě tehdy, když $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_r$, kde $\mathcal{L}_i$, $i \in \hat{r}$ jsou prosté ideály Lieovy algebry $\mathcal{L}$.*

Důsledek 1.3.12. *Je-li $\mathcal{L}$ poloprostá Lieova algebra nad tělesem charakteristiky nula, pak každý její ideál je poloprostý a platí $D(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.*

Teorém 1.3.13 (Levi). *Buď $\mathcal{L}$ konečnědimenzionální Lieova algebra nad tělesem charakteristiky nula a nechť $\mathcal{R}$ je její radikál, potom existuje poloprostá podalgebra $\mathcal{S}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ tak, že $\mathcal{L} = \mathcal{R} \bar{\oplus} \mathcal{S}$.*

Poznámka 1.3.14. Podalgebra $\mathcal{S}$ z Leviho teorému se nazývá *Leviho faktor.*

Důsledek 1.3.15. *Buď $\mathcal{L}$ konečnědimenzionální Lieova algebra nad tělesem charakteristiky nula a nechť $\mathcal{R}$ je její radikál. Potom platí $[\mathcal{L}, \mathcal{R}] = D(\mathcal{L}) \cap \mathcal{R}$.*

Důsledek 1.3.16. *Radikál derivované algebry konečnědimenzionální Lieovy algebry nad tělesem charakteristiky nula je nilpotentní.*

Teorém 1.3.17 (Malcev-Harish-Chandra). *Buď $\mathcal{L} = \mathcal{R} \bar{\oplus} \mathcal{S}$ konečnědimenzionální Lieova algebra nad tělesem charakteristiky nula, $\mathcal{R}$ její řešitelný ideál a $\mathcal{S}$ její poloprostá podalgebra. Nechť $\mathcal{S}_1$ je poloprostá podalgebra $\mathcal{L}$. Pak existuje automorfismus α Lieovy algebry $\mathcal{L}$ tak, že $\alpha(\mathcal{S}_1) \subseteq \mathcal{S}$.*

Důsledek 1.3.18. *Libovolnou poloprostou podalgebru konečnědimenzionální Lieovy algebry nad tělesem charakteristiky nula lze vnořit do Leviho faktoru.*

Důsledek 1.3.19. *Pokud* $\mathcal{L} = \mathcal{R}\bar{\oplus}\mathcal{S}_1 = \mathcal{R}\bar{\oplus}\mathcal{S}_2$*, kde* $\mathcal{S}_i,\ i = 1, 2$ *jsou poloprosté podalgebry, pak existuje automorfismus* α *algebry* $\mathcal{L}$ *tak, že* $\alpha(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2$*.*

Definice 1.3.20. Buďte $\mathcal{L}$ Lieova algebra a V vektorový prostor nad týmž tělesem $\mathbb{F}$. *Reprezentací* Lieovy algebry $\mathcal{L}$ na vektorovém prostoru V nazýváme každý homomorfismus $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow gl(V)$.

Příklad 1.3.21. Buď $\mathcal{L}$ Lieova algebra. Zobrazení $ad : \mathcal{L} \longrightarrow gl(\mathcal{L})$, které prvku $x \in \mathcal{L}$ přiřadí lineární operátor $ad(x) \in gl(L)$ definovaný vztahem

$$ad(x)y := [x, y], \qquad \forall y \in \mathcal{L} \tag{1.24}$$

je reprezentace Lieovy algebry $\mathcal{L}$ na jejím nosném vektorovém prostoru tzv. *adjungovaná reprezentace* $\mathcal{L}$.

Teorém 1.3.22 (Engel). *Lieova algebra* $\mathcal{L}$ *konečné dimenze je nilpotentní právě tehdy, když* $ad(x)$ *je nilpotentní* $\forall x \in \mathcal{L}$*, tj.* $\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{L}, \exists k \in \mathbb{N}, (ad(x))^k = 0$.

Poznámka 1.3.23. Konečnědimenzionální Lieova algebra $\mathcal{L}$ nad tělesem charakteristiky nula je řešitelná právě tehdy, když $Tr(ad(x)^2) = 0,\ \forall x \in D(\mathcal{L})$.

Teorém 1.3.24. *Buď* $\mathcal{L}$ *konečnědimenzionální Lieova algebra, pak její nilradikál* $\mathcal{N}$ *lze charakterizovat následujícím způsobem:* $\forall x \in \mathcal{N}$ *je* $ad(x)$ *nilpotentní a je-li* $\mathcal{B}$ *ideál v* $\mathcal{L}$ *takový, že* $ad(b)$ *je nilpotentní* $\forall b \in \mathcal{B}$*, pak* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}$*.*

Definice 1.3.25. Buď $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow gl(V)$ reprezentace Lieovy algebry $\mathcal{L}$ nad tělesem $\mathbb{F}$ na konečnědimenzionálním vektorovém prostoru V nad týmž tělesem. Zobrazení $f : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{F}$ definované předpisem:

$$f(x, y) = Tr(\rho(x) \circ \rho(y)), \qquad \forall x, y \in \mathcal{L} \tag{1.25}$$

je symetrická bilineární forma na $\mathcal{L}$ nazývaná *stopová forma* reprezentace ρ.

Definice 1.3.26. Je-li $\mathcal{L}$ konečnědimenzionální Lieova algebra, pak stopovou formu její adjungované reprezentace tj.

$$f(x, y) = Tr(ad(x) \circ ad(y)), \qquad \forall x, y \in \mathcal{L} \tag{1.26}$$

nazýváme *Killingovou formou* na $\mathcal{L}$.

Teorém 1.3.27. *Buď* $\mathcal{L}$ *konečnědimenzionální Lieova algebra nad tělesem charakteristiky nula, pak její radikál* $\mathcal{R}$ *je ortogonální doplněk* $(D(\mathcal{L}))^{\perp}$ *její derivované algebry do* $\mathcal{L}$ *vzhledem ke Killingově formě* $f(x, y)$*.*

Kapitola 2

Gradace Lieových algeber

V této kapitole se budeme věnovat gradacím Lieových algeber. Nejprve uvedeme základní definice a naznačíme metodu hledání gradací. Nakonec uvedeme námi uvažovanou Pauliho gradaci.

2.1 Základní definice

Definice 2.1.1. *Gradací (graduací)* Lieovy algebry $\mathcal{L} = (L, [\,,])$ nazýváme rozklad jejího nosného prostoru $L = \bigoplus_{i \in I} L_i$ do direktního součtu jejích tzv. *gradovaných* podprostorů $L_i \subset\subset L,\ i \in I$ takový, že:

$$(\forall i, j \in I)(\exists k \in I)([L_i, L_j] \subseteq L_k). \tag{2.1}$$

Pro gradaci Γ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ budeme užívat zápis:

$$\Gamma : \mathcal{L} = \bigoplus_{i \in I} L_i. \tag{2.2}$$

Poznámka 2.1.2. Množina všech automorfismů Lieovy algebry $\mathcal{L}$ tvoří spolu s operací skládání zobrazení grupu $Aut\mathcal{L}$ tzv. *grupu automorfismů Lieovy algebry* $\mathcal{L}$.

Definice 2.1.3. Dvě gradace $\Gamma : \mathcal{L} = \bigoplus_{i \in I} L_i$ a $\tilde{\Gamma} : \mathcal{L} = \bigoplus_{j \in J} \tilde{L}_j$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ jsou *ekvivalentní*, jestliže existuje automorfismus $g \in Aut\mathcal{L}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ tak, že $(\forall i \in I)(\exists j \in J)(g(L_i) = \tilde{L}_j)$.

Definice 2.1.4. Gradace $\Gamma : \mathcal{L} = \bigoplus_{i \in I} L_i$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ se nazývá *zjemněním* gradace $\bar{\Gamma} : \mathcal{L} = \bigoplus_{j \in J} \bar{L}_j$, pokud pro každé $i \in I$ existuje $j \in J$ tak, že $L_i \subseteq \bar{L}_j$. Zjemnění se nazývá *vlastní*, pokud mohutnost množiny I je větší než mohutnost množiny J.

Definice 2.1.5. Gradace, která nemá žádné vlastní zjemnění se nazývá *jemná*. Gradace, která je rozkladem na jednodimenzionální podprostory se nazývá se nazývá *nejjemnější*.

Poznámka 2.1.6. Pro každou gradaci $\Gamma : \mathcal{L} = \bigoplus_{i\in I} L_i$ konečnědimenzionální Lieovy algebry $\mathcal{L}$ existuje jemná gradace $\tilde{\Gamma} : \mathcal{L} = \bigoplus_{j\in J} \tilde{L}_j$, která je jejím zjemněním tj. existuje rozklad indexové množiny $J = \bigcup_{i\in I} J_i$ na navzájem disjunktní podmnožiny J_i, $i \in I$ takový, že $\forall i \in I$ platí $L_i = \bigoplus_{j\in J_i} \tilde{L}_j$.

Je-li $\Gamma : \mathcal{L} = \bigoplus_{i\in I} L_i$ gradace konečnědimenzionální Lieovy algebry $\mathcal{L}$, pak vlastnost (2.1) definuje na indexové množině I binární operaci $+ : I \times I \longrightarrow I : i,j \longrightarrow k$ tak, že $[L_i, L_j] \subseteq L_k$. Pokud $[L_i, L_j] = 0$, pak k lze volit libovolně. V [4] je dokázáno, že indexovou množinu I s touto operací lze vždy vnořit do abelovské pologrupy G a je-li $\mathcal{L}$ navíc prostá, pak dokonce do abelovské grupy. Vlastnost (2.1) pak můžeme přepsat jako:

$$[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}, \quad kde\ i, j, i+j \in G. \tag{2.3}$$

V takovém případě říkáme, že Lieova algebra $\mathcal{L}$ je *gradovaná grupou* G a grupu G nazýváme *gradační grupou*.

2.2 MAD-grupy

Nechť $\mathcal{L}$ je dále konečnědimenzionální Lieova algebra nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$ a $g \in Aut\mathcal{L}$ její *diagonalizovatelný* automorfismus. Jsou-li $x, y \in \mathcal{L}$ vlastní vektory g odpovídající vlastním číslům $\mu, \nu \neq 0$ tj.

$$gx = \mu x, \qquad gy = \nu y,$$

pak

$$g[x,y] = [gx, gy] = \mu\nu[x,y].$$

Tedy $[x,y]$ je buď vlastní vektor automorfismu g odpovídající vlastnímu číslu $\mu\nu$ nebo nulový vektor. Odtud plyne, že pro vlastní podprostory L_λ, $\lambda \in \sigma(g)$ automorfismu g platí:

$$[L_\mu, L_\nu] \subseteq L_{\mu\nu}, \qquad \forall \mu, \nu \in \sigma(g),$$

kde $\sigma(q)$ je spektrum g (množina všech vlastních čísel automorfismu g) a $L_{\mu\nu} = 0$ pro $\mu\nu \notin \sigma(g)$. To znamená, že rozklad nosného prostoru Lieovy algebry $\mathcal{L}$ do direktního součtu vlastních podprostorů diagonalizovatelného automorfismu $g \in Aut\mathcal{L}$ je gradace:

$$\Gamma_g : \mathcal{L} = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(g)} Ker(g - \lambda \mathrm{id}). \tag{2.4}$$

Uvažujme další diagonalizovatelný automorfismus $h \in Aut\mathcal{L}$ komutující s g. Potom pro libovolné $x \in L_\lambda$, $\lambda \in \sigma(g)$ platí:

$$g(h(x)) = h(g(x)) = h(\lambda x) = \lambda h(x),$$

tj. $h(x) \in L_\lambda$. Odtud plyne, že $h(L_\lambda) \subseteq L_\lambda$, $\forall \lambda \in \sigma(g)$, tj. vlastní podprostory L_λ, $\lambda \in \sigma(g)$ automorfismu g jsou invariantní vzhledem k h. Záměnou g a h v předchozí úvaze dostaneme, že vlastní podprostory h jsou invariantní vzhledem k g, a tedy existují společné vlastní podprostory vzájemně komutujících automorfismů g a h. Rozklad $\mathcal{L}$ do direktního součtu těchto společných vlastních podprostorů je zjemněním gradace Γ_g. Odtud plyne, že každá množina vzájemně komutujících diagonalizovatelných automorfismů $g_1, g_2, \ldots, g_m \in Aut\mathcal{L}$ určuje gradaci $\mathcal{L}$, jako rozklad $\mathcal{L}$ do direktního součtu jejich společných vlastních podprostorů. Naopak každá gradace (2.2) určuje podgrupu $Diag\Gamma \subset\subset Aut\mathcal{L}$ složenou ze všech diagonálních automorfismů $g \in Aut\mathcal{L}$, které zachovávají gradaci Γ tj. automorfismů splňujících

$$g(L_i) = L_i, \qquad g(x) = \lambda_i x, \qquad \forall x \in L_i,\ \forall i \in I, \tag{2.5}$$

kde $\lambda_i \neq 0$ závisí pouze na i a g. Jsou-li $N \subseteq M \subset Aut\mathcal{L}$ dvě množiny vzájemně komutujících diagonalizovatelných automorfismů, pak gradace Lieovy algebry $\mathcal{L}$ odpovídající množině M je zřejmě zjemněním gradace odpovídající množině N.

Podle poznámky (2.1.6) víme, že každou gradaci lze získat z nějaké jemné gradace. Stačí tedy hledat jemné gradace resp. maximální množiny $\mathcal{G}$ vzájemně komutujících diagonalizovatelných automorfismů v $Aut\mathcal{L}$. Takové množiny $\mathcal{G}$ jsou ve skutečnosti podgrupy v $Aut\mathcal{L}$ a nazýváme je *MAD-grupy* (maximální abelovské grupy diagonalizovatelných automorfismů). V [4] jsou dokázány následující teorémy.

Teorém 2.2.1. *Gradace Γ prosté konečnědimenzionální Lieovy algebra nad algebraicky uzavřeným tělesem charakteristiky nula je jemná právě tehdy, když diagonální podgrupa $Diag\Gamma$ je MAD-grupa v $Aut\mathcal{L}$.*

Teorém 2.2.2. *Dvě jemné gradace Γ_1 a Γ_2 prosté konečnědimenzionální Lieovy algebry nad algebraicky uzavřeným tělesem charakteristiky nula jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, jsou-li jim odpovídající MAD-grupy $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ konjugované v $Aut\mathcal{L}$.*

Poznámka 2.2.3. Podgrupy $H, K \subset\subset G$ grupy G jsou konjugované, pokud existuje $g \in G$ tak, že $H = gKg^{-1} = \{gkg^{-1} \mid k \in K\}$.

Problematika hledání MAD-grup pro komplexní Lieovy algebry, resp. pro jejich reálné formy je detailně popsána v [5], resp. [6] a my se jí v této práci zabývat nebudeme. Pouze poznamenáme, že Lieova algebra $sl(3, \mathbb{C})$ má čtyři neekvivalentní jemné gradace popsané např. v [4, 9], z nichž zde uvedeme jen Pauliho gradaci.

2.3 Grupa symetrie gradace

Nechť $\mathcal{L}$ je v této části komplexní Lieova algebra dimenze $n \in \mathbb{N}$. Zde pojednáme o grupě symetrie gradace Lieovy algebry. Ukazuje se, že tato grupa úzce souvisí s grupou symetrie systému kontrakčních rovnic.

Definice 2.3.1. *Grupou symetrie $Aut\,\Gamma$* gradace $\Gamma : \mathcal{L} = \bigoplus_{i \in I} L_i$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ nazýváme podgrupu v $Aut\mathcal{L}$:

$$Aut\,\Gamma = \{g \in Aut\mathcal{L} \mid \exists \pi_g \in S_I,\ \forall i \in I,\ gL_i = L_{\pi_g(i)}\ \}, \tag{2.6}$$

kde S_I značí grupu permutací indexové množiny I a π_g permutaci na množině I odpovídající automorfismu $g \in Aut\,\Gamma$.

Definice zaručuje existenci permutační reprezentace $\Delta_\Gamma : Aut\,\Gamma \longrightarrow S_I$ grupy $Aut\,\Gamma$ na indexové množině I, dané předpisem

$$\Delta_\Gamma(g) = \pi_g, \qquad g \in Aut\,\Gamma. \tag{2.7}$$

Jádrem této permutační reprezentace je *stabilizátor* gradace Γ v $Aut\,\Gamma$

$$Stab\,\Gamma = ker\Delta_\Gamma = \{\ g \in Aut\mathcal{L} \mid \forall i \in I,\ gL_i = L_i\}. \tag{2.8}$$

Stabilizátor je tedy normální podgrupa v $Aut\,\Gamma$ a podle věty o homomorfismu pro grupy dostáváme izomorfismus

$$Aut\,\Gamma/Stab\,\Gamma \cong \Delta_\Gamma Aut\,\Gamma. \tag{2.9}$$

Poznámka 2.3.2. V [19] je dokázáno, že grupa $\Delta_\Gamma Aut\,\Gamma$ bude grupou symetrie systému kontrakčních rovnic.

Pro jemnou gradaci Γ odpovídající MAD-grupě $\mathcal{G}$ platí

$$Stab\,\Gamma = \mathcal{G} \tag{2.10}$$

a definujeme-li *normalizátor* $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ MAD-grupy $\mathcal{G}$ v $Aut\mathcal{L}$ předpisem

$$\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \{h \in Aut\mathcal{L} \mid h^{-1}\mathcal{G}h \subseteq \mathcal{G}\}, \tag{2.11}$$

pak platí

$$\mathcal{N}(\mathcal{G}) = Aut\,\Gamma. \tag{2.12}$$

Z (2.9) dostáváme pro jemnou gradaci Γ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ odpovídající MAD-grupě $\mathcal{G}$ vztah

$$\mathcal{N}(\mathcal{G})/\mathcal{G} \cong \Delta_\Gamma Aut\,\Gamma. \tag{2.13}$$

2.4 Pauliho gradace $sl(3, \mathbb{C})$

Zde uvedeme Pauliho gradaci a jí odpovídající MAD-grupu pro $sl(n, \mathbb{C})$ a speciálně pro $sl(3, \mathbb{C})$. Nejprve definujeme pro $k \in \mathbb{N}$ matice $k \times k$:

$$Q_k = \mathrm{diag}(1, \omega_k, \omega_k^2, \ldots, \omega_k^{k-1}), \tag{2.14}$$

kde $\omega_k = \exp(2\pi i/k)$, a

$$P_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Pro $k = 1$ položíme $Q_1 = P_1 = (1)$. Pro tyto matice platí:

$$P_k Q_k = \omega_k Q_k P_k, \tag{2.16}$$

a tudíž tvoří konečnou grupu řádu k^3

$$\mathcal{P}_k = \{\omega_k^l Q_k^i P_k^j \mid i, j, l = 0, 1, \dots, k-1\} \tag{2.17}$$

nazývanou *Pauliho grupa.*

MAD-grupa odpovídající Pauliho gradaci pro $sl(n, \mathbb{C})$ nalezená v [10] je

$$\mathrm{Ad}\mathcal{P}_n = \{Ad_{Q_n^i P_n^j} \mid (i, j) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n\}, \tag{2.18}$$

kde Ad_A je tzv. *vnitřní automorfismus* algebry $sl(n, \mathbb{C})$ definovaný předpisem

$$Ad_A x = A^{-1} x A, \qquad \forall x \in sl(n, \mathbb{C}). \tag{2.19}$$

Gradační grupou Pauliho gradace je $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ a Pauliho gradace má tvar

$$\Gamma_P : sl(n, \mathbb{C}) = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \setminus (0,0)} L_{ij}, \qquad \text{kde} \quad L_{ij} = Span_{\mathbb{C}}\{Q_n^i P_n^j\}. \tag{2.20}$$

V [10] je dokázán následující teorém, pojednávající o grupě symetrie Pauliho gradace.

Teorém 2.4.1. *Faktor grupa $\mathcal{N}(\mathrm{Ad}\mathcal{P}_n)/\mathrm{Ad}\mathcal{P}_n$ je izomorfní grupě H_n*

$$\mathcal{N}(\mathrm{Ad}\mathcal{P}_n)/\mathrm{Ad}\mathcal{P}_n \cong H_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{Z}_n,\ ad - bc = \pm 1 \ mod\, n \right\}. \tag{2.21}$$

Tedy podle vztahu (2.13) platí $\Delta_{\Gamma_P} Aut\, \Gamma_P \cong H_n$, a příslušná permutace π_A odpovídající matici $A \in H_n$ je na indexové množině $I = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ definována předpisem

$$\pi_A(i, j) = (i, j)A, \qquad (i, j) \in I, \tag{2.22}$$

kde na pravé straně rovnosti násobíme řádkový vektor maticí počítáno modulo n.

Speciálně pro $n = 3$ je gradační grupou Pauliho gradace Lieovy algebry $sl(3, \mathbb{C})$ je grupa $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Položíme-li pro $i, j = 0, 1, 2$

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad P = P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad Q = Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

a označíme-li pro $i, j = 0, 1, 2$

$$L_{ij} = Span_{\mathbb{C}}\{P^i Q^j\} \tag{2.24}$$

lineární podprostory $sl(3,\mathbb{C})$ generované prvky P^iQ^j pak Pauliho gradace Lieovy algebry $sl(3,\mathbb{C})$ má tvar:

$$\begin{aligned}
sl(3,\mathbb{C}) &= L_{01} \oplus L_{02} \oplus L_{10} \oplus L_{20} \oplus L_{11} \oplus L_{22} \oplus L_{12} \oplus L_{21} \\
&= Q \oplus Q^2 \oplus P \oplus P^2 \oplus PQ \oplus P^2Q^2 \oplus PQ^2 \oplus P^2Q \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \\
&\oplus \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Při zápisu Pauliho gradace jsme u matic vynechali symboly pro lineární obal.

Kapitola 3

Gradované kontrakce Lieových algeber

V této kapitole popíšeme metodu hledání gradovaných kontrakcí Lieovy algebry, tj. kontrakcí zachovávajících danou gradaci, přičemž se omezíme na Lieovy algebry nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$ gradované konečnými abelovskými grupami. Tuto metodu pak aplikujeme na případ $sl(3,\mathbb{C})$.

3.1 Definice a vlastnosti

Nechť $\mathcal{L} = \bigoplus_{i\in G} L_i$ je komplexní Lieova algebra gradovaná konečnou abelovskou grupou G, tj. platí:

$$[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}, \qquad \text{pro} \quad i, j, i+j \in G, \tag{3.1}$$

kde $L_i,\ i \in G$ jsou gradační podprostory $\mathcal{L}$ a $+$ značí grupovou operaci. Zavedeme čtvercovou matici $\kappa = (\kappa_{ij})$ řádu $m \times m$ (kde m je počet gradačních podprostorů) určující který z komutátorů $[L_i, L_j],\ i, j \in G$ je roven nulovému podprostoru, definovanou vztahy:

$$\begin{array}{lll} \kappa_{ij} = 0 & \text{pokud} & [L_i, L_j] = 0, \\ \kappa_{ij} = 1 & \text{pokud} & [L_i, L_j] \neq 0. \end{array} \tag{3.2}$$

Pak lze vztah (3.1) ekvivalentně zapsat jako:

$$[L_i, L_j] \subseteq \kappa_{ij} L_{i+j}, \qquad \forall i, j \in G, \tag{3.3}$$

a říkáme, že Lieova algebra $\mathcal{L}$ má *G-gradovanou strukturu* κ, což značíme $\mathcal{L}^\kappa$. Ze vztahů (3.2) plyne, že matice κ je symetrická.

Nyní přistoupíme k popisu G-gradovaných kontrakcí. Buď G konečná abelovská grupa a nechť komplexní Lieova algebra $\mathcal{L}^\kappa$ má G-gradovanou strukturu κ, tj.

$$\mathcal{L}^\kappa = \bigoplus_{i\in G} L_i, \qquad [L_i, L_j] \subseteq \kappa_{ij} L_{i+j}, \qquad \forall i, j \in G. \tag{3.4}$$

Idea gradovaných kontrakcí spočívá v přechodu od komutátoru $[\,,\,]$ k novému komutátoru $[\,,\,]_\varepsilon$ tak, aby $(L, [\,,\,]_\varepsilon)$ byla opět Lieova algebra. Nechť m značí počet gradačních podprostorů a

$$\gamma = (\gamma_{ij}), \qquad \text{kde} \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \gamma_{ij} \in \mathbb{C}, \qquad \forall i, j \in G \tag{3.5}$$

komplexní čtvercovou symetrickou matici řádu $m \times m$. Na nosném prostoru L Lieovy algebry $\mathcal{L}^\kappa$ definujeme bilineární antisymetrické zobrazení $[\,,\,]_\gamma : L \times L \longrightarrow L$ předpisem

$$[x, y]_\gamma = \gamma_{ij}[x, y], \qquad \forall x \in L_i,\ \forall y \in L_j,\ \forall i, j \in G. \tag{3.6}$$

Zobrazení $[\,,\,]_\gamma$ je zřejmě antisymetrickým součinem v lineární algebře $(L, [\,,\,]_\gamma)$. Aby tato algebra byla algebrou Lieovou, musí v ní platit identity z definice 1.2.1. První je automaticky splněna díky konstrukci $[\,,\,]_\gamma$. Zbývající Jacobiho identita má tvar

$$[[x, y]_\gamma, z]_\gamma + [[y, z]_\gamma, x]_\gamma + [[z, x]_\gamma, y]_\gamma = 0, \quad \forall x, y, z \in L, \tag{3.7}$$

odkud s využitím vztahu (3.6) dostáváme ekvivalentní podmínku pro složky matice γ

$$\begin{gathered} \gamma_{ij}\gamma_{i+j,k}[[x, y], z] + \gamma_{jk}\gamma_{j+k,i}[[y, z], x] + \gamma_{ki}\gamma_{k+i,j}[[z, x], y] = 0, \\ \forall x \in L_i, \forall y \in L_j, \forall z \in L_k,\ \forall i, j, k \in G, \end{gathered} \tag{3.8}$$

tzv. *systém kontrakčních rovnic*. Ze vztahu

$$[x, y]_\gamma = \gamma_{ij}[x, y] = \gamma_{ij}\kappa_{ij}[x, y], \qquad \forall x \in L_i,\ \forall y \in L_j,\ \forall i, j \in G. \tag{3.9}$$

plyne, že složky matice γ_{ij} s indexy $i, j \in G$ (pro než $\kappa_{ij} = 0$) nevystupují v systému kontrakčních rovnic, a jsou tedy libovolné. Předpisem

$$\varepsilon := \gamma \bullet \kappa \tag{3.10}$$

kde $\bullet$ značí součin matic po složkách, tj.

$$\varepsilon_{ij} := \gamma_{ij}\kappa_{ij}, \qquad \forall i, j \in G, \tag{3.11}$$

definujeme čtvercovou symetrickou matici ε řádu $m \times m$ tzv. *matici kontrakčních parametrů* (*kontrakční matici* nebo krátce jen *kontrakci*), která odpovídá matici γ s nulovými volitelnými složkami. *Kontrakční parametry* ε_{ij} řeší systém kontrakčních rovnic

$$\begin{gathered} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{i+j,k}[[x, y], z] + \varepsilon_{jk}\varepsilon_{j+k,i}[[y, z], x] + \varepsilon_{ki}\varepsilon_{k+i,j}[[z, x], y] = 0, \\ \forall x \in L_i, \forall y \in L_j, \forall z \in L_k,\ \forall i, j, k \in G, \end{gathered} \tag{3.12}$$

ekvivalentní s (3.8) právě tehdy, když složky matice γ řeší systém (3.8). Pro matici ε definujeme obdobně jako pro matici γ antisymetrický součin $[\,,\,]_\varepsilon$ na L takový, že pro $x \in L_i,\ y \in L_j$ a $i, j \in G$ platí:

$$[x, y]_\gamma = \gamma_{ij}[x, y] = \gamma_{ij}\kappa_{ij}[x, y] = \varepsilon_{ij}[x, y] = [x, y]_\varepsilon. \tag{3.13}$$

Pro ε vyhovující systému (3.12) je $(L, [\,,]_\varepsilon)$ Lieova algebra, označme ji $\mathcal{L}^\varepsilon$. Ze vztahů (3.4) a (3.13) je zřejmé, že platí:

$$[L_i, L_j]_\varepsilon = \gamma_{ij}[L_i, L_j] \subseteq \gamma_{ij}\kappa_{ij}L_{i+j} = \varepsilon_{ij}L_{i+j}, \qquad \text{pro} \quad i, j, i+j \in G, \tag{3.14}$$

a tedy Lieova algebra $\mathcal{L}^\varepsilon$ má G-gradovanou strukturu ε, tj.

$$\mathcal{L}^\varepsilon = \bigoplus_{i\in G} L_i, \qquad [L_i, L_j]_\varepsilon \subseteq \varepsilon_{ij}L_{i+j}, \qquad \forall i, j \in G. \tag{3.15}$$

Definice 3.1.1. Lieovu algebru $\mathcal{L}^\varepsilon$ nazýváme *(G-)gradovanou kontrakcí* Lieovy algebry $\mathcal{L}^\kappa$.

