REŠERŠNÍ PRÁCE

Spektální vlastnosti operátoru kvazienergie

Ondřej Lev.

Školitel: doc.Ing. Pavel Šťovíček Dr.Sc.

Konzultanti: prof. Pierre Duclos, dr. Michel Vittot, Université de Toulon et du Var.

1. Úvod

Vyšetřování spektra operátoru a jeho vlastností je jedna z mnoha matematicky zajímavých úloh, které matematické fyzice přinesla kvantová mechanika. Jednou ze tříd kvantově mechanických systémů jsou systémy s periodickou časovou závislostí. Při zkoumání vlastnostností těchto systémů, (jako je například jeho dynamická stabilita) je důležitá znalost charakteru spektra takzvaného Floquetova Hamiltoniánu, nebo též operátoru kvazienergie.

Tato rešeršní práce se zabývá vlastnostmi operátoru speciálního typu a sice

$$K_F(\omega) := -i\partial_t + H + V(\omega t),$$

kde ω je reálné, H je operátor na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, časově nezávislý a předpokládáme, že má čistě bodové spektrum $\sigma(H) = \{H_n | n \in \mathbb{N}\}$. Přičemž každá vlastní hodnota může mít konečný stupeň degenerace. Základním předpokladem je, že tyto vlastní hodnoty jsou od sebe dostatečně vzdáleny ve smyslu, který budeme později precizovat. V(t) bude 2π periodický potenciál dostatečně mnohokrát silně diferencovatelný. Budeme jej vyšetřovat jako poruchu.

Po přeškálování času bude mít neporušený operátor $K := -i\omega\partial_t + H$, působící na $L^2(0, 2\pi) \otimes \mathcal{H}$, spektrum $\omega\mathbb{Z} + H(\mathbb{N})$, které je pro $H(\mathbb{N})$ neomezenou množinu husté v $\mathbb{R}$ pro skoro všechna ω pevná a větší než nula. Takže nelze použít standartní poruchovou teorii.

Jednou z mála známých metod pro důkaz stability spektra (to je zachování vlastnosti čisté bodovosti) vůči časově závislé poruše je kvantový KAM algoritmus o jehož rozvoj se zásadním způsobem zasloužily francouzští matematici J. Bellissard a M.Combescure [2]. P. Duclos a P. Šťovíček se touto problematikou zabývali již ve článku [1].

Snahou této práce je zpracovat látku získanou jednak z cyklu tří přednášek M. Vittota konaných na katedře matematiky FJFI, jednak ze setkání s P. Duclosem při jeho květnové návštěvě, ale hlavně z konzultací u doc.Ing. Pavla Šťovíčka, DrSc., vedoucího této práce. Mezi odlišnosti proti [1] patří absence adiabatické části a připuštění případu konečné degenerace vlastních hodnot H. Hlavním rozdílem je vybudování abstraktního aparátu, který se možná zdá být poněkud složitý a zdlouhavý, ale problém tím získá větší matematickou přehlednost a daří se jej poměrně dlouho držet v obecné rovině.

Text práce je rozčleněn do šesti hlavních částí. V druhé je vybudována induktivní limita a zvláštní prostor pro operátor K, který je obecně neomezený a je proto nutné jej vyšetřovat zvlášť. Těžištěm algebraické části je provedení limity, z které potom plyne i konvergence celého algoritmu v prostoru omezených operátorů na $\mathcal{K}$.

Následuje třetí část, ve které se indukcí konstruují vlastní posloupnosti algoritmu a provede se limitní procedura pro matice. V závěru této části je vyslovena jedna ze stěžejním vět tohoto algoritmu, sice lemma 7. Jeho důkaz je naznačen v prvním dodatku.

Ve čtvrté části se již opět problém vrací zpět do prostoru $\mathcal{K}$. Těžištěm této části je lemma 8 jehož důkazu je věnován druhý dodatek.

V páte části je vyslovena hlavní věta. Jestliže spektrum H vyhovuje podmínkám (28), (29), V(t) je dostatečně hladký a ω není rezonantní ferkvence, tak operátor $K_F(\omega)$ má čistě bodové spektrum.

Závěrem bych rád poděkoval svému školiteli a vedoucímu práce, doc. Ing. Pavlovi Šťovíčkovi, DrSc., za trpělivost při vedení práce a pomoc při konzultacích.

Také bych chtěl poděkovat konzultantům prof. Pierre Duclosovi a dr. Michel Vittotovi z Université de Toulon et du Var, za cenné rady při jejich návštěvách na katedře matematiky FJFI.

V Praze dne 1.6. 2000

Ondřej Lev

2. ABSTRAKTNÍ ČÁST

2.1. Induktivní limita. Nechť $(\mathfrak{X}_s)_{s=0}^{\infty}$ je usměrněná posloupnost lineárních prostorů s normami $\| \|_s$ a nechť existuje omezené lineární zobrazení

$$\iota_{us} : \mathfrak{X}_s \to: \mathfrak{X}_u \text{ pro } s \leq u, \quad a \ |\iota_{us}| \leq 1$$

(ι_{ss} je identické zobrazení).

Předpokládejme, že platí následující řetězové pravidlo:

$$\forall s \leq u \leq v \quad \iota_{vu}\iota_{us} = \iota_{vs}$$

Označme

$$\iota_s := \iota_{s+1,s}$$

Pomocí následujících pomocných pojmů vybudujeme normovanou induktivní limitu prostorů $\mathfrak{X}_s$

$$\widetilde{\mathfrak{X}} := \sum_{s=0}^{\infty}{}^{\oplus} \mathfrak{X}_s = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j / \ n \in \mathbb{N}, \ x_j \in \mathfrak{X}_j \right\}$$

definujme relaci ekvivalence $\sim$ na $\widetilde{\mathfrak{X}}$

$$\sum_{i \in I} x_i \sim \sum_{j \in J} y_j \Leftrightarrow \exists v \geq i, j, \ \forall i \in I, j \in J \quad \sum_{i \in I} \iota_{vi}(x_i) = \sum_{j \in J} \iota_{vj}(y_j)$$

$\widetilde{\widetilde{\mathfrak{X}}} := \widetilde{\mathfrak{X}}/_{\sim}$ Označme $\lceil x \rceil \in \widetilde{\widetilde{\mathfrak{X}}}$ třídu podle ekvivalence $\sim$ obsahující prvek $x \in \widetilde{\mathfrak{X}}$.

Lze snadno nahlédnout, že platí $\lceil x_s \rceil = \{\iota_{us}(x_s)/u \geq s\}$.

Definujme obvyklé sčítání tříd a násobení skalárem jako

$$\alpha \lceil x \rceil + \lceil y \rceil := \lceil \alpha x + y \rceil \quad \textit{pro } \alpha \in \mathbb{C}; \quad x \in \mathfrak{X}_s \ , \ y \in \mathfrak{X}_u; \ u, s \in \mathbb{N}$$

proto $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x_j \in \mathfrak{X}_j$

$$\left\lceil \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rceil = \sum_{j=1}^{n} \lceil x_j \rceil = \sum_{j=1}^{n} \lceil \iota_{nj}(x_j) \rceil = \left\lceil \sum_{j=1}^{n} \iota_{nj}(x_j) \right\rceil$$

z čehož plyne, že

$$\widetilde{\widetilde{\mathfrak{X}}} = \{\lceil x_s \rceil / s \in \mathbb{N} \ x_s \in \mathfrak{X}_s\}.$$

Dále definujme seminormu p na $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{X}}}$

$$p(\lceil x_s \rceil) := \limsup_{u \geq s} \|\iota_{us}(x_s)\|_u$$

zřejmě p($\lceil x_s \rceil$)$\leq \|x_s\|_s$

(poznámka: p je definováno korektně a splňuje vlastnosti seminormy .)

Definujme

$$M := \left\{ \lceil x \rceil \in \widetilde{\widetilde{\mathfrak{X}}} / \ p(\lceil x \rceil) = 0 \right\}$$

M je nulový podprostor seminormy p.

Položme ještě

$$\mathfrak{X} := \widetilde{\widetilde{\mathfrak{X}}}/_M = \{\lceil \lceil x_s \rceil \rceil / x_s \in \mathfrak{X}_s\}$$

$$\| \lceil \lceil x_s \rceil \rceil \|_{\mathfrak{X}} := p(\lceil x_s \rceil) = \limsup_{u \geq s} \|\iota_{us}(x_s)\|_u$$

pozn: $\lceil\lceil\rceil\rceil$ znamená druhou třídu podle ekvivalence. Lze ověřit, že na tomto prostoru je p norma, nezávisí na výběru reprezentantu z obou tříd a je též omazená $\| \|_s$.

Získaný normovaný prostor

$$(\mathfrak{X}, \| \|_{\mathfrak{X}}) = lim\, norm_{\rightarrow} \{\mathfrak{X}_s, \iota_{us}\}$$

nazveme normovanou algebraickou limitou naší usměrněné posloupnosti Banachových prostorů.

Definujme omezené zobrazení spojující jednotlivé prostory z posloupnosti s induktivní limitou

$$\iota_{\infty s} : \mathfrak{X}_s \rightarrow \mathfrak{X} \quad \iota_{\infty s}(x_s) := \lceil\lceil x_s \rceil\rceil \quad |\iota_{\infty s}| \leq 1$$

a platí

$$\forall u \geq s \ \ \iota_{\infty u}\iota_{us} = \iota_{\infty s}$$

Buď $\{A_s \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}_s)\}_{s=s_0}^{\infty}$ množina omezených operátorů na $\mathfrak{X}_s$ definovaných pro $s \geq s_0$

splňujících

$$A_s\iota_{su} = \iota_{su}A_u \text{ pro } s_0 \leq s \leq u, \ \sup_{s \geq s_0} |A_s| < \infty$$

pak $\exists_1$ $A_\infty \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ s vlastností $A_\infty \iota_{\infty s} = \iota_{\infty s} A_s$ $\forall\ s \geq s_0$.

Explicitně lze vyjádřit

$$A_\infty(\lceil\lceil x_s \rceil\rceil) = \iota_{\infty s} A_s\, (x_s)$$

Platí:

$$\begin{aligned}
\|A_\infty(\lceil\lceil x_s \rceil\rceil)\|_{\mathfrak{X}} &= \|\iota_{\infty s}\, (A_s x_s)\|_{\mathfrak{X}} = \| \lceil\lceil A_s x_s \rceil\rceil \|_{\mathfrak{X}} = \limsup_{u \geq s} \|\iota_{us}(A_s x_s)\|_u \\
&= \limsup_{u \geq s} \|A_u\, (\iota_{us} x_s)\|_u \leq \sup_{v \geq s_0} |A_v| \, \limsup_{u \geq s} \|\iota_{us} x_s\|_u \\
&= \sup_{v \geq s_0} |A_v| \, \| \lceil\lceil x_s \rceil\rceil \|_{\mathfrak{X}} \,.
\end{aligned}$$

Získali jsme tedy odhad normy

$$|A_\infty| \leq \sup_{u \geq s_0} |A_u|$$

Protože obecně není prostor $\mathfrak{X}$, Banachův zúplníme jej. Existuje tedy Banachův prostor $(\mathfrak{X}_\infty, \| \|)$ s vlastnostmi: $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_\infty$, $\forall x \in \mathfrak{X}$ $\|x\| = \|x\|_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}$ je hustý v $(\mathfrak{X}_\infty, \| \|)$

V dalším budeme zobrazení $\iota_{\infty s}$ chápat jako zobrazení z $\mathfrak{X}_s$ *do* $\mathfrak{X}_\infty$.

Prostor

$$(\mathfrak{X}_\infty, \| \|)$$

nazveme zúplněnou induktivní limitou.

Máme-li dáno zobrazení $A_\infty \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$, můžeme jej spojitě rozšířit na celý prostor $\mathfrak{X}_\infty$.

Takže shrneme-li: pro výše uvedenou posloupnost operátorů A_s existuje právě jeden operátor s vlastnostmi:

$$\widetilde{A_\infty} \in \mathcal{B}\,(\mathfrak{X}_\infty) : \ \widetilde{A_\infty}\iota_{\infty s} = \iota_{\infty s} A_s \ \forall s \geq s_0, \ \left|\widetilde{A_\infty}\right| \leq \sup_{u \geq s_0} |A_u| \tag{1}$$

Operátor s těmito vlastnostmi nazveme induktivní limitou posloupnosti operátorů A_s .

2.2. **Rozšíření.** Nechť pro každé $s \geq 0$ je dána množina Ω_s, podmnožina reálné přímky. $\Omega_s \subset \mathbb{R}$. Tyto množiny ať jsou v následujícím vztahu

$$\Omega_{s+1} \subset \Omega_s \ \text{ pro } s \geq 0$$

Označme

$$\Omega_\infty := \bigcap_{s=0}^{\infty} \Omega_s$$

a předpokládejme, že Ω_∞ je neprázdná.

Nechť K_0 je nějaká vektorová funkce definovaná na Ω_0. To znamená, že je definováno zobrazení do nějakého (zatím libovolného) lineárního prostoru $\mathcal{Z}$

$$K_0 : \Omega_0 \to \mathcal{Z} \quad \omega \mapsto K_0(\omega) \in \mathcal{Z}$$

Definujme

$$K_s := K_0/_{\Omega_s} \ tedy \ K_s : \Omega_s \to \mathcal{Z} \ a \ K_s(\omega) = K_0(\omega) \ \forall \omega \in \Omega_s .$$

A stejně i K_∞ pro $s := \infty$.

Tyto vektorové funkce se tedy liší pouze svým definičním oborem.

Definujme násobení vektorové funkce skalárem αK_s pro $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha K_s : \Omega_s \to \mathcal{Z} \quad (\alpha K_s)(\omega) := \alpha \, K_s(\omega) \in \mathcal{Z}$$

Označme

$$\mathbb{C}K_s := \{\alpha K_s / \alpha \in \mathbb{C}\}$$

jednorozměrný komplexní lineární prostor s bází K_s.

Rozšiřme nyní prostory a dodefinujme zobrazení následovně :

$$\widetilde{\iota_{us}} : \mathbb{C}K_s \oplus \mathfrak{X}_s \to \mathbb{C}K_u \oplus \mathfrak{X}_u$$

$$\widetilde{\iota_{us}}(\alpha K_s + x_s) := \alpha K_u + \iota_{us}(x_s) \ \text{ pro } \ \alpha \in \mathbb{C},\ u \geq s \geq 0,\ x_s \in \mathfrak{X}_s$$

Zřejmě bude znovu platit

$$\widetilde{\iota_{vu}} \widetilde{\iota_{us}} = \widetilde{\iota_{vs}} \ \text{ pro } s \leq u \leq v.$$

Podobně rozšíříme i definice $\iota_{\infty s}$ na $\mathbb{C}K_s \oplus \mathfrak{X}_s \to \mathbb{C}K_\infty \oplus \mathfrak{X}_\infty$

$$\widetilde{\iota_{\infty u}}(K_u) := K_\infty$$

a v dalším si vlnku odpustíme.

2.3. **Konvergence v algebraické části.** Nechť $\mathcal{D} \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\infty)$ je induktivní limita operátorů $\mathcal{D}_s \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}_s)$ s vlastnostmi:

$$|\mathcal{D}_s| \leq 1, \ |1 - \mathcal{D}_s| \leq 1, \quad \mathcal{D}\iota_{\infty s} = \iota_{\infty s}\mathcal{D}_s \quad \forall s. \tag{2}$$

Lemma 1. *Předpokládejme, že jsou dány posloupnosti* $\{V_s\}_{s=o}^{\infty}$, $\{W_s\}_{s=0}^{\infty}$ $V_s, W_s \in \mathfrak{X}_s$ *a posloupnost zobrazení* $\{\Theta_u^s\}_{u=s}^{\infty}$ *definovaných na* $\mathbb{C}K_{u+1} \oplus \mathfrak{X}_{u+1}$ *s hodnotami v* $\mathfrak{X}_{u+1}$

(tedy i $\Theta_u^s(K_{u+1}) \in \mathfrak{X}_{u+1}$ *pro* $s \leq u$ *).*

Navíc $\Theta_u^s/_{\mathfrak{X}_{u+1}}$ *nechť je omezené a*

$$\Theta_v^s \, \iota_{v+1,u+1} = \iota_{v+1,u+1} \, \Theta_u^s \quad pro \ s \leq u \leq v.$$

Položme $V_{-1} = 0$, $W_{-1} = 0$, $T_{-1} = 1 : \mathbb{C}K_0 \oplus \mathfrak{X}_0 \to \mathbb{C}K_0 \oplus \mathfrak{X}_0$ *a*

$$T_s := e^{\Theta_s^s} e^{\Theta_s^{s-1}} \dots e^{\Theta_s^0} : \mathbb{C}K_{s+1} \oplus \mathfrak{X}_{s+1} \to \mathbb{C}K_{s+1} \oplus \mathfrak{X}_{s+1} \quad pro \ s \geq 0 . \tag{3}$$

Kde $e^{\Theta_u^s}$ *je na* K_{u+1} *definováno*

$$e^{\Theta_u^s}(K_{u+1}) := K_{u+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\Theta_u^s)^j}{(j+1)!} (\Theta_u^s(K_{u+1}))$$

Nechť platí následující rekurzívní vztahy:

$$\begin{aligned}
W_0 &= V_0, \\
W_{s+1} &= \iota_s(W_s) + T_s(V_{s+1} - \iota_s(V_s)) \qquad (4)\\
&\quad + \left(e^{\Theta_s^s} - \frac{e^{\Theta_s^s} - 1}{\Theta_s^s}\right) \iota_s\,(1 - \mathcal{D}_s)(W_s - \iota_{s-1}(W_{s-1})), \\
\Theta_s^s(\,\iota_s\,(K_s + \mathcal{D}_s(W_s)\,)) &= -\iota_s\,(1 - \mathcal{D}_s)(W_s - \iota_{s-1}(W_{s-1})), \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Potom platí

$$T_{s-1}(K_s + V_s) = K_s + \mathcal{D}_s(W_s) + (1 - \mathcal{D}_s)(W_s - \iota_{s-1}(W_{s-1})), \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (6)$$

Důkaz: Indukcí podle s. Pro $s = 0$ je to zřejmé. Indukční krok $s \to s + 1$:

$$\begin{aligned}
T_s(K_{s+1} + V_{s+1}) &= T_s\iota_s(K_s + V_s) + T_s(V_{s+1} - \iota_s(V_s)) \\
&= e^{\Theta_s^s}\,\iota_s\,T_{s-1}(K_s + V_s) + T_s(V_{s+1} - \iota_s(V_s)) \\
&= e^{\Theta_s^s}\,\iota_s\,(K_s + \mathcal{D}_s(W_s) + (1 - \mathcal{D}_s)(W_s - \iota_{s-1}(W_{s-1}))) \\
&\quad + T_s(V_{s+1} - \iota_s(V_s)) \\
&= \iota_s(K_s + \mathcal{D}_s(W_s)) + \frac{e^{\Theta_s^s} - 1}{\Theta_s^s}\Theta_s^s\,\iota_s\,(K_s + \mathcal{D}_s(W_s)) \\
&\quad + e^{\Theta_s^s}\,\iota_s\,(1 - \mathcal{D}_s)(W_s - \iota_{s-1}(W_{s-1})) + T_s(V_{s+1} - \iota_s(V_s)) \\
&= K_{s+1} - (1 - \mathcal{D}_{s+1})\iota_s(W_s) + \iota_s(W_s) + T_s(V_{s+1} - \iota_s(V_s)) \\
&\quad + \left(e^{\Theta_s^s} - \frac{e^{\Theta_s^s} - 1}{\Theta_s^s}\right) \iota_s\,(1 - \mathcal{D}_s)(W_s - \iota_{s-1}(W_{s-1})) \\
&= K_{s+1} - (1 - \mathcal{D}_{s+1})\iota_s(W_s) + W_{s+1} \\
&= K_{s+1} + \mathcal{D}_{s+1}(W_{s+1}) + (1 - \mathcal{D}_{s+1})(W_{s+1} - \iota_s(W_s))\,.
\end{aligned}$$

Poznámka : (Podle 5)

$$\Theta_u^s\,(K_{u+1}) = \Theta_u^s\,(\iota_{u+1,s+1}\,\iota_s K_s) = \iota_{u+1,s+1}\,\Theta_s^s\,(\iota_s K_s) \in \mathfrak{X}_{u+1}$$

Definujme

$$\phi(x) = \frac{1}{x}\left(e^x - \frac{e^x - 1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{(k+2)!}\,x^k\,.$$

Lemma 2. *Předpokládejme, že posloupnosti $\{V_s\}_{s=0}^{\infty}$, $\{W_s\}_{s=0}^{\infty}$ and $\{\Theta_u^s\}_{u=s}^{\infty}$ jsou stejné jako v lemmatu 1 .*

Označme

$$v_s = |V_s - \iota_{s-1}(V_{s-1})|,\ w_s = |W_s - \iota_{s-1}(W_{s-1})|$$

(kde $v_0 = |V_0|$, $w_0 = |W_0|$). Dále nechť existuje posloupnost kladných čísel, $\{F_s\}_{s=0}^{\infty}$,taková že

$$|\Theta_u^s/_{\mathfrak{X}_{u+1}}| \le F_s w_s, \quad \forall s, u \;\; u \ge s, \qquad (7)$$

konstanta $A \ge 0$, že

$$F_s v_s^2 \le A\,v_{s+1},\ \forall s, \qquad (8)$$

a platí

$$B \;\; = \textstyle\sum_{s=0}^{\infty} F_s v_s < \infty. \qquad (9)$$

Označme

$$C = \sup_s F_s v_s$$

($C < \infty$ podle (9)). Jestliže $d > 0$ vyhovuje nerovnici

$$e^{dB} + A\phi(dC)\, d^2 \leq d \tag{10}$$

potom

$$w_s \leq d\, v_s, \ \forall s. \tag{11}$$

Důkaz. Provedeme indukcí podle s . Pro $s = 0$ je $v_0 = w_0 = |V_0|$ a (11) platí protože (10) implikuje, že $d \geq 1$. Indukční krok $s \to s+1$: podle (4), (3), (2) a (10), a s využitím monotonie $\phi(x)$ dostaneme

$$\begin{aligned} w_{s+1} &\leq |T_s|\, v_{s+1} + \phi(\Theta^s_s/_{\mathfrak{x}_{s+1}}|)|\Theta^s_s/_{\mathfrak{x}_{s+1}}|\, w_s \\ &\leq \exp\left(\sum_{j=0}^{s} F_j w_j\right) v_{s+1} + \phi(F_s w_s) F_s w_s^2 \\ &\leq \exp\left(d\sum_{j=0}^{s} F_j v_j\right) v_{s+1} + \phi(d\, F_s v_s) F_s d^2 v_s^2 \\ &\leq e^{dB} v_{s+1} + \phi(dC) d^2 A\, v_{s+1} \\ &\leq d\, v_{s+1}. \end{aligned}$$

□

Poznámka [P. Duclos] Pro

$$B \leq \frac{1}{3}\ln 2 \quad \text{a} \quad A\,\phi(3C) \leq \frac{1}{9}$$

nerovnost (10) platí pro $d = 3$.

Připomeňme, že $\Theta^s_\infty/_{\mathfrak{x}_\infty} \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\infty)$ je induktivní limita operátorů Θ^s_u s vlastností

$$(\Theta^s_\infty/_{\mathfrak{x}_\infty})(\iota_{\infty,u+1}/_{\mathfrak{x}_{u+1}}) = (\iota_{\infty,u+1}/_{\mathfrak{x}_{u+1}})(\Theta^s_u/_{\mathfrak{x}_{u+1}}), \ \forall u \geq s.$$

Díky (7) a (1) může být jeho norma odhadnuta výrazem

$$|\Theta^s_\infty/_{\mathfrak{x}_\infty}| \leq F_s w_s. \tag{12}$$

Lemma 3. *Jestliže existuje $d > 0$ takové, že podmínka (10) je splněna a navíc*

$$F_{\inf} = \inf_s F_s > 0$$

potom existují limity v úplném prostoru $\mathfrak{X}_\infty$

$$V' := \lim_{s\to\infty} \iota_{\infty s}(V_s) \quad W := \lim_{s\to\infty} \iota_{\infty s}(W_s)$$

a limita

$$T = \lim_{s\to\infty} e^{\Theta^s_\infty/_{\mathfrak{x}_\infty}} \dots e^{\Theta^0_\infty/_{\mathfrak{x}_\infty}}$$

jako zobrazení z $\mathcal{B}(\mathfrak{X}_\infty)$.

Důkaz. Pro $u \geq s$

$$|\iota_{\infty u}(V_u) - \iota_{\infty s}(V_s)| = \left|\sum_{j=s+1}^{u} \iota_{\infty j}(V_j - \iota_{j-1}(V_{j-1}))\right| \leq \sum_{j=s+1}^{u} v_j$$

Protože

$$\sum_{s=0}^{\infty} v_s \leq \frac{1}{F_{\inf}} \sum_{s=0}^{\infty} F_s v_s < \infty$$

je posloupnost $\{\iota_{\infty s}(V_s)\}$ Cauchyovská. Díky (11) je posloupnost $\{\iota_{\infty s}(W_s)\}$ také Cauchyovská. Proto v úplném $\mathfrak{X}_\infty$ limity existují.

Položme

$$\tilde{T}_s = e^{\Theta_\infty^{s-1}/\mathfrak{x}_\infty} \dots e^{\Theta_\infty^0/\mathfrak{x}_\infty} \quad \text{pro } s \geq 1$$

Jestliže $u \geq s$ potom podle (12) a (11), dostáváme

$$\begin{aligned} |\tilde{T}_u - \tilde{T}_s| &\leq \left(\exp\left(\sum_{j=s}^{u-1} |\Theta^j_{\infty/\mathfrak{x}_\infty}| \right) - 1 \right) \exp\left(\sum_{j=0}^{s-1} |\Theta^j_{\infty/\mathfrak{x}_\infty}| \right) \\ &\leq \exp\left(d \sum_{j=0}^{u-1} F_j v_j \right) - \exp\left(d \sum_{j=0}^{s-1} F_j v_j \right). \end{aligned}$$

Z předpokladu (9) vyplývá, že $\{\tilde{T}_s\}$ je Cauchyovská posloupnost v $\mathcal{B}(\mathfrak{X}_\infty)$ a proto $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\infty)$ existuje.