Poznámka 3.1.2. S využitím Jacobiho identity v algebře $\mathcal{L}^\kappa$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \quad \forall x, y, z \in L, \tag{3.16}$$

lze systém kontrakčních rovnic (3.12) převést na tvar

$$\begin{gathered}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{i+j,k} - \varepsilon_{ki}\varepsilon_{k+i,j})[[x, y], z] + (\varepsilon_{jk}\varepsilon_{j+k,i} - \varepsilon_{ki}\varepsilon_{k+i,j})[[y, z], x] = 0, \\ \forall x \in L_i, \forall y \in L_j, \forall z \in L_k, \ \forall i, j, k \in G.\end{gathered} \tag{3.17}$$

Poznámka 3.1.3. Gradovaná kontrakce řešitelné, resp. nilpotentní Lieovy algebry je opět řešitelná, resp. nilpotentní Lieova algebra.

Poznámka 3.1.4. Je-li $\mathcal{L}^\varepsilon$ G-gradovaná kontrakce Lieovy algebry $\mathcal{L}^\kappa$, pak každá G-gradovaná kontrakce Lieovy algebry $\mathcal{L}^\varepsilon$ je současně G-gradovanou kontrakcí Lieovy algebry $\mathcal{L}^\kappa$.

Definice 3.1.5. Gradovaná kontrakce $\mathcal{L}^\varepsilon$ Lieovy algebry $\mathcal{L}^\kappa$ se nazývá *triviální*, pokud buď $\mathcal{L}^\varepsilon$ je izomorfní s $\mathcal{L}^\kappa$ nebo $\mathcal{L}^\varepsilon$ je abelovská (tj. matice ε je nulová).

Příklad 3.1.6. Triviální řešení systému (3.8) dávající triviální kontrakce jsou $\varepsilon_{ij} = 1$, $\forall i, j \in G$ (původní algebra) a $\varepsilon_{ij} = 0$, $\forall i, j \in G$ (abelovská algebra).

Příklad 3.1.7. Netriviální řešení systému (3.8) dávající triviální kontrakci získáme následujícím způsobem. Nechť $h : L \longrightarrow L$ je izomorfismus nosného prostoru G-gradované Lieovy algebry $\mathcal{L}^\kappa = \bigoplus_{i\in G} L_i$ definovaný předpisem:

$$hx = a_i x, \qquad \forall x \in L_i, \ \forall i \in G, \tag{3.18}$$

kde $0 \neq a_i \in \mathbb{C}$. Definujeme-li komutátor $[x, y]_\varepsilon$ předpisem

$$[x, y]_\varepsilon = h^{-1}[hx, hy] = \frac{a_i a_j}{a_{i+j}}[x, y] = \frac{a_i a_j}{a_{i+j}}\kappa_{ij}[x, y], \qquad \forall x \in L_i, \ \forall y \in L_j, \ \forall i, j \in G, \tag{3.19}$$

pak $\mathcal{L}^\varepsilon = (L, [\,,]_\varepsilon)$ je Lieova algebra izomorfní s $\mathcal{L}^\kappa$ a $h : \mathcal{L}^\varepsilon \longrightarrow \mathcal{L}^\kappa$ je jejich izomorfismus. Ze vztahu (3.19) plyne, že Lieova algebra $\mathcal{L}^\varepsilon$ je současně G-gradovanou kontrakcí Lieovy algebry $\mathcal{L}^\kappa$ odpovídající kontrakční matici $\varepsilon = \alpha \bullet \kappa$, kde matice α definovaná vztahy

$$\alpha = (\alpha_{ij}), \qquad \alpha_{ij} = \frac{a_i a_j}{a_{i+j}}, \qquad a_i \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \qquad \forall i, j \in G \tag{3.20}$$

je tzv. *normalizační* matice. Kontrakční parametry $\varepsilon_{ij}, \ i, j \in G$ jsou pak řešením systému (3.12).

Definice 3.1.8. Dvě G-gradované kontrakce $\mathcal{L}^{\varepsilon}$ a $\mathcal{L}^{\tilde{\varepsilon}}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ nazýváme *ekvivalentní*, pokud existují $a_i \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ i \in G$ tak, že

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{a_i a_j}{a_{i+j}} \varepsilon_{ij}, \qquad \forall i, j \in G, \tag{3.21}$$

tj. pokud existuje normalizační matice α tak, že $\tilde{\varepsilon} = \alpha \bullet \varepsilon$.

Poznámka 3.1.9. Buďte $\mathcal{L}^{\varepsilon}$ a $\mathcal{L}^{\tilde{\varepsilon}}$ ekvivalentní G-gradované kontrakce Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Ze vztahu

$$[x,y]_{\tilde{\varepsilon}} = \tilde{\varepsilon}_{ij}[x,y] = \frac{a_i a_j}{a_{i+j}} \varepsilon_{ij}[x,y] = \frac{a_i a_j}{a_{i+j}}[x,y]_{\varepsilon}, \qquad \forall x \in L_i,\ \forall y \in L_j,\ \forall i,j \in G, \tag{3.22}$$

a příkladu (3.1.7) plyne, že $\mathcal{L}^{\tilde{\varepsilon}}$ je triviální G-gradovanou kontrakcí Lieovy algebry $\mathcal{L}^{\varepsilon}$, přičemž $\mathcal{L}^{\varepsilon}$ a $\mathcal{L}^{\tilde{\varepsilon}}$ jsou izomorfní.

3.2 Kontrakční rovnice pro Pauliho gradaci $sl(3,\mathbb{C})$

Pauliho gradace pro $sl(3,\mathbb{C})$ má tvar

$$sl(3,\mathbb{C}) = L_{01} \oplus L_{02} \oplus L_{10} \oplus L_{20} \oplus L_{11} \oplus L_{22} \oplus L_{12} \oplus L_{21}, \tag{3.23}$$

kde $L_{ij} = Span_{\mathbb{C}}\{Q^i P^j\}$ a matice Q, P jsou definovány vztahy (2.23). Gradační grupou je grupa $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Jejímu prvku $(0,0)$ odpovídá nulový podprostor L_{00}, který nebudeme uvádět. Matice κ je v tomto případě symetrická matice 8×8 a je zapsána s pořadím indexů daným vztahem (3.23) tj.

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Matice kontrakčních parametrů ε je také symetrická a má tedy 24 nezávislých složek

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{(01)(10)} & \varepsilon_{(01)(20)} & \varepsilon_{(01)(11)} & \varepsilon_{(01)(22)} & \varepsilon_{(01)(12)} & \varepsilon_{(01)(21)} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{(02)(10)} & \varepsilon_{(02)(20)} & \varepsilon_{(02)(11)} & \varepsilon_{(02)(22)} & \varepsilon_{(02)(12)} & \varepsilon_{(02)(21)} \\ \varepsilon_{(01)(10)} & \varepsilon_{(02)(10)} & 0 & 0 & \varepsilon_{(10)(11)} & \varepsilon_{(10)(22)} & \varepsilon_{(10)(12)} & \varepsilon_{(10)(21)} \\ \varepsilon_{(01)(20)} & \varepsilon_{(02)(20)} & 0 & 0 & \varepsilon_{(20)(11)} & \varepsilon_{(20)(22)} & \varepsilon_{(20)(12)} & \varepsilon_{(20)(21)} \\ \varepsilon_{(01)(11)} & \varepsilon_{(02)(11)} & \varepsilon_{(10)(11)} & \varepsilon_{(20)(11)} & 0 & 0 & \varepsilon_{(11)(12)} & \varepsilon_{(11)(21)} \\ \varepsilon_{(01)(22)} & \varepsilon_{(02)(22)} & \varepsilon_{(10)(22)} & \varepsilon_{(20)(22)} & 0 & 0 & \varepsilon_{(22)(12)} & \varepsilon_{(22)(21)} \\ \varepsilon_{(01)(12)} & \varepsilon_{(02)(12)} & \varepsilon_{(10)(12)} & \varepsilon_{(20)(12)} & \varepsilon_{(11)(12)} & \varepsilon_{(22)(12)} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{(01)(21)} & \varepsilon_{(02)(21)} & \varepsilon_{(10)(21)} & \varepsilon_{(20)(21)} & \varepsilon_{(11)(21)} & \varepsilon_{(22)(21)} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Definujme grupu

$$SL(2,\mathbb{Z}_3)=\left\{\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \,\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{Z}_3,\ ad-bc=1\ mod\,3\right\}, \tag{3.26}$$

kde grupovou operací je součin matic počítán modulo 3. Dále definujme akci této grupy na indexech $(i,j)\in\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ předpisem:

$$(i,j)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)=((ia+jc)_{mod\,3},(ib+jd)_{mod\,3}). \tag{3.27}$$

V [19] je dokázáno, že grupou symetrie systému kontrakčních rovnic pro Pauliho gradaci $sl(3,\mathbb{C})$ je grupa

$$H_3=\left\{\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \,\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{Z}_3,\ ad-bc=\pm 1\ mod\,3\right\}, \tag{3.28}$$

s akcí na indexech $(i,j)\in\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ definovanou stejně jako pro $SL(2,\mathbb{Z}_3)$. Systém v našem případě 48 kontrakčních rovnic lze generovat akcí grupy $SL(2,\mathbb{Z}_3)$ z následujících dvou rovnic

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{(02)(10)A}\varepsilon_{(01)(12)A}-\varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(02)(11)A}=0, \\ \varepsilon_{(10)(11)A}\varepsilon_{(01)(21)A}-\varepsilon_{(01)(11)A}\varepsilon_{(10)(12)A}=0, \end{array}\right. \qquad \forall A\in SL(2,\mathbb{Z}_3), \tag{3.29}$$

kde $\varepsilon_{(ij)(kl)A}:=\varepsilon_{(ij)A,(kl)A}$. Pro $A\in H_3$ označíme ε^A matici, která vznikne z matice ε permutací složek danou symetrií A tj. $\varepsilon^A_{(ij)(kl)}:=\varepsilon_{(ij)(kl)A}$. Je-li ε řešení systému (3.29), pak i ε^A je řešením tohoto systému a v [19] je dokázáno, že těmto řešením odpovídají izomorfní algebry. Neboť již víme, že ekvivalentním kontrakcím odpovídají izomorfní algebry můžeme zavést *ekvivalenci řešení* systému (3.29) ε, $\tilde{\varepsilon}$ následovně

$$\varepsilon\sim\tilde{\varepsilon}\ \Leftrightarrow\ \exists\ \text{normalizační matice}\ \alpha,\ \exists A\in H_3,\ \tilde{\varepsilon}=\alpha\bullet\varepsilon^A. \tag{3.30}$$

V [19] je opět dokázáno, že ekvivalentním řešením odpovídají izomorfní algebry. Dále je v [19] vyřešen systém kontrakčních rovnic (3.29) a řešení jsou zde rozdělena do tříd podle ekvivalence (3.30). Reprezentanty těchto tříd uvedeme v dodatku 1.

Kapitola 4

Identifikace Lieových algeber

V celé této kapitole se omezíme na konečnědimenzionální Lieovy algebry nad tělesem komplexních čísel. Neboť v předchozích kapitolách byly některé teorémy formulovány obecněji, poznamenejme, že těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené a má charakteristiku nula.

Komplexní Lieovu algebru $\mathcal{L}$ dimenze $n \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně charakterizovat pomocí strukturních konstant $c_{ij}^k \in \mathbb{C}$, $\forall i, j, k \in \hat{n}$ ve zvolené bázi $\{e_i\}_{i=1}^n$ určených vztahy:

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k, \qquad \forall i, j \in \hat{n}. \tag{4.1}$$

Neboť platí

$$c_{ii}^k = 0, \qquad c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \qquad \forall i, j, k \in \hat{n}, \tag{4.2}$$

je z n^3 strukturních konstant pouze $n^2(n-1)/2$ nezávislých. Metoda identifikace Lieových algeber charakterizovaných pomocí strukturních konstant, kterou zde popíšeme, je speciálním případem metody uvedené v [2] pro komplexní Lieovy algebry. Postupně popíšeme, jak pro rozložitelnou Lieovu algebru najít rozklad do direktního součtu nerozložitelných Lieových algeber. Dále jak pro nerozložitelné Lieovy algebry určit radikál a příslušný Leviho rozklad. Nakonec jak najít nilradikál pro řešitelné Lieovy algebry.

K práci [2] byly jejími autory napsány programy v jazyce pascal, v nichž jsou obsaženy algoritmy pro hledání direktního rozkladu, Leviho rozkladu a nilradikálu Lieovy algebry nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$. Tyto programy jsou však pro náš případ nepoužitelné. Proto jsme na základě algoritmů z [2] napsali program v systému Maple 8 (viz dodatek 3) pro identifikaci Lieových algeber nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Algoritmy použité v tomto programu uvedeme v následujících podkapitolách.

4.1 Direktní rozklad Lieových algeber

Nechť $\mathcal{L}$ je komplexní Lieova algebra dimenze n s bází $\{e_i\}_{i=1}^n$ a s komutačními relacemi (4.1). Určíme, zda je Lieova algebra $\mathcal{L}$ rozložitelná, tj. zda existují ideály v $\mathcal{L}$, jejichž direktním součtem je $\mathcal{L}$. Pro rozložitelné Lieovy algebry najdeme jejich rozklad na nerozložitelné podalgebry. Nejprve definujeme některé nové pojmy.

Značení 4.1.1. Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$R = (\mathbb{C}^{n,n}, +, \cdot) \tag{4.3}$$

okruh všech komplexních čtvercových matic řádu $n \times n$, kde operace $+$ a $\cdot$ jsou součet a součin matic. Namísto R budeme někdy zjednodušeně psát $\mathbb{C}^{n,n}$. Dále budeme vynechávat symbol $\cdot$ při zápisu součinu matic tj. $A \cdot B = AB$.

Definice 4.1.2. Buď S podmnožinou R. *Centralizátorem* $C_R(S)$ množiny S v okruhu R nazýváme množinu

$$C_R(S) = \{x \in R \mid \forall y \in S,\ [x, y] = xy - yx = 0\}. \tag{4.4}$$

Poznámka 4.1.3. Centralizátor $C_R(S)$ tvoří (spolu s operací součin matic) asociativní algebru, někdy nazývanou *komutující algebra*.

Definice 4.1.4. *Idempotentem* v okruhu R nazýváme prvek $\mathbf{0}_n \neq E \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňující $E^2 = E$. Jednotkovou matici $E = \mathbf{1}_n$ nazýváme *triviálním* idempotentem. Idempotent $E \neq \mathbf{1}_n$ nazýváme *netriviálním*.

Poznámka 4.1.5. Nechť $E \in \mathbb{C}^{n,n}$ je idempotent, pak E je lineární operátor na komplexním vektorovém prostoru V dimenze n a $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem operátoru E pokud existuje $0 \neq x \in V$ tak, že platí $Ex = \lambda x$. Protože E je idempotent současně platí

$$\lambda x = Ex = E^2 x = E(\lambda x) = \lambda^2 x$$

odtud dostáváme podmínku $\lambda^2 = \lambda$, které vyhovují právě čísla $0, 1$. Tedy vlastními čísly idempotentu E mohou být pouze čísla $0, 1$. Je-li E navíc netriviální, pak ukážeme, že $\sigma(E) = \{0, 1\}$. Podle Jordanovy věty, je matice E podobná blokově diagonální matici v Jordanově normálním tvaru E_J, navíc E a E_J mají stejná vlastní čísla. Neboť matice podobná idempotentu je také idempotent, musí být i E_J idempotent a z tvaru Jordanových bloků plyne, že E_J musí být diagonální. Pokud E má všechna vlastní čísla rovna nule, resp. jedné, pak E_J je nulová, resp. jednotková matice a tedy i E je nulová, resp. jednotková matice a není tudíž netriviálním idempotentem. Odtud plyne, že netriviální idempotent E má spektrum $\sigma(E) = \{0, 1\}$.

Tvrzení 4.1.6. *Nechť $\mathcal{L}$ je konečnědimenzionální komplexní Lieova algebra. Existuje-li netriviální idempotent $E \in C_R(ad(\mathcal{L}))$ centralizátoru adjungované reprezentace $\mathcal{L}$ v okruhu R, pak $\mathcal{L}$ lze rozložit na direktní součet vlastních podprostorů idempotentu E.*

Důkaz. E je lineární operátor na nosném prostoru L Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Podle poznámky 4.1.5 víme, že $\sigma(E) = \{0, 1\}$. Ukážeme, že $E \in End\,\mathcal{L}$, tj. E je endomorfismus Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Protože $E \in C_R(ad(\mathcal{L}))$, komutuje E s $ad(x)$, $\forall x \in \mathcal{L}$, a tedy pro $x, y \in \mathcal{L}$ platí

$$\begin{aligned} [Ex, Ey] &= ad(Ex)Ey = Ead(Ex)y = E[Ex, y] = -E[y, Ex] = \\ &= -Ead(y)Ex = -E^2 ad(y)x = -E[y, x] = E[x, y]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Označme L_λ vlastní podprostor operátoru E příslušející k vlastnímu číslu λ. Pro vlastní vektory $x \in L_\mu, y \in L_\nu$ příslušející k vlastním číslům $\mu, \nu \in \{0,1\}$ platí

$$E[x,y] = [Ex, Ey] = [\mu x, \nu y] = \mu\nu[x,y]. \tag{4.6}$$

Tedy $[x,y] \in L_{\mu\nu}$ je buď vlastní vektor k vlastnímu číslu $\mu\nu$ nebo nulový vektor. Pokud je $\mu = \nu$, pak $\mu\nu = \mu = \nu$ a $[x,y]$ leží ve vlastním podprostoru L_μ příslušejícím vlastnímu číslu μ. Pokud $\mu \neq \nu$ pak

$$E[x,y] = 0[x,y] = 0,$$

tj. $[x,y] \in L_0$. Ukážeme, že $[x,y] = 0$. Nechť např. $\mu = 1, \nu = 0$, tj.

$$Ex = x, \qquad Ey = 0,$$

potom

$$[x,y] = [Ex,y] = -ad(y)Ex = -Ead(y)x = -E[y,x] = E[x,y] = 0.$$

Odtud plyne, že platí následující vztahy

$$[L_0, L_1] = 0, \qquad [L_\lambda, L_\lambda] \subseteq L_\lambda, \qquad \lambda = 0,1, \tag{4.7}$$

což znamená, že $\mathcal{L}_0 = (L_0, [\,,]_{L_0})$ a $\mathcal{L}_1 = (L_1, [\,,]_{L_1})$ jsou ideály v $\mathcal{L}$ a

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1. \tag{4.8}$$

□

Tvrzení 4.1.6 je pouze postačující podmínkou pro existenci direktního rozkladu Lieovy algebry. Postupně se ale přesvědčíme, že existence netriviálního idempotentu $E \in C_R(ad(\mathcal{L}))$ je nutnou i postačující podmínkou pro existenci direktního rozkladu Lieovy algebry $\mathcal{L}$.

Definice 4.1.7. Množina matic $S \subseteq \mathbb{C}^{n,n}$ je *rozložitelná* pokud existuje regulární matice $Y \in \mathbb{C}^{n,n}$ a přirozená čísla $n_i \in \mathbb{N},\ i = 1,2,\ n_1 + n_2 = n$ tak, že

$$\forall x \in S, \qquad YxY^{-1} = D_1x \oplus D_2x = \begin{pmatrix} D_1x & 0 \\ 0 & D_2x \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

kde $D_ix \in \mathbb{C}^{n_i,n_i},\ i = 1,2$. Tj. pokud existuje matice, která současně transformuje všechny matice $x \in S$ na blokově diagonální matice YxY^{-1} s diagonálními čtvercovými bloky řádu $n_1 \times n_1$ a $n_2 \times n_2$. V opačném případě říkáme, že S je *nerozložitelná*.

Definice 4.1.8. *Jacobsonovým radikálem* $J(\mathcal{S})$ komplexní asociativní algebry $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}^{n,n}$ nazýváme maximální nilpotentní ideál

$$J(\mathcal{S}) = \{x \in \mathcal{S} \mid \forall y \in \mathcal{S},\ Tr(xy) = 0\}. \tag{4.10}$$

Navíc $J(\mathcal{S})$ je tvořen právě všemi nilpotentními maticemi z $\mathcal{S}$.

Poznámka 4.1.9. Ideál $\mathcal{I}$ asociativní algebry $\mathcal{A}$ je nilpotentní, pokud existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\mathcal{I}^k = 0$, přičemž se užívá obdobné značení jako (1.2.5), tj. pro lineární podprostory $X, Y \subseteq \mathcal{A}$ značí $X \cdot Y = Spam_{\mathbb{C}}\{x \cdot y \mid x \in X, \ y \in Y\}$.

Poznámka 4.1.10. Matice $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ se nazývá nilpotentní pokud existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $M^k = 0$.

Definice 4.1.11. *Dělitelným okruhem* nazýváme okruh s jednotkou, ve kterém ke každému nenulovému elementu existuje inverzní prvek (vzhledem k násobení).

Teorém 4.1.12. *Množina matic $S \subseteq \mathbb{C}^{n,n}$ je nerozložitelná právě tehdy, když jednotková matice $\mathbf{1}_n$ řádu $n \times n$ je jediným idempotentem centralizátoru $C_R(S)$*

Důkaz. Nechť S je rozložitelná, pak podle definice 4.1.7 existuje regulární matice $Y \in \mathbb{C}^{n,n}$ a

$$E_1 = Y^{-1}(\mathbf{1}_{n_1} \oplus \mathbf{0}_{n_2})Y, \qquad E_2 = Y^{-1}(\mathbf{0}_{n_1} \oplus \mathbf{1}_{n_2})Y \tag{4.11}$$

jsou dva netriviální idempotenty v $C_R(S)$. Naopak nechť E je idempotent hodnosti $0 < n_1 < n$. Potom z Jordanovy věty plyne, že matice E je podobná diagonální matici $\mathbf{1}_{n_1} \oplus \mathbf{0}_{n_2}$, a tedy existuje matice $Y \in \mathbb{C}^{n,n}$ taková, že

$$YEY^{-1} = \mathbf{1}_{n_1} \oplus \mathbf{0}_{n_2} = \tilde{E}, \tag{4.12}$$

kde $n_2 = n - n_1$. Pro libovolnou matici $x \in S$ platí $[x, E] = xE - Ex = 0$. Pro matici $\tilde{x} = YxY^{-1}$ pak zřejmě platí

$$[\tilde{x}, \tilde{E}] = 0. \tag{4.13}$$

Zapišme $\tilde{x}$ v blokovém tvaru

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{C}^{n_1,n_1}, \quad d \in \mathbb{C}^{n_2,n_2},$$

pak rovnice (4.13) má tvar

$$[\tilde{x}, \tilde{E}] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_{n_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{4.14}$$

Odtud plyne, že bloky a, b musí být nulové a tedy

$$\tilde{x} = YxY^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{C}^{n_1,n_1}, \quad d \in \mathbb{C}^{n_2,n_2}. \tag{4.15}$$

Neboť $x \in S$ byla libovolná plyne ze vztahu (4.15), že S je rozložitelná, přičemž matice Y realizuje tento rozklad. $\square$

Dále uvedeme bez důkazu některé teorémy z [2], udávající nutné a postačující podmínky pro existenci rozkladu či jinak související s rozkladem.

Teorém 4.1.13. *Množina matic $S \subseteq \mathbb{C}^{n,n}$ je nerozložitelná právě tehdy, když faktoralgebra $C_R(S)/J(C_R(S))$ obsahuje pouze jediný idempotent (a to triviální), tj. $\Leftrightarrow C_R(S)/J(C_R(S))$ je dělitelný okruh.*

Poznámka 4.1.14. Pro $S \subseteq \mathbb{C}^{n,n}$ označíme $C_0(S)$ podprostor centralizátoru $C_R(S)$ (množiny S v okruhu $R = \mathbb{C}^{n,n}$) tvořený maticemi s nulovou stopou, tj.

$$C_0(S) = \{x \in C_R(S) \mid Tr(x) = 0\}. \tag{4.16}$$

Pak platí

$$C_R(S) = C_0(S) + Span_{\mathbb{C}}\{\mathbf{1}_n\}, \qquad J(C_R(S)) \subseteq C_0(S), \tag{4.17}$$

kde + značí součet vektorových prostorů. Množina matic je nerozložitelná právě tehdy, když

$$J(C_R(S)) = C_0(S). \tag{4.18}$$

Dále budeme značit

$$\mathcal{Q} = C_R(S)/J(C_R(S)), \qquad \mathcal{Q}_0 = C_0(S)/J(C_R(S)). \tag{4.19}$$

Teorém 4.1.15. *Konečnědimenzionální komplexní Lieova $\mathcal{L}$ algebra je rozložitelná do direktního součtu svých ideálů*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2, \qquad [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = 0, \qquad [\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_i] \subseteq \mathcal{L}_i, \qquad i = 1, 2 \tag{4.20}$$

právě tehdy, když její adjungovaná reprezentace je rozložitelná, jakožto množina matic.

Teorém 4.1.16. *Konečnědimenzionální komplexní Lieova algebra $\mathcal{L}$ je nerozložitelná právě tehdy, když podprostor matic s nulovou stopou $C_0(ad(\mathcal{L}))$ centralizátoru $C_R(ad(\mathcal{L}))$ její adjungované reprezentace je podalgebrou v $C_R(ad(\mathcal{L}))$ (tj. je uzavřený vzhledem k násobení matic).*

Poznámka 4.1.17. Zvláštním případem direktního rozkladu Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je tzv. *centrální rozklad* tj. rozklad, při němž je jeden z ideálů abelovský

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2, \qquad [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1] = 0, \qquad [\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2] \subseteq \mathcal{L}_2, \qquad [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = 0. \tag{4.21}$$

Teorém 4.1.18. *Jestliže existuje centrální rozklad Lieovy algebry $\mathcal{L}$, pak jej lze získat z direktního rozkladu faktoralgebry*

$$\mathcal{L}/D(\mathcal{L}) = \mathcal{C}_1/D(\mathcal{L}) \oplus \mathcal{L}_2/D(\mathcal{L}), \tag{4.22}$$

kde $\mathcal{C}_1$ je doplněk $C(\mathcal{L}) \cap D(\mathcal{L})$ v centru $C(\mathcal{L})$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$, tj.

$$C(\mathcal{L}) = \mathcal{C}_1 \oplus C(\mathcal{L}) \cap D(\mathcal{L}), \qquad \mathcal{C}_1 \cap D(\mathcal{L}) = 0, \tag{4.23}$$

a $\mathcal{C}_1/D(\mathcal{L})$ značí množinu tříd ekvivalence z faktoralgebry $\mathcal{L}/D(\mathcal{L})$ reprezentovaných prvky z $\mathcal{C}_1$. Podobně $\mathcal{L}_2/D(\mathcal{L})$ je doplněk $\mathcal{C}_1/D(\mathcal{L})$ do $\mathcal{L}/D(\mathcal{L})$, kde $\mathcal{L}_2$ obsahuje $D(\mathcal{L})$.

Poznámka 4.1.19. Teorém 4.1.18 říká, jak vyrobit centrální rozklad s centrální komponentou $\mathcal{L}_1$. Dodejme, že v tomto rozkladu jsou $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ určeny jednoznačně, až na centrální automorfismus algebry $\mathcal{L}$ tj. automorfismus $\alpha \in Aut\mathcal{L}$ splňující

$$(\alpha - \mathbf{1})(\mathcal{L}) \subseteq C(\mathcal{L}). \tag{4.24}$$

Navíc $\mathcal{L}_2$ splňuje vztah

$$C(\mathcal{L}_2) \subseteq D(\mathcal{L}_2). \tag{4.25}$$

Teorém 4.1.20. *Buď $\mathcal{L}$ komplexní Lieova algebra dimenze $n \in \mathbb{N}$ splňující podmínku $C(\mathcal{L}) \subseteq D(\mathcal{L})$. Potom faktoralgebra $\mathcal{Q} = \mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ centralizátoru $\mathcal{A} = C_R(ad(\mathcal{L}))$ její adjungované reprezentace $ad(\mathcal{L})$ v okruhu $R = \mathbb{C}^{n,n}$ podle jeho Jacobsonova radikálu $J(\mathcal{A})$, je abelovská.*

Dále budeme předpokládat komplexní Lieovu algebru $\mathcal{L}$ dimenze $n \in \mathbb{N}$ splňující vztah $C(\mathcal{L}) \subseteq D(\mathcal{L})$ tj. takovou, která nemá oddělitelnou centrální komponentu. Označíme $\mathcal{A}$ centralizátor adjungované reprezentace $\mathcal{L}$ a A_0 jeho podprostor tvořený maticemi s nulovou stopou

$$\mathcal{A} = C_R(ad(\mathcal{L})), \qquad A_0 = C_0(ad(\mathcal{L})), \tag{4.26}$$

a dále

$$\mathcal{Q} = \mathcal{A}/J(\mathcal{A}), \qquad Q_0 = A_0/J(\mathcal{A}). \tag{4.27}$$

Nechť $\{a_1 = \mathbf{1}_n, a_2, \dots, a_s\}$ je báze $\mathcal{A}$. Bázi $\{x_1, x_2, \dots, x_\nu\}$ Jacobsonova radikálu $J(\mathcal{A})$ získáme ve tvaru

$$x_i = \sum_{k=1}^{s} \xi_{ik} a_k, \qquad i \in \hat{\nu}, \tag{4.28}$$

kde $\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{i,s}\}_{i=1}^{\nu}$ tvoří bázi řešení systému lineárních homogenních rovnic

$$\sum_{k=1}^{s} \xi_k Tr(a_i a_k) = 0, \qquad i \in \hat{s}, \tag{4.29}$$

pro neznámé $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$. Nyní zvolíme bázi $\{b_1, b_2, \dots, b_\mu\}$, $\mu = s - \nu$ doplňku $J(\mathcal{A})$ do $\mathcal{A}$ tak, aby

$$b_1 = \mathbf{1}_n, \qquad Tr(b_i) = 0, \qquad 2 \leq i \leq \mu. \tag{4.30}$$

Báze faktoralgebry $\mathcal{Q} = \mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ bude množina tříd

$$[b_i] = b_i + J(\mathcal{A}), \qquad i \in \hat{\mu}, \tag{4.31}$$

a bází $Q_0 = A_0/J(\mathcal{A})$ bude $\{[b_2], \dots, [b_\mu]\}$.

Z teorémů 4.1.12 a 4.1.15 plyne, že nutnou a postačující podmínkou pro existenci direktního rozkladu Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je existence netriviálního idempotentu v $E \in C_R(ad(\mathcal{L}))$. Z tvrzení 4.1.6 víme, že rozklad $\mathcal{L}$ je rozkladem do direktního součtu vlastních podprostorů idempotentu E. Zbývá tedy nalézt idempotent E a k tomu nám pomůže následující teorém.

Teorém 4.1.21. *Buď* $\{[b_i]\}_{i=2}^{\mu}$ *báze* Q_0 *a nechť* $m_{[b_i]}$, $2 \leq i \leq \mu$ *značí minimální polynom bazického prvku* $[b_i]$. *Jsou-li všechny minimální polynomy* $m_{[b_i]}$ *ireducibilní (nad* $\mathbb{C}$*), pak* $\mathcal{L}$ *je nerozložitelná. V opačném případě existuje* j *tak, že existuje rozklad*

$$m_{[b_j]} = \bar{f}_1 \bar{f}_2 \tag{4.32}$$

polynomu $m_{[b_j]}$ *na součin dvou nekonstantních normovaných polynomů* $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ *v proměnné* $t \in \mathbb{C}$. *Z poloprostoty komutativní algebry* $\mathcal{Q}$ *plyne, že největší společný dělitel* $nsd(\bar{f}_1, \bar{f}_2) = 1$. *Navíc existuje rozklad*

$$m_{b_j} = f_1 f_2, \quad f_k = nsd(m_{b_j}, \bar{f}_k^{\nu}), \quad k = 1, 2, \quad kde \quad \nu = dim(J(\mathcal{A})) \tag{4.33}$$

minimálního polynomu m_{b_j} *prvku* b_j *na součin dvou vzájemně nesoudělných nekonstantních normovaných polynomů* f_1, f_2 *v proměnné* $t \in \mathbb{C}$. *Eukleidův algoritmus dělení dává polynomy* P_1, P_2 *v proměnné* $t \in \mathbb{C}$ *tak, že*

$$P_1 f_1 + P_2 f_2 = 1. \tag{4.34}$$

Matice

$$P_k(b_j) f_k(b_j), \qquad k = 1, 2 \tag{4.35}$$

jsou netriviální idempotenty v $\mathcal{A} = C_R(ad(\mathcal{L}))$ *určující netriviální rozklad Lieovy algebry* $\mathcal{L}$.

Poznámka 4.1.22. Normovaným polynomem rozumíme polynom, jehož koeficient u nejvyšší mocniny je roven jedné. Minimálním polynomem prvku b nad $\mathbb{C}$ rozumíme normovaný komplexní polynom $P \neq 0$ nejmenšího stupně takový, že b je jeho kořen, tj. $P(b) = 0$.

Poznámka 4.1.23. Je-li $\mathcal{A}$ asociativní algebra a $J(\mathcal{A})$ její Jacobsonův radikál, pak faktoralgebra $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ je poloprostá, tj. nemá žádný nenulový nilpotentní ideál.

Nyní popíšeme algoritmus pro direktní rozklad, založený na výše uvedených tvrzeních, který jsme použili v programu Maple 8 při identifikaci námi zkoumaných Lieových algeber. Tento program je určen pro Lieovy algebry konečné dimenze nad tělesem komplexních čísel.

1. Oddělíme maximální centrální komponentu Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Nejprve spočteme doplněk $DC(\mathcal{L}) = C(\mathcal{L}) \backslash (C(\mathcal{L}) \cap D(\mathcal{L}))$ derivované algebry do centra $\mathcal{L}$ a pokud $DC(\mathcal{L})$ je různý od nuly (od nulového podprostoru), pak jej s využitím teorému 4.1.18 oddělíme od $\mathcal{L}$. Dále tedy máme Lieovu algebru $\mathcal{L}$ splňující podmínku $C(\mathcal{L}) \subseteq D(\mathcal{L})$.

2. Určíme matice řádu $n \times n$ tvořící adjungovanou reprezentaci Lieovy algebry $ad(\mathcal{L})$ dimenze $n \in \mathbb{N}$. Dále najdeme centralizátor $\mathcal{A} = C_R(ad(\mathcal{L}))$ adjungované reprezentace v okruhu matic $R = C^{n,n}$ a určíme jeho Jacobsonův radikál $J(\mathcal{A})$. Pokud $dim(\mathcal{A}) - dim(J(\mathcal{A})) = 1$ pak je $\mathcal{L}$ nerozložitelná. V případě $dim(\mathcal{A}) - dim(J(\mathcal{A})) > 1$ je $\mathcal{L}$ rozložitelná a pokračujeme bodem 3.

3. Zvolíme bázi algebry $\mathcal{A}$:

$$\{x_1, \dots, x_\nu, b_1 = \mathbf{1}_n, b_2, \dots, b_\mu\}, \qquad \nu + \mu = n, \qquad Tr(b_i) = 0, \quad 2 \leq i \leq \mu,$$

   kde $\{x_1, \dots, x_\nu\}$ je báze $J(\mathcal{A})$. Postupně zkoušíme prvky b_j, $j = 2, 3, \dots, \mu$, dokud nenajdeme prvek s minimálním polynomem m_{b_j} stupně alespoň 2 označme jej b_r. Nyní máme matici s nulovou stopou $b_r \in C_R(ad(L))$, která není nilpotentní. Rozložíme její minimální polynom m_{b_r} na součin dvou nekonstantních vzájemně nesoudělných komplexních polynomů f_1 a f_2. Dále z algoritmu dělení získáme komplexní polynomy P_1 a P_2 takové, že $P_1 f_1 + P_2 f_2 = 1$. Matice

$$M = P_1(b_r) f_1(b_r) \tag{4.36}$$

   je pak hledaným idempotentem v $C_R(ad(\mathcal{L}))$.

4. Rozložíme Lieovu algebru $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ do direktního součtu vlastních podprostorů $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ idempotentu M příslušejících vlastním číslům $0, 1$. Pro $\mathcal{L}_i$, $i = 0, 1$ opakujeme algoritmus od bodu 2.

4.2 Leviho rozklad

Zde se budeme zabývat nalezením Leviho rozkladu pro komplexní Lieovu algebru $\mathcal{L}$ dimenze $n \in \mathbb{N}$, tj. semidirektního rozkladu $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{R} \dot{\oplus} \mathcal{S}, \qquad [\mathcal{R}, \mathcal{R}] \subset \mathcal{R}, \qquad [\mathcal{S}, \mathcal{S}] = \mathcal{S}, \qquad [\mathcal{R}, \mathcal{S}] \subseteq \mathcal{R}, \tag{4.37}$$

kde $\mathcal{R} = R(\mathcal{L})$ je radikál $\mathcal{L}$ a $\mathcal{S}$ je poloprostá podalgebra. Radikál $\mathcal{R}$ je určen jednoznačně a nezávisí na zvolené bázi. Doplněk $\mathcal{S}$ je izomorfní faktoralgebře $\mathcal{L}/\mathcal{R}$ a je jednoznačně určen až na automorfismus $\mathcal{L}$. Chceme najít bázi Lieovy algebry $\mathcal{L}$

$$\{r_1, r_2, \dots, r_\rho, s_1, s_2, \dots, s_\sigma\}, \qquad \rho + \sigma = n, \tag{4.38}$$

kde $\{r_1, r_2, \dots, r_\rho\}$ je báze $\mathcal{R}$ a $\{s_1, s_2, \dots, s_\sigma\}$ je báze $\mathcal{S}$ tak, aby platili vztahy (4.37).

Neboť faktoralgebra $\mathcal{L}/R(\mathcal{L}) \cong \mathcal{S}$ je poloprostá a tedy splňuje $D(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ platí

$$R(\mathcal{L}) + D(\mathcal{L}) = \mathcal{L}, \tag{4.39}$$

kde $+$ značí součet lineárních prostorů. Z (4.39) dostaneme izomorfismus

$$D(\mathcal{L})/((D(\mathcal{L}) \cap R(\mathcal{L})) \cong \mathcal{L}/R(\mathcal{L}) \tag{4.40}$$

a tedy $dimD(\mathcal{L})/(D(\mathcal{L}) \cap R(\mathcal{L})) = n - \rho = \sigma$.

Leviho rozklad lze hledat jak pro nerozložitelné, tak pro rozložitelné Lieovy algebry. Z hlediska identifikace Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je vhodnější nejprve algebru rozložit na direktní součet dále nerozložitelných podalgeber a pak pro tyto hledat Leviho rozklad. Hledat Leviho rozklad v případě, že radikál $R(\mathcal{L})$ je komutativní je jednodušší než v obecném případě. Proto se nejprve pokusíme obecný případ převést na případ s komutativním radikálem. Následuje opět algoritmus použitý v námi vytvořeném programu v systému Maple 8.

1. Nejprve najdeme radikál $R(\mathcal{L})$. Z teorému 1.3.27 víme, že
$$R(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} \mid Tr(ad(x)ad(y)) = 0, \ \forall y \in D(\mathcal{L})\}. \tag{4.41}$$
Pokud $\mathcal{L} = R(\mathcal{L})$, pak $\mathcal{L}$ je řešitelná a $\mathcal{S} = 0$. Pokud $R(\mathcal{L}) = 0$, pak $\mathcal{L} = \mathcal{S}$ je poloprostá. V obou případech je Leviho rozklad triviální.

2. Pokud $0 \neq R(\mathcal{L}) \neq \mathcal{L}$, pak spočteme derivovanou posloupnost $D^k(\mathcal{L})$, přičemž po konečném počtu kroků nalezneme $j \in \mathbb{N}$ takové, že
$$D^{j+1}(\mathcal{L}) = D^j(\mathcal{L}), \qquad D^j(\mathcal{L}) \neq D^{j-1}(\mathcal{L}). \tag{4.42}$$
Jestliže známe Leviho rozklad $D^j(\mathcal{L})$:
$$D^j(\mathcal{L}) = R(D^j(\mathcal{L})) \bar{\oplus} \mathcal{S}, \tag{4.43}$$
pak Leviho rozklad $\mathcal{L}$ získáme doplněním báze $R(D(\mathcal{L}))$ do báze $R(\mathcal{L})$.

3. Dále předpokládáme Lieovu algebru $\mathcal{L}$ pro níž platí $D(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$. Je-li $R(\mathcal{L})$ abelovský, pak přejdeme k bodu 4. Pokud $R(\mathcal{L})$ abelovský není, pak máme algebru splňující
$$\mathcal{L} = D(\mathcal{L}), \qquad D(R(\mathcal{L})) \neq 0. \tag{4.44}$$
Zvolíme bázi $\mathcal{L}$:
$$\{r_1, \dots, r_{\rho'}, r_{\rho'+1}, \dots, r_\rho, a_{\rho+1}, \dots, a_n\}, \tag{4.45}$$
kde $\{r_1, \dots, r_{\rho'}\}$ je báze $D(R(\mathcal{L}))$, $\{r_{\rho'+1}, \dots, r_\rho\}$ je báze doplňku $D(R(\mathcal{L}))$ v $R(\mathcal{L})$, a $\{a_{\rho+1}, \dots, a_n\}$ je báze doplňku $R(\mathcal{L})$ v $\mathcal{L}$. Najdeme faktoralgebru $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/D(R(\mathcal{L}))$, splňující vztahy $\bar{\mathcal{L}} = D(\bar{\mathcal{L}})$ a $D(R(\bar{\mathcal{L}})) = 0$. Dimenze $\bar{\mathcal{L}}$ je $n - \rho' < n$ a komutační relace pro $\bar{\mathcal{L}}$ získáme tak, že položíme $r_1 = \ldots = r_{\rho'} = 0$ v algebře $\mathcal{L}$. Postupem pro abelovský radikál (bod 4) získáme Leviho rozklad pro faktoralgebru $\bar{\mathcal{L}}$
$$\bar{\mathcal{L}} = R(\bar{\mathcal{L}}) \bar{\oplus} \bar{\mathcal{S}}. \tag{4.46}$$
Označme $S_1 \subset \mathcal{L}$ množinu reprezentantů tříd ekvivalence obsažených v $\bar{\mathcal{S}}$. Z těchto tříd rekonstruujeme prvky $\mathcal{L}$ a získáme tak podalgebru $\mathcal{L}_1$ v $\mathcal{L}$
$$\mathcal{L}_1 = D(R(\mathcal{L})) + S_1, \tag{4.47}$$
splňující $dim(\mathcal{L}_1) = n - \rho + \rho' < n$. Jestliže $D(R(\mathcal{L}))$ je abelovská, pak najdeme podle bodu 4 Leviho rozklad pro $\mathcal{L}_1$. Pokud $D(R(\mathcal{L}))$ není abelovská, pak opakováním bodu 3 pro algebru $\mathcal{L}_1$ získáme $\mathcal{L}_2$. Pokud ani ta není abelovská, pak opakujeme bod 3 pro $\mathcal{L}_2$ a pokračujeme v tvorbě posloupnosti $\mathcal{L}_i$, dokud nedostaneme (po konečném počtu kroků) algebru $\mathcal{L}_k$ s abelovským radikálem. Pro tu najdeme Leviho rozklad
$$\mathcal{L}_k = R(\mathcal{L}_k) \bar{\oplus} \mathcal{S}. \tag{4.48}$$
Leviho rozklad pro $\mathcal{L}$ je pak $\mathcal{L} = R(\mathcal{L}) \bar{\oplus} \mathcal{S}$, kde $\mathcal{S}$ je z (4.48).

4. Nyní máme Lieovu algebru s abelovským radikálem. Máme bázi $\mathcal{L}$ jako v (4.45), kde $\rho' = 0$, a komutační relace jsou

$$\begin{gathered}[a_i, a_j] = c_{ij}^k a_k + f_{ij}^p r_p, \qquad [r_p, r_q] = 0, \qquad [a_i, r_q] = h_{iq}^p r_p \\ \rho + 1 \leq i, j, k \leq n, \qquad 1 \leq p, q \leq \rho,\end{gathered} \tag{4.49}$$

Nahradíme prvky báze a_i novými

$$s_i = a_i + x_{ip} r_p \tag{4.50}$$

a požadujeme, aby s_i tvořili bázi Lieovy algebry $\mathcal{S}$ tj.

$$[s_i, s_j] = c_{ij}^k s_k. \tag{4.51}$$

Tedy strukturní konstanty c_{ij}^k musí řešit systém nehomogenních lineárních rovnic

$$c_{ij}^k x_{kq} - h_{ip}^q x_{jp} + h_{jp}^q x_{ip} = f_{ij}^q, \qquad 1 \leq p, q \leq \rho, \quad \rho + 1 \leq i, j \leq n. \tag{4.52}$$

V rovnicích se předpokládá sčítání přes opakující se indexy. Existence řešení tohoto systému plyne z Leviho teorému.

4.3 Nilradikál

Cílem této části je popsat algoritmus z [2] pro hledání nilradikálu Lieovy algebry použitý v našem programu v systému Maple 8. Nejprve uvedeme bez důkazů některé další vlastnosti radikálů a nilradikálů. Důkazy následujících lemma a teorémů lze nalézt v [2].

Lemma 4.3.1. *Pro libovolnou podalgebru $\mathcal{A} \subset\subset \mathcal{L}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$. Platí*

$$R(\mathcal{L}) \cap \mathcal{A} \subseteq R(\mathcal{A}), \qquad NR(\mathcal{L}) \cap \mathcal{A} \subseteq NR(\mathcal{A}). \tag{4.53}$$

Poznámka 4.3.2. Nilradikál Lieovy algebry $\mathcal{L}$ značíme $NR(\mathcal{L})$ a radikál $R(\mathcal{L})$.

Lemma 4.3.3. *Pro libovolný epimorfismus $\varepsilon : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ (tj. homomorfismus $\mathcal{L}$ na $\mathcal{L}'$) platí*

$$\varepsilon(R(\mathcal{L})) \subseteq R(\mathcal{L}'), \qquad \varepsilon(NR(\mathcal{L})) \subseteq NR(\mathcal{L}'). \tag{4.54}$$

Důsledek 4.3.4. *Pro libovolný ideál $\mathcal{X}$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ platí*

$$R(\mathcal{L})/\mathcal{X} \subseteq R(\mathcal{L}/\mathcal{X}), \qquad NR(\mathcal{L})/\mathcal{X} \subseteq NR(\mathcal{L}/\mathcal{X}). \tag{4.55}$$

Je-li ideál $\mathcal{X}$ navíc řešitelný, pak

$$R(\mathcal{L})/\mathcal{X} = R(\mathcal{L}/\mathcal{X}). \tag{4.56}$$

Lemma 4.3.5. *Nechť $\mathcal{L}$ je konečnědimenzionální Lieova algebra, $\mathcal{A}$ její řešitelný ideál a $\mathcal{B}$ její ideál splňující $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^2$. Potom $\mathcal{L}$ je nilpotentní právě tehdy, když faktoralgebra $\mathcal{L}/\mathcal{B}$ je nilpotentní.*

Teorém 4.3.6. *Buďte $\mathcal{L}$ konečnědimenzionální Lieova algebra nad tělesem charakteristiky nula, $\mathcal{B}$ její ideál splňující $0 \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L}$ a nechť pro ideál $\mathcal{M}$ v $\mathcal{L}$ platí*

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}, \qquad NR(\mathcal{L}/\mathcal{B}) = \mathcal{M}/\mathcal{B}. \tag{4.57}$$

Potom platí

$$NR(\mathcal{L}) = NR(\mathcal{M}). \tag{4.58}$$

Poznámka 4.3.7. Důsledkem lemma 4.3.5 je vztah $NR(\mathcal{L})/(\mathcal{L}^2)^2 = NR(\mathcal{L}/(\mathcal{L}^2)^2)$.

Teorém 4.3.8. *Radikál konečnědimenzionální Lieovy algebry $\mathcal{L}$ je určen posloupností nilradikálů $NR^1(\mathcal{L}) \subseteq NR^2(\mathcal{L}) \subseteq \ldots \subseteq NR^k(\mathcal{L}) \subseteq \ldots$, definovanou vztahy*

$$NR^1(\mathcal{L}) = NR(\mathcal{L}), \qquad NR^{k+1}(\mathcal{L})/NR^k(\mathcal{L}) = NR(\mathcal{L}/NR^k(\mathcal{L})), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{4.59}$$

následovně

$$R(\mathcal{L}) = (NR)^\infty(\mathcal{L}) = \bigcup_k NR^k(\mathcal{L}). \tag{4.60}$$

Navíc vždy existuje index $j \in \mathbb{N}$ takový, že

$$NR^j(\mathcal{L}) = R(\mathcal{L}) \tag{4.61}$$

a buď $j = 1$ nebo $NR^{j-1}(\mathcal{L}) \subset R(\mathcal{L})$.

Poznámka 4.3.9. Pro prvky horní centrální posloupnost Lieovy algebry $\mathcal{L}$ (viz definice 1.2.10) platí

$$C^k(\mathcal{L}) \subseteq NR(\mathcal{L}), \qquad NR(\mathcal{L}/C^k(\mathcal{L})) = NR(\mathcal{L})/C^k(\mathcal{L}). \tag{4.62}$$

Definice 4.3.10. *Hypercentrem* Lieovy algebry $\mathcal{L}$ nazýváme sjednocení prvků horní centrální posloupnosti

$$C^\infty(\mathcal{L}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} C^k(\mathcal{L}). \tag{4.63}$$

Poznámka 4.3.11. Pro hypercentrum $C^\infty(\mathcal{L})$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ platí

$$C^\infty(\mathcal{L}) \subseteq NR(\mathcal{L}), \qquad NR(\mathcal{L}/C^\infty(\mathcal{L})) = NR(\mathcal{L})/C^\infty(\mathcal{L}). \tag{4.64}$$

Je-li $\mathcal{L}$ navíc konečnědimenzionální, pak existuje $j \in \mathbb{N}$ tak, že

$$C^\infty(\mathcal{L}) = C^j(\mathcal{L}), \qquad C^{j-1}(\mathcal{L}) \subset C^j(\mathcal{L}), \qquad C(\mathcal{L}/C^\infty(\mathcal{L})) = 0. \tag{4.65}$$

Lemma 4.3.12. *Nechť $\mathcal{L}$ je konečnědimenzionální Lieova algebra splňující podmínky*

$$(\mathcal{L}^2)^2 = D^2(\mathcal{L}) = 0, \qquad C(\mathcal{L}) = 0. \tag{4.66}$$

Potom derivovaná algebra $D(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^2$ je rovna svému centralizátoru v $\mathcal{L}$ tj.

$$C_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}^2) = \{x \in \mathcal{L} \mid \forall y \in \mathcal{L}^2,\ [x, y] = 0\} = \mathcal{L}^2. \tag{4.67}$$

Následuje algoritmus pro nalezení nilradikálu komplexní Lieovy algebry dimenze $n \in \mathbb{N}$.