□

Důsledek: Zachováme-li předpoklady předcházejících tvrzení, tak existuje číslo $\alpha > 0$, takové že

$$\forall s \geq 0 \quad |W_s|_s \leq \alpha$$

Důkaz. $\forall j \geq 0$ platí

$$|W_j|_j - |W_{j-1}|_{j-1} \leq |W_j|_j - |\iota_{j-1}(W_{j-1})|_j \leq |W_j - \iota_{j-1}(W_{j-1})|_{j-1} = w_j \leq d v_j$$

Z toho plyne odhad

$$\begin{aligned} |W_s|_s &= \sum_{j=1}^{s} \left(|W_j|_j - |W_{j-1}|_{j-1} \right) + |W_0| \\ &\leq d \sum_{j=1}^{s} v_j + |V_0|_0 \leq d \frac{1}{F_{inf}} \sum_{j=0}^{\infty} F_j v_j + v_0 \\ &\leq \frac{dB}{F_{inf}} + v_0 =: \alpha \end{aligned}$$

□

Lemma 4. *Při zachování dosavadního označení a předpokladů platí, že posloupnost* $\left\{ \widetilde{T_s}(K_\infty) - K_\infty \right\}$ *kde*

$$\widetilde{T_s}(K_\infty) := e^{\Theta_\infty^{s-1}} \dots e^{\Theta_\infty^0}(K_\infty)$$

je Cauchyovská posloupnost v $\mathfrak{X}_\infty$

Důkaz. Díky známým vlastnostem Θ_∞^s a $\iota_{\infty s}$ máme $\forall s$

$$\Theta_\infty^s(K_\infty) = \Theta_\infty^s(\iota_{\infty,s+1} K_{s+1}) = \iota_{\infty,s+1} \Theta_s^s(\iota_s K_s) \tag{13}$$

a díky *(5) zase*

$$\begin{aligned} \Theta_s^s(\iota_s K_s) &= \Theta_s^s(\iota_s\ (K_s + \mathcal{D}_s(W_s))) - \Theta_s^s(\iota_s(\mathcal{D}_s(Ws))) \\ &= -\iota_s\ (1 - \mathcal{D}_s)(W_s - \iota_{s-1}(W_{s-1})) - \Theta_s^s(\iota_s(\mathcal{D}_s(W_s))) \end{aligned}$$

takže podle (7), (13) a (2) získáme odhad normy

$$\|\Theta^s_\infty(K_\infty)\| = \|\iota_{\infty,s+1}\Theta^s_s(K_{s+1})\| \leq 1\, w_s + |\Theta^s_s/\mathfrak{x}_{s+1}|\ \|W_s\|_s \leq w_s + \|W_s\|_s\ F_s w_s \qquad (14)$$

Protože

$$\forall x \geq 0 \quad \frac{e^x-1}{x} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n \leq e^x$$

a $\Theta^s_\infty(K_\infty) \in \mathfrak{X}_\infty$

$$\begin{aligned}
\left\| e^{\Theta^{s-1}_\infty}(K_\infty) - K_\infty \right\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left\| (\Theta^{s-1}_\infty)^n \left(\Theta^{s-1}_\infty(K_\infty)\right) \right\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} |\Theta^{s-1}_\infty/\mathfrak{x}_\infty|^n \left\|\Theta^{s-1}_\infty(K_\infty)\right\| \\
&\leq e^{|\Theta^{s-1}_\infty/\mathfrak{x}_\infty|} \left\|\Theta^{s-1}_\infty(K_\infty)\right\|
\end{aligned}$$

Protože pro každou konečnou posloupnost lineárních zobrazení na libovolném lineárním prostoru platí

$$\begin{aligned}
a_j \ldots a_0 - 1 &= a_j \ldots a_1\ (a_0 - 1) + \\
&+ a_j \ldots a_2\ (a_1 - 1) + \\
&+ \cdots + (a_j - 1)
\end{aligned}$$

je podle předchozích odhadů

$$\begin{aligned}
\left\| e^{\Theta^{s-1}_\infty} \ldots e^{\Theta^0_\infty}(K_\infty) - K_\infty \right\| &= \|\ e^{\Theta^{s-1}_\infty} \ldots e^{\Theta^1_\infty}\left(e^{\Theta^0_\infty}(K_\infty) - K_\infty\right) + \\
&\quad + e^{\Theta^{s-1}_\infty} \ldots e^{\Theta^2_\infty}\left(e^{\Theta^1_\infty}(K_\infty) - K_\infty\right) + \\
&\quad + \cdots + \left(e^{\Theta^{s-1}_\infty}(K_\infty) - K_\infty\right) \| \\
&\leq e^{|\Theta^{s-1}_\infty/\mathfrak{x}_\infty|} \ldots e^{|\Theta^1_\infty/\mathfrak{x}_\infty|}\, e^{|\Theta^0_\infty/\mathfrak{x}_\infty|} \left\|\Theta^o_\infty(K_\infty)\right\| \\
&\quad + \cdots + e^{|\Theta^{s-1}_\infty/\mathfrak{x}_\infty|} \left\|\Theta^{s-1}_\infty(K_\infty)\right\|
\end{aligned}$$

Takže pro $t > s$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{T}_t\left(K_\infty\right) - \widetilde{T}_s\left(K_\infty\right)\right| &= \left\|e^{\Theta_\infty^{t-1}} \dots e^{\Theta_\infty^{0}}\left(K_\infty\right) - e^{\Theta_\infty^{s-1}} \dots e^{\Theta_\infty^{0}}\left(K_\infty\right)\right\| \\
&\leq \left\|(e^{\Theta_\infty^{t-1}} \dots e^{\Theta_\infty^{s}} - 1)(e^{\Theta_\infty^{s-1}} \dots e^{\Theta_\infty^{0}}\left(K_\infty\right) - K_\infty + K_\infty)\right\| \\
&\leq \left(e^{|\Theta_\infty^{t-1}/\mathfrak{x}_\infty| \dots + |\Theta_\infty^{s}/\mathfrak{x}_\infty|} - 1\right) \left\|e^{\Theta_\infty^{s-1}} \dots e^{\Theta_\infty^{0}}\left(K_\infty\right) - K_\infty\right\| \\
&\quad + \left\|e^{\Theta_\infty^{t-1}} \dots e^{\Theta_\infty^{s}}\left(K_\infty\right) - K_\infty\right\| \\
&\leq \left(\exp\left(\sum_{j=s}^{t-1} |\Theta_\infty^{j}/\mathfrak{x}_\infty|\right) - 1\right) \times \\
&\quad \times \left\{\exp\left(\sum_{j=0}^{s-1} |\Theta_\infty^{j}/\mathfrak{x}_\infty|\right) \left\|\Theta_\infty^{0}\left(K_\infty\right)\right\| + \dots + e^{|\Theta_\infty^{s-1}/\mathfrak{x}_\infty|} \left\|\Theta_\infty^{s-1}\left(K_\infty\right)\right\|\right\} \\
&\quad + \left(\exp\left(\sum_{j=s}^{t-1} |\Theta_\infty^{j}/\mathfrak{x}_\infty|\right) \left\|\Theta_\infty^{s}\left(K_\infty\right)\right\| + \dots + e^{|\Theta_\infty^{t-1}/\mathfrak{x}_\infty|} \left\|\Theta_\infty^{t-1}\left(K_\infty\right)\right\|\right) \\
&\leq \left(\exp\left(\sum_{j=s}^{t-1} |\Theta_\infty^{j}/\mathfrak{x}_\infty|\right) - 1\right) \exp\left(\sum_{j=0}^{s-1} |\Theta_\infty^{j}/\mathfrak{x}_\infty|\right) \left(\sum_{j=0}^{s-1} \left\|\Theta_\infty^{j}\left(K_\infty\right)\right\|\right) \\
&\quad + \exp\left(\sum_{j=s}^{t-1} |\Theta_\infty^{j}/\mathfrak{x}_\infty|\right) \left(\sum_{j=s}^{t-1} \left\|\Theta_\infty^{j}\left(K_\infty\right)\right\|\right)
\end{aligned}$$

Ale protože podle (12), (11) a (9)

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\Theta_\infty^{j}/\mathfrak{x}_\infty| \leq d \sum_{j=0}^{\infty} F_j\, v_j = d\, B < \infty$$

a podle (14), (11) a (9) a předpokladu lemmatu 4 máme

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \left\|\Theta_\infty^{j}\left(K_\infty\right)\right\| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(w_j + \left\|W_j\right\|_j F_j\, w_j\right) \leq d \sum_{j=0}^{\infty} v_j + \alpha\, d \sum_{j=0}^{\infty} F_j\, v_j \\
&\leq \frac{d}{F_{inf}} B + \alpha\, d\, B < \infty
\end{aligned}$$

takže posloupnost je Cauchyovská

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{T}_t\left(K_\infty\right) - \widetilde{T}_s\left(K_\infty\right)\right| &\leq \left(\exp\left(\sum_{j=s}^{t-1} \left\|\Theta_\infty^{j}\left(K_\infty\right)\right\|\right) - 1\right) e^{d\, B} \left(\frac{1}{F_{inf}} + \alpha\right) d\, B \\
&\quad + \exp\left(\sum_{j=s}^{t-1} \left\|\Theta_\infty^{j}\left(K_\infty\right)\right\|\right) \sum_{j=s}^{t-1} \left\|\Theta_\infty^{j}\left(K_\infty\right)\right\|
\end{aligned}$$

□

Závěr: Předpokládejme, že zůstanou v platnosti předpoklady lemmatu 1, 2 a 3.

Podle tvrzení lemmatu 3 existují limity v úplném prostoru $\mathfrak{X}_\infty$

$$V' = \lim_{s\to\infty} \iota_{\infty s}(V_s) \quad W = \lim_{s\to\infty} \iota_{\infty s}(W_s)$$

a limita $\widetilde{T_s}$ jako zobrazení z $\mathcal{B}(\mathfrak{X}_\infty)$ do L^∞

$$T = \lim_{s\to\infty} e^{\Theta_\infty^{s-1}/x_\infty} \dots e^{\Theta_\infty^0/x_\infty}$$

Dodefinujme nyní T na prostoru $\mathbb{C}K_\infty$ lineárně a položme

$$T(K_\infty) := \lim_{s\to\infty}\left(e^{\Theta_\infty^{s-1}} \dots e^{\Theta_\infty^0}\,(K_\infty) - K_\infty\right) + K_\infty$$

což je prvek prostoru $\mathbb{C}K_\infty \otimes \mathfrak{X}_\infty$, protože posloupnost $\left\{\left(e^{\Theta_\infty^{s-1}} \dots e^{\Theta_\infty^0}\,(K_\infty) - K_\infty\right)\right\}$ je Cauchy-ovská v úplném prostoru $\mathfrak{X}_\infty$. Tudíž má smysl definovat limitu

$$T = \lim_{s\to\infty} \widetilde{T_s} \quad : \mathbb{C}K_\infty \oplus \mathfrak{X}_\infty \to \mathbb{C}K_\infty \oplus \mathfrak{X}_\infty$$

Protože však podle (6) platí, že

$$\begin{aligned}
\widetilde{T_s}(K_\infty + \iota_{\infty s}V_s) &= e^{\Theta_\infty^{s-1}} e^{\Theta_\infty^{s-2}} \dots e^{\Theta_\infty^0}\,(\iota_{\infty s}(K_s + V_s)) \\
&= \iota_{\infty s}\, e^{\Theta_{s-1}^{s-1}} e^{\Theta_{s-1}^{s-2}} \dots e^{\Theta_s^0}\,(K_s + V_s) \\
&= \iota_{\infty s} T_{s-1}(K_s + V_s) \\
&= \iota_{\infty s}\left\{K_s + \mathcal{D}_s(W_s) + (1-\mathcal{D}_s)(W_s - \iota_{s-1}(W_{s-1}))\right\} \\
&= K_\infty + \mathcal{D}(\iota_{\infty s}W_s) + (1-\mathcal{D})(\iota_{\infty s}(W_s) - \iota_{\infty,s-1}(W_{s-1})) \qquad (15)
\end{aligned}$$

a přejdeme-li k limitě $s \to \infty$ dostáváme konečný výraz.

$$T(K_\infty + V') = K_\infty + \mathcal{D}(W)$$

Kde rovnost platí v $\mathbb{C}K_\infty \otimes \mathfrak{X}_\infty$

2.4. **O zobrazení Gama.**

2.4.1. *Úvod.* Předpokládejme, že $\dim \mathfrak{X} < \infty$, $\dim \mathfrak{Y} < \infty$ (Toto $\mathfrak{X}$ neznamená pomocný prostor při definici induktivní limity.), $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, A i B jsou hermitovské a $V \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Jestliže γ je jednoduchá uzavřená a kladně orientovaná křivka v komplexní rovině, taková že Spec(A) leží ve vnitřku γ zatímco Spec(B) leží v jeho doplňku. Tak potom rovnice

$$AW - WB = V$$

má řešení $W \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ definované vztahem

$$W = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\gamma (A-z)^{-1}V(B-z)^{-1}dz\,. \qquad (16)$$

Ověření.

$$\begin{aligned}
AW - WB &= \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\gamma (A-z)^{-1}(AV - VB)(B-z)^{-1}dz \\
&= \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\gamma \left(V(B-z)^{-1} - (A-z)^{-1}V\right)\,dz \\
&= 0 + \frac{\imath}{2\pi}\left(\oint_\gamma (A-z)^{-1}dz\right)V \\
&= V\,.
\end{aligned}$$

Označme $M_1 = \dim \mathfrak{X}$, $M_2 = \dim \mathfrak{Y}$. V dalším využijeme dva následující odhady normy $X \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$:

$$|X|^2 \leq \sum_{i=1}^{M_2}\sum_{j=1}^{M_1} |X_{ij}|^2 = \operatorname{Tr} X^* X \quad (\text{Hilbert} - \text{Schmidtova norma}), \tag{17}$$

$$|X|^2 \geq \max\left(\max_{1\leq i\leq M_2} \sum_{j=1}^{M_1} |X_{ij}|^2, \max_{1\leq j\leq M_1} \sum_{i=1}^{M_2} |X_{ij}|^2\right), \tag{18}$$

kde (X_{ij}) jsou složky matice X v libovolných ortonormálních bazích $\mathfrak{X}$ a $\mathfrak{Y}$.