1. Pomocí vztahu (4.41) najdeme radikál $R(\mathcal{L})$ a podle lemma 4.3.1 máme

$$NR(\mathcal{L}) = NR(R(\mathcal{L})). \tag{4.68}$$

   Dále nahradíme $\mathcal{L}$ jejím radikálem, tj. předpokládáme řešitelnou Lieovu algebru $\mathcal{L}$.

2. Spočteme $D(\mathcal{L}) = [\mathcal{L}, \mathcal{L}]$ a $D^2(\mathcal{L}) = [D(\mathcal{L}), D(\mathcal{L})]$ a podle poznámky 4.3.7 získáme $NR(\mathcal{L})$ z nilradikálu faktoralgebry $\mathcal{L}/D^2(\mathcal{L})$ užitím vztahu

$$NR(\mathcal{L})/D^2(\mathcal{L}) = NR(\mathcal{L}/D^2(\mathcal{L})). \tag{4.69}$$

   Dále tedy předpokládáme řešitelnou Lieovu algebru $\mathcal{L}$ s abelovskou derivovanou algebrou $D(\mathcal{L})$ tj. $[D(\mathcal{L}), D(\mathcal{L})] = 0$.

3. Spočteme hypercentrum $C^\infty(\mathcal{L})$ a vzhledem k (4.64) získáme $NR(\mathcal{L})$ z nilradikálu $\mathcal{L}/C^\infty(\mathcal{L})$ užitím vztahu

$$NR(\mathcal{L})/C^\infty(\mathcal{L}) = NR(\mathcal{L}/C^\infty(\mathcal{L})). \tag{4.70}$$

   Problém nalezení nilradikálu libovolné komplexní konečnědimenzionální Lieovy algebry je nyní převeden na hledání nilradikálu řešitelné Lieovy algebry splňující

$$[D(\mathcal{L}), D(\mathcal{L})] = 0, \qquad C(\mathcal{L}) = 0. \tag{4.71}$$

4. Zvolíme bázi $\{u_1, \dots, u_m\}$ derivované algebry $D(\mathcal{L})$ řešitelné algebry $\mathcal{L}$ splňující (4.71) a doplníme ji do báze $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = Span_{\mathbb{C}}\{u_1, \dots, u_m\, x_1, \dots, x_{n-m}\}. \tag{4.72}$$

5. Vybereme prvek u_1 z báze $D(\mathcal{L})$ a prvek x_j z báze doplňku $D(\mathcal{L})$ do $\mathcal{L}$. Definujeme $u_{0j} = u_1,\ u_{1j} = [x_j, u_{0j}], \dots, u_{ij} = [x_j, u_{i-1,j}]$. Najdeme množinu

$$S_i = \{u_{0j}, u_{1j}, \dots, u_{ij}\} \tag{4.73}$$

   tak, že S_i je lineárně závislá, ale S_{i-1} je lineárně nezávislá. Tudíž existují čísla $a_{kj} \in \mathbb{C}$ (ne všechna nulová) tak, že

$$u_{ij} + a_{1j} u_{i-1,j} + \ldots + a_{ij} u_{0j} = 0. \tag{4.74}$$

   Těchto čísel užijeme ke konstrukci komplexního polynomu

$$f_j(t) = t^i + a_{1j} t^{i-1} + \ldots + a_{i-1,j} t + a_{ij}. \tag{4.75}$$

   Pokud $a_{ij} = 0$, pak pokračujeme bodem 6. Pokud $a_{ij} \neq 0$, pokračujeme bodem 7.

6. Máme $a_{ij} = 0$. Definujeme ideál

$$\mathcal{B}_1 = \{\ [x_j, y] \mid y \in D(\mathcal{L})\ \} \tag{4.76}$$

a užijeme teorém 4.3.6. Tedy musíme najít nilradikál faktoralgebry $\mathcal{L}/\mathcal{B}_1$ a potom algebru $\mathcal{M}$ definovanou předpisem $\mathcal{M}/\mathcal{B}_1 = NR(\mathcal{L}/\mathcal{B}_1)$. Nakonec najdeme $NR(\mathcal{M})$ ($din(\mathcal{M}) < dim(\mathcal{L})$) a položíme

$$NR(\mathcal{L}) = NR(\mathcal{M}). \tag{4.77}$$

7. Máme $a_{ij} \neq 0$. Pokud násobnost všech kořenů polynomu $f_j(t)$ je jedna, pak přejdeme k bodu 8. V opačném případě najdeme nekonstantní polynom $g_j(t)$ tak, že $g_j(t)$ dělí $f_j(t)$ a násobnost všech jeho kořenů je jedna. Zkonstruujeme ideál

$$\mathcal{B}_2 = \{\ g_j(ad(x_j))y \mid y \in D(\mathcal{L})\ \}, \tag{4.78}$$

kde $ad(x_j)$ je matice přiřazená prvku x_j adjungovanou reprezentací a y je sloupcový vektor. Pokračujeme obdobně jako s ideálem $\mathcal{B}_1$, tj. položíme $\mathcal{M}/\mathcal{B}_2 = NR(\mathcal{L}/\mathcal{B}_2)$, $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{M}$, $NR(\mathcal{L}) = NR(\mathcal{M})$.

8. Všechny kořeny polynomu $f_j(t)$ jsou jednonásobné a $a_{ij} \neq 0$. Pokud $j < n - m$, pak namísto j vezmeme $j + 1$ a vrátíme se k bodu 5. Pokud $j = n - m$, pak určíme centralizátor prvku $u_1 = u_{0j}$ (užitého v bodu 5) v $\mathcal{L}$ tj.

$$\mathcal{M} = C_{\mathcal{L}}(u_1) = \{\ y \in \mathcal{L} \mid [y, u_1] = 0\ \}. \tag{4.79}$$

Neboť $D(\mathcal{L})$ je abelovská platí

$$dim(\mathcal{M}) \geq dim(D(\mathcal{L})). \tag{4.80}$$

Pokud $dim(\mathcal{M}) = dim(D(\mathcal{L}))$, pak

$$NR(\mathcal{L}) = D(\mathcal{L}). \tag{4.81}$$

Pokud $dim(\mathcal{M}) > dim(D(\mathcal{L}))$, pak

$$NR(\mathcal{L}) = NR(\mathcal{M}). \tag{4.82}$$

Nilradikál $NR(\mathcal{M})$ najdeme opakováním postupu od bodu 2 pro $\mathcal{M}$ namísto $\mathcal{L}$.

4.4 Algoritmus realizovaný v systému Maple 8

Zde popíšeme celý postup identifikace Lieových algeber použitý v námi vytvořeném programu v systému Maple 8 (viz dodatek 3). Detailní popis jednotlivých částí je uveden v předchozích podkapitolách. Program je určen pro komplexní konečnědimenzionální Lieovy algebry, zadané pomocí strukturních konstant. Strukturní konstanty mohou být polynomy v parametrech

$p_1, \dots, p_k$ s komplexními koeficienty (nejlépe zadanými symbolicky). S parametry se zachází jako s blíže neurčenými komplexními čísly a předpokládá se, že jejich polynomy jsou nenulové (tj. $p_1, \dots, p_k$ nejsou kořeny zadaných polynomů). Jinými slovy program není schopen určit zvláštní případy pro speciální hodnoty parametrů. Případné konstanty musí být vyčísleny, jinak se s nimi zachází jako s blíže neurčenými komplexními čísly.

Procedury použitého programu provádějí tyto operace.

1. Oddělení maximální centrální komponenty $\mathcal{L}$.

2. Rozklad $\mathcal{L}$ na direktní součet dále nerozložitelných ideálů $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_k$.

3. Leviho rozklad pro nerozložitelné algebry $\mathcal{L}_i$, $i \in \hat{k}$, určení řešitelných a poloprostých algeber. Všechny zkoumané algebry byly řešitelné a tedy Leviho rozklad byl triviální.

4. Nalezení nilradikálu pro radikály Lieových algeber $\mathcal{L}_i$, $i \in \hat{k}$ a určení nilpotentních Lieových algeber.

5. Spočítání derivované, dolní a horní centrální posloupnosti pro nerozložitelné algebry $\mathcal{L}_i$, $i \in \hat{k}$ a zařazení těchto algeber do tříd podle dimenzí členů těchto posloupností.

6. Explicitní hledání izomorfismů v rámci jednotlivých tříd (popsané níže).

Napíšeme explicitní podmínku pro izomorfismus dvou Lieových algeber definovaných pomocí strukturních konstant. Nechť $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$ jsou Lieovy algebry stejné dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$ s bázemi $\varepsilon = \{e_i\}_{i=1}^n$ a $\varepsilon' = \{e'_i\}_{i=1}^n$ a komutačními relacemi

$$[e_i, e_j] = x_{ij}^k e_k, \qquad [e'_i, e'_j]' = y_{ij}^k e'_k, \tag{4.83}$$

kde se sčítá přes k. Hledáme izomorfismus $A : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$. Nechť

$$Ae_i = A_{ij} e'_j, \tag{4.84}$$

tj. A_{ij} jsou složky matice ${}^{\varepsilon}A^{\varepsilon'}$ zobrazení A v bázích ε a ε'. Zobrazení A je izomorfismus právě tehdy, když platí

$$a)\ det({}^{\varepsilon}A^{\varepsilon'}) <> 0, \qquad b)\ A[e_i, e_j] = [Ae_i, Ae_j]', \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = i, \dots, n. \tag{4.85}$$

Dosazením (4.83) a (4.84) získáme z $b)$ rovnice

$$x_{ij}^r A_{rk} e'_k = A_{i\mu} A_{j\nu} y_{\mu\nu}^k e'_k, \qquad i = 1, \dots, n-1, \quad j = i, \dots, n, \tag{4.86}$$

a odtud

$$x_{ij}^r A_{rk} = A_{i\mu} A_{j\nu} y_{\mu\nu}^k, \qquad i = 1, \dots, n-1, \quad j = i, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n, \tag{4.87}$$

kde sčítání se provádí od 1 do n přes indexy r, μ, ν. Tedy regulární matice jejíž složky řeší systém (4.87) je hledaným izomorfismem a pokud v $\mathcal{L}'$ definujeme novou bázi $\{f'_i = Ae_i\}_{i=1}^n$, pak strukturní konstanty algebry $\mathcal{L}'$ v této bázi budou právě x_{ij}^k.

Ačkoliv se podmínka (4.87), kladená na složky regulární matice ${}^{\varepsilon}A^{\varepsilon'}$ reprezentující izomorfismus A, může zdát na první pohled jednoduchá, jde o systém $n^2(n-1)/2$ kvadratických rovnic pro n^2 neznámých, jehož řešení při dimenzi $n = 8$ je i pro počítač nesnadným úkolem. V systému Maple 8 jsme z technických důvodů nejprve hledali matice splňující vztah (4.87). Mezi nalezenými maticemi jsme pak hledali matici regulární. Pro tuto regulární matici jsme dosadili za volné parametry celá čísla tak, aby její determinant byl různý od nuly. Při hledání izomorfismů docházelo k následujícím případům:

1. Hledaná regulární matice A byla nalezena a vyčíslena. Zkoumané algebry jsou tedy izomorfní a jejich izomorfismus byl nalezen explicitně.

2. Všechny matice splňující podmínku (4.87) jsou singulární. V tomto případě nebyl nalezen izomorfismus, což samozřejmě neznamená, že zkoumané algebry jsou neizomorfní. Avšak poukazuje to na možnost, že neizomorfní jsou.

3. Systém zkolaboval. Pro dvě ze zkoumaných algeber, a to i při opakování výpočtů.

Poznamenejme, že pouze při hledání izomorfismu dochází ke komplikacím v systému Maple 8. Všechny ostatní výpočty prováděné v procedurách jsou buď řešení soustav lineárních rovnic, nebo hledání kořenů a rozkladů komplexních polynomů.

V našem případě vystupují v komutačních relacích nejvýše dva nenulové parametry. Avšak díky tvaru komutačních relací nezávisí námi provedené výpočty na konkrétních hodnotách těchto nenulových parametrů. Izomorfismy jsme pro algebry s parametrem nehledali.

Kapitola 5

Gradované kontrakce $sl(2,\mathbb{C})$ pro případ Pauliho gradace

V této kapitole podrobně popíšeme nalezení gradovaných kontrakcí $sl(2,\mathbb{C})$ pro Pauliho gradaci. Pauliho gradace $sl(2,\mathbb{C})$ má tvar

$$sl(2,\mathbb{C}) = L_{01} + L_{10} + L_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Při zápisu jsme opět vynechali nulový podprostor $L_{00} = \{0\}$ a symbol pro (komplexní) lineární obal u matic. Matice κ má v tomto případě tvar

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Grupou symetrie systému kontrakčních rovnic je šestiprvková grupa

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{5.3}$$

Jacobiho identity dávají v našem případě triviální systém kontrakčních rovnic $0 = 0$. Řešením je libovolná kontrakční matice tvaru

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{(01)(10)} & \varepsilon_{(01)(11)} \\ \varepsilon_{(01)(10)} & 0 & \varepsilon_{(10)(11)} \\ \varepsilon_{(01)(11)} & \varepsilon_{(10)(11)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Normalizační matice α má tvar

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{01}a_{10}}{a_{11}} & \frac{a_{01}a_{11}}{a_{10}} \\ \frac{a_{01}a_{10}}{a_{11}} & 0 & \frac{a_{10}a_{11}}{a_{01}} \\ \frac{a_{01}a_{11}}{a_{10}} & \frac{a_{10}a_{11}}{a_{01}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Nyní klasifikujeme řešení podle počtu nul mezi parametry $\varepsilon_{(01)(10)}, \varepsilon_{(01)(11)}, \varepsilon_{(10)(11)}$:

0 -triviální řešení lze převést normalizací na tvar $\varepsilon^0 = \kappa \bullet \mathbf{1}_3$;

1 -netriviální řešení leze převést normalizací a užitím symetrie na tvar

$$\varepsilon^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{5.6}$$

2 -netriviální řešení lze převést normalizací a užitím symetrie na tvar

$$\varepsilon^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{5.7}$$

3 -triviální řešení $\varepsilon^3 = \mathbf{0}_3$.

Řešení $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ jsou navzájem neekvivalentní ve smyslu ekvivalence definované obdobně jako v (3.30).

Označíme-li

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

pak komutační relace Lieovy algebry $sl(2, \mathbb{C})$ mají tvar

$$[e_1, e_2] = 2e_3, \qquad [e_1, e_3] = 2e_2, \qquad [e_2, e_3] = -2e_1. \tag{5.9}$$

Tyto lze přepsat do komutační tabulky:

$sl(2,\mathbb{C})$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	$2e_3$	$2e_2$
e_2	$-2e_3$	0	$-2e_1$
e_3	$-2e_2$	$2e_1$	0

(5.10)

kde v řádku e_i a sloupci e_j je komutátor $[e_i, e_j]$. Komutační relace Lieových algeber odpovídajících řešením ε^i, $i = 0, 1, 2, 3$, lze snadno získat z tabulky (5.10) vynásobením prvků v této tabulce odpovídajícími prvky v matici ε tj. $[e_i, e_j]_\varepsilon = (\varepsilon)_{ij}[e_i, e_j]$, $i, j = 1, 2, 3$. Komutační tabulky pro netriviální řešení tedy budou:

ε^1	e_1	e_2	e_3
e_1	0	$2e_3$	$2e_2$
e_2	$-2e_3$	0	0
e_3	$-2e_2$	0	0

ε^2	e_1	e_2	e_3
e_1	0	$2e_3$	0
e_2	$-2e_3$	0	0
e_3	0	0	0

(5.11)

Zbývá již jen identifikovat získané algebry. Řešení ε^0 a ε^3 jsou triviální a odpovídají Lieovým algebrám $sl(2, \mathbb{C})$ a abelovské. Zbylá dvě řešení odpovídají nerozložitelným Lieovým algebrám. Spočteme derivovanou $D^k(\mathcal{L})$, dolní $\mathcal{L}^k$ a horní $C^k(\mathcal{L})$ centrální posloupnost pro všechna řešení. Výsledky jsou shrnuty v tabulce 1.

Tabulka 1. Lieovy algebry získané kontrahováním $sl(2,\mathbb{C})$ při Pauliho gradaci.

řešení	$D^k(\mathcal{L})$	$\mathcal{L}^k$	$C^k(\mathcal{L})$	typ	algebra
ε^0	(3)	(3)	(0)	prostá	$A_{3,8}$, $sl(2,\mathbb{C})$
ε^1	(3,2,0)	(3,2)	(0)	řešitelná	$A_{3,4}$, eukleidovská
ε^2	(3,1,0)	(3,1,0)	(1,3)	nilpotentní	$A_{3,1}$, Heisenbergova
ε^3	(3,0)	(3,0)	(3)	abelovská	$3A_0 = A_0 \oplus A_0 \oplus A_0$

Cílem identifikace je určit třídu algeber podle izomorfismu (dále jen izomorfní třídu) do které zkoumaná algebra patří. Pro jednoduchost budeme namísto tříd mluvit pouze o algebrách, tj. místo algebra patří do třídy reprezentované prvkem $A_{i,j}$ budeme říkat, že daná algebra je algebra $A_{i,j}$. Ve sloupci algebra je uvedeno značení algeber, podle [3]. Řešení ε^1 odpovídá řešitelné algebře jejíž nilradikál má dimenzi dva a je abelovský.

Na závěr poznamenejme, že gradovanými kontrakcemi $sl(2,\mathbb{C})$ zachovávajícími Pauliho gradaci jsme získali Lieovy algebry:

$$3A_0,\ A_{3,4} = A_{3,6},\ A_{3,1},\ A_{3,8} = A_{3,9}. \tag{5.12}$$

Zbývající třídimenzionální komplexní Lieovy algebry podle [3] jsou:

$$A_{2,1},\ A_{3,2},\ A_{3,3},\ A^p_{3,5} = A^p_{3,7}. \tag{5.13}$$

V [3] je uvedena klasifikace reálných Lieových algeber dimenzí $n \leq 5$ a nilpotentních reálných Lieových algeber dimenze 6. Zde pod symboly $A_{i,j}$ rozumíme komplexifikace příslušných reálných algeber. Rovnosti v (5.12) a (5.13) značí, že komplexifikace daných reálných Lieových algeber reprezentují stejnou třídu podle izomorfismu.

Kapitola 6

Výsledky gradovaných kontrakcí $sl(3, \mathbb{C})$ pro případ Pauliho gradace

V této kapitole uvedeme přehled Lieových algeber získaných gradovanými kontrakcemi prosté Lieovy algebry $sl(3, \mathbb{C})$ v případě Pauliho gradace. Tyto algebry identifikujeme pomocí programu v systému Maple 8 (viz dodatek 3). Nejprve uvedeme příklad, ve kterém podrobně popíšeme postup provedený při identifikaci.

6.1 Příklad identifikace Lieovy algebry

Na konkrétním případu popíšeme jak funguje program pro identifikaci z dodatku 3. Nejprve označíme $\{e_i\}_{i=1}^{8}$ bázi Lieovy algebry $\mathcal{L} = sl(3, \mathbb{C})$:

$$e_1 = Q,\ e_2 = Q^2,\ e_3 = P,\ e_4 = P^2,\ e_5 = PQ,\ e_6 = P^2Q^2,\ e_7 = PQ^2,\ e_8 = P^2Q, \tag{6.1}$$

kde P, Q jsou matice definované vztahem (2.23). Z komutačních relací pro tyto matice

$$[P^iQ^j, P^kQ^l] = (\omega^{jk} - \omega^{il})P^{i+k}Q^{j+l} \tag{6.2}$$

získáme komutační relace pro elementy báze $e_i,\ i = 1, \ldots, 8$, které zapíšeme do tabulky:

$\mathcal{L}$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	0	0	$(\omega-1)e_5$	$(\omega^2-1)e_8$	$(\omega-1)e_7$	$(\omega^2-1)e_4$	$(\omega-1)e_3$	$(\omega^2-1)e_6$
e_2		0	$(\omega^2-1)e_7$	$(\omega-1)e_6$	$(\omega^2-1)e_3$	$(\omega-1)e_8$	$(\omega^2-1)e_5$	$(\omega-1)e_4$
e_3			0	0	$(1-\omega)e_8$	$(1-\omega^2)e_2$	$(1-\omega^2)e_6$	$(1-\omega)e_1$
e_4				0	$(1-\omega^2)e_1$	$(1-\omega)e_7$	$(1-\omega)e_2$	$(1-\omega^2)e_5$
e_5					0	0	$(\omega-\omega^2)e_4$	$(\omega^2-\omega)e_2$
e_6						0	$(\omega^2-\omega)e_1$	$(\omega-\omega^2)e_3$
e_7							0	0
e_8								0

(6.3)

Vyplnili jsme jen horní část tabulky, dolní je dána antisymetrií komutátoru. Při výpočtech prováděných v systému Maple 8 klademe

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i. \tag{6.4}$$

Nyní vezmeme řešení $\varepsilon_{8,20}$ z dodatku 1:

$$\varepsilon_{8,20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

a označíme $\mathcal{L}_{8,20}$ jemu odpovídající Lieovu algebru. Komutační relace získané algebry jsou v následující tabulce:

$\mathcal{L}_{8,20}$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	0	0	$(\omega-1)e_5$	0	0	0	0	0
e_2	0	0	0	$(\omega-1)e_6$	0	0	0	0
e_3	$(1-\omega)e_5$	0	0	0	$(1-\omega)e_8$	0	0	$(1-\omega)e_1$
e_4	0	$(1-\omega)e_6$	0	0	0	0	0	0
e_5	0	0	$(\omega-1)e_8$	0	0	0	0	0
e_6	0	0	0	0	0	0	0	0
e_7	0	0	0	0	0	0	0	0
e_8	0	0	$(\omega-1)e_1$	0	0	0	0	0

(6.6)

Prvním krokem při identifikaci je oddělení maximální centrální komponenty. Určíme tedy centrum a derivovanou algebru Lieovy algebry $\mathcal{L}_{8,20}$:

$$C(\mathcal{L}_{8,20}) = \{e_6, e_7\}, \qquad D(\mathcal{L}_{8,20}) = \{e_5, e_6, e_8, e_1\} \tag{6.7}$$

podprostory zapisujeme pomocí báze, symbol pro lineární obal vynecháváme. Vektory v jednotlivých bázích uvádíme v pořadí, ve kterém vychází v programu. Doplněk derivované algebry do centra je $\{e_7\}$. Tedy Lieova algebra $\mathcal{L}_{8,20}$ je rozložitelná na direktní součet Lieových algeber dimenzí 1 a 7:

$$\mathcal{L}_{8,20} = \{e_7\} \oplus \{e_5, e_6, e_8, e_1, e_2, e_3, e_4\}. \tag{6.8}$$

Po oddělení maximální centrální komponenty $\{e_7\}$ zbyde sedmidimenzionální Lieova algebra, kterou budeme značit stejně jako původní $\mathcal{L}_{8,20}$. Následuje vyšetření rozložitelnosti. Dimenze centralizátoru $\mathcal{A}_{8,20} = C_R(ad(\mathcal{L}_{8,20}))$ adjungované reprezentace $ad(\mathcal{L}_{8,20})$ Lieovy algebry $\mathcal{L}_{8,20}$ je $dim(\mathcal{A}_{8,20}) = 5$ a dimenze jeho Jacobsonova radikálu $dim(J(\mathcal{A}_{8,20})) = 3$. Lieova algebra $\mathcal{L}_{8,20}$ je tedy rozložitelná a my budeme hledat netriviální idempotent v $\mathcal{A}_{8,20}$. Báze doplňku $J(\mathcal{A}_{8,20})$ v $\mathcal{A}_{8,20}$ je

$$\{b_1 = \mathbf{1}_7, b_2 = diag(1, -4/3, -4/3, 1, 1, -4/3, 1, -4/3)\}. \tag{6.9}$$

Minimální polynom prvku b_2 je

$$m_{b_2}(t) = -\frac{4}{3} + \frac{1}{4}t + t^2 = (t-1)(t+\frac{4}{3}) = f_1(t)f_2(t), \tag{6.10}$$

kde $f_1(t) = t - 1$ a $f_2(t) = t + \frac{4}{3}$. Z algoritmu dělení dostaneme polynomy $P_1(t), P_2(t)$

$$-\frac{3}{7}(t-1) + \frac{3}{7}(t+\frac{4}{3}) = 1, \tag{6.11}$$

tj. $P_1(t) = -\frac{3}{7}$ a $P_2(t) = \frac{3}{7}$. Matice

$$M = P_1(b_2)f_1(b_2) = -\frac{3}{7}(b_2 - \mathbf{1}_7) = diag(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1) \tag{6.12}$$

je hledaný netriviální idempotent v $\mathcal{A}_{8,20}$. Vlastní podprostory idempotentu M jsou podalgebry v $\mathcal{L}_{8,20}$:

$$\mathcal{L}^0_{8,20} = \{e_5, e_8, e_1, e_3\}, \qquad \mathcal{L}^1_{8,20} = \{e_6, e_2, e_4\}, \tag{6.13}$$

Algebra $\mathcal{L}_{8,20}$ je tedy direktním součtem podalgeber

$$\mathcal{L}_{8,20} = \{e_5, e_8, e_1, e_3\} \oplus \{e_6, e_2, e_4\} = \mathcal{L}^0_{8,20} \oplus \mathcal{L}^1_{8,20}. \tag{6.14}$$

Nyní zkusíme zda jsou Lieovy algebry $\mathcal{L}^i_{8,20}$, $i = 0, 1$ rozložitelné. Spočteme dimenze centralizátorů jejich adjungovaných reprezentací:

$$dim(\mathcal{A}^0_{8,20}) = 1, \qquad dim(\mathcal{A}^0_{8,20}) = 3 \tag{6.15}$$

a příslušných Jacobsonových radikálů:

$$dim(J(\mathcal{A}^0_{8,20})) = 0, \qquad dim(J(\mathcal{A}^1_{8,20})) = 2. \tag{6.16}$$

V obou případech je $dim(\mathcal{A}) - dim(J(\mathcal{A})) = 1$ a tedy obě Lieovy algebry jsou nerozložitelné. Spočteme derivovanou posloupnost pro obě algebry:

$$\begin{aligned} &D^0(\mathcal{L}^0_{8,20}) = \{e_5, e_8, e_1, e_3\}, \quad &&D^1(\mathcal{L}^0_{8,20}) = \{e_5, e_8, e_1\}, \quad &&D^k(\mathcal{L}^0_{8,20}) = \{0\},\ k \geq 2, \\ &D^0(\mathcal{L}^1_{8,20}) = \{e_6, e_2, e_4\}, &&D^1(\mathcal{L}^1_{8,20}) = \{e_6\}, &&D^k(\mathcal{L}^1_{8,20}) = \{0\},\ k \geq 2. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Dále spočteme dolní centrální posloupnosti:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}^0_{8,20})^0 = \{e_5, e_8, e_1, e_3\}, \quad (\mathcal{L}^0_{8,20})^k = \{e_5, e_8, e_1\}, \quad k \geq 1, \\ &(\mathcal{L}^1_{8,20})^0 = \{e_6, e_2, e_4\}, \qquad (\mathcal{L}^1_{8,20})^1 = \{e_6\}, \qquad (\mathcal{L}^1_{8,20})^k = \{0\},\ k \geq 2, \end{aligned} \tag{6.18}$$

a nakonec horní centrální posloupnosti:

$$\begin{aligned} &C^k(\mathcal{L}^0_{8,20}) = \{0\}, \quad k \geq 0, \\ &C^0(\mathcal{L}^1_{8,20}) = \{0\}, \quad C^1(\mathcal{L}^1_{8,20}) = \{e_6\}, \quad C^k(\mathcal{L}^1_{8,20}) = \{e_6, e_2, e_4\},\ k \geq 2. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Dimenze členů výše uvedených posloupností budeme pro algebry uvádět v závorkách v pořadí derivovaná, dolní centrální a horní centrální posloupnost:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}^0_{8,20} & (4,3,0)(4,3)(0) \\ \mathcal{L}^1_{8,20} & (3,1,0)(3,1,0)(1,3) \end{array} \tag{6.20}$$

Dimenzi prvního členu horní centrální posloupnosti neuvádíme, neboť je vždy nula. Dále neuvádíme dimenze opakujících se členů příslušných posloupností. První číslice v první a druhé závorce se vždy shodují a označují dimenzi příslušné algebry. Je-li poslední číslice v první, resp. druhé závorce nula, pak je příslušná algebra řešitelná, resp. nilpotentní. Z (6.17) je jasné, že obě algebry $\mathcal{L}^0_{8,20}$ a $\mathcal{L}^1_{8,20}$ jsou řešitelné a z (6.18) plyne, že $\mathcal{L}^1_{8,20}$ je nilpotentní. Pro řešitelnou algebru $\mathcal{L}^0_{8,20}$ najdeme nilradikál. Protože $D^2(\mathcal{L}^0_{8,20}) = \{0\}$ a hypercentrum $C^\infty(\mathcal{L}^0_{8,20}) = \{0\}$ jsou nulové podprostory, úlohu nelze převést na hledání nilradikálu faktoralgebry. Zvolíme tedy prvek z derivované algebry např. e_5 a prvek e_3 z doplňku do derivované algebry v $\mathcal{L}^0_{8,20}$. Určíme množinu lineárně závislých vektorů $S_i = \{u_{01} = e_5, u_{11} = [e_3, u_{01}], \dots, u_{i1} = [e_3, u_{i-1,1}]\}$, tak aby S_{i-1} byla lineárně nezávislá tj.

$$S = \{e_5, (1-\omega)e_8, (1-\omega)^2 e_1, (1-\omega)^3 e_5\}. \tag{6.21}$$

Dále určíme koeficienty lineární závislosti:

$$e_5 + a_{11}(1-\omega) + a_{21}e_8, (1-\omega)^2 e_1 + a_{31}(1-\omega)^3 e_5 = 0 \tag{6.22}$$

odtud $a_{11} = a_{21} = 0,\ a_{31} = -(1-\omega)^{-3}$. Sestrojíme polynom

$$q_1(t) = t^3 - (1-\omega)^{-3}. \tag{6.23}$$

Neboť $e_{31} \neq 0$ a polynom má násobnosti všech kořenů rovné jedné spočteme centralizátor prvku e_5 v Lieově algebře $\mathcal{L}^0_{8,20}$

$$\mathcal{M} = C_{\mathcal{L}^0_{8,20}}(e_5) = \{e_5, e_8, e_1\}. \tag{6.24}$$

Neboť $dim(\mathcal{M}) = dim(D(\mathcal{L}^0_{8,20}))$ máme

$$NR(\mathcal{L}^0_{8,20}) = D(\mathcal{L}^0_{8,20}) = \{e_5, e_8, e_1\}. \tag{6.25}$$

Tedy algebra $\mathcal{L}^0_{8,20}$ má třídimenzionální abelovský nilradikál. Tímto jsme skončili s identifikací Lieovy algebry

$$\mathcal{L}_{8,20} = \{e_7\} \oplus \{e_5, e_8, e_1, e_3\} \oplus \{e_6, e_2, e_4\}, \tag{6.26}$$

kterážto je direktním součtem jednodimenzionální abelovské, čtyřdimenzionální řešitelné a třídimenzionální nilpotentní Lieovy algebry.

6.2 Algebry získané gradovanými kontrakcemi $sl(3, \mathbb{C})$ pro případ Pauliho gradace

Zde uvedeme seznam Lieových algeber získaných gradovanými kontrakcemi $sl(3, \mathbb{C})$ pro případ Pauliho gradace. Algebru odpovídající řešení $\varepsilon_{i,j}$ z dodatku 1 budeme značit $\mathcal{L}_{i,j}$. Pokud lze oddělit centrální komponenta, pak ji oddělíme a dále budeme identifikovat algebru $\mathcal{L}_{i,j}$ nižší dimenze. Pokud lze algebru $\mathcal{L}_{i,j}$ rozložit na direktní součet neabelovských podalgeber, pak ji rozložíme $\mathcal{L}_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{L}^k_{i,j}$ a dále budeme identifikovat pouze algebry $\mathcal{L}^k_{i,j},\ k \in \hat{m}$.

V dodatku 1 je uvedeno celkem 180 řešení systému kontrakčních rovnic. Řešení označujeme $\varepsilon_{i,j}$, kde index i čísluje množinu řešení a index j pořadí v této množině. Každému řešení odpovídá Lieova algebra jejíž komutační relace lze získat postupem uvedeným v kapitole 5.

Triviálnímu řešení $\varepsilon_{0,1}$, resp. $\varepsilon_{12,1}$ odpovídá prostá Lieova algebra $sl(3, \mathbb{C})$, resp. abelovská algebra. Proto se jimi dále nebudeme zabývat. Ze zbývajících 178 získaných Lieových algeber je 13 algeber závislých na nenulových parametrech $a, b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, vystupujících v komutačních relacích. Tyto algebry budeme značit $\mathcal{L}_{i,j}(p)$, kde p je seznam parametrů. Výsledky, které jsme pro tyto algebry získali, nezávisí na hodnotách jejich parametrů. Pro algebry závislé na parametru jsme nehledali izomorfismy.

U 66 ze získaných algeber lze oddělit centrální komponenty. Oddělené abelovské části dále neuvažujeme, pouze poznamenáme, že jsme takto získali abelovské Lieovy algebry dimenzí $1, 2, 3, 4, 5$. Celkem 12 ze 178 algeber je rozložitelných na direktní součet dvou neabelovských dále nerozložitelných podalgeber. Tedy máme 190 Lieových algeber různých dimenzí, jejichž komutační relace jsou uvedeny v dodatku 2. Dále jsme určili, že z těchto 190 Lieových algeber je 24 řešitelných a 166 nilpotentních. Pro řešitelné Lieovy algebry jsme určili nilradikály.

Všech 190 Lieových algeber jsme rozdělili do tříd podle dimenzí členů derivované, dolní a horní centrální posloupnosti. Přehled získaných řešitelných algeber je v tabulce 2. Přehled získaných nilpotentních Lieových algeber je v tabulce 3. V prvním sloupci je identifikátor třídy (tj. dimenze členů posloupností $D^k(\mathcal{L}), \mathcal{L}^k, C^k(\mathcal{L})$) a v druhém algebry, které do této třídy patří. Ve třetím sloupci v tabulce 2. jsou u řešitelných algeber dimenze členů derivované, dolní a horní centrální posloupnosti jejich nilradikálů. V jednotlivých třídách jsme hledali izomorfismy mezi algebrami (vyjma algeber parametrických). Nalezené izomorfismy mezi algebrami značíme symbolem $\cong$. Algebry, u nichž izomorfismus nalezen nebyl oddělujeme čárkou.

Narozdíl od práce [14], kde jsou popsány gradované kontrakce $sl(3, \mathbb{C})$ pro toroidální gradaci, zde neuvádíme seznam výsledných osmidimenzionálních algeber, nýbrž jak bylo popsáno výše seznam algeber po oddělení maximální centrální komponenty resp. algeber na jejichž direktní součet jsme získané algebry rozložili. Důvodem, který nás k tomu vede je neúplnost námi provedené klasifikace. V jednotlivých třídách totiž zůstávají algebry u nichž není rozhodnuto, zda jsou vzájemně izomorfní či nikoli. Přesto však můžeme porovnat počet výsledků s počtem algeber 34 získaných v [14]. Počet tříd totiž udává minimální počet získaných neizomorfních algeber. Počet tříd řešitelných Lieových algeber je 18 a počet tříd nilpotentních Lieových algeber je 49. Celkem tedy i s triviálními řešeními máme minimálně 69 neizomorfních algeber, což je více než dvojnásobek počtu algeber získaných v [14].

Přehled rozložitelných Lieových algeber:

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{L}_{6,32} = \mathcal{L}^1_{6,32} \oplus \mathcal{L}^2_{6,32}, & \mathcal{L}_{7,36} = \mathcal{L}^1_{7,36} \oplus \mathcal{L}^2_{7,36}, & \mathcal{L}_{8,10} = \mathcal{L}^1_{8,10} \oplus \mathcal{L}^2_{8,10}, & \mathcal{L}_{8,20} = \mathcal{L}^1_{8,20} \oplus \mathcal{L}^2_{8,20}, \\
\mathcal{L}_{8,21} = \mathcal{L}^1_{8,21} \oplus \mathcal{L}^2_{8,21}, & \mathcal{L}_{8,22} = \mathcal{L}^1_{8,22} \oplus \mathcal{L}^2_{8,22}, & \mathcal{L}_{9,4} = \mathcal{L}^1_{9,4} \oplus \mathcal{L}^2_{9,4}, & \mathcal{L}_{9,6} = \mathcal{L}^1_{9,6} \oplus \mathcal{L}^2_{9,6}, \\
\mathcal{L}_{9,10} = \mathcal{L}^1_{9,10} \oplus \mathcal{L}^2_{9,10}, & \mathcal{L}_{9,15} = \mathcal{L}^1_{9,15} \oplus \mathcal{L}^2_{9,15}, & \mathcal{L}_{10,2} = \mathcal{L}^1_{10,2} \oplus \mathcal{L}^2_{10,2}, & \mathcal{L}_{10,6} = \mathcal{L}^1_{10,6} \oplus \mathcal{L}^2_{10,6}.
\end{array}$$

Přehled parametrických Lieových algeber:

$$\begin{array}{lllllll}
\mathcal{L}_{2,2}(a,b), & \mathcal{L}_{3,5}(a,b), & \mathcal{L}_{3,6}(a), & \mathcal{L}_{3,7}(a), & \mathcal{L}_{4,1}(a), & \mathcal{L}_{4,2}(a), & \mathcal{L}_{4,3}(a), \\
\mathcal{L}_{5,7}(a), & \mathcal{L}_{5,13}(a), & \mathcal{L}_{6,25}(a), & \mathcal{L}_{6,29}(a), & \mathcal{L}_{6,30}(a), & \mathcal{L}_{6,33}(a). &
\end{array}$$

Tabulka 2.
Řešitelné Lieovy algebry získané kontrahováním $sl(3,\mathbb{C})$ při Pauliho gradaci.

$D^k(\mathcal{L}),\ \mathcal{L}^k,\ C^k(\mathcal{L})$	algebry	nilradikál
$(4,3,0)(4,3)(0)$	$\mathcal{L}^1_{6,32} \cong \mathcal{L}^2_{6,32} \cong \mathcal{L}^1_{7,36} \cong \mathcal{L}^2_{8,20} \cong \mathcal{L}_{9,9}$	$(3,0)(3,0)(3)$
$(5,3,0)(5,3)(0)$	$\mathcal{L}_{6,34}$	$(3,0)(3,0)(3)$
$(6,4,0)(6,4,3)(1,2)$	$\mathcal{L}_{8,16}$	$(5,0)(5,0)(5)$
$(7,4,0)(7,4,3)(1,2)$	$\mathcal{L}_{5,17}$	$(5,0)(5,0)(5)$
$(7,5,0)(7,5,4,3)(1,2,3)$	$\mathcal{L}_{7,29}$	$(6,0)(6,0)(6)$
$(7,6,0)(7,6)(0)$	$\mathcal{L}_{6,29}(a)$	$(6,0)(6,0)(6)$
$(7,6,3,0)(7,6)(0)$	$\mathcal{L}_{3,1}$	$(6,3,0)(6,3,0)(3,6)$
$(8,4,0)(8,4,3)(1,3)$	$\mathcal{L}_{4,7}$	$(6,0)(6,0)(6)$
$(8,4,0)(8,4,3)(1,4)$	$\mathcal{L}_{7,32}$	$(7,1,0)(7,1,0)(5,7)$
$(8,5,0)(8,5,3)(2,3)$	$\mathcal{L}_{4,5}$	$(6,0)(6,0)(6)$
$(8,5,0)(8,5,3)(2,4)$	$\mathcal{L}_{7,27}$	$(7,1,0)(7,1,0)(5,7)$
$(8,5,0)(8,5,4,3)(1,2,3)$	$\mathcal{L}_{3,6}(a),\ \mathcal{L}_{4,6}$	$(6,0)(6,0)(6)$
$(8,5,0)(8,5,4,3)(1,2,4)$	$\mathcal{L}_{6,28}$	$(7,2,0)(7,2,1,0)(4,5,7)$
$(8,5,0)(8,5,4,3)(1,3,4)$	$\mathcal{L}_{6,27}$	$(7,1,0)(7,1,0)(5,7)$
$(8,6,0)(8,6)(0)$	$\mathcal{L}_{2,2}(a,b),\ \mathcal{L}_{3,7}(a)$	$(6,0)(6,0)(6)$
$(8,6,3,0)(8,6)(0)$	$\mathcal{L}_{1,1}$	$(6,3,0)(6,3,0)(3,6)$
$(8,7,1,0)(8,7)(1)$	$\mathcal{L}_{3,4}$	$(7,1,0)(7,1,0)(1,7)$
$(8,7,4,0)(8,7)(1)$	$\mathcal{L}_{2,1}$	$(7,4,0)(7,4,1,0)(1,4,7)$

Tabulka 3.
Nilpotentní Lieovy algebry získané kontrahováním $sl(3,\mathbb{C})$ při Pauliho gradaci.

$D^k(\mathcal{L}),\ \mathcal{L}^k,\ C^k(\mathcal{L})$	algebry
$(3,1,0)(3,1,0)(1,3)$	$\mathcal{L}^1_{8,10} \cong \mathcal{L}^1_{8,20} \cong \mathcal{L}^1_{9,4} \cong \mathcal{L}^1_{9,6} \cong \mathcal{L}^1_{9,10} \cong \mathcal{L}^2_{9,15} \cong$ $\cong \mathcal{L}^1_{10,2} \cong \mathcal{L}^2_{10,2} \cong \mathcal{L}^1_{10,6} \cong \mathcal{L}^2_{10,6} \cong \mathcal{L}_{11,1}$
$(4,2,0)(4,2,1,0)(1,2,4)$	$\mathcal{L}^2_{7,36} \cong \mathcal{L}^1_{8,21} \cong \mathcal{L}^2_{8,21} \cong \mathcal{L}^1_{8,22} \cong \mathcal{L}^2_{8,22} \cong \mathcal{L}^2_{9,4} \cong$ $\cong \mathcal{L}^2_{9,6} \cong \mathcal{L}^2_{9,10} \cong \mathcal{L}_{10,1}$
$(5,1,0)(5,1,0)(1,5)$	$\mathcal{L}_{10,7}$
$(5,2,0)(5,2,0)(2,5)$	$\mathcal{L}^1_{9,15} \cong \mathcal{L}_{10,3} \cong \mathcal{L}_{10,4} \cong \mathcal{L}_{10,5}$
$(5,2,0)(5,2,1,0)(1,3,5)$	$\mathcal{L}_{9,7}$
$(5,3,0)(5,3,2,0)(2,3,5)$	$\mathcal{L}^2_{8,10} \cong \mathcal{L}_{9,2}$
$(6,2,0)(6,2,0)(2,6)$	$\mathcal{L}_{9,19}$
$(6,3,0)(6,3,0)(3,6)$	$\mathcal{L}_{9,16}$
$(6,3,0)(6,3,1,0)(1,3,6)$	$\mathcal{L}_{8,1},\ \mathcal{L}_{8,2}$
$(6,3,0)(6,3,1,0)(2,4,6)$	$\mathcal{L}_{9,1},\ \mathcal{L}_{9,3} \cong \mathcal{L}_{9,5} \cong \mathcal{L}_{9,8}$
$(6,3,0)(6,3,2,0)(2,4,6)$	$\mathcal{L}_{8,8}$
$(6,4,0)(6,4,3,1,0)(1,3,4,6)$	$\mathcal{L}_{7,2}$
$(7,1,0)(7,1,0)(1,7)$	$\mathcal{L}_{9,20}$
$(7,2,0)(7,2,0)(2,7)$	$\mathcal{L}_{8,39},\ \mathcal{L}_{9,11} \cong \mathcal{L}_{9,13} \cong \mathcal{L}_{9,18}$
$(7,3,0)(7,3,0)(3,7)$	$\mathcal{L}_{9,12} \cong \mathcal{L}_{9,14} \cong \mathcal{L}_{9,17}$
$(7,3,0)(7,3,1,0)(1,3,7)$	$\mathcal{L}_{7,1}$
$(7,3,0)(7,3,1,0)(1,4,7)$	$\mathcal{L}_{7,7}$
$(7,3,0)(7,3,1,0)(2,5,7)$	$\mathcal{L}_{8,5},\ \mathcal{L}_{8,14} \cong \mathcal{L}_{8,23} \cong \mathcal{L}_{8,28},\ \mathcal{L}_{8,19} \cong \mathcal{L}_{8,26} \cong \mathcal{L}_{8,29}$
$(7,3,0)(7,3,2,0)(2,5,7)$	$\mathcal{L}_{7,17},\ \mathcal{L}_{7,19},\ \mathcal{L}_{8,9}$
$(7,4,0)(7,4,1,0)(1,4,7)$	$\mathcal{L}_{6,13}$
$(7,4,0)(7,4,1,0)(2,4,7)$	$\mathcal{L}_{7,8}$
$(7,4,0)(7,4,1,0)(3,5,7)$	$\mathcal{L}_{8,6}$
$(7,4,0)(7,4,2,0)(2,4,7)$	$\mathcal{L}_{6,9},\ \mathcal{L}_{7,4},\ \mathcal{L}_{7,5},\ \mathcal{L}_{7,9},\ \mathcal{L}_{8,7},\ \mathcal{L}_{8,13} \cong \mathcal{L}_{8,15} \cong \mathcal{L}_{8,24}$
$(7,4,0)(7,4,2,0)(3,5,7)$	$\mathcal{L}_{8,3}$
$(7,4,0)(7,4,3,1,0)(1,3,5,7)$	$\mathcal{L}_{6,1}$
$(7,5,1,0)(7,5,4,2,1,0)(1,2,4,5,7)$	$\mathcal{L}_{5,1}$

Tabulka 3. *(Pokračování)*

$D^k(\mathcal{L}),\ \mathcal{L}^k,\ C^k(\mathcal{L})$	algebry
$(8,2,0)(8,2,0)(2,8)$	$\mathcal{L}_{6,35},\ \mathcal{L}_{7,42},\ \mathcal{L}_{8,32} \cong \mathcal{L}_{8,37},\ \mathcal{L}_{8,38}$
$(8,3,0)(8,3,0)(3,8)$	$\mathcal{L}_{7,41},\ \mathcal{L}_{8,31} \cong \mathcal{L}_{8,34},\ \mathcal{L}_{8,35}$
$(8,3,0)(8,3,1,0)(1,3,8)$	$\mathcal{L}_{5,5},\ \mathcal{L}_{6,3}$
$(8,3,0)(8,3,1,0)(1,4,8)$	$\mathcal{L}_{6,2}$
$(8,3,0)(8,3,1,0)(1,5,8)$	$\mathcal{L}_{7,3}$
$(8,3,0)(8,3,1,0)(2,6,8)$	$\mathcal{L}_{6,24},\ \mathcal{L}_{7,23},\ \mathcal{L}_{7,24},\ \mathcal{L}_{7,31} \cong \mathcal{L}_{7,33} \cong \mathcal{L}_{7,39},\ \mathcal{L}_{8,11},$ $\mathcal{L}_{8,17} \cong \mathcal{L}_{8,18} \cong \mathcal{L}_{8,27}$
$(8,3,0)(8,3,2,0)(2,6,8)$	$\mathcal{L}_{5,14},\ \mathcal{L}_{6,18},\ \mathcal{L}_{6,20},\ \mathcal{L}_{7,18},\ \mathcal{L}_{7,21}$
$(8,4,0)(8,4,0)(4,8)$	$\mathcal{L}_{8,33} \cong \mathcal{L}_{8,36}$
$(8,4,0)(8,4,1,0)(2,5,8)$	$\mathcal{L}_{6,10},\ \mathcal{L}_{7,6}$
$(8,4,0)(8,4,1,0)(3,6,8)$	$\mathcal{L}_{7,13},\ \mathcal{L}_{7,25} \cong \mathcal{L}_{7,38} \cong \mathcal{L}_{7,40},\ \mathcal{L}_{8,4},$ $\mathcal{L}_{8,12} \cong \mathcal{L}_{8,25} \cong \mathcal{L}_{8,30}$
$(8,4,0)(8,4,2,0)(2,4,8)$	$\mathcal{L}_{4,4},\ \mathcal{L}_{5,2},\ \mathcal{L}_{5,15},\ \mathcal{L}_{5,16},\ \mathcal{L}_{6,21},\ \mathcal{L}_{6,22},\ \mathcal{L}_{6,23},$ $\mathcal{L}_{6,26} \cong \mathcal{L}_{6,31},\ \mathcal{L}_{7,22},\ \mathcal{L}_{7,28} \cong \mathcal{L}_{7,34} \cong \mathcal{L}_{7,35}$
$(8,4,0)(8,4,2,0)(2,5,8)$	$\mathcal{L}_{4,3}(a),\ \mathcal{L}_{5,7}(a),\ \mathcal{L}_{5,9},\ \mathcal{L}_{5,12},\ \mathcal{L}_{6,6},\ \mathcal{L}_{6,7},\ \mathcal{L}_{6,12}$ $\mathcal{L}_{6,14},\ \mathcal{L}_{6,17},\ \mathcal{L}_{6,25}(a),\ \mathcal{L}_{6,30}(a),\ \mathcal{L}_{6,33}(a),\ \mathcal{L}_{7,15},$ $\mathcal{L}_{7,26} \cong \mathcal{L}_{7,30} \cong \mathcal{L}_{7,37}$
$(8,4,0)(8,4,2,0)(3,6,8)$	$\mathcal{L}_{6,16},\ \mathcal{L}_{6,19},\ \mathcal{L}_{7,10},\ \mathcal{L}_{7,11},\ \mathcal{L}_{7,20}$
$(8,4,0)(8,4,3,1,0)(1,3,6,8)$	$\mathcal{L}_{4,1}(a),\ \mathcal{L}_{5,4}$
$(8,4,0)(8,4,3,1,0)(1,4,6,8)$	$\mathcal{L}_{5,3}$
$(8,4,0)(8,4,3,1,0)(1,5,6,8)$	$\mathcal{L}_{6,4}$
$(8,5,0)(8,5,2,0)(2,5,8)$	$\mathcal{L}_{3,5}(a,b),\ \mathcal{L}_{4,2}(a),\ \mathcal{L}_{5,8},\ \mathcal{L}_{5,10},\ \mathcal{L}_{5,13}(a),\ \mathcal{L}_{6,11}$
$(8,5,0)(8,5,2,0)(3,5,8)$	$\mathcal{L}_{5,11},\ \mathcal{L}_{6,8},\ \mathcal{L}_{6,15},\ \mathcal{L}_{7,14},\ \mathcal{L}_{7,16}$
$(8,5,0)(8,5,2,0)(4,6,8)$	$\mathcal{L}_{7,12}$
$(8,5,0)(8,5,3,0)(3,5,8)$	$\mathcal{L}_{6,5}$
$(8,5,1,0)(8,5,3,1,0)(1,3,5,8)$	$\mathcal{L}_{5,6}$
$(8,5,1,0)(8,5,4,2,1,0)(1,2,4,6,8)$	$\mathcal{L}_{3,2}$
$(8,6,2,0)(8,6,5,3,2,0)(2,3,5,6,8)$	$\mathcal{L}_{3,3}$

Závěr

V předložené práci jsme částečně identifikovali výsledky gradovaných kontrakcí prosté Lieovy algebry $sl(3,\mathbb{C})$ pro případ Pauliho gradace. Získané algebry jsme roztřídili do tříd podle dimenzí členů derivované, dolní a horní centrální posloupnosti. V jednotlivých třídách jsme explicitně nalezli některé izomorfismy. Pro řešitelné Lieovy algebry jsme určili jejich nilradikály. K tomu jsme vytvořili program v systému Maple 8. Minimální počet všech získaných neizomorfních Lieových algeber dimenze 8 (tj. počet získaných tříd) je 69 a minimální počet získaných neizomorfních nerozložitelných algeber dimenze 8 je 35. K dokončení identifikace tedy zbývá dořešit otázku izomorfismů v jednotlivých třídách. K tomu mohou napomoci tzv. Casimirovy operátory, jež jsou invarianty Lieových algeber. Dále je zde otázka určení mezí parametrů u parametrických algeber tak, aby tyto nebyly pro různé hodnoty parametrů izomorfní. Po dokončení klasifikace zbývá srovnat získané algebry s podalgebrami $sl(3,\mathbb{C})$, popřípadě identifikovat výsledky s již známými algebrami.

Dodatek 1

Neekvivalentní řešení systému kontrakčních rovnic pro Pauliho gradaci prosté Lieovy algebry $sl(3,\mathbb{C})$. Řešení jsou podle rozdělena počtu nul (mezi 24 nezávislými kontrakčními parametry) do množin $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{12}$. Řešení označujeme $\varepsilon_{i,j}$, kde index $i = 0, 1, \ldots, 12$ čísluje množinu a index j udává pořadí matice v táto množině.