Tvrzení.

Jestliže $\sup \operatorname{Spec}(A) < \inf \operatorname{Spec}(B)$ pak

$$|W| \leq \frac{|V|}{\operatorname{dist}(\operatorname{Spec}(A), \operatorname{Spec}(B))},$$

v opačném případě, kdy $\operatorname{Spec}(A)$ a $\operatorname{Spec}(B)$ jsou promíchána,

$$|W| \leq (\dim \mathfrak{X} \wedge \dim \mathfrak{Y})^{1/2} \frac{|V|}{\operatorname{dist}(\operatorname{Spec}(A), \operatorname{Spec}(B))}.$$

Důkaz. (1) Pro $d = \inf \operatorname{Spec}(B) - \sup \operatorname{Spec}(A) > 0$ po obvyklé limitní proceduře za křivku γ v (16) zvolíme přimku rovnoběžnou s imaginární osou, která reálnou osu protne

v bodu $x_0 = (\sup \operatorname{Spec}(A) + \inf \operatorname{Spec}(B))/2$.

Takže

$$\begin{aligned} |W|^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |(A - x_0 - \imath s)^{-1}||V||(B - x_0 - \imath s)^{-1}| \, ds \\ &= \frac{|V|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + s^2} \\ &= \frac{|V|}{d}. \end{aligned}$$

Kde jsme použili $|(A - z)^{-1}| = \operatorname{dist}(z, \operatorname{Spec}(A))^{-1}$.

(2) V druhém případě zvolíme báze v $\mathfrak{X}$ a $\mathfrak{Y}$ tak, aby A a B v nich vyjádřené byly diagonální, $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{M_2})$ a $B = (b_1, \ldots, b_{M_1})$. Označme $d := \operatorname{dist}(\operatorname{Spec}(A), \operatorname{Spec}(B))$. Potom $W_{ij} = V_{ij}/(a_i - a_j)$, a použijeme-li (17), (18) dostáváme odhad:

$$\begin{aligned} |W|^2 &\leq \sum_{i=1}^{M_2}\sum_{j=1}^{M_1} \left|\frac{V_{ij}}{a_i - b_j}\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{M_2}\sum_{j=1}^{M_1} \frac{|V_{ij}|^2}{d^2} \\ &\leq \sum_{i=1}^{M_2} \frac{|V|^2}{d^2} = M_2 \frac{|V|^2}{d^2}. \end{aligned}$$

A symetricky, $|W| \leq M_1^{1/2}|V|/d$, z čehož plyne požadované. □

2.4.2. *Volba normy.* Nechť

$$\mathcal{H} = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{H}_n$$

je rozklad Hilbertova prostoru na direktní součet konečnědimenzionálních podprostorů a $J \subset \mathbb{R}$. Pro libovolnou dvojici kladných reálných čísel ϕ a E definujeme prostor

$$\mathfrak{A} \subset L^\infty\left(J \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{L}(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)\right)$$

jehož prvky tvoří matice se složkami

$$\mathcal{V}_{knm}(\omega) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)$$

které mají konečnou normu

$$\|\mathcal{V}\| = \sup_{\substack{\omega,\omega' \in J \\ \omega \neq \omega'}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(|\mathcal{V}_{knm}(\omega)| + \phi\, |\partial\mathcal{V}_{knm}(\omega,\omega')|\right) e^{|k|/E}$$

kde ∂ označuje operátor diference

$$\partial\mathcal{V}(\omega,\omega') = \frac{\mathcal{V}(\omega) - \mathcal{V}(\omega')}{\omega - \omega'}\,. \tag{19}$$

Poznamenejme, že pro takovýto operátor platí pravidlo

$$\partial(\mathcal{U}\mathcal{V})(\omega,\omega') = \partial\mathcal{U}(\omega,\omega')\,\mathcal{V}(\omega') + \mathcal{U}(\omega)\partial\mathcal{V}(\omega,\omega')\,. \tag{20}$$

a že podle naší notace pro každou dvojici $(\omega,k) \in J \times \mathbb{Z}$ a každý dvojindex $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, je $\mathcal{V}_{knm}(\omega)$ prvek prostoru $\mathcal{L}(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)$.

Tvrzení.

Takto definovaný normovaný prostor $\mathfrak{A}$ tvoří normovanou algebru s násobením

$$(\mathcal{U}\mathcal{V})_{knm}(\omega) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{k-\ell,n,p}(\omega)\,\mathcal{V}_{\ell pm}(\omega)\,. \tag{21}$$

Důkaz. Je třeba dokázat, že

$$\|\mathcal{U}\mathcal{V}\| \le \|\mathcal{U}\|\,\|\mathcal{V}\|\,. \tag{22}$$

Pro jednoduchost označme (v tomto důkazu)

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_p(\omega) &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} |\mathcal{V}_{\ell pm}(\omega)|\, e^{|\ell|/E}, \\ \partial\mathcal{X}_p(\omega,\omega') &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} |\partial\mathcal{V}_{\ell pm}(\omega,\omega')|\, e^{|\ell|/E}. \end{aligned}$$

Zde $\partial\mathcal{X}$ je pouze označení, které nemá význam ∂ z $\mathcal{X}$. Platí

$$\begin{aligned} &\sum_k \sum_m |(\mathcal{U}\mathcal{V})_{knm}(\omega)|\, e^{|k|/E} \\ &\quad \le \sum_k \sum_m \sum_\ell \sum_p |\mathcal{U}_{k-\ell,n,p}(\omega)|\, e^{|k-\ell|/E} |\mathcal{V}_{\ell pm}(\omega)|\, e^{|\ell|/E} \\ &\quad = \sum_k \sum_m \sum_\ell \sum_p |\mathcal{U}_{knp}(\omega)|\, e^{|k|/E} |\mathcal{V}_{\ell pm}(\omega)|\, e^{|\ell|/E} \\ &\quad = \sum_k \sum_p |\mathcal{U}_{knp}(\omega)|\, e^{|k|/E} \mathcal{X}_p(\omega)\,. \end{aligned}$$

Podobně podle (20),

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_m |\partial(\mathcal{U}\mathcal{V})_{knm}(\omega)|\, e^{|k|/E} \quad &\le \quad \sum_k \sum_m \sum_\ell \sum_p \Big(|\mathcal{U}_{knp}(\omega)|\, e^{|k|/E} |\partial\mathcal{V}_{\ell pm}(\omega,\omega')|\, e^{|\ell|/E} \\ &\qquad + |\partial\mathcal{U}_{knp}(\omega,\omega')|\, e^{|k|/E} |\mathcal{V}_{\ell pm}(\omega')|\, e^{|\ell|/E} \Big) \\ &= \quad \sum_k \sum_p \left(|\mathcal{U}_{knp}(\omega)|\, \partial\mathcal{X}_p(\omega,\omega') \right. \\ &\qquad \left. + |\partial\mathcal{U}_{knp}(\omega,\omega')|\, \mathcal{X}_p(\omega') \right) e^{|k|/E}\,. \end{aligned}$$

A kombinace těchto dvou nerovností dá

$$
\begin{aligned}
&\sum_k \sum_m \left(|(\mathcal{UV})_{knm}(\omega)| + \phi\, |\partial(\mathcal{UV})_{knm}(\omega,\omega')|\right) e^{|k|/E} \\
&\quad \le \sum_k \sum_p \left(|\mathcal{U}_{knp}(\omega)|(\mathcal{X}_p(\omega) + \phi\, \partial\mathcal{X}_p(\omega,\omega')) + \phi\, |\partial\mathcal{U}_{knp}(\omega,\omega')|\, \mathcal{X}_p(\omega')\right) e^{|k|/E} \\
&\quad \le \sup_{\omega,\omega'} \sup_p (\mathcal{X}_p(\omega) + \phi\, \partial\mathcal{X}_p(\omega,\omega')) \sum_k \sum_p (|\mathcal{U}_{knp}(\omega)| + \phi\, |\partial\mathcal{U}_{knp}(\omega,\omega')|) e^{|k|/E} \\
&\quad = \|\mathcal{V}\| \sum_k \sum_p (|\mathcal{U}_{knp}(\omega)| + \phi\, |\partial\mathcal{U}_{knp}(\omega,\omega')|) e^{|k|/E} \,.
\end{aligned}
$$

K důkazu (22) stačí aplikovat $\sup_{\omega,\omega'} \sup_n$ na tuto nerovnost. □

Mějme nyní dva páry kladných reálných čísel (ϕ_1, E_1) a (ϕ_2, E_2), že platí

$$\rho = \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \ge 0 \quad \text{a} \quad \phi_2 \le \phi_1 \,. \tag{23}$$

K nim definujeme dva normované prostory, $\mathfrak{A}_1$ and $\mathfrak{A}_2$. Dále předpokládejme, že je dán prvek

$$\Gamma \in \mathrm{Map}\left(J \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)) \right) , \tag{24}$$

takový, že pro každý pár $(\omega, k) \in J \times \mathbb{Z}$ a každou dvojici indexů $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\Gamma_{knm}(\omega)$ náleží $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n))$. Γ definuje přirozeně lineární zobrazení, které pro jednoduchost označíme také Γ, z $\mathfrak{A}_1$ do $\mathfrak{A}_2$, dané předpisem

$$\Gamma(\mathcal{V})_{knm}(\omega) = \Gamma_{knm}(\omega)(\mathcal{V}_{knm}(\omega)) \,. \tag{25}$$

Pro operátor diference můžeme v tomto případě použít pravidla

$$\partial\left(\Gamma(\mathcal{V})\right)(\omega,\omega') = \partial\Gamma(\omega,\omega')\left(\mathcal{V}(\omega')\right) + \Gamma(\omega)(\partial\mathcal{V}(\omega,\omega')) \,.$$

Tvrzení.

Pro normu $\Gamma : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ platí odhad

$$\|\Gamma\| \le \sup_{\substack{\omega,\omega'\in J \\ \omega\ne\omega'}} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} e^{-\rho|k|} \left(|\Gamma_{knm}(\omega)| + \phi_2\, |\partial\Gamma_{knm}(\omega,\omega')|\right) . \tag{26}$$

Důkaz. Poznamenejme, že je-li potřeba, lze zaměnit ω a ω' v $|\partial\mathcal{U}(\omega,\omega')|$. Potom

$$
\begin{aligned}
&\sum_k \sum_m \left(|\Gamma_{knm}(\omega)(\mathcal{V}_{knm}(\omega))| + \phi_2\, |\partial\left(\Gamma_{knm}(\mathcal{V}_{knm})\right)(\omega,\omega')|\right) e^{|k|/E_2} \\
&\quad \le \sum_k \sum_m \Big(|\mathcal{V}_{knm}(\omega)|(|\Gamma_{knm}(\omega)| + \phi_2\, |\partial\Gamma_{knm}(\omega,\omega')|) e^{-\rho|k|} \\
&\qquad\quad + \phi_2\, |\partial\mathcal{V}_{knm}(\omega,\omega')|\, |\Gamma_{knm}(\omega')| e^{-\rho|k|} \Big) e^{|k|/E_1} \\
&\quad \le \sup_{\omega,\omega'} \sup_k \sup_{(n,m)} e^{-\rho|k|} \left(|\Gamma_{knm}(\omega)| + \phi_2\, |\partial\Gamma_{knm}(\omega,\omega')|\right) \\
&\qquad\quad \times \sum_k \sum_m \left(|\mathcal{V}_{knm}(\omega)| + \phi_1\, |\partial\mathcal{V}_{knm}(\omega,\omega')|\right) e^{|k|/E_1} \,.
\end{aligned}
$$

K dokončení důkazu staší provést v této nerovnosti $\sup_{\omega,\omega'} \sup_n$. □

2.4.3. *Odhad normy Gama.* Nechť $\{H_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ je ostře rostoucí posloupnost kladných reálných čísel. Položme

$$\Delta_{mn} = H_m - H_n,$$

a

$$\delta = \left(\sup_m \sum_{n\neq m} \frac{1}{|\Delta_{nm}|}\right)^{-1}.$$

Předpokládejme, že $\delta > 0$. Platí $\delta \leq |\Delta_{nm}|$ pro každé $m \neq n$. Dále nechť $\Omega > 0$ je pevné číslo a platí

$$J \subset \left[\,\frac{8}{9}\Omega, \frac{9}{8}\Omega\,\right]$$

Řekneme, že multiindex $(k,n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ je kritický právě když $m \neq n$ a

$$\frac{k\Omega}{\Delta_{mn}} \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[.$$

V opačném případě řekneme, že kritický není. Zde předpokládáme, že $k \neq 0$ nebo $m \neq n$; případ $k = 0$ a $m = n$ budeme vždy vyšetřovat zvlášť.

Přímým důsledkem těchto definic je

Lemma 5. *Jestliže $\omega \in J$, $k \neq 0$ nebo $m \neq n$, a (k,n,m) není kritický tak*

$$|k\omega + H_n - H_m| \geq \min\left\{\frac{7}{16}\,\delta,\ \frac{8}{9}\,\Omega\right\}.$$

Důkaz. Rozlišíme dva případy. Pro $m \neq n$

$$|k\omega + H_n - H_m| \geq \delta \left|\frac{k\omega}{\Delta_{mn}} - 1\right|.$$

A jestliže (k,n,m) není kritický, platí:

$$\frac{k\omega}{\Delta_{mn}} = \frac{\omega}{\Omega}\frac{k\Omega}{\Delta_{mn}} \in \left]-\infty, \frac{9}{16}\right] \cup \left[\frac{16}{9}, \infty\right[,$$

a tedy

$$\left|\frac{k\omega}{\Delta_{mn}} - 1\right| \geq \frac{7}{16}.$$

V druhém případě, kdy $m = n$ a $k \neq 0$, jednoduše dostáváme

$$|k\omega + H_n - H_m| \geq \omega \geq \frac{8}{9}\,\Omega.$$

$\square$

Dále předpokládejme, že pro zobrazení Γ jako prvek (24) platí následující

$$\begin{aligned}
\Gamma_{knm}(\omega) &= 0 \qquad \text{pro } k = 0 \text{ a } n = m,\\
|\Gamma_{knm}(\omega)| &\leq \frac{\delta}{\phi_2|\Delta_{mn}||k|^{1/2}}\, e^{\rho|k|/2} \qquad \text{pro } \omega \in J \text{ a } (k,n,m) \text{ kriticky}',\\
|\Gamma_{knm}(\omega)| &\leq \frac{4}{|k|\Omega + |\Delta_{mn}|} \qquad \text{pro } \omega \in J \text{ a } (k,n,m) \text{ nekriticky}',
\end{aligned}$$

a dále $\Gamma_{knm}(\omega)$ je invertibilní pro všechna $(\omega,k,n,m) \in J\times\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, taková že $k \neq 0$ nebo $n \neq m$, a v tomto případě platí

$$|\partial\Gamma^{-1}_{knm}(\omega,\omega')| \leq |k| + \frac{1}{2}.$$

Lemma 6. *Jestliže*

$$\phi_2 \leq \min\left\{\frac{1}{4}\,\Omega, \frac{1}{4}\,\delta\right\}$$

potom platí odhad

$$\|\Gamma\| \leq \frac{5}{2\,\phi_2}.$$

Důkaz. Pro odhad $\|\Gamma\|$ využijeme vztah (26). Platí

$$\begin{aligned} |\partial\Gamma_{knm}(\omega,\omega')| &= |\Gamma_{knm}(\omega)\,\partial\Gamma^{-1}_{knm}(\omega,\omega')\,\Gamma_{knm}(\omega')| \\ &\leq |\Gamma_{knm}(\omega)||\Gamma_{knm}(\omega')|\left(|k|+\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

A pro (k,n,m) kritický, protože $\delta \leq |\Delta_{nm}|$, platí

$$\begin{aligned} e^{-\rho|k|}\left(|\Gamma_{knm}(\omega)| + \phi_2\,|\partial\Gamma_{knm}(\omega,\omega')|\right) &\leq e^{-\rho|k|}\left(\frac{1}{\phi_2|k|^{1/2}}\,e^{\rho|k|/2} + \frac{|k|+\frac{1}{2}}{\phi_2|k|}\,e^{\rho|k|}\right) \\ &\leq \frac{1}{\phi_2}\left(1+1+\frac{1}{2|k|}\right) \leq \frac{5}{2\,\phi_2}. \end{aligned}$$

Jestliže (k,n,m) kritický není, tak

$$\begin{aligned} e^{-\rho|k|}\left(|\Gamma_{knm}(\omega)| + \phi_2\,|\partial\Gamma_{knm}(\omega,\omega')|\right) &\leq e^{-\rho|k|}\frac{4}{|k|\Omega+|\Delta_{mn}|}\left(1+\phi_2\,\frac{4|k|+2}{|k|\Omega+|\Delta_{mn}|}\right) \\ &\leq 4\,\max\left\{\frac{1}{\Omega}e^{-\rho}, \frac{1}{\delta}\right\}\left(1+\phi_2\,\max\left\{\frac{4}{\Omega}, \frac{2}{\delta}\right\}\right) \\ &\leq \frac{2}{\phi_2}. \end{aligned}$$

□

3. Konkrétní část

3.1. **Úvod.** Nechť $\mathcal{H}$ je separabilní Hilbertův prostor.Definujeme
$\mathcal{K} = L^2\,(0,2\pi)\otimes\mathcal{H}$
Buď H samosdružený operátor na $\mathcal{H}$, jehož spektum je diskrétní

$$\sigma\,(H) = \{H_n|\,n\in\mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

H má spektrální rozklad

$$H = \sum_{n\in\mathbb{N}} H_n\,Q_n \;\;,\;\; \sup_{n\in\mathbb{N}}|H_n| = \infty$$

kde Q_n jsou ortogonální projektory na podprostor odpovídající vlastnímu číslu H_n :

$$Q_nQ_m = \delta_{mn}Q_m \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} Q_n = id_{\mathcal{H}}$$

Označme vzdálenost dvou vlastních čísel H

$$\Delta_{mn} := H_m - H_n$$

a předpokládejme, že

$$\delta := \left(\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\neq m}\frac{1}{|\Delta_{nm}|}\right)^{-1} > 0 \tag{28}$$

a existuje $r > 0$, že je splněna i podmínka

$$\Delta_r(\Omega) := \left(\sum_{m,n\in\mathbb{N},\Delta_{mn}>\frac{\Omega}{2}} |\Delta_{mn}|^{-r} M_m M_n \left(\min\left(M_m, M_n\right)\right)^{\frac{1}{2}} \right)^r < \infty \tag{29}$$

Položme

$$\Delta_0 := \inf_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m\neq n}} |\Delta_{mn}| \,.$$

Protože $\delta > 0$ tak i pro Δ_0 platí, že $\Delta_0 > 0$.

Označme stopu $\mathrm{M}_n := \mathrm{Tr}\left(Q_n\right)$ a předpokládejme, že $\forall n \in \mathbb{N}\ \ M_n < \infty$.

Položme

$$D := -i\,\partial_t \ na\ L^2\left(0, 2\pi\right)$$

s periodickou podmínkou. Potom

$$D = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\, P_k$$

kde P_k je ortogonální projektor na vlastní číslo k $\in \mathbb{Z}$. Tedy $\sigma(D) = \mathbb{Z}$

Definujme pro $\omega \in \mathbb{R}$ operátor na $\mathcal{K}$

$$\mathbf{K} := \omega D \otimes Id_{\mathcal{H}} + Id_{L^2} \otimes H$$

K je samozdružený protože H i D jsou samozdružené.

K má spektrální rozklad

$$\mathbf{K} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\omega\, k + H_n\right) P_k \otimes Q_n$$

Snadno se přesvědčíme, že pro spektrum K platí

$$\sigma\left(K\right) = \omega\mathbb{Z} + \sigma\left(H\right)$$

Tvrzení: Nechť H_n je posloupnost reálných čísel, taková že

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |H_n| = \infty$$

potom množina pevně zvolených čísel $\omega > 0$,

takových že množina $\{\omega\, k + H_n |\, k \in \mathbb{Z}\ n \in \mathbb{N}\}$ není hustá v $\mathbb{R}$,

je nulové Lebesgueovy míry.

Důkaz: např [3], Apendix A.

Nechť funkce $t \longmapsto V\left(t\right)$ je omezená měřitelná 2π periodická s hodnotami v prostoru hermitovských operátorů na $\mathcal{H}$.

Definujme operátor **V** na $\mathcal{K}$

$$\left(\mathbf{V}\psi\right)\left(t\right) := V\left(t\right)\psi\left(t\right)$$

Naší úlohou bude vyšetřování vlastností spektra porušeného časově závislého Floquetova Hamiltoniánu

$$-i\omega\,\partial_t \otimes Id_{\mathcal{H}} + Id_{L^2} \otimes H + \mathbf{V}$$

Tento operátor je také samozdružený, protože **K** je samozdružený a $\mathrm{V}(t)$ je hermitovský.

Pro X operátor na $\mathcal{K}$ definujeme "složky"

$$X_{k\ell mn} := tr\left(P_k\, Q_m\, X\, P_\ell\, Q_n\,\right) = \int_0^{2\pi} e^{ikt} Q_m X e^{-i\ell t} Q_n\, dt \tag{30}$$

$$X_{k\ell mn} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_{M_m}, \mathcal{H}_{M_n}\right)$$

tr značí stopu v $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$. Kvůli přehlednosti jsme vynechali tenzorové součiny s odpovídajícími identickými operátory.

Položme pro $\Omega > 0$

$$\Omega_0 := [\frac{8}{9}\Omega, \frac{9}{8}\Omega]$$

Definujeme

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Map}\left(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{L}(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)\right)$$

Jehož prvky tvoří matice (obecně neomezené) se složkami

$$Y_{kjnm} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{M_m}, \mathcal{H}_{M_n})$$

Definujme vektorovou funkci na tomto prostoru $K_0 : \Omega_0 \to \mathcal{Z}$

$$(K_0)_{k\ell mn}(\omega) := \mathbf{K}_{k\ell mn}(\omega) = k\omega\delta_{k\ell} + H_m\delta_{mn} \ pro\, \omega \in \Omega_0,\ k, \ell \in \mathbb{Z}\ m, n \in \mathbb{N}$$

podobně pro potenciál V, který je konstantní funkcí v ω

$$(V)_{k\ell mn} := \mathbf{V}_{k\ell mn}$$

Protože však $\mathbf{V}$ působí jako násobení funkcí, platí

$$\begin{aligned} V_{k\ell mn} &= tr\left(P_k\, Q_m\, \mathbf{V}\, P_\ell\, Q_n\right) = \int_0^{2\pi} e^{ikt} Q_m V(t)\, e^{-i\ell t} Q_n\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)t} Q_m V(t)\, Q_n\, dt = V_{k-\ell,0,m,n} =: V_{k-\ell,m,n} \end{aligned}$$

Jelikož matice V závisí pouze na rozdílu k a ℓ budeme ji dále brát jako matici se třemi indexy.

Předpoklad : Nechť $|V_{kmn}| < \infty$ jakožto operátorová norma na $\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_{M_m}, \mathcal{H}_{M_n}\right)$

Nechť číslo

$$\sigma := \left[r + \frac{3}{2}\right]$$

je takové že

$$\epsilon := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |V_{kmn}|\ (max\{|k|, 1\})^{\sigma}\right)\right] < \infty \tag{31}$$

což znamená, že V jakožto operátorová funkce je σ krát spojitě diferencovatelná na $(0, 2\pi)$. (viz [1], adiabatická část)

3.2. **Konstrukce.** Nechť jsou dány posloupnosti E_s a ϕ_s s vlastnostmi

$$E_{-1} = 0,\ \ \phi_0 \le \frac{1}{4} min\{\Omega,\ \delta\}$$

E_s roste do nekonečna a ϕ_s klesá do nuly, tedy

$$E_s \nearrow \infty,\ \ \phi_s \searrow 0$$

Označme

$$\rho_s := \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E_{s+1}} > 0$$

Nyní indukcí vybudujeme posloupnosti $\mathfrak{X}_s, V_s, W_s, \Theta_u^s, \iota_{us}$ atd, jejichž existenci jsme předpokládali v algebraické části.

3.2.1. *Indukční krok, s=0.* Definujme prostor

$$\mathfrak{X}_0 \subset l^\infty \left(\Omega_0 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{L}(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n) \right)$$

jehož prvky tvoří matice se složkami

$$X_{knm}(\omega) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{M_m}, \mathcal{H}_{M_n}), \;\; \omega \in \Omega_0$$

které mají konečnou normu 0

$$\|X\|_0 = \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_0 \\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(|X_{knm}(\omega)| + \phi_0 \, |\partial X_{knm}(\omega,\omega')| \right) e^{|k|/E_0}$$

kde derivace je zavedena stejně vztahem (19)

Definujme násobení těchto matic jako

$$(X\,Y)_{knm}(\omega) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{N}} X_{k-\ell,n,p}(\omega)\, Y_{\ell pm}(\omega)\,. \tag{32}$$

Díky tvrzení z algebraické části tvoří normovaný prostor $\mathfrak{X}_0$ s tímto násobením normovanou algebru.