Triviální řešení - množina $\varepsilon_0 = \{\varepsilon_{0,1}\}$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&0&0&1&1&1&1 \\ 1&1&0&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&0&0&1&1 \\ 1&1&1&1&0&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

Řešení s 9 nulami - množina $\varepsilon_1 = \{\varepsilon_{1,1}\}$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&1&0&1 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&0&1 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

Řešení s 12 nulami - množina $\varepsilon_2 = \{\varepsilon_{2,1}, \varepsilon_{2,2}\}$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&1&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&1&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&a&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&b&b&1 \\ a&1&0&0&a&1&b&a \\ 0&0&1&a&0&0&0&0 \\ 0&0&b&1&0&0&0&0 \\ 0&0&b&b&0&0&0&0 \\ 0&0&1&a&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Řešení s 15 nulami - množina $\varepsilon_3 = \{\varepsilon_{3,1}, \dots , \varepsilon_{3,7}\}$

$$
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0&0&a&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ a&1&0&0&b&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&b&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&a&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&1&1&0\\ a&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&a&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ a&1&0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
$$

Řešení s 16 nulami - množina $\varepsilon_4 = \{\varepsilon_{4,1}, \dots , \varepsilon_{4,7}\}$

$$
\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&a\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&a&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&a&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ a&1&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&a&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ a&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&1\\ 1&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}
$$

Řešení s 17 nulami - množina $\varepsilon_5 = \{\varepsilon_{5,1}, \dots , \varepsilon_{5,17}\}$

$$
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&a&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ a&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&a&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ a&1&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}
$$

Řešení s 18 nulami - množina $\varepsilon_6 = \{\varepsilon_{6,1}, \dots, \varepsilon_{6,35}\}$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&a&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&1&0\\a&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&1&1\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&a&0&0&0&0&0\\1&a&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&a&0&0&0&0&0\\1&a&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&a&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&1&0\\a&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&1\\1&0&0&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Řešení s 19 nulami - množina $\varepsilon_7 = \{\varepsilon_{7,1}, \dots, \varepsilon_{7,42}\}$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

Řešení s 20 nulami - množina $\varepsilon_8 = \{\varepsilon_{8,1}, \dots, \varepsilon_{8,39}\}$

$$
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Řešení s 21 nulami - množina $\varepsilon_9 = \{\varepsilon_{9,1}, \dots, \varepsilon_{9,20}\}$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Řešení s 22 nulami - množina $\varepsilon_{10} = \{\varepsilon_{10,1}, \ldots, \varepsilon_{10,7}\}$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Řešení s 23 nulami - množina $\varepsilon_{11} = \{\varepsilon_{11,1}\}$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Triviální řešení - množina $\varepsilon_{12} = \{\varepsilon_{12,1}\}$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Dodatek 2

Komutační relace získaných komplexních Lieových algeber. Pořadí algeber je stejné jako v tabulkách 2 a 3, přičemž z izomorfních algeber uvádíme vždy jen jednu. Ve třetím sloupci značí N nilpotentní algebru a R řešitelnou algebru.

Algeba	Komutační relace	Typ
	Lieovy algebry dimenze 3	
$\mathcal{L}^1_{8,10}$	$[e_1, e_2] = e_3$	N
	Lieovy algebry dimenze 4	
$\mathcal{L}^2_{7,36}$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4$	N
$\mathcal{L}^1_{6,32}$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_2$	R
	Lieovy algebry dimenze 5	
$\mathcal{L}_{10,7}$	$[e_2, e_4] = e_1,\ [e_3, e_5] = e_1$	N
$\mathcal{L}^1_{9,15}$	$[e_3, e_4] = e_1,\ [e_3, e_5] = e_2$	N
$\mathcal{L}_{9,7}$	$[e_1, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_1,\ [e_3, e_5] = e_2$	N
$\mathcal{L}^2_{8,10}$	$[e_1, e_4] = e_2,\ [e_1, e_5] = e_3,\ [e_4, e_5] = e_1$	N
$\mathcal{L}_{6,34}$	$[e_1, e_4] = e_2,\ [e_1, e_5] = e_3,\ [e_2, e_4] = e_3,\ [e_2, e_5] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_1,$ $[e_3, e_5] = e_2$	R
	Lieovy algebry dimenze 6	
$\mathcal{L}_{9,19}$	$[e_3, e_4] = e_1,\ [e_3, e_6] = e_2,\ [e_4, e_5] = e_2$	N
$\mathcal{L}_{9,16}$	$[e_4, e_5] = e_1,\ [e_4, e_6] = e_2,\ [e_5, e_6] = e_3$	N
$\mathcal{L}_{8,1}$	$[e_2, e_6] = e_1,\ [e_3, e_4] = -e_1,\ [e_4, e_5] = e_2,\ [e_5, e_6] = e_3$	N
$\mathcal{L}_{8,2}$	$[e_1, e_5] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_2,\ [e_4, e_5] = e_1,\ [e_4, e_6] = e_3$	N
$\mathcal{L}_{9,1}$	$[e_1, e_5] = e_3,\ [e_4, e_5] = e_1,\ [e_4, e_6] = e_2$	N
$\mathcal{L}_{9,3}$	$[e_1, e_6] = e_3,\ [e_4, e_6] = e_1,\ [e_5, e_6] = e_2$	N
$\mathcal{L}_{8,8}$	$[e_1, e_4] = e_3,\ [e_1, e_5] = e_2,\ [e_4, e_5] = e_1,\ [e_4, e_6] = e_2$	N
$\mathcal{L}_{7,2}$	$[e_2, e_6] = e_1,\ [e_3, e_5] = e_2,\ [e_3, e_6] = e_4,\ [e_4, e_5] = e_1,\ [e_5, e_6] = e_3$	N
$\mathcal{L}_{8,16}$	$[e_1, e_6] = e_3,\ [e_3, e_6] = e_4,\ [e_4, e_6] = e_1,\ [e_5, e_6] = e_2$	R

Algebra	Komutační relace	Typ
	Lieovy algebry dimenze 7	
$\mathcal{L}_{9,20}$	$[e_2,e_4]=e_1,\ [e_3,e_6]=e_1,\ [e_5,e_7]=e_1$	N
$\mathcal{L}_{8,39}$	$[e_3,e_5]=e_2,\ [e_3,e_7]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_1,\ [e_6,e_7]=e_2$	N
$\mathcal{L}_{9,11}$	$[e_3,e_5]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_2,\ [e_4,e_7]=e_1$	N
$\mathcal{L}_{9,12}$	$[e_4,e_6]=e_1,\ [e_4,e_7]=e_2,\ [e_5,e_7]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{7,1}$	$[e_2,e_7]=e_1,\ [e_3,e_4]=-e_1,\ [e_4,e_5]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_3,\ [e_5,e_7]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{7,7}$	$[e_1,e_6]=e_3,\ [e_2,e_4]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_1,\ [e_4,e_7]=e_2,\ [e_5,e_7]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{8,5}$	$[e_1,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_1,\ [e_4,e_7]=e_2,\ [e_5,e_7]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{8,14}$	$[e_1,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_1,\ [e_4,e_7]=e_2,\ [e_5,e_6]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{8,19}$	$[e_1,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_1,\ [e_4,e_7]=e_2,\ [e_5,e_7]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{7,17}$	$[e_1,e_4]=e_3,\ [e_1,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_1,\ [e_4,e_7]=e_2,\ [e_5,e_6]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{7,19}$	$[e_1,e_4]=e_3,\ [e_1,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_2,\ [e_6,e_7]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{8,9}$	$[e_1,e_4]=e_2,\ [e_1,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_1,\ [e_5,e_7]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{6,13}$	$[e_1,e_6]=e_3,\ [e_2,e_5]=e_3,\ [e_4,e_7]=e_3,\ [e_5,e_6]=e_1,\ [e_5,e_7]=e_2,$ $[e_6,e_7]=e_4$	N
$\mathcal{L}_{7,8}$	$[e_1,e_6]=e_3,\ [e_2,e_5]=e_3,\ [e_5,e_6]=e_1,\ [e_5,e_7]=e_2,\ [e_6,e_7]=e_4$	N
$\mathcal{L}_{8,6}$	$[e_1,e_6]=e_3,\ [e_5,e_6]=e_1,\ [e_5,e_7]=e_2,\ [e_6,e_7]=e_4$	N
$\mathcal{L}_{6,9}$	$[e_1,e_5]=e_3,\ [e_1,e_6]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_2,\ [e_4,e_7]=e_3,\ [e_5,e_6]=e_1,$ $[e_5,e_7]=e_4$	N
$\mathcal{L}_{7,4}$	$[e_2,e_6]=e_3,\ [e_2,e_7]=e_1,\ [e_4,e_5]=-e_1,\ [e_5,e_6]=e_2,\ [e_6,e_7]=e_4$	N
$\mathcal{L}_{7,5}$	$[e_1,e_5]=e_2,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_3,e_5]=e_4,\ [e_5,e_6]=e_1,\ [e_5,e_7]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{7,9}$	$[e_1,e_6]=e_3,\ [e_2,e_5]=e_3,\ [e_2,e_7]=e_4,\ [e_5,e_6]=e_1,\ [e_5,e_7]=e_2$	N
$\mathcal{L}_{8,7}$	$[e_1,e_6]=e_3,\ [e_2,e_7]=e_4,\ [e_5,e_6]=e_1,\ [e_5,e_7]=e_2$	N
$\mathcal{L}_{8,13}$	$[e_1,e_7]=e_3,\ [e_2,e_7]=e_4,\ [e_5,e_7]=e_1,\ [e_6,e_7]=e_2$	N
$\mathcal{L}_{8,3}$	$[e_1,e_5]=e_2,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_5,e_6]=e_1,\ [e_5,e_7]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{6,1}$	$[e_1,e_7]=e_3,\ [e_2,e_5]=e_1,\ [e_2,e_7]=e_4,\ [e_4,e_5]=e_3,\ [e_5,e_6]=e_4,$ $[e_5,e_7]=e_2$	N
$\mathcal{L}_{5,1}$	$[e_1,e_2]=-e_4,\ [e_1,e_7]=e_5,\ [e_2,e_6]=e_1,\ [e_2,e_7]=e_3,\ [e_3,e_6]=e_5,$ $[e_5,e_6]=e_4,\ [e_6,e_7]=e_2$	N
$\mathcal{L}_{5,17}$	$[e_2,e_6]=e_3,\ [e_2,e_7]=e_4,\ [e_3,e_6]=e_4,\ [e_3,e_7]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_2$ $[e_4,e_7]=e_3,\ [e_5,e_6]=e_1$	R
$\mathcal{L}_{7,29}$	$[e_1,e_7]=e_3,\ [e_2,e_7]=e_5,\ [e_4,e_7]=e_2,\ [e_5,e_7]=e_4,\ [e_6,e_7]=e_1$	R
$\mathcal{L}_{6,29}(a)$	$[e_1,e_7]=e_3,\ [e_2,e_7]=ae_5,\ [e_3,e_7]=e_6,\ [e_4,e_7]=e_2,\ [e_5,e_7]=e_4,$ $[e_6,e_7]=e_1,\quad a\neq 0$	R
$\mathcal{L}_{3,1}$	$[e_1,e_2]=-e_5,\ [e_1,e_3]=-e_6,\ [e_1,e_7]=e_3,\ [e_2,e_3]=e_4,\ [e_2,e_7]=e_1,$ $[e_3,e_7]=e_2,\ [e_4,e_7]=-e_6,\ [e_5,e_7]=e_4,\ [e_6,e_7]=e_5$	R

Algebra	Komutační relace	Typ
	Lieovy algebry dimenze 8	
$\mathcal{L}_{6,35}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_8]=e_6,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_7]=e_5,\ [e_3,e_7]=e_6,$ $[e_4,e_8]=e_5$	N
$\mathcal{L}_{7,42}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_8]=e_6,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_7]=e_5,\ [e_3,e_7]=e_6$	N
$\mathcal{L}_{8,32}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_2,e_7]=e_5$	N
$\mathcal{L}_{8,38}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_8]=e_6,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_7]=e_6$	N
$\mathcal{L}_{7,41}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{8,31}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_2,e_7]=e_5$	N
$\mathcal{L}_{8,35}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{5,5}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_1,e_7]=e_3,\ [e_2,e_7]=e_5,\ [e_2,e_8]=e_4,$ $[e_4,e_8]=e_5,\ [e_6,e_8]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{6,3}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_1,e_7]=e_3,\ [e_2,e_8]=e_4,\ [e_4,e_8]=e_5,$ $[e_6,e_8]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{6,2}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_1,e_7]=e_3,\ [e_2,e_7]=e_5,\ [e_4,e_8]=e_5,$ $[e_6,e_8]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{7,3}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_7]=e_5,\ [e_4,e_8]=e_5,\ [e_6,e_8]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{6,24}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{7,23}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{7,24}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{7,31}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{8,11}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{8,17}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{5,14}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,$ $[e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{6,18}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,$ $[e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{6,20}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{7,18}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{7,21}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{8,33}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{6,10}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,$ $[e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{7,6}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{7,13}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{7,25}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{8,4}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{8,12}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{4,4}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,$ $[e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N

Algebra	Komutační relace	Typ
$\mathcal{L}_{5,2}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_1,e_7]=e_3,\ [e_3,e_6]=e_2,\ [e_4,e_7]=e_2,$ $[e_4,e_8]=e_5,\ [e_6,e_8]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{5,15}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,$ $[e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{5,16}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_6]=e_8,$ $[e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{6,21}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_6]=e_8,$ $[e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{6,22}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{6,23}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{6,26}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{7,22}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{7,28}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{4,3}(a)$	$[e_1,e_3]=ae_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,$ $[e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7,\quad a\neq 0$	N
$\mathcal{L}_{5,7}(a)$	$[e_1,e_3]=ae_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,$ $[e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,\quad a\neq 0$	N
$\mathcal{L}_{5,9}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,$ $[e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{5,12}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,$ $[e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{6,6}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,$ $[e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{6,7}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_6]=e_8,$ $[e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{6,12}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{6,14}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{6,17}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{6,25}(a)$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=ae_8,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_3,e_7]=e_6,\quad a\neq 0$	N
$\mathcal{L}_{6,30}(a)$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_2,e_3]=ae_7,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_6]=e_2,$ $[e_4,e_6]=e_7,\quad a\neq 0$	N
$\mathcal{L}_{6,33}(a)$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=ae_8,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_6]=e_2,\ [e_3,e_7]=e_6$ $[e_4,e_7]=e_2,\quad a\neq 0$	N

Algebra	Komutační relace	Typ
$\mathcal{L}_{7,15}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{7,26}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_7]=e_6$	N
$\mathcal{L}_{6,16}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_6]=e_8,$ $[e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{6,19}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,$ $[e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{7,10}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{7,11}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{7,20}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8$	N
$\mathcal{L}_{4,1}(a)$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_1,e_7]=e_3,\ [e_1,e_8]=e_6,\ [e_2,e_7]=e_5,$ $[e_2,e_8]=ae_4,\ [e_4,e_8]=e_5,\ [e_6,e_8]=e_3,\quad a\neq 0$	N
$\mathcal{L}_{5,4}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_1,e_7]=e_3,\ [e_1,e_8]=e_6,\ [e_2,e_8]=e_4,$ $[e_4,e_8]=e_5,\ [e_6,e_8]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{5,3}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_1,e_7]=e_3,\ [e_1,e_8]=e_6,\ [e_2,e_7]=e_5,$ $[e_4,e_8]=e_5,\ [e_6,e_8]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{6,4}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_1,e_8]=e_6,\ [e_2,e_7]=e_5,\ [e_4,e_8]=e_5,$ $[e_6,e_8]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{3,5}(a,b)$	$[e_1,e_3]=ae_5,\ [e_1,e_4]=-e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,$ $[e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=be_8,\ [e_3,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_7,\quad a\neq 0,\ b\neq 0$	N
$\mathcal{L}_{4,2}(a)$	$[e_1,e_3]=ae_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,$ $[e_2,e_6]=e_8,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_6]=e_2,\quad a\neq 0$	N
$\mathcal{L}_{5,8}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,$ $[e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_6]=e_2$	N
$\mathcal{L}_{5,10}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_6]=e_8,$ $[e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_6]=e_2$	N
$\mathcal{L}_{5,13}(a)$	$[e_1,e_3]=ae_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_3,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_7,\quad a\neq 0$	N
$\mathcal{L}_{6,11}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_3,e_6]=e_2$	N
$\mathcal{L}_{5,11}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_3,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{6,8}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_3,e_6]=e_2$	N
$\mathcal{L}_{6,15}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_6]=e_2,$ $[e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{7,14}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_6]=e_2$	N
$\mathcal{L}_{7,16}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_7$	N
$\mathcal{L}_{7,12}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_6]=e_2$	N
$\mathcal{L}_{6,5}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_3,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_7,\ [e_4,e_8]=e_5,$ $[e_6,e_8]=e_3$	N

Algebra	Komutační relace	Typ
$\mathcal{L}_{5,6}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_2,e_7]=e_5,\ [e_4,e_6]=e_7,$ $[e_4,e_8]=e_5,\ [e_6,e_8]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{3,2}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_1,e_7]=-e_3,\ [e_2,e_6]=e_8,$ $[e_2,e_7]=e_5,\ [e_4,e_6]=e_7,\ [e_4,e_8]=e_5,\ [e_6,e_8]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{3,3}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_8,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_1,e_7]=e_3,\ [e_3,e_6]=e_2,$ $[e_4,e_6]=-e_7,\ [e_4,e_7]=e_2,\ [e_4,e_8]=e_5,\ [e_6,e_8]=e_3$	N
$\mathcal{L}_{4,7}$	$[e_1,e_3]=-e_5,\ [e_1,e_4]=-e_8,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_8]=e_1,$ $[e_4,e_5]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_7,\ [e_4,e_8]=e_5$	R
$\mathcal{L}_{7,32}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_8]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_7$	R
$\mathcal{L}_{4,5}$	$[e_1,e_3]=-e_5,\ [e_1,e_4]=-e_8,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_3,e_8]=e_1,\ [e_4,e_5]=e_1,\ [e_4,e_8]=e_5$	R
$\mathcal{L}_{7,27}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_8]=e_1$	R
$\mathcal{L}_{3,6}(a)$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=ae_8,\ [e_2,e_3]=-e_7,\ [e_2,e_4]=-e_6,\ [e_3,e_5]=e_8,$ $[e_3,e_6]=e_2,\ [e_3,e_7]=e_6,\ [e_4,e_6]=e_7,\ [e_4,e_7]=e_2,\quad a\neq 0$	R
$\mathcal{L}_{4,6}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_2,e_3]=-e_7,\ [e_2,e_4]=-e_6,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_6]=e_2,$ $[e_3,e_7]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_7,\ [e_4,e_7]=e_2$	R
$\mathcal{L}_{6,28}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_8]=e_1,$ $[e_4,e_6]=e_7$	R
$\mathcal{L}_{6,27}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_7]=e_6,$ $[e_3,e_8]=e_1$	R
$\mathcal{L}_{2,2}(a,b)$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=a(\omega+1)e_8,\ [e_2,e_3]=(\omega+1)e_7,$ $[e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=-e_8,\ [e_3,e_6]=-b(\omega+1)e_2,$ $[e_3,e_7]=-b(\omega+1)e_6,\ [e_3,e_8]=-e_1,\ [e_4,e_5]=-a(\omega+1)e_5,$ $[e_4,e_6]=-e_7,\ [e_4,e_7]=-be_2,\ [e_4,e_8]=-a(\omega+1)e_3,\quad a\neq 0,\ b\neq 0$	R
$\mathcal{L}_{3,7}(a)$	$[e_1,e_3]=ae_5,\ [e_2,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_5]=e_8,\ [e_3,e_6]=e_2,$ $[e_3,e_7]=-e_6,\ [e_3,e_8]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_7,\ [e_4,e_7]=e_2,\quad a\neq 0$	R
$\mathcal{L}_{1,1}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=(\omega+1)e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=(\omega+1)e_4,$ $[e_1,e_7]=e_3,\ [e_1,e_8]=(\omega+1)e_6,\ [e_2,e_3]=(\omega+1)e_7,\ [e_2,e_4]=e_6,$ $[e_2,e_5]=(\omega+1)e_3,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_2,e_7]=(\omega+1)e_5,\ [e_2,e_8]=e_4,$ $[e_4,e_6]=-e_7,\ [e_4,e_8]=-(\omega+1)e_5,\ [e_6,e_8]=-\omega e_3$	R
$\mathcal{L}_{3,4}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_4,\ [e_2,e_6]=e_8,\ [e_2,e_7]=e_5,\ [e_3,e_6]=e_2,$ $[e_4,e_6]=e_7,\ [e_4,e_8]=e_5,\ [e_6,e_7]=-e_1,\ [e_6,e_8]=e_3$	R
$\mathcal{L}_{2,1}$	$[e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=(\omega+1)e_8,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=(\omega+1)e_4,$ $[e_1,e_7]=e_3,\ [e_1,e_8]=(\omega+1)e_6,\ [e_3,e_6]=-(\omega+1)e_2,\ [e_4,e_6]=-e_7,$ $[e_4,e_7]=-e_2,\ [e_4,e_8]=-(\omega+1)e_5,\ [e_5,e_8]=\omega e_2,\ [e_6,e_8]=-\omega e_3$	R

Dodatek 3

Program pro identifikaci komplexnich Lieovych algeber

```
> restart;
> with(linalg):
> with(linalg,minpoly):
> rpos:=[]; npos:=[]; hpos:=[]; tisk:=0;
```

rpos - derivovana serie, npos - dolni centralni serie, hpos - horni centralni serie

Procedury

Obecne

```
> par := proc() local M,i,j,P,n,m;
> M:=args[1]; P:={}; if type(M,matrix) then n:=rowdim(M);
> m:=coldim(M); for i from 1 to n do for j from 1 to m do if
> M[i,j]<>0 and M[i,j]<>1 then P:={op(P),M[i,j]}; fi; od; od; else
> if type(M,vector) then n:=vectdim(M); for i from 1 to n do if
> M[i]<>1 and M[i]<>0 then
> P:={op(P),M[i]} fi; od; fi; fi; P; end:
```

> najde parametry vstupujici matice/vectoru, POZOR za parametr povazuje cokoliv <> 0,1

```
> npar := proc() local L,i,K,k; L:=args[1];
> K:={};k:={}; for i from 1 to nops(L) do if par(L[i])<>{}
> then K:={op(K),op(par(L[i]))};
> k:={op(k),i}; fi; od; if nargs<2 then print(k); fi; K; end:
```

> najde matice/vectory s parametry a vytiskne jejich poradi ve vstupujicim seznamu a vrati mnozinu nalezenych parametry

```
> vyrad := proc() local V,S,W,i;
> V:=args[1]; S:=args[2]; W:=[]; for i from 1 to nops(V) do if not
> member(i,S) then W:=[op(W),V[i]]; fi; od;
> W; end:
```

> vyradi ze seznamy prvky odpovidajici indexum ve vstupujici mnozine

```
> krat := proc() local V,M,N,i,j,n;
> M:=args[1]; N:=args[2]; n:=rowdim(M);V:=matrix(n,n,[]); for i from
> 1 to n do for j from 1 to n
> do V[i,j]:=M[i,j]*N[i,j] od; od; evalm(V); end:
```

> nasobi matice po slozkach

```
> zarovnej := proc() local M,j,k,V,a;
> M:=args[1]; V:={}; for j from 1 to nops(M) do a:=0; for k from
> j+1 to nops(M) do if type(convert(evalm(M[j]-M[k]), matrix),
> 'matrix'(0)) then a:=1; fi;
> od; if a=0 then V:={op(V),M[j]};fi; od; V; end:
```

> najde ve vstupujici mnozine ci listu vektoru/matic opakujici se prvky a vyhazi je , vraci mnozinu bez opakujicich se prvku

```
> faktorpol := proc() local
> p,t,s,r,i,j,k,kk,ppp,rr,pp,rrr,R; p:=args[1]; t:=args[2];
> s:=[solve(p=0,t)]; r:=[]; rr:=[]; for i from 1 to nops(s) do if
> type(s[i],RootOf) then rr:=[op(rr),s[i]]; else r:=[op(r),t-s[i]];
> fi; od; if nops(rr)>0 then if nops(r)>0 then pp:=1; for i from 1
> to nops(r) do pp:=pp*r[i]; od; pp:=quo(p,pp,t,'k'); if k=0 then
> r:=[op(r),pp]; else print(Error_fp1,k); fi; else if nops(rr)>1
> then R:=[]; for i from 1 to nops(rr) do
> R:=[op(R),subs(_Z=t,op(rr[i]))]; od; pp:=1; for i from 1 to
> nops(R) do pp:=pp*R[i]; od; print(pp); ppp:=quo(p,pp,t,'kk'); if
> kk=0 and degree(ppp,t)=0 and simplify(p-ppp*pp)=0 then r:=R; else
> print(Error_faktorpol_nerozozil,p); fi; else
> print(Error_faktorpol_nerozozil,p); fi; fi; fi; if nargs>2 then
> R:=[]; rr:=r; for i from 1 to nops(r) do k:=0; rrr:=[]; for j from
> 1 to nops(rr) do if simplify(evalm(r[i]-rr[j])) = 0 then k:=k+1;
> else rrr:=[op(rrr),rr[j]]; fi; od; if k>0 then R:=[op(R),r[i]^k];
> fi;
> rr:=rrr; od; R; else r; fi; end:
```

> rozlozi polynom na soucin polynomu, poradi si snad se vsema polynomama p pro nez solve(p=0) dava alespon dva vysledky.

```
> faktorpol2 := proc() local
> p,t,s,r,i,rr,k; p:=args[1]; t:=args[2]; r:=[];rr:=[];  if
> type(p,polynom) then s:=factors(p)[2]; for i from 1 to nops(s) do
> r:=[op(r),s[i][1]^s[i][2]]; od; for i from 1 to nops(r) do if
> degree(r[i],t)>0 then rr:=[op(rr),r[i]]; fi; od; if nops(r)=
> nops(rr) and nops(rr)>1 then r; else if nops(rr)>1 then r:=rr;for
> i from 1 to nops(r) do k:=coeff(r[i],t,degree(r[i],t)); if k<>1
> then r[i]:=r[i]/k; fi; od;  else r:=faktorpol(p,t,1); fi; fi; else
> r:=faktorpol(p,t,1); fi; r; end:
```

> rozlozi polynom na soucin polynomu, nejdriv zkusi udelat factors a kdyz to nejde tak udela rozklad sam

```
> normuj := proc() local L,i,j,k,A,n;
> L:=args[1]; if nops(L)>0 then if type(L[1], matrix) then
> n:=rowdim(L[1]); for i from 1 to nops(L) do A:=0; for j from 1 to
> n do for k from 1 to n do if L[i][j,k]<>0 then A:=L[i][j,k];
> break; fi; od; if A<>0 then L[i]:=evalm(1/A*L[i]); break; fi; od;
> od; else if type(L[1], vector) then n:=vectdim(L[1]); for i from 1
> to nops(L) do A:=0; for j from 1 to n do if not L[i][j]=0 then
> A:=L[i][j]; L[i]:=evalm(1/A*L[i]); break; fi; od; od; fi; fi;
> fi;L; end:
```

> na vstupu ocekava list nebo mn matic, ktere pak postupne vydeli jejich prvnim nenulovym prvkem, POZOR pokud vstupuje parametricka matice pak musi byt tento parametr nenulovy

```
> rmati := proc() local L,V,i,j,k,M,B,n,m;
> L:=[op(args[1])]; M:=args[2]; V:=[]; if type(M,matrix) then
> n:=rowdim(M); m:=coldim(M); for i from 1 to nops(L) do
> B:=matrix(n,m); for j from 1 to n do for k from 1 to m do
> B[j,k]:=subs(L[i],M[j,k]); od; od; V:=[op(V),evalm(B)]; od; else
> if type(M,vector) then n:=vectdim(M); for i from 1 to nops(L) do
> B:=vector(n); for j from 1 to n do B[j]:=subs(L[i],M[j]); od;
> V:=[op(V),evalm(B)]; od; fi; fi; V; end:
```

> Na vstupu ocekava list nebo mnozinu mnozin se substitucemi a n,n-matici (nebo n-vector) do ktere ma tyto substituce provest, vraci list matic vzniklych temito subst.