Poznámka: $K_0 \notin \mathfrak{X}_0$

Položme

$$(O_o)_{kmn} := V_{kmn}\,\chi\,(0 \le |k| < E_0)$$

obecně pro $s \geq 1$

$$(O_s)_{kmn} := V_{kmn}\,\chi\,(E_{s-1} \le |k| < E_s) \tag{33}$$

(O není funkce ω). Platí odhad

$$\begin{aligned} \|O_o\|_0 &= \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_0 \\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(|\left(O_0\right)_{knm}(\omega)| + \phi_0 \, |\partial \left(O_0\right)_{knm}(\omega,\omega')| \right) e^{|k|/E_0} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{0\le|k|<E_0} \sum_{m\in\mathbb{N}} |\left(O_0\right)_{kmn}|\, e^{|k|/E_0} \le \epsilon e < \infty \end{aligned}$$

takže

$$O_0 \in \mathfrak{X}_0$$

Definujme

$$\mathcal{D}_0 \in \mathcal{B}\left(\mathfrak{X}_0\right) \quad \left(\mathcal{D}_0\left(X\right)\right)_{knm} := X_{0nm}\delta_{nm}\delta_{0k}$$

Položme

$$V_0 := O_o, \; W_0 := V_o \in \mathfrak{X}_0$$

$$d_1 := \operatorname{dist}\left(\operatorname{Spec}\left(k\omega - \Delta_{mn} + (W_0)_{0mm}\right), \operatorname{Spec}\left(W_0\right)_{0nn}\right)$$

a definujme

$$\Omega_1 := \{\omega \in \Omega_0 |\; \forall m,n \in \mathbb{N}\;, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad d_1 \geq \psi_1\left(k,m,n\right)\}$$

kde

$$\begin{aligned} \psi_1\left(k,m,n\right) &:= \frac{|k|\,\Omega + |\Delta_{mn}|}{4} \qquad pro\; \frac{k\Omega}{\Delta_{mn}} \notin [\frac{1}{2}, 2]\; a\; m \neq n \\ &:= \phi_0\, e^{\frac{-|k|\rho_1}{2}} \sqrt{|k|} \left| \frac{\Delta_{mn}}{\delta} \right| \left(M_m \wedge M_n\right)^{\frac{1}{2}} \quad jinak \end{aligned}$$

Položme $\rho_1 = \frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_1}$

Z definičního vztahu je vidět, že

$$\Omega_1 \subset \Omega_0$$

Definujme

$$K_1 := K_0/_{\Omega_1}$$

a prostor

$$\mathfrak{X}_1 \subset l^\infty\left(\Omega_1 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{L}(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)\right)$$

jehož prvky tvoří matice se složkami

$$X_{knm}(\omega) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{M_m}, \mathcal{H}_{M_n}), \ \ \omega \in \Omega_1$$

které mají konečnou normu

$$\|X\|_1 = \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_1\\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(|X_{knm}(\omega)| + \phi_1 \left|\partial X_{knm}(\omega,\omega')\right|\right) e^{|k|/E_1}$$

Zobrazení $\iota_0 : \mathbb{C}K_0 \oplus \mathfrak{X}_0 \to \mathbb{C}K_1 \oplus \mathfrak{X}_1$ definujeme

$$\iota_0(\lambda K_0) := \lambda K_1, \ \ \iota_0(X) := X/_{\Omega_1} \ \text{ pro } \lambda \in \mathbb{C}, \ X \in \mathfrak{X}_0$$

kde

$$\left(X/_{\Omega_1}\right)_{knm}(\omega) = X_{knm}(\omega) \ \ \ \forall\omega \in \Omega_1$$

díky $\Omega_1 \subset \Omega_0$, $\rho_1 > 0$, $\phi_1 > \phi_0$ platí, že

$$\left|\iota_0/_{\mathfrak{X}_0}\right| \leq 1$$

Jestliže je O_1 definováno ve shodě s (33) je

$$\begin{aligned}
\|O_1\|_1 &= \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_1\\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\left|(O_1)_{knm}(\omega)\right| + \phi_1 \left|\partial (O_1)_{knm}(\omega,\omega')\right|\right) e^{|k|/E_1} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{E_o\leq|k|<E_1} \sum_{m\in\mathbb{N}} |V_{kmn}|\, e^{|k|/E_1} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{E_o\leq|k|<E_1} \sum_{m\in\mathbb{N}} |V_{knm}| \frac{\left(\max\left(|k|,1\right)\right)^\sigma}{\left(E_0\right)^\sigma} e \leq \frac{\epsilon e}{E_0^\sigma} < \infty
\end{aligned}$$

Takže $\mathrm{O}_1 \in \mathfrak{X}_1$ a i

$$V_1 := \iota_0 V_0 + O_1 \in \mathfrak{X}_1$$

Pokusme se nyní řešit pro dané ω a X rovnici pro Y

$$\left(1 - \widetilde{\mathcal{D}}\right) X(\omega) = \left[K_0 + \widetilde{\mathcal{D}}(W_0), Y\right](\omega) \tag{34}$$

$X, Y \in l^\infty\left(\Omega_0 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum^{\oplus}_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)\right)$

tedy

$$X_{kjnm}(\omega) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{M_m}, \mathcal{H}_{M_n}), \ \ \omega \in \Omega_0$$

a kde $\widetilde{\mathcal{D}}$ je diagonalizující operátor

$$\left(\widetilde{\mathcal{D}}(X)\right)_{kjnm}(\omega) := (X)_{kknn}(\omega)\, \delta_{kj}\delta_{nm}$$

tedy pro $n \neq m, k \neq j$

$$\begin{aligned}
X_{kjnm}(\omega) &= \left\{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{N}} \left(K_0 + \widetilde{\mathcal{D}}(W_0)\right)_{k\ell np} Y_{\ell jpm} - Y_{k\ell np}\left(K_0 + \widetilde{\mathcal{D}}(W_0)\right)_{\ell jpm}\right\}(\omega) \\
&= \left(k\omega + H_n + (W_0)_{kknn}(\omega)\right) Y_{kjnm}(\omega) - Y_{kjnm}(\omega)\left(j\omega + H_m + (W_0)_{jjmm}(\omega)\right) \\
&= \left((k-j)\,\omega - \Delta_{mn} + (W_0)_{kknn}(\omega)\right) Y_{kjnm}(\omega) - Y_{kjnm}(\omega)\,(W_0)_{jjmm}(\omega) \qquad (35)
\end{aligned}$$

Ale to je úloha, kterou jsme vyšetřovali v odstavci o zobrazení Gama pro

$$A = ((k-j)\omega - \Delta_{mn} + (W_0)_{kknn}(\omega)) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{M_n})$$

$$B = (W_0)_{jjmm}(\omega) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{M_m})$$

Řešení existuje a jeho normu lze odhadnout

$$|Y_{kjnm}(\omega)| \leq \frac{|X_{kjnm}(\omega)|}{\mathrm{dist}(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Spec}(B))}, \tag{36}$$

jestliže $\sup \mathrm{Spec}(A) < \inf \mathrm{Spec}(B)$

v opačném případě, kdy $\mathrm{Spec}(A)$ jsou $\mathrm{Spec}(B)$ promíchána

$$|Y_{kjnm}(\omega)| \leq (M_n \wedge M_m)^{1/2} \frac{|X_{kjnm}(\omega)|}{\mathrm{dist}(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Spec}(B))}. \tag{37}$$

Ale

$$\mathrm{dist}(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Spec}(B)) = \mathrm{dist}(\mathrm{Spec}\left((k-j)\,\omega - \Delta_{mn} + (W_0)_{kknn}(\omega)\right), \mathrm{Spec}\,(W_0)_{jjmm}(\omega))$$

Poznámka: Jestliže ve výrazu (35) závisí hodnota matice X pouze na rozdílu prvních dvou indexů čili

$$X_{k,j,n,m} = X_{k-j,0,n,m} \tag{38}$$

Tak stejnou vlastnost musí mít i Y. Díky tomu že K je lineární v prvním indexu a je diagonální. Tedy

$$Y_{k,j,n,m} = Y_{k-j,0,n,m}$$

A totéž platí i obráceně. Máli tuto vlastnost Y, zdědí ji i X definované vztahem (34).

Poznámka : Z dalšího postupu bude vidět, že všechny V_s budou záviset pouze na rozdílu prvních dvou indexů. Tuto vlastnost, podle předchozí poznámky budou mít i všechny W_s. K_s sice tuto vlastnost nemá, ale to nám nebude vadit, protože bude vystupovat pouze prostřednictvím komutátoru. To je také důvod k zavedení naší "divné" definici násobení "divných" matic s lichým počtem indexů.

Komutátor tedy budeme dále chápat ve smyslu násobení (32) a

$$[K_0, Y]_{knm}(\omega) := (k\omega - \Delta_{mn})\, Y_{knm}(\omega).$$

Protože platí

$$(W_0)_{k,j,n,m}(\omega) = (V_0)_{k,j,n,m}(\omega) = (V_0)_{k-j,0,n,m} =: (W_0)_{k-j,n,m}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Spec}(B)) &= \mathrm{dist}(\mathrm{Spec}\left((k-j)\,\omega - \Delta_{mn} + (W_0)_{kknn}(\omega)\right), \mathrm{Spec}\,(W_0)_{jjmm}(\omega)) \\ &= \mathrm{dist}(\mathrm{Spec}\left(k\omega - \Delta_{mn} + (W_0)_{0nn}(\omega)\right), \mathrm{Spec}\,(W_0)_{0mm}(\omega)) \\ &= d_1 \end{aligned}$$

Definujeme operátor

$$\Gamma_0 := \iota_0\, ad^{-1}_{K_0 + \mathcal{D}_0(W_0)}(1 - \mathcal{D}_0)\ : \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{X}_1$$

$$X \longmapsto Y \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega_1 \quad (1 - \mathcal{D}_0)\, X(\omega) = [K_0 + \mathcal{D}_0(W_0), Y](\omega) \tag{39}$$

kde [,] znamená komutátor matic ve smyslu předchozí poznámky.

Pomocí složek zapsáno také

$$(\Gamma_0)_{knm}(\omega)\,(X_{knm}(\omega)) = Y_{knm}(\omega)$$

pro úplnost položme $(\Gamma_0)_{0nn} := 0$

Normu $(\Gamma_0)_{knm}$ lze díky (36) respektive (37) pro každé $\omega \in \Omega_1$ odhadnout

$$\begin{aligned} |(\Gamma_0)_{knm}(\omega)| &= 0 & & pro\ k=0\ a\ n=m \\ &\leq \frac{4}{|k|\,\Omega + |\Delta_{mn}|} & & pro\ \frac{k\Omega}{\Delta_{mn}} \notin [\frac{1}{2},\,2] a\, m \neq n \\ &\leq \frac{\delta}{|\Delta_{mn}|\,\phi_0\sqrt{|k|}}\, e^{\frac{1}{2}\rho_1|k|} & & jinak \end{aligned}$$

Zbývá ověřit, že $(\Gamma_0)_{knm}(\omega)$ je pro každé $(\omega, k, n, m) \in \Omega_1 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, kde $k \neq 0$ nebo $n \neq m$ invertibilní a v tomto případě platí

$$\left|\partial\left(\Gamma_0\right)^{-1}_{knm}(\omega, \omega')\right| \leq |k| + \frac{1}{2}$$

Definujeme

$$\left(\Gamma_0^{-1}Y\right)_{knm}(\omega) := \left(k\omega - \Delta_{mn} + (W_0)_{0nn}(\omega)\right) Y_{knm}(\omega) - Y_{knm}(\omega)\,(W_0)_{0mm}(\omega)\,, \quad \omega \in \Omega_1$$

Prostým dosazením zjistíme, že jde o inverzní matici.

Na tuto definici aplikujeme operátor diference, přičemž na levé straně využijeme formule (27), zatímco na pravé (20).

Porovnáním dostaneme předpis

$$\partial\left(\Gamma_0^{-1}\right)_{knm}(\omega, \omega')\left(Y_{knm}(\omega')\right) = \left(k + \partial\,(W_0)_{0nn}(\omega, \omega')\right) Y_{knm}(\omega') - Y_{knm}(\omega')\left(\partial\,(W_0)_{knm}(\omega, \omega')\right)$$

Protože $W_0 = V_0$ a V_0 jak víme nezávisí na ω, dostáváme odhad

$$\left|\partial\left(\Gamma_0\right)^{-1}_{knm}(\omega, \omega')\right| \leq |k|$$

Protože $\phi_0 \leq \frac{1}{4} min\,\{\Omega\,, \delta\,\}$ a jsou splněny předpoklady lemmatu 6, tak platí

$$|\Gamma_0| \leq \frac{5}{2\phi_0}$$

Definujme zobrazení $\Theta_0^0 : \mathbb{C}K_1 \oplus \mathfrak{X}_1 \to \mathbb{C}K_1 \oplus \mathfrak{X}_1$ stejně pro K_1 i pro $X \in \mathfrak{X}_1$

$$\Theta_0^0(X) := [\Gamma_0(W_0)\,,\, X] = \left[\iota_0\, ad^{-1}_{K_0+\mathcal{D}_0(W_0)}(1 - \mathcal{D}_0)(W_0)\,,\, X\right]$$

a snadnými úpravami zjistíme, že

$$\left|\Theta_0^0/_{\mathfrak{X}_1}\right| \leq 2\,|\Gamma_0|\,\|W_0\|_0 \leq \frac{5}{\phi_0} v_0$$

Nyní ověříme platnost podmínky (5) pro zobrazení Θ_0^0

$$\Theta_0^0\left(\iota_0\left(K_0 + \mathcal{D}_0(W_0)\right)\right) = \left[\Gamma_0(W_0)\,,\, \iota_0\left(K_0 + \mathcal{D}_0(W_0)\right)\right]$$

ale podle definice zobrazení Γ_0

$$\Gamma_0(W_0) = Y \Leftrightarrow \forall\omega \in \Omega_1 \quad (1 - \mathcal{D}_0)\, W_0(\omega) = [K_0 + \mathcal{D}_0(W_0)\,, Y](\omega)$$

z toho plyne

$$\Theta_0^0\left(\iota_0\left(K_0 + \mathcal{D}_0(W_0)\right)\right)(\omega) = -\left(1 - \mathcal{D}_0\right)(W_0)(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega_1$$

a tedy i

$$\Theta_0^0\left(\iota_0\left(K_0 + \mathcal{D}_0(W_0)\right)\right) = -\iota_0\left(1 - \mathcal{D}_0\right)(W_0) \tag{40}$$

Definujme operátor $T_0 : \mathbb{C}K_1 \oplus \mathfrak{X}_1 \to \mathbb{C}K_1 \oplus \mathfrak{X}_1$

$$T_0 := e^{\Theta_0^0}$$

ve smyslu

$$T_0/_{\mathfrak{X}_1} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\Theta_0^0/_{\mathfrak{X}_1}\right)^j}{j!}$$

kde řada na pravé straně konverguje v operátorové normě, protože $\Theta_0^0/_{\mathfrak{X}_1}$ je omezený a dále

$$T_0(K_1) := K_1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\Theta_0^0\right)^j}{(j+1)!}\left(\Theta_0^0(K_1)\right)$$

(suma má smysl neboť podle (40) $\Theta_0^0(K_1) \in \mathfrak{X}_1$).

Konečně položme

$$W_1 := \iota_0(W_0) + T_0(V_1 - \iota_0(V_0)) + \left(e^{\Theta_0^0} - \frac{e^{\Theta_0^0} - 1}{\Theta_0^0}\right)\iota_o(1 - \mathcal{D}_0)W_0$$

3.2.2. *Indukční krok $s \to s+1$.* Předpokládejme, že pro s přirozené známe klesající posloupnost množin $\{\Omega_j\}_{j=0}^s$

$$\Omega_s \subset \Omega_{s-1} \subset \cdots \subset \Omega_0$$

vektory

$$K_j = K_{j-1}/_{\Omega_j} \quad 0 \le j \le s$$

a posloupnost prostorů $\{\mathfrak{X}_j\}_{j=0}^s$

$$\mathfrak{X}_j \subset l^\infty\left(\Omega_j \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{L}(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)\right)$$

jehož prvky tvoří matice se složkami

$$X_{knm}(\omega) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{M_m}, \mathcal{H}_{M_n}),\ \ \omega \in \Omega_j$$

které mají konečnou normu

$$\|X\|_j = \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_j \\ \omega\neq\omega'}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(|X_{knm}(\omega)| + \phi_j\,|\partial X_{knm}(\omega,\omega')|\right) e^{|k|/E_j}$$

Násobení matic zadáme jako (32), zase $\mathfrak{X}_j$ bude normovaná algebra.

Dále ať jsou známa zobrazení $\iota_{j-1} : \mathbb{C}K_{j-1} \oplus \mathfrak{X}_{j-1} \to \mathbb{C}K_j \oplus \mathfrak{X}_j$ pro $1 \le j \le s$, která působí

$$\iota_{j-1}(\lambda K_{j-1}) = \lambda K_j\ ,\ \ \iota_{j-1}(X) = X/_{\Omega_j}\ \ pro\ \lambda \in \mathbb{C},\ X \in \mathfrak{X}_{j-1}$$

díky $\Omega_j \subset \Omega_{j-1}$, $\frac{1}{E_{j-1}} - \frac{1}{E_j} > 0$, $\phi_j > \phi_{j-1}$ platí, že

$$\left|\iota_{j-1}/_{\mathfrak{X}_{j-1}}\right| \le 1$$

Položme pro $0 \le t \le j \le s$

$$\iota_{jt} := \iota_{j-1}\ldots\iota_t\ : \mathbb{C}K_t \oplus \mathfrak{X}_t \to \mathbb{C}K_j \oplus \mathfrak{X}_j$$

Z definice ι_t je zřejmé, že jsou splněny podmínky

$$\iota_{jt}\iota_{tu} = \iota_{ju} \quad \left|\iota_{ju}/_{\mathfrak{X}_u}\right| \le 1\ \ pro\ 0 \le u \le t \le j \le s \tag{41}$$

Definujme $\mathcal{D}_j \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}_j)$

$$\left(\mathcal{D}_j(X)\right)_{kmm} := X_{0mm}\delta_{0k}\delta_{mn}\ X \in \mathfrak{X}_j \tag{42}$$

zřejmě

$$\mathcal{D}_j\,\iota_{jt}/_{\mathfrak{X}_t} = \iota_{jt}/_{\mathfrak{X}_t}\,\mathcal{D}_t\ \ pro\ 0 \le t \le j \le s$$

Nechť známe ještě posloupnosti vektorů $\{V_j\}_{j=0}^s$, $\{W_j\}_{j=0}^s$, $V_j,\ W_j \in \mathfrak{X}_j$

a zobrazení $\left\{\Theta_j^t\right\}_{j=t}^{s-1}$ definovaných na $\mathbb{C}K_{j+1}\oplus\mathfrak{X}_{j+1}$ s hodnotami v $\mathfrak{X}_{j+1}$

(tedy i $\Theta_j^t(K_{j+1})\in\mathfrak{X}_{j+1}$ pro $0\le t\le j\le s-1$)

Navíc definujeme-li

$$w_j=|W_j-\iota_{j-1}(W_{j-1})|$$

požadujeme i

$$\left|\Theta_j^k/_{\mathfrak{X}_{j+1}}\right|\le\frac{5}{\phi_k}w_k$$

a

$$\Theta_v^j\,\iota_{v+1,u+1}=\iota_{v+1,u+1}\,\Theta_u^s\quad\text{pro } j\le u\le v\le s-1.$$

Položíme

$$T_j=e^{\Theta_j^j}e^{\Theta_j^{j-1}}\dots e^{\Theta_j^0}:\mathbb{C}K_{j+1}\oplus\mathfrak{X}_{j+1}\to\mathbb{C}K_{j+1}\oplus\mathfrak{X}_{j+1}\quad\text{pro } s\ge j\ge 0\,.$$

posledním předpokladem je aby $\forall j,\ 0\le j\le s$ platili rekurzívní relace

$$W_{j+1}=\iota_j(W_j)+T_j(V_{j+1}-\iota_j(V_j))+\left(e^{\Theta_j^j}-\frac{e^{\Theta_j^j}-1}{\Theta_j^j}\right)\,\iota_j\,(1-\mathcal{D}_j)(W_j-\iota_{j-1}(W_{j-1}))$$

$$\Theta_j^j(\,\iota_j\,(K_j+\mathcal{D}_j(W_j)\,))=-\iota_j\,(1-\mathcal{D}_j)(W_j-\iota_{j-1}(W_{j-1}))$$

Nyní přistoupíme k vlastnímu indukčnímu kroku.

Jestliže je O_{s+1} definováno ve shodě s (33) pak podobně jako při odhadu O_1 se ukáže

$$\|O_{s+1}\|_{s+1}\le\frac{\epsilon e}{(E_s)^\sigma}<\infty$$

Takže $\mathrm{O}_{s+1}\in\mathfrak{X}_{s+1}$ a i

$$V_{s+1}:=\iota_sV_s+O_{s+1}\in\mathfrak{X}_{s+1}$$

položme

$$\operatorname{dist}(\operatorname{Spec}(k\omega-\Delta_{mn}+(W_s)_{0nn}(\omega)),\operatorname{Spec}(W_s)_{0mm}(\omega))=:d_{s+1}$$

Definujme

$$\Omega_{s+1}:=\{\omega\in\Omega_s|\ \forall m,n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\mathbb{Z},\ \ d_{s+1}\ge\psi_{s+1}(k,m,n)\}$$

kde

$$\begin{aligned}\psi_{s+1}(k,m,n)\ &:=\ \frac{|k|\,\Omega+|\Delta_{mn}|}{4}\qquad \mathit{pro}\ \frac{k\Omega}{\Delta_{mn}}\notin[\frac{1}{2},\,2]\ \mathit{a}\ m\neq n\\ &:=\ \phi_s\,e^{\frac{-|k|\rho_{s+1}}{2}}\sqrt{|k|}\left|\frac{\Delta_{mn}}{\delta}\right|(M_m\wedge M_n)^{\frac{1}{2}}\quad \mathit{jinak}\end{aligned}$$

$\rho_{s+1}=\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E_{s+1}}$

Definujeme prostor

$$\mathfrak{X}_{s+1}\subset l^\infty\left(\Omega_{s+1}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N},\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus}\mathcal{L}(\mathcal{H}_m,\mathcal{H}_n)\right)$$

jehož prvky tvoří matice se složkami

$$X_{knm}(\omega)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_{M_m},\mathcal{H}_{M_n})\,,\ \ \omega\in\Omega_{s+1}$$

které mají konečnou normu

$$\|X\|_{s+1}=\sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega_{s+1}\\ \omega\neq\omega'}}\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{N}}(|X_{knm}(\omega)|+\phi_{s+1}\,|\partial X_{knm}(\omega,\omega')|)\,e^{|k|/E_{s+1}}$$

Zavedeme Γ_s

$$\Gamma_s := \iota_s\, ad^{-1}_{K_s+\mathcal{D}_s(W_s)}\left(1-\mathcal{D}_s\right)\ : \mathfrak{X}_s \to \mathfrak{X}_{s+1}$$

kde výraz na pravé straně chápeme ve smyslu (39), pouze index 0 nahradíme s.

Ověříme, že $\left(\Gamma_s\right)_{knm}(\omega)$ je pro každé $(\omega,k,n,m) \in \Omega_s \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, kde $k \neq 0$ nebo $n \neq m$ invertibilní a v tomto případě platí

$$\left|\partial\left(\Gamma_s\right)^{-1}_{knm}(\omega,\omega')\right| \le |k| + \frac{1}{2}$$

Definujeme

$$\left(\Gamma_s^{-1}Y\right)_{knm}(\omega) := \left(k\omega - \Delta_{mn} + \left(W_s\right)_{0nn}(\omega)\right)Y_{knm}(\omega) - Y_{knm}(\omega)\left(W_s\right)_{0mm}(\omega)\,, \quad \omega\in\Omega_1$$

Prostým dosazením opět zjistíme, že jde o inverzní matici.

Podobně jako v případě s=0 dostaneme předpis

$$\partial\left(\Gamma_s^{-1}\right)_{knm}(\omega,\omega')\left(Y_{knm}(\omega')\right) = \left(k + \partial\left(W_s\right)_{0nn}(\omega,\omega')\right)Y_{knm}(\omega') - Y_{knm}(\omega')\left(\partial\left(W_s\right)_{knm}(\omega,\omega')\right)$$

Z toho plyne odhad

$$\left|\partial\left(\Gamma_s\right)^{-1}_{knm}(\omega,\omega')\right| \le |k| + \left|\partial\left(W_s\right)_{0nn}(\omega,\omega')\right| + \left|\partial\left(W_s\right)_{0mm}(\omega,\omega')\right|$$

Proto budeme přepokládat pro každé $n\in\mathbb{N}$; $\omega,\omega'\in\Omega_s$

$$\left|\partial\left(W_s\right)_{0nn}(\omega,\omega')\right| \le \frac{1}{4}. \tag{43}$$

Platnost této podmínky, postačující pro konvergenci ověříme pro konkrétní ϕ_s a E_s v závěru.

Potom se stejně jako u s=0 dokáže, že

$$|\Gamma_s| \le \frac{5}{2\phi_s}$$

Definujme zobrazení $\Theta_s^s : \mathbb{C}K_{s+1}\oplus\mathfrak{X}_{s+1} \to \mathbb{C}K_{s+1}\oplus\mathfrak{X}_{s+1}$ opět stejným předpisem pro K_{s+1} i pro $X\in\mathfrak{X}_{s+1}$ a sice:

$$\begin{aligned}\Theta_s^s(X) &:= \left[\Gamma_s\left(W_s - \iota_{s-1}\left(W_{s-1}\right)\right),\ X\right]\\ &= \left[\iota_s\, ad^{-1}_{K_s+\mathcal{D}_s(W_s)}\left(1-\mathcal{D}_s\right)\left(W_s - \iota_{s-1}\left(W_{s-1}\right)\right),\ X\right]\end{aligned}$$

a snadnými úpravami zjistíme, že

$$\left|\Theta_s^s/_{\mathfrak{X}_{s+1}}\right| \le 2\,|\Gamma_s|\ \left\|W_s - \iota_{s-1}\left(W_{s-1}\right)\right\|_{s+1} \le \frac{5}{\phi_s}w_s$$

Ověření (5) bude zase velmi podobné případu s=0.