Linearni Algebra

```
> linez := proc() local
> L,s,S,x,i,j,n,m,v,R,V; L:=args[1]; s:={}; S:={}; m:=nops(L);
> x:=vector(m); if m>0 then if type(L[1], vector) then
> n:=vectdim(L[1]); v:=vector(n,0); for i from 1 to m do
> v:=evalm(v+x[i]*L[i]); s:={op(s),x[i]}; od; for i from 1 to n do
> S:={op(S), v[i]=0}; od; else if type(L[1], matrix) then
> n:=rowdim(L[1]); v:=matrix(n,n,0); for i from 1 to m do
> v:=evalm(v+x[i]*L[i]); s:={op(s),x[i]}; od; for i from 1 to n do
> for j from 1 to n do S:={op(S), v[i,j]=0}; od; od; fi; fi;
> R:=[solve(S,s)]; V:=rmati(R,x); S:=npar(V,1) intersect s; V:=[];
> for i from 1 to m do if not member(x[i], S) then V:=[op(V),L[i]];
> fi; od; V;
> else [] fi; end:
```

> Vyhazi ze seznamu lz vektory, na vstupu ocekava list z nehoz sestavi lin kombinaci a porovna s nulou. Pak zjisti volne parametry reseni - nezavisle koeficienty linearni kombinace a vyhaze ze vstupujiciho souboru jim odpovidajici vectory - Lze uzivat ke sjednocovani podprostoru

```
> lkv := proc() local M,L,i,j,x,B,s,S,R,n;
> M:=args[1];n:=vectdim(M); L:=args[2]; S:={}; s:={};
> B:=vector(n,0); R:={}; x:=vector(nops(L)); for i from 1 to
> nops(L) do  B:=evalm(B+x[i]*L[i]); s:={op(s),x[i]}; od; for i
> from 1 to n do S:={op(S),B[i]=M[i]}; od; R:={solve(S,s)}; if
> nargs > 2 then rmati(R,x); else R;
> fi;end:
```

> zjisti zda je vektor linearni kombinaci vekrotu ze seznamu a vrati koef teto kombinace, pokud je na vstupu nenul vektor a prazdna mnozina, tak nepostavi mn. neznamych a a do solve vstupuji jen podminky slozky tohoto vectoru = 0 a solve nevraci nic nebot reseni neexistuje , ale pokud je na vstupu nulovy vektor a {} tak solve vrati {}, lkm tedy vraci bud mn. reseni nebo {} nebo {{}} POKUD je pridan nejaky parametr navic, tak to vraci list jez vyjadruje kombinaci v dane bazi

```
> lkm := proc() local M,L,i,j,x,B,s,S,R,n;
> M:=args[1]; n:=rowdim(M); L:=args[2]; S:={}; s:={};
> B:=matrix(n,n,0); R:={}; x:=vector(nops(L)); for i from 1 to
> nops(L) do  B:=evalm(B+x[i]*L[i]); s:={op(s),x[i]}; od; for i
> from 1 to n do for j from 1 to n do
> S:={op(S),B[i,j]=M[i,j]}; od; od; R:={solve(S,s)}; end:
```

> zjisti zda je matice linearni kombinaci matic ze seznamu a vrati koef teto kombinace podobne jako lkv

```
> linko := proc() local M,L; M:=args[1];
> L:=args[2]; if type(M, vector) then lkv(M,L) else if type(M,
> matrix) then lkm(M,L) else print(Chyba);
> fi; fi; end:
```

> Pouze vybere a aplikuje spravnou proceduru lkv nebo lkm

```
> prunik := proc() local
> P,Q,W,x,s,S,i,j,p,q,w,v,n,R,V,pru; P:=args[1]; Q:=args[2];
> p:=nops(P); q:=nops(Q); W:=[op(P),op(Q)]; w:=nops(W); s:={};
> S:={}; x:=vector(w); if nops(W)>0 then if type(W[1], vector)
> then n:=vectdim(W[1]); v:=vector(n,0); for i from 1 to w do
> s:={op(s),x[i]}; v:=evalm(v+x[i]*W[i]); od; for i from 1 to n do
> S:={op(S), v[i]=0}; od; else if type(W[1], matrix) then
> n:=rowdim(W[1]); v:=matrix(n,n,0); for i from 1 to w do
> s:={op(s),x[i]}; v:=evalm(v+x[i]*W[i]); od; for i from 1 to n do
> for j from 1 to n do S:={op(S), v[i,j]=0}; od; od; fi; fi;
> R:=[solve(S,s)]; V:=rmati(R,x); S:=s intersect npar(V,1);
> V:=vratbazi(V,S); pru:=[]; if type(W[1],vector) then
> v:=vector(n,0); for i from 1 to nops(V) do for j from p+1 to w do
> v:=evalm(v+V[i][j]*W[j]); od; pru:=[op(pru),evalm(v)]; od; else if
> type(W[1], matrix) then v:=matrix(n,n0); for i from 1 to nops(V)
> do for j from p+1 to w do v:=evalm(v+V[i][j]*W[j]); od;
> pru:=[op(pru),evalm(v)]; od; fi; fi;  linez(pru); else [] fi; end:
```

> Vraci prunik (ve standardni baziv resp. ve stejne bazi jako jsou vektory na vstupu) dvuo podprostoru zadanych ve standardni bazi, na vstupu ocekava baze obou podprostoru jako listy matic ci vectoru

```
> vratbazi := proc() local
> L,B,i,j,k,s,S,pS,v; L:=[op(args[1])]; s:=args[2];  B:=[]; S:=[];
> for i from 1 to nops(s) do pS:=[]; for j from 1 to nops(s) do if
> i<>j then pS:=[op(pS),s[j]=0]; else pS:=[op(pS),s[j]=1]; fi; od;
> S:=[op(S),pS]; od; for i from 1 to nops(L) do
> B:=[op(B),op(rmati(S,L[i]))]; od; if nargs=3 then B; else
> linez(B); fi; end:
```

> Varzci bazi od listu parametrickych matic (vectoru) s parametry uvedenymi v druhem argumentu - FUNKCE vrazi postupne do vsech uvedenejch prvku (matice/vectoru), za kazdy uvedeny parametr 1 (pri ostatnich =0) a nakonec to udela LN (pokud se prida nejaky dalsi parametr pak nevyhaze lz vektory);

```
> doplnek := proc() local P,Q,V,R,s,S,i,j;
> P:=args[1]; Q:=args[2]; V:=[]; for i from 1 to nops(P) do if
> linko(P[i],Q)={} then
> Q:=[op(Q),P[i]]; V:=[op(V),P[i]]; fi; od; V; end:
```

> Najde doplnek(P,Q) prostoru Q v prostoru P resp. najde X, pro nez plati P = X+(P prunik Q), Proste postupne testuje vektory z P a pokud jsou LN s Q tak je prida do Q a zaroven je napise do V, LZ vectory nepise do Q ani V, nakonec vrati V

Pro praci s algebrou (vektorovou)

```
> konalg:=proc() local E,M,k; M:=args[1];
> E:=args[2]; for k from 1 to
> nops(M) do M[k]:=krat(E,M[k]); od; M; end:
```

> vytvotri structurni konstanty kontrahovane algebry ve tvaru c na vstupu ocekava c a dale matici kontrakcnich prametru

```
> centrum := proc() local
> j,c,x,S,s,b,k,R,J,V,n; c:=args[1]; n:=nops(c); x:=vector(n);V:=[];
> S:={}; s:={}; R:=[];for j from 1 to n do s:={op(s),x[j]};
> J:=vector(n,0); J[j]:=1; b:=eval(kom(x,J,c)); for k from 1 to n do
> S:={op(S),b[k]=0}; od; od;
> R:=[solve(S,s)]; V:=rmati(R,x); vratbazi(V,s intersect npar(V,1));
> end:
```

> vraci centrum Lieovy algebry jejiz struct konst. jsou na vstupu ve tvary c

```
> deralg := proc() local c,j,k,D,n,i,v,A;
> c:=args[1]; n:=nops(c); D:=[]; for j from 1 to n do for k from j+1
> to n do v:=vector(n); for i from 1 to n do v[i]:=c[i][j,k]; od;
> D:=[op(D),evalm(v)]; od; od; if nargs > 1 then D:=linez(D);
> D:=normuj(D); else D:=linez(D); fi; D;
> end:
```

> spocte [L,L] kde L je lie alg. na vstupu ve ve tvaru c , pokud se doda dalsi parametr pak se provede normalizace

```
> deriv := proc() local L,D,c,i,j,v,n;
> L:=args[1]; c:=args[2]; n:=nops(L); D:=[]; for i from 1 to n do
> for j from i+1 to n do v:=kom(L[i],L[j],c); D:=[op(D),evalm(v)];
> od; od; D:=linez(D); if
> nargs>2 then D:=normuj(D); fi; D; end:
```

> deriv(L,c) spocte [L,L], kde L je list vektoru z algebry zadane pomoci c, tyto vektory musi byt vyjadreny ve stejne bazi jako struct konst c, pokud se prida dalsi parametr pak navic vysledek normalizuje (deli vektory jejich prvni nenul slozkou)

```
> adjre := proc() local
> v,w,c,i,j,k,n,adv,B; v:=args[1]; c:=args[2]; n:=nops(c);
> B:=gbaze(n); adv:=matrix(n,n); for i from 1 to n do
> w:=kom(v,B[i],c); for j from 1 to n do adv[j,i]:=w[j]; od; od;
> evalm(adv); end:
```

> adjre(v,c) spocte reprezentant pri adjung rep. algebry c od prvku v jako matici v bazi v niz je zadan v

```
> adjrep := proc() local c,V,E,i,j,k,n;
> c:=args[1]; n:=nops(c); V:=[]; E:=matrix(n,n,0); for  i from 1 to
> n do for j from 1 to n do for k from 1 to n do E[j,k]:=c[j][i,k];
> od; od; V:=[op(V),evalm(E)]; od; V;
> end:
```

> Napise do listu bazi adjung. reprezentace na vstupu ocekava strukturni konstanty ve tvaru c

```
> gbaze := proc() local B,i,xn,x;
> xn:=args[1]; B:=[]; for i from 1 to
> xn do x:=vector(xn,0); x[i]:=1; B:=[op(B),evalm(x)]; od; B; end:
```

> nageneruje standardni bazi dane dimenze

```
> novabazeroz := proc() local M,v,B,i,j,b;
> M:=args[1]; v:=[eigenvectors(M)]; B:=[];for i from 1 to nops(v) do
> b:=[]; for j from 1 to nops(v[i][3]) do b:=[op(b),v[i][3][j]]; od;
> B:=[op(B),b];
> od; B; end:
```

> vrati list ve kterem jsou baze {jejich vektory jsou v bazi puvodni - standardni} algeber, na ktere rozlozila algebru, proste vraci vlastni podprostory idenpotentu na vstupu

```
> rozloz := proc() local
> c,cc,A,JA,ID,Q,Bcc,i; c:=args[1]; cc:=[]; A:=CRS(adjrep(c));
> JA:=jradical(A); if nops(A)-nops(JA)>1 then A:=NCRS(A);
> Q:=doplnek(A,JA); ID:=hidempotent(Q); Bcc:=novabazeroz(ID[1]); for
> i from 1 to nops(Bcc) do cc:=[op(cc),structkonst(Bcc[i],c)]; od;
> if nargs>1 then komtab(structkonst([op(Bcc[1]),op(Bcc[2])],c));
> fi;  else cc:=[c]; fi;
> cc; end:
```

> rozlozi vstupujici algebru na direktni soucet algeber, na vstupu chce structkonst c a vraci list cc struturnich konstant novych algeber, pokud je nerozlozitelna pak vraci [c]

```
> oddelcentr := proc() local
> c,Cc,n,Dc,dCDc,Bc; c:=args[1]; n:=nops(c); Cc:=centrum(c);
> Bc:=gbaze(n); if Cc<>[] then Dc:=deralg(c); dCDc:=doplnek(Cc,Dc);
> if dCDc<>[] then Bc:=[op(Dc),op(doplnek(Bc,[op(Dc),op(dCDc)]))];
> c:=structkonst(Bc,c);
> fi; fi; c; end:
```

> oddeli centralni komponentu a vrati nove struct konst c

```
> uplnerozloz := proc() local c,i,cc;
> c:=args[1]; cc:=[]; if type(c[1],matrix) then c:=oddelcentr(c);
> cc:=rozloz(c); if nops(cc)>1 then cc:=uplnerozloz(cc);fi; else if
> type(c[1][1],matrix) then for i from 1 to nops(c) do
> cc:=[op(cc),op(uplnerozloz(c[i]))]; od; fi; fi;
> cc; end:
```

> Uplne rozlozi algebru na vstupu, na vstupu ocekava c a poradi si i s [c], je rekurzivni a vystupem je cc:=[c1,c2,c3] kde ci jsou structurni konstanty vzniklych podalgeber pripadne oddelitelne centralni elementy vyhazuje

Leviho Rozklad

```
> radikal := proc() local
> c,adc,i,j,x,s,S,R,n,B,D,V; c:=args[1]; n:=nops(c); adc:=adjrep(c);
> V:=[]; x:=vector(n); R:=[]; S:={}; s:={}; B:=matrix(n,n,0);
> D:=deralg(c); for i from 1 to n do s:={op(s),x[i]};
> B:=evalm(B+x[i]*adc[i]); od; for i from 1 to nops(D) do
> S:={op(S),trace(multiply(B,adjre(D[i],c)))=0}; od;
> R:=[solve(S,s)]; V:=rmati(R,x); vratbazi(V,s intersect npar(V,1));
> end:
```

> vraci bazi radikalu zapsanou pomoci vektoru ve standard bazi na vstupu chce strukt. konst. ve tvaru c

```
> radical2 := proc() local
> L,c,i,j,s,S,R,D,V,nL,n,B,W,v,x; L:=args[1]; c:=args[2];
> nL:=nops(L); n:=nops(c); x:=vector(nL); R:=[]; S:={}; s:={};
> W:=[]; B:=matrix(n,n,0); D:=deriv(L,c); for i from 1 to nL do
> s:={op(s),x[i]}; B:=evalm(B+x[i]*adjre(L[i],c)); od; for i from
> 1 to nops(D) do S:={op(S),trace(multiply(B,adjre(D[i],c)))=0};
> od; R:=[solve(S,s)]; V:=rmati(R,x); V:=vratbazi(V,s intersect
> npar(V,1));
> preved(V,L); end:
```

> radical2(L,c) - vrati bazi radicalu podalgebry L algebry c, L musi byt zadana pomoci vektoru vyjadrenych ve standard bazi, vysledek je opet ve standard bazi (tj. v bazi v niz jsou dany c - ta se vzdy povazuje za standard));

```
> levirab := proc() local
> L,c,D,s,S,R,r,n,x,b,v,w,i,j,k,V,W; r:=args[1]; c:=args[2]; if
> r<>nops(radikal(c)) then print(asddasdsd); fi; L:=gbaze(nops(c));
> n:=nops(L); x:=matrix(n-r,r); b:=[]; s:={}; S:={}; for i from
> 1 to n-r do v:=vector(n,0); for j from 1 to r do
> v:=evalm(v+x[i,j]*L[j]); s:={op(s),x[i,j]}; od;
> b:=[op(b),evalm(L[r+i]+v)]; od; for i from 1 to n-r do for j from
> i+1 to n-r do v:=vector(n,0); for k from 1 to n-r do
> v:=evalm(v+c[k+r][i+r,j+r]*b[k]); od; w:=kom(b[i],b[j],c); for k
> from 1 to n do S:={op(S),w[k]=v[k]}; od; od; od;
> R:=[solve(S,s)]; V:=[]; for i from 1 to nops(b) do
> V:=[op(V),op(rmati(R,b[i]))]; od;  s:=s intersect npar(V,1);
> S:={}; for i from 1 to nops(s) do S:={op(S),s[i]=0}; od;
> W:=[]; for i from 1 to nops(V) do
> W:=[op(W),op(rmati([S],V[i]))]; od; V:=W; [doplnek(L,V),V]; end:
```

> ocekava na vstupu r-dimenzi radicalu a c v bazi jejiz prvnich r vectoru tvori radical a zbytek je doplnek do algebry - je to podcast levirneab pro abelovsky radical

```
> levirneab := proc() local
> L,c,rL,DrL,fL,pL,ndr,n,nc,fc,M,doL,i,j,k,V,W; L:=args[1];
> n:=nops(L); c:=args[2]; rL:=radical2(L,c); DrL:=deriv(rL,c,1);
> doL:=doplnek(L,rL); ndr:=nops(DrL); V:[]; W:=[];
> fL:=[op(doplnek(rL,DrL)),op(doplnek(L,rL))]; if ndr = 0 then
> fc:=structkonst(fL,c); V:=levirab(nops(rL),fc);
> W:=[preved(V[1],fL),preved(V[2],fL)]; else
> nc:=structkonst([op(DrL),op(fL)],c); fc:=[];
> M:=matrix(n-ndr,n-ndr); for i from ndr+1 to n do for j from ndr+1
> to n do for k from ndr+1 to n do M[j-ndr,k-ndr]:=nc[i][j,k]; od;
> od; fc:=[op(fc),evalm(M)] od; V:=levirab(eval(nops(rL)-ndr),fc);
> W:=[preved(V[1],fL),preved(V[2],fL)]; pL:=[op(DrL),op(W[2])];
> V:=levirneab(pL,c); W:=[[op(W[1]),op(V[1])],V[2]]; fi;  W; end:
```

> Vraci Leviuv rozklad od zadane perfektni podalgebry L (tj. D(L)=L) algebry c prvni na vstupu je baze L s vektory ve standard bazi a c ve standard bazi je to pro neabel radikal

```
> perfektalg := proc() local c,L,B,DB,i,n;
> global rpos; if nargs=1 then rpos:=[]; c:=args[1];
> B:=gbaze(nops(c)); else if nargs =2 then B:=args[1]; c:=args[2];
> fi;fi; n:=nops(c); DB:=deriv(B,c,1); rpos:=[op(rpos),nops(B)]; if
> nops(DB)=nops(B) then B; else if nops(DB)=0 then
> print("resitelna"); B:=[]; rpos:=[op(rpos),nops(B)]; else
> B:=perfektalg(DB,c); fi; fi; B;
> end:
```

> vrati bazi perfektni algebry tj. D(V)=V; na vstupu ocekava struct konst c puvodni alg. (nebo bazi a konst c), nove naplni global prom. list - hpos dimenzemi horni posloupnosti

```
> preved := proc() local L,B,i,j,k,n,v,V;
> L:=args[1]; B:=args[2]; V:=[]; if nops(B)>0 then n:=vectdim(B[1]);
> for i from 1 to nops(L) do v:=vector(n,0); for j from 1 to nops(B)
> do v:=evalm(v+L[i][j]*B[j]);
> od; V:=[op(V),evalm(v)]; od; else V:=[]; fi; V; end:
```

> preved(L,B) -prevede vektory z L vyjadrene v bazi B do baze v niz jsou vektory z B

```
> leviroz := proc() local c,R,S,P,W,L; if
> nargs=1 then c:=args[1]; R:=radikal(c); P:=perfektalg(c); else if
> nargs=2 then L:=args[1]; c:=args[2]; R:=radical2(L,c);
> P:=perfektalg(L,c); fi; fi; if nops(R)=nops(c) then if nops(P)=0
> then S:=[]; else print(R=L, P<>[]) fi; else W:=levirneab(P,c);
> S:=W[2];
> R:=[op(doplnek(R,W[1])),op(W[1])]; fi; [R,S]; end:
```

> udela leviho rozklad algebry na vstupu, kde ocekava strukt. konst. ve tvaru c nebo bazi teto algebry a strukt. konst. c od povidajici bazi v niz jsou zadany vektory baze v prvnim argumentu

Nilpotence a nilradikal

```
> idealiz := proc() local L,B,D,c,i,j,v;
> B:=args[1]; L:=args[2]; c:=args[3]; D:=[]; for i from 1 to nops(B)
> do for j from 1 to nops(L) do v:=kom(B[i],L[j],c);
> D:=[op(D),evalm(v)]; od; od; D:=linez(D); if
> nargs > 3 then D:=normuj(D); fi; D; end:
```

> idealiz(B,L,c) spocte [B,L] kde B a L jsou zadany pomoci vektoru vyjadrenych v te same bazi jako strukt. konst. c

```
> nilpotentni := proc() local L,c,B,D;
> global npos; if nargs=1 then npos:=[]; c:=args[1];
> B:=gbaze(nops(c)); D:=deralg(c,1); L:=B; else if nargs=2 then
> c:=args[2]; B:=args[1]; D:=deriv(B,c,1); L:=D; else if nargs=3
> then B:=args[1]; L:=args[2]; c:=args[3]; D:=idealiz(B,L,c,1); else
> print(<nilpotentni> - spatny ); fi; fi; fi;
> npos:=[op(npos),nops(B)]; if nops(B)=nops(D) then B; else if
> nops(D)=0 then print("nilpotentni"); B:=[];
> npos:=[op(npos),nops(B)]; else B:=nilpotentni(D,L,c); fi; fi;
> B; end:
```

> otestuje algebru, zda je nilpotentni ci ne a vraci posledni clen posloupnosti [L,L], [[L,L],L], atd.. naplni globalni promenou dpos dimenzemi dolni posloupnosti

```
> fstruckonst := proc() local
> B,L,c,i,j,k,M,n,nn,V; B:=args[2]; L:=args[1]; c:=args[3];
> n:=nops(L); nn:=nops(B); c:=structkonst([op(L),op(B)],c); V:=[];
> M:=matrix(nn,nn); for i from 1 to nn do for j from 1 to nn do for
> k from 1 to nn do
> M[j,k]:=c[i+n][j+n,k+n]; od; od; V:=[op(V),evalm(M)]; od; V; end:
```

> Vytvori faktorizovanou algebru na vstupu chce podle ceho ma faktorizovat a co zbyde po faktorizaci (dohromady to musi bejt idel v) c

```
> centraliz := proc() local
> M,L,W,j,c,x,v,S,s,b,k,R,V,n; if nargs=2 then M:=args[1];
> c:=args[2]; L:=gbaze(nops(c)); else if nargs=3 then M:=args[1];
> L:=args[2]; c:=args[3]; fi;fi;  n:=nops(L); x:=vector(n); V:=[];
> S:={}; s:={}; R:=[]; v:=vector(nops(c),0); for j from 1 to n
> do  s:={op(s),x[j]}; v:=evalm(v+x[j]*L[j]); od;
> b:=eval(kom(M,v,c)); for k from 1 to nops(c) do
> S:={op(S),b[k]=0}; od;   R:=[solve(S,s)]; V:=rmati(R,x);
> W:=vratbazi(V,s intersect npar(V,1)); preved(W,L); end:
```

> centraliz(M,L,c) vraci centralizator prvku M v dane algebre L se struc. konst. c

```
> nilradikal := proc() local
> c,Rc,Dc,DDc,NRc,L,DoDDc,Hc,DoHc,DoDc,S,j,n,i,ko,q,B,M,p,DoB,t,sp,sfp,A
> ,Cu,m; global tisk; c:=args[1]; n:=nops(c); NRc:=[]; if tisk>0
> then print(pepa,n); fi; Rc:=radikal(c); if nops(c) > nops(Rc) then
> if tisk>1 then print(Radikc,nops(Rc)); fi;
> NRc:=preved(nilradikal(structkonst(Rc,c)),Rc); else Dc:=deralg(c);
> DDc:=deriv(Dc,c); if DDc<>[] then DoDDc:=doplnek(gbaze(n),DDc); if
> tisk>1 then print(druhaderiv,nops(DDc)); fi;
> NRc:=[op(DDc),op(preved(nilradikal(fstruckonst(DDc,DoDDc,c)),DoDDc))];
> else Hc:=hypercentrum(c); if Hc<>[] then
> DoHc:=doplnek(gbaze(n),Hc); if tisk>1 then print(hyperC,nops(Hc));
> fi;
> NRc:=[op(Hc),op(preved(nilradikal(fstruckonst(Hc,DoHc,c)),DoHc))];
> else DoDc:=doplnek(gbaze(n),Dc); ko:=0; m:=nops(Dc); for j from 1
> to n-m while ko=0 do if tisk>2 then print(prvekcislo,j,n); fi;
> S:=[Dc[1]]; for i from 1 while nops(S)=nops(linez(S)) do
> S:=[op(S),kom(DoDc[j],S[nops(S)],c)]; od;
> q:=op(lkv(vector(nops(c),0),S,1)); if q[vectdim(q)]<>0 then
> q:=evalm(q/q[vectdim(q)]); else print(chyba1); fi; if q[1]=0 then
> B:=[]; for i from 1 to m do B:=[op(B),kom(DoDc[j],Dc[i],c)]; od;
> B:=linez(B); B:=normuj(B); DoB:=doplnek(gbaze(n),B); if tisk>1
> then print(pripravaM,nops(B)); fi;
> M:=[op(B),op(preved(nilradikal(fstruckonst(B,DoB,c)),DoB))]; if
> tisk>0 then print(radicalM,nops(M)); fi;
> NRc:=preved(nilradikal(structkonst(M,c)),M); ko:=1; else p:=0; for
> i from 1 to vectdim(q) do p:=evalm(p+q[i]*t^(i-1)); od; if
> skverfree(p,t)=0 then sfp:=sqrfree(p,t); sp:=1; for i from 1 to
> nops(sfp[2]) do sp:=evalm(sp*sfp[2][i][1]); od;
> A:=evalm(subs(t=adjre(DoDc[j],c),p)); B:=[]; for i from 1 to m do
> B:=[op(B),evalm(multiply(A,Dc[i]))]; od; B:=linez(B);
> B:=normuj(B); DoB:=doplnek(gbaze(n),Dc); if tisk>1 then
> print(pripravaM2,nops(B)); fi;
> M:=[op(B),op(preved(nilradikal(fstruckonst(B,DoB,c)),DoB))]; if
> tisk>1 then print(radicalM2,nops(M)); fi;
> NRc:=preved(nilradikal(structkonst(M,c)),M); ko:=1; else if j=n-m
> then Cu:=centraliz(Dc[1],c); if nops(Cu)>nops(Dc) then if tisk>1
> then print(radicalcentralizatoru,nops(Cu)); fi;
> NRc:=preved(nilradikal(structkonst(Cu,c)),Cu); ko:=1; else if
> nops(Cu)=nops(Dc) then NRc:=Dc; ko:=1; fi; fi; fi; fi; fi;  od;
> fi; fi; fi; NRc:=normuj(NRc); if tisk>0 then print(nops(c),NRc);
> fi;
> NRc;end:
```

> najde nilradikal algebry c na vstupu, pokud se nastavi tisk tak i tiskne - je v ni implementovany algoritmus z clanku a testoval jsem ji na nekolika ruznych prikladech

```
> hyperc := proc() local L,C,c,D,cc,hC,V;
> L:=args[1]; C:=args[2]; c:=args[3]; if C=[] and nops(L)=nops(c)
> then C:=centrum(c); else D:=doplnek(L,C); if D<>[] then
> cc:=fstruckonst(C,D,c); V:=centrum(cc);
> C:=[op(C),op(preved(V,D))]; fi; fi; C; end:
```

> jeden krok pri hledeni hypercentra

```
> hypercentrum :=proc() local L,C,c,D,hC,V;
> global hpos; if nargs=1 then c:=args[1]; L:=gbaze(nops(c));
> C:=centrum(c); hpos:=[]; else L:=args[1]; C:=args[2]; c:=args[3];
> fi; hpos:=[op(hpos),nops(C)]; hC:=hyperc(L,C,c); if
> nops(hC)=nops(L) then C:=hC; hpos:=[op(hpos),nops(C)]; else if
> nops(hC)>nops(C) then
> C:=hypercentrum(L,hC,c); fi; fi; C; end:
```

> Najde hypercentrum algebry na vstupu, na vstupu chce strukt. konst. c

```
> skverfree := proc() local
> p,q,t,i,j,P,Q,V; p:=args[1]; t:=args[2]; V:=0; q:=diff(p,t); if
> degree(p,t) > 1 then V:=1; P:=[solve(p,t)]; Q:=[solve(q,t)]; for i
> from 1 to nops(P) do for j from 1 to nops(Q) do
> if P[i]=Q[j] then V:=0; break; fi; od; if V=0 then break; fi; od;
> else V:=1; fi; V; end:
```

> Vraci 1 pokud je polynom na vstupu skverfree (nasobnost vsech korenu je jedna) pokud neni skverfree tak vraci 0

Pro praci s adjungovanou reprezentaci (maticema)

```
> CRS := proc() local
> ad,B,A,i,j,S,R,s,k,l,V,n; ad:=args[1]; n:=rowdim(ad[1]);
> A:=matrix(n,n); S:={};s:={}; for i from 1 to n do for j from 1
> to n do s:={op(s),A[i,j]}; od; od; for i from 1 to nops(ad) do
> B:=evalm(multiply(ad[i],A)-multiply(A,ad[i])); for k from 1 to n
> do for l from 1 to n do S:={op(S),B[k,l]=0}; od; od; od;
> R:=[solve(S,s)]; V:=rmati(R,A); vratbazi(V,s intersect npar(V,1));
> end:
```

> najde centralizer algebry, jejiz baze je na vstupu jako list (matic) v okruhu R=C^{n,n} a vrati reseni a tiskne seznam reseni ve forme matic

```
> jradical := proc() local L,i,x,s,B,R,S,n;
> L:=args[1]; n:=rowdim(L[1]); R:={}; s:={}; S:={};
> x:=vector(nops(L)); B:=matrix(n,n,0); for i from 1 to nops(L) do
> B:=evalm(B+x[i]*L[i]); s:={op(s),x[i]}; od; for i from 1 to
> nops(L) do S:={op(S), trace(multiply(B,L[i]))=0}; od;
> R:=[solve(S,s)]; L:=rmati(R,B); if nargs>1 then print(L);
> print(S,s,R); fi; vratbazi(L,s intersect
> npar(L,1)); end:
```

> pocita Jacobsonuv radikal algebry ktera je na vstupu v maticove bazi

```
> bezestopa := proc() local
> L,i,j,k,s,S,B,R,V,n,x; L:=args[1]; n:=rowdim(L[1]);
> x:=vector(nops(L)); B:=matrix(n,n,0); s:={}; S:={}; for i from
> 1 to nops(L) do B:=evalm(B+x[i]*L[i]); s:={op(s),x[i]}; od;
> S:={trace(B)=0}; R:=[solve(S,s)];
> V:=rmati(R,B); vratbazi(V, s intersect npar(V,1)); end:
```

> Najde traceles subalgebru (teda spis podprostor) ze zadane maticove algebry (pomoci baze na vstupu) a vrati jeho bazi

```
> NCRS := proc() local L,V,M,i,n;
> L:=args[1]; V:=[];  n:=rowdim(L[1]); M:=matrix(n,n,0); for i from
> 1 to n do M[i,i]:=1; od; V:=[evalm(M),op(bezestopa(L))]; end:
```

> Na vstupu ocekava Centralizator maticove algebry v okruhu R=F^(n,n) v maticove bazi, a vrati jej v nove bazi zacinajici 1 a pokracujici traceles maticema

```
> hidempotent := proc() local
> A,i,j,t,M,m,fm,pm,vm,u,p,V; A:=args[1]; pm:=[]; M:=[]; V:=[]; for
> i from 1 to nops(A) do if degree(minpoly(A[i],t),t)>1 then
> M:=A[i]; break; fi; od; m:=minpoly(M,t); pm:=faktorpol2(m,t);
> fm:=[]; for i from 1 to nops(pm) do if degree(pm[i],t)>0 then
> fm:=[op(fm),pm[i]]; fi; od; pm:=fm; if nargs>1 then print(pm);fi;
> if nops(pm)>2 then vm:=1; for i from 2 to nops(pm) do
> vm:=vm*pm[i]; od; else if nops(pm)<2 then print(IR); else
> vm:=pm[2]; fi; fi; if gcdex(vm,pm[1],t,'v','p') <> 1 then
> print(neni); print(gcdex(vm,pm[1],t,'v','p'));
> print(minpoly(M,t)); else
> V:=[evalm(subs(t=M,p*pm[1])),evalm(subs(t=M,v*vm))]; fi; for i
> from 1 to nops(V) do if linko(V[i],A) <>{} and
> type(evalm(multiply(V[i],V[i])-V[i]), 'matrix'(0)) then ; else
> print(
> neniide); fi; od; V; end:
```

> hleda idempotenty podle postupu popsaneho v clanku a testuje nalezene matice zdajsou skutecne idempotentni

Komutacni procedury

```
> pripravC := proc() local C,i,j,k,n;
> n:=args[1]; C:=array(1..n,1..n,1..n);for i from 1 to n do for j
> from 1 to n do for
> k from 1 to n do C[i,j,k]:=0; od; od; od; C; end:
```

> Pripravi a vynuluje pole rozmeru n,n,n pro zadani strukt. konst, na vstupu chce dimenzi algebry n

```
> symetrC := proc() local C,n,i,j,k;
> C:=args[1]; n:=args[2]; for i from 1 to n do for j from i+1 to n
> do for k from 1 to n do if C[i,j,k]<>0
> then C[j,i,k]:=-C[i,j,k];  fi; od; od; od; simplify(C); end:
```

> Doplni strukturni antisymetricky konstanty na tvar C, na vstupu chce C a dimenzi

```
> gstructkonst := proc() local
> C,n,k,i,j,M,c; C:=args[1]; n:=args[2]; c:=[]; M:=matrix(n,n,[]);
> for k from 1 to n do for i from 1 to n do for j from 1 to n do
> M[i,j]:=C[i,j,k]; od;od; c:=[op(c),evalm(M)]; od;
> c; end:
```

> vyrobi strukturni konstanty ve tvaru c, na vstupu chce C a dimenzi algebry

```
> kom := proc() local c,A,B,V,i,j,k,n;
> A:=args[1]; B:=args[2]; c:=args[3]; n:=nops(c); V:=vector(n); for
> k from 1 to n do
> V[k]:=sum('sum('A[i]*B[j]*c[k][i,j]','i'=1..n)','j'=1..n); od;
> evalm(V); end:
```

> pocita komutator ze vstupujicich vektoru pro algebru jejiz strukt. kons. jsou treti vstup a to ve forme c (vstupujici vectory musi byt ve stejne bazi jako c, ale to budou)

```
> komad :=proc() local A,B; A:=args[1];
> B:=args[2];
> evalm(multiply(A,B)-multiply(B,A)); end:
```

> Pocita komutator pro algebry matic, na vstupu ocekava matice a vystup je take matice

```
> Jacobi := proc() local i,j,k,Y,K,c,n;
> c:=args[1]; n:=nops(c); K:=gbaze(n); for i from 1 to n do for j
> from i+1 to n do for k from j+1 to n do
> print(evalm(kom(K[i],kom(K[j],K[k],c),c)+kom(K[k],kom(K[i],K[j],c),c)+
> kom(K[j],kom(K[k],K[i],c),c))); od; od; od; end:
```

> Overi Jakobiho identity pro Lieovu algebru na vstupu ocekava struct. konst. c

```
> komrel := proc() local
> j,k,J,K,c,V,n,e,x,i,S; c:=args[1]; n:=nops(c); K:=gbaze(n);
> e:=vector(n); S:=[]; for j from 1 to n do for k from j+1 to n do
> V:=kom(K[j],K[k],c); if not type(convert(evalm(V), matrix),
> 'matrix'(0)) then if nargs>1 then x:=0; for i from 1 to n do
> x:=x+V[i]*e[i]; od; if nargs>2 then S:=[op(S),[e[j],e[k]]=x]; else
> print([e[j],e[k]]=x);fi; else print([j,k]=evalm(V)); fi; fi; od;
> od; S; end:
```

> vypise nenulove komut. relace algebry jejiz strukt. konstanty jsou na vstupu, ve tvaru c pokud se prida jeste jeden parametr, tak udela hezci vystup a pokus se prida jeste jeden tak to napise do listu

```
> komrelad := proc() local i,j,M;
> M:=args[1]; for i from 1 to nops(M) do for j from i+1 to nops(M)
> do if not type(evalm(komad(M[i],M[j])),
> 'matrix'(0)) then print([i,j]=komad(M[i],M[j])); fi; od; od; end:
```

> vypise nenulove komutatory algebry jejiz baze je na vstupu (jako list matic)

```
> structkonst := proc() local
> L,i,j,k,c,xc,B,n,xn,v,x; L:=args[1]; c:=args[2]; n:=nops(c);
> xn:=nops(L); xc:=[]; v:=vector(n); for k from 1 to xn do
> xc:=[op(xc),matrix(xn,xn,0)]; od; for i from 1 to xn do for j from
> i+1 to xn do v:=kom(L[i],L[j],c); x:=vector(xn); x:=lkv(v,L,1)[1];
> for k from 1 to xn do xc[k][i,j]:=x[k];
> xc[k][j,i]:=-x[k]; od; od;od; xc; end:
```

> Vrati nove strukturni konstanty algebry v bazi jez je zadana jako list vektoru (vyjadrenych v puvodni bazi v niz jsou vypocteny c) ve forme c. Na vstupu ocekava bazi a strukt. konst, ktere do ni ma prevest. Na vstupu muze byt i baze podalgebry, pak to prislusne snizi dim u vektoru.

```
> komtab := proc() local c,i,j,k,e,n,B,a;
> c:=args[1]; n:=nops(c); e:=vector(n); B:=matrix(n,n,0); for i from
> 1 to n do for j from 1 to n do for k from 1 to n do if
> c[k][i,j]<>0 then if nargs=1 then B[i,j]:=B[i,j]+c[k][i,j]*e[k];
> else B[i,j]:=B[i,j]+e[k]; fi; fi;od;
> od; od; print(evalm(B)); end:
```

> vypise tabulku komutacnich relaci zadane algebry (jako c) druhy argument urcuje ze se to ma vypsat bez koefivcientu

```
> komtabb := proc() local cc,i,j;
> cc:=args[1]; if nops(cc) > 0 then if type(cc[1], matrix) then if
> nargs>1 then komtab(cc,1); else komtab(cc); fi; else for i from 1
> to nops(cc) do if nargs>1 then
> komtabb(cc[i],1); else komtabb(cc[i]); fi; od; fi; fi; end:
```

> Vytiskne komutacni relace seznamu algeber

Izomorfismus

```
> izomorfni := proc() local
> x,y,i,j,k,A,n,S,s,R,d,V; x:=args[1]; y:=args[2]; n:=nops(x); if
> nargs > 2 then A:=args[3]; else A:=matrix(n,n); fi; s:={};
> S:={}; if n<>nops(y) then print(neiz); else s:=par(A); for i
> from 1 to n do for j from i+1 to n do for k from 1 to n do
> S:={op(S), sum('x[r][i,j]*A[r,k]',
> 'r'=1..n)-sum('sum('A[i,m]*A[j,r]*y[k][m,r]', 'm'=1..n)',
> 'r'=1..n)=0}; od; od; od; R:=rmati([solve(S,s)],A); d:=0; for i
> from 1 to nops(R) do if det(R[i])<>0 then V:=R[i]; d:=1; break;
> fi; od; if d=0 then print(nops(R),neizomorfn); else print(izomo);
> fi; fi; [d,evalm(V),par(V) intersect s]; end:
```

> Porovna dve algebry zda jsou izomorfni a vrati pripadnou matici izomorfismu, na vstupu ocekava x,y - struct. konst. obou algeber (Popripade jeste matici, ktera ma byt izomorfismem.) varci list o trch slozkach prvni je 0/1 - neizomorfni/izomorfni druha je matice izomorfismu a treti jsou jeji volne parametry

```
> nenuldet := proc() local M,m,i,j,k,S,V;
> M:=args[1]; m:=args[2]; for i from 1 to nops(m) do S:={}; for j
> from 1 to nops(m) do if j>=i then S:={op(S),m[j]=1}; else
> S:={op(S),m[j]=j-i}; fi; od; V:=op(rmati([S],M)); if det(V)<>0
> then break; fi; od; if det(V)<>0
> then evalm(V); else print(nepovedl); M; fi; end:
```

> nenuldet(A,a) se velmi jednoduse pokusi nastavit parametry a tak aby determinant zadane param. matice A byl nenula

```
> radky :=proc() local M,V,i,j,n,m,v;
> M:=args[1]; V:=[]; m:=rowdim(M); n:=coldim(M); for i from 1 to m
> do v:=vector(n); for j from 1 to n do
> v[j]:=M[i,j]; od; V:=[op(V),evalm(v)]; od; V; end:
```

> udela z radku matice list vektoru

```
> porost := proc() local L,K,i,u;
> K:=args[1]; L:=args[2]; u:=0; for i from 1 to min(nops(K),nops(L))
> do if K[i]>L[i] then u:=1; break; else if K[i]<L[i] then u:=2;
> break; else if K[i]=L[i] then u:=0; else print(fatalr); break; fi;
> fi; fi; od; if u = 0 then if nops(K) > nops(L) then u:=1; else if
> nops(K) < nops(L) then u:=2; else if
> nops(K)=nops(L) then u:=0; fi; fi; fi; fi; u; end:
```

> porovna dva listy podle velikosti, a vrati cislo veciho , veci je ten, ve kterem se drive vyskytne vetsi cislo, pokud jednomu dojdou cisla tak je mensi nulu vraci pouze pro stejne listy

Pro tisk a vypis

```
> pmeps := proc() local M,n,i,j,L,x,X;
> M:=args[1]; L:=[];X:=[]; for i from 2 to nargs do
> X:=[op(X),args[i]]; od; if type(M, matrix) then n:=rowdim(M);
> L:=[]; for i from 1 to n do for j from i+1+(i mod 2) to n do
> L:=[op(L),M[i,j]]; od; od; print(op(X),par(M),L); else for i from
> 1 to nops(M) do  pmeps(M[i],op(X),i); od; fi; end:
```

> Vytiskne matice epsilon z libovolne listove struktury , pred nezavislymi slozkami jsou poradi teto matice v dane strukture

VSTUP

```
> n:=8:
> u:= -1/2+1/2*I*3^(1/2);
```
> konstanta ma to bejt omega ale u se pise lepe

```
> C:=pripravC(n):
```

$$u := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, I\, \sqrt{3}$$

Zde prosim zadejte nenulove strukturni konstanty algebry ve tvaru C[i,j,k] = C_{i,j}^k (staci az na antisymetrii v i a j)

```
> C[1,3,5]:=u-1: C[1,4,8]:=u^2-1:
> C[1,5,7]:=u-1: C[1,6,4]:=u^2-1: C[1,7,3]:=u-1: C[1,8,6]:=u^2-1:
> C[2,3,7]:=u^2-1: C[2,4,6]:=u-1: C[2,5,3]:=u^2-1: C[2,6,8]:=u-1:
> C[2,7,5]:=u^2-1: C[2,8,4]:=u-1: C[3,5,8]:=1-u: C[3,6,2]:=1-u^2:
> C[3,7,6]:=1-u^2: C[3,8,1]:=1-u: C[4,5,1]:=1-u^2: C[4,6,7]:=1-u:
> C[4,7,2]:=1-u: C[4,8,5]:=1-u^2:
> C[5,7,4]:=u-u^2: C[5,8,2]:=u^2-u: C[6,7,1]:=u^2-u: C[6,8,3]:=u-u^2:
```

Konec vstupu, dodelase struct konst C a c c[k][i,j]:=C[i,j,k]=C_{i,j}^k

```
> C:=symetrC(C,n): for i from 1 to n do for
> j from 1 to n do for k from
> 1 to n do C[i,j,k]:=evalm(C[i,j,k]); od; od; od:
> c:=[]:
> c:=gstructkonst(C,n):
> #n; komrelc(); Jacobic();
```
> kontrola jacobiho identit a komutacni tabulky

```
> komtab(c);
```

Zde je zadana mnozina kontrakcnich matic, jazkozto list listu obsahujicich postupne reseni s 9 nulama, 15 nulama, atd. az reseni s 23 nulama

```
> Vys:=[seznamu matic]
```

Identifikace Vysledku

Rozlozeni

```
> vysc:=[]; for i from 1 to nops(Vys) do
> vc:=[]: for j from 1 to nops(Vys[i]) do X:=Vys[i][j];
> x:=konalg(c,X); vc:=[op(vc),uplnerozloz(x)]: if nops(vc[j])>1 then
> print(i,j,rozlozi,nops(vc[j]),dineze); s:=[]; for k from 1 to
> nops(vc[j]) do s:=[op(s),nops(vc[j][k])]; od: print(s); else if
> nops(vc[j][1])<nops(c) then print(i,j,dim,po,
> oddelemiC,nops(vc[j][1])); fi; fi; od; vysc:=[op(vysc),vc]: od:
```

Roztrideni

```
> nil:=[]: res:=[]: kon:=0: for i from 1 to
> nops(vysc) do for j from 1 to nops(vysc[i]) do for k from 1 to
> nops(vysc[i][j]) do rpos:=[]; npos:[]; hpos:=[];
> perfektalg(vysc[i][j][k]): nilpotentni(vysc[i][j][k]):
> hypercentrum(vysc[i][j][k]): if npos[nops(npos)]=0 then p:=-2; for
> m from 1 to nops(nil) do if porost(nil[m][1][1],rpos) = 0 and
> porost(nil[m][1][2],npos)=0 and porost(nil[m][1][3],hpos)=0 then
> p:=-1; nil[m]:=[op(nil[m]),[i,j,k]]; break; else if
> (porost(nil[m][1][1],rpos) = 0 and porost(nil[m][1][2],npos)=0 and
> porost(nil[m][1][3],hpos)=1) or (porost(nil[m][1][1],rpos) = 0 and
> porost(nil[m][1][2],npos)=1) or porost(nil[m][1][1],rpos)=1 then
> p:=m-1; break; fi; fi; od; pom:=[]; if p>0 then for m from 1 to p
> do pom:=[op(pom),nil[m]]; od;
> pom:=[op(pom),[[rpos,npos,hpos],[i,j,k]]]; for m from p+1 to
> nops(nil) do pom:=[op(pom),nil[m]]; od; nil:=pom; else if p=0 then
> nil:=[[[rpos,npos,hpos],[i,j,k]],op(nil)]; else if p=-2 then
> nil:=[op(nil),[[rpos,npos,hpos],[i,j,k]]]; fi; fi; fi;else if
> rpos[nops(rpos)]=0 then p:=-2; for m from 1 to nops(res) do if
> porost(res[m][1][1],rpos) = 0 and porost(res[m][1][2],npos)=0 and
> porost(res[m][1][3],hpos)=0 then p:=-1;
> res[m]:=[op(res[m]),[i,j,k]]; break; else if
> (porost(res[m][1][1],rpos) = 0 and porost(res[m][1][2],npos)=0 and
> porost(res[m][1][3],hpos)=1) or (porost(res[m][1][1],rpos) = 0 and
> porost(res[m][1][2],npos)=1) or porost(res[m][1][1],rpos)=1 then
> p:=m-1; break; fi; fi; od; pom:=[]; if p>0 then for m from 1 to p
> do pom:=[op(pom),res[m]]; od;
> pom:=[op(pom),[[rpos,npos,hpos],[i,j,k]]]; for m from p+1 to
> nops(res) do pom:=[op(pom),res[m]]; od; res:=pom; else if p=0 then
> res:=[[[rpos,npos,hpos],[i,j,k]],op(res)]; else if p=-2 then
> res:=[op(res),[[rpos,npos,hpos],[i,j,k]]]; fi; fi; fi; fi; fi;
> print(i,j,k,rpos,npos,hpos); od;
> od; od;
> for i from 1 to nops(res) do print(res[i]); od;
> for i from 1 to nops(nil) do print(nil[i]); od;
```

Nlradikal

```
> for i from 1 to nops(res) do for j from 2
> to nops(res[i]) do x:=vysc[op(res[i][j])]; nx:=nilradikal(x);
> nc:=nops(x); fx:=structkonst(nx,x); perfektalg(fx):
> nilpotentni(fx): hypercentrum(fx):  print(res[i][j],nx);
> print(rpos,npos,hpos);
> print(komrel(fx,1,1)); od; od;

> for i from 1 to nops(vysc) do for j from
> 1 to nops(vysc[i]) do for k from 1 to nops(vysc[i][j]) do
> print(i,j,k,komrel(vysc[i][j][k],1,1)); od; od; od;
```

Literatura

[1] N. Jacobson: *Lie Algebras*, Dover, New York, 1979.

[2] D. Rand, P. Winternitz, H. Zassenhaus: On the Identification of Lie Algebra Given by Its Structure Constants, *Lin. Alg. Appl.* **109**, 197–246, (1988).

[3] J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus: Invariants of real low dimension Lie algebras, *J. Math. Phys.*, **17**(6), 986–994, (1976).

[4] J. Patera, H. Zassenhaus: On Lie Gradings I, *Lin. Alg. Appl.***112**, 87–159, (1989).

[5] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová: On Lie gradings II, *Lin. Alg. Appl.* **277**, 97–125, (1998).

[6] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová: On Lie gradings III. Gradings of real forms of classical Lie algebras, *Lin. Alg. Appl.* **314**, 1–47, (2000).

[7] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová: On the maximal Abelian subgroups of diagonable automorphisms of simple classical Lie algebras, in "*XXI International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*", World Scientific, Singapore 1997, 116–120.

[8] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová: On the fine gradings of simple classical Lie algebras, *Int. J. Mod. Phys.* **12**, 189–194, (1997).

[9] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová, J. Tolar: The fine gradings of $sl(3,\mathbb{C})$ and their symmetries, Proceedings of *XXIII International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, ed. Y. Pogosyan et al., JINR, Dubna, 2001.

[10] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová, J. Tolar: Automorphisms of the fine grading of $sl(n,\mathbb{C})$ associated with the generalized Pauli matrices, *J. Math. Phys.* **43**(2), 1083–1094, (2002).

[11] M. Havlíček, J. Patera, E. Pelantová, J. Tolar: Distinguished bases of $sl(n,\mathbb{C})$ and their symmetries, in "*Quantum Theory and Symmetries 2*", E. Kapuscik and A. Horzela eds., World Scientific, Singapore 2002, 366–370.

[12] M. de Montigny and J. Patera: Discrete and continuous graded contractions of Lie algebras and superalgebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24**, 525–549, (1991).

[13] M. Couture, J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz: Graded contractions of $sl(3, \mathbb{C})$, *J. Math. Phys.* **32**(9), 2310–2318, (1991).

[14] M. A. Abdelmalek, X. Leng J. Patera, P. Winternitz: Grading refinements in the contraction of Lie algebras and their invariants, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**, 7519–7543, (1996).

[15] F. Herranz, M. Santander: The general solution of the real $\mathbb{Z}_2^{\otimes N}$ graded contractions of $so(N+1)$, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 6643–6652, (1996).

[16] E. Weimar-Woods: The three-dimensional real Lie algebras and their contractions, *J. Math. Phys.* **32**(8), 2028-2033, (1991).

[17] E. Weimar-Woods: Contraction of Lie algebras: Generalized Inönü-Wiegner contractions versus graded contractions, *J. Math. Phys.* **36**(8), 4519–4548, (1995).

[18] P. Novotný: *Gradace a gradované kontrakce Lieových algeber nízkých dimenzí*, rešeršní práce FJFI ČVUT, 2001.

[19] J. Hrivnák: Solution of contraction equations for the Pauli grading of $sl(3, \mathbb{C})$, Diploma thesis FJFI ČVUT, 2003.