Pro $0\le j\le s$ definujeme $\Theta_s^j : \mathbb{C}K_{s+1}\oplus\mathfrak{X}_{s+1} \to \mathbb{C}K_{s+1}\oplus\mathfrak{X}_{s+1}$ pro $X\in\mathfrak{X}_{s+1}$ i $X\in\mathbb{C}K_{s+1}$ vztahem

$$\Theta_s^j(X) := \left[\iota_{s+1,j}\, ad^{-1}_{K_j+\mathcal{D}_j(W_j)}\left(1-\mathcal{D}_j\right)\left(W_j - \iota_{j-1}\left(W_{j-1}\right)\right),\ X\right]$$

Díky (41) dostaneme stejný odhad pro normu

$$\left|\Theta_s^j/_{\mathfrak{X}_{s+1}}\right| \le 2\,|\Gamma_j|\ \left\|W_j - \iota_{j-1}\left(W_{j-1}\right)\right\|_j \le \frac{5}{\phi_j}w_j$$

a z téhož plyne i

$$\Theta_s^j\,\iota_{s+1,v+1} = \iota_{s+1,v+1}\Theta_v^j \tag{44}$$

s využitím (kde M je libovolná množina na kterou zúžujeme)

$$\left(X\,Y\right)/_M = X/_M\,Y/_M$$

Položme

$$T_s = e^{\Theta_s^s} e^{\Theta_s^{s-1}} \dots e^{\Theta_s^0} : \mathbb{C}K_{s+1} \oplus \mathfrak{X}_{s+1} \to \mathbb{C}K_{s+1} \oplus \mathfrak{X}_{s+1}$$

a konečně

$$W_{s+1} = \iota_s(W_s) + T_s(V_{s+1} - \iota_s(V_s)) + \left(e^{\Theta_s^s} - \frac{e^{\Theta_s^s} - 1}{\Theta_s^s} \right) \iota_s \, (1 - \mathcal{D}_s)(W_s - \iota_{s-1}(W_{s-1}))$$

Tímto jsme ukončili indukční krok.

Nyní známe posloupnosti prostorů $\mathfrak{X}_s$ matice V_s, W_s zobrazení Θ_u^s i ι_{us} a $\mathcal{D}_s$.

Posledním krokem této části bude konstukce induktivní limity $\mathfrak{X}_\infty$ a využití abstraktní části pro náš problém.

3.3. $\mathfrak{X}_\infty$**.** Ke konstrukci $\mathfrak{X}_\infty$užijeme postupu ze začátku algebraické části.

Protože $\iota_{us}(X) = X/_{\Omega_u}$ pro $X \in \mathfrak{X}_s$ tak naše relace ekvivalence $\sim$ na $\widetilde{\mathfrak{X}}$ představeném na začátku má tvar

$$X_s \sim Y_u \Leftrightarrow \exists v \geq s, u \quad X_s/_{\Omega_v} = Y_u/_{\Omega_v} \quad \text{pro } X_s \in \mathfrak{X}_s, Y_u \in \mathfrak{X}_u$$

Třída podle této ekvivalence obsahující prvek $X_s \in \mathfrak{X}_s$ se dá vyjádřit

$$\lceil X_s \rceil = \{ X_s/_{\Omega_u} | u \geq s \} .$$

Takže

$$\widetilde{\widetilde{\mathfrak{X}}} = \{ \lceil X_s \rceil \, | \, X_s \in \mathfrak{X}_s \}$$

Hodnotu seminormy p spočteme pro $X \in \mathfrak{X}_s$

$$\begin{aligned}
p(\lceil X \rceil) &= \limsup_{u \to \infty} \|X/_{\Omega_u}\|_u \\
&= \limsup_{u \to \infty} \sup_{\substack{\omega, \omega' \in \Omega_u \\ \omega \neq \omega'}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(|X_{knm}(\omega)| + \phi_u \, |\partial X_{knm}(\omega, \omega')| \right) e^{|k|/E_u} \\
&\leq \sup_{\substack{\omega, \omega' \in \Omega_s \\ \omega \neq \omega'}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(|X_{knm}(\omega)| + \phi_s \, |\partial X_{knm}(\omega, \omega')| \right) e^{|k|/E_s} \\
&= \|X\|_s
\end{aligned}$$

Tvrzení: Jestliže jsou splněny vlastnosti posloupností E_s, ϕ_s uvedené na začátku konkretní části, tak platí:

$$p(\lceil X \rceil) = \limsup_{u \to \infty} \sup_{\omega \in \Omega_u} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} |X_{knm}(\omega)|$$

Důkaz je snadný. Pravá strana rovnice z tvrzení je menší nebo rovna levé a zbytek je důsledek předpokladů.

Označíme

$$M := \left\{ \lceil X \rceil \in \widetilde{\widetilde{\mathfrak{X}}} | \, p(\lceil X \rceil) = 0 \right\}$$

Potom

$$\mathfrak{X} = \widetilde{\widetilde{\mathfrak{X}}}/_M \; s\, normou \; \| \lceil \lceil X \rceil \rceil \|_{\mathfrak{X}} = p(\lceil X \rceil) = \limsup_{u \to \infty} \sup_{\omega \in \Omega_u} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} |X_{knm}(\omega)|$$

a zobazení $\iota_{\infty s}/_{\mathfrak{X}_s}(X) := \lceil \lceil X \rceil \rceil$ splní řetězové pravidlo i odhad normy:

$$|\iota_{\infty s}/_{\mathfrak{X}_s}| \leq 1 \; \forall s \in \mathbb{N}$$

$(\mathfrak{X}_\infty, \| \, \|)$ získáme pomocí standartní zúplňovací procedury.

Jestliže $\mathcal{D}_s$ definujeme jako v indukčním kroku vztahem (42), potom $\{\mathcal{D}_s\}_{s=0}^{\infty}, \{1-\mathcal{D}_s\}_{s=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti omezených operátorů s vlastnostmi

$$\mathcal{D}_s \, \iota_{st}/_{\mathfrak{X}_t} = \iota_{st}/_{\mathfrak{X}_t} \, \mathcal{D}_t \text{ pro } 0 \leq t \leq s$$

a totéž platí i o $1-\mathcal{D}_s$, takže existuje induktivní limita těchto operátorů, pro kterou platí

$$\mathcal{D} \, \iota_{\infty t}/_{\mathfrak{X}_t} = \iota_{\infty t}/_{\mathfrak{X}_t} \, \mathcal{D}_t \text{ pro } 0 \leq t$$

A díky (1) zůstane v platnosti

$$|\mathcal{D}| \leq 1, \; |1-\mathcal{D}| \leq 1$$

Tím je konstrukce $\mathfrak{X}_\infty$ dokončena.

3.4. **Závěr:**

Lemma 7. *Nechť je splněna podmínka (29) pro nějaké $r > 0$. A pro*

$$\sigma := \left[r + \frac{3}{2}\right]$$

kde [ ] značí celou část, je splněna podmínka (31) na ϵ.

Jestliže položíme

$$\phi_s := \frac{\epsilon R_2}{a^{sr}} s^{\alpha}, \; E_s := a^s R_1$$

kde R_1, R_2, a, α jsou zatím libovolná reálná čísla a ϵ je definované vztahem (31).

Posloupnost W_s je definovaná pomocí indukčního kroku pro tyto posloupnosti ϕ_s, E_s.

Tak potom existuje $\epsilon_0 > 0$, že platí li pro ϵ definované (31), že $\epsilon > \epsilon_0$, lze konstanty R_1, R_2, a, α volit tak, že množina

$$\Omega_\infty := \bigcap_{s=0}^{\infty} \Omega_s$$

je kladné Lebesgueovy míry.

Náznak důkazu je obsahem prvního dodatku.

Předpokládejme, že Ω_∞ je neprázdná množina.

Dále předpokládejme, že $K_\infty : \Omega_\infty \to \mathcal{Z}$ je definované vztahem

$$(K_\infty)_{kjnm}(\omega) = (\omega k + H_n)\, \delta_{kj} \delta_{nm}$$

V má konečné ϵ definované vztahem (31),

existují posloupnosti F_s, v_s splňující požadavky (8), (9) a

$$B \leq \frac{1}{3} \ln 2 \quad \text{a} \quad A\, \phi(3C) \leq \frac{1}{9}$$

tedy nerovnost (10) platí pro $d = 3$.

A navíc platí

$$\frac{5}{F_0} \leq \min\left\{\frac{1}{4}\Omega, \frac{1}{4}\delta\right\}$$

Potom tvrdíme, že existuje $W \in L^\infty$, posloupnost vektorů $A_s \in \mathfrak{X}_s$ splňujících

$$(A_s)_{knm}(\omega) = -\left(\left(\overline{A_s}\right)_{-kmn}(\omega)\right)^t \quad \forall \omega \in \Omega_s$$

kde pruh označuje kompexní sdružení a t znamená transponování matice $(A_s)_{knm}(\omega) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_{M_n}, \mathcal{H}_{M_m}\right)$

a platí

$$\sum_{s=o}^{\infty} \|A_s\|_s < \infty.$$

Definujeme-li posloupnost zobrazení $\Theta_u^s : \mathbb{C}K_{u+1} \oplus \mathfrak{X}_{u+1} \to \mathfrak{X}_{u+1}$ vztahem

$$\Theta_u^s (X) := [\iota_{u+1,s+1} A_{s+1}, X] \quad \text{pro } u \geq s$$

Tak potom existuje zobrazení $T : \mathbb{C}K_\infty \oplus \mathfrak{X}_\infty \to \mathbb{C}K_\infty \oplus \mathfrak{X}_\infty$

$$T = \lim_{s\to\infty} e^{\Theta_s^s} \dots e^{\Theta_s^0}$$

ve smyslu stejném jako v závěru algebraické části,

a platí

$$T (K_\infty + V') = K_\infty + \mathcal{D} (W)$$

Důkaz. Definujeme-li posloupnosti ϕ_s a E_s vztahem

$$\phi_s := \frac{5}{F_s},\ E_s := \frac{\epsilon^{\frac{1}{\sigma}}}{e\,(v_s)^{\frac{1}{\sigma}}}$$

provedeme indukčkní krok, tak algebraická část nám zaručuje konvergenci pro

$$A_s := \Gamma_s (W_s - \iota_{s-1} (W_{s-1})) = \iota_s\, ad^{-1}_{K_s + \mathcal{D}_s(W_s)} (1 - \mathcal{D}_s) (W_s - \iota_{s-1} (W_{s-1})) \in \mathfrak{X}_{s+1} \tag{45}$$

Musíme však ještě ověřit podmínku, že pro každé $n \in \mathbb{N}$; $\omega, \omega' \in \Omega_s$

$$|\partial (W_s)_{0nn} (\omega, \omega')| \leq \frac{1}{4}.$$

Protože $(\partial W_0 = \partial V_0 = 0)$

$$\begin{aligned}
|\partial (W_s)_{0nn} (\omega, \omega')| &\leq \left| \sum_{k=1}^{s} \partial (W_k)_{0nn} (\omega, \omega') - \partial (W_{k-1})_{0nn} (\omega, \omega') + 0 \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{\phi_k} \phi_k \left| \partial (W_k)_{0nn} (\omega, \omega') - \partial (W_{k-1})_{0nn} (\omega, \omega') \right| \\
&\leq \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{s} F_k \left| W_k - \iota_{k-1} W_{k-1} \right| \leq \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} F_k w_k \leq \frac{dB}{5}
\end{aligned}$$

Ale podle předpokladů $d = 3, B \leq \frac{1}{3} \ln 2$, takže $\frac{dB}{5} \leq \frac{\ln 2}{5} < \frac{1}{4}$. Tím je podmínka ověřena.

Že A_s mají vlastnost požadovanou tvrzením věty se dokáže indukcí pomocí následující úvahy;

tato vlastnost vlastně představuje antihermitovost matice A_s, kterou jsme definovali jako inverzi komutátoru. Protože všechny V_s jsou hermitovské (jsou pouhou částí potenciálu V) tak A_0, které má vyhovovat vztahu

$$(1 - \mathcal{D}_0) V_0 (\omega) = [K_0 + \mathcal{D}_0 (V_0), A_0] (\omega) \quad \textit{pro}\ \omega \in \Omega_1$$

musí být antihermitovské (K_s je samozdružená pro všechna s).

W_1 musí být z rekurzivní definice hermitovská, protože Θ_0^0 působí jako komutátor s antihermitovským A_0 . Indukcí se pokračuje stejně pro W_s a A_s. □

4. Limita v $\mathcal{B}(\mathcal{K})$

Tvrzení: Nechť $\mathbf{X}$ je omezený operátor na $\mathcal{K}$. Definujeme-li složky $\mathbf{X}$ předpisem (30) tak pro operátorovou normu $\mathbf{X}$ platí odhad

$$\|\mathbf{X}\| \leq \max\left\{\sup_{k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{N}}|X_{klmn}|, \sup_{l\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{N}}|X_{klmn}|\right\}.$$

Důkaz je velice podobný odhadu pro Schur-Holmgrenovu normu.

Definujme Banachův prostor tvořený operátorovými funkcemi

$$L^\infty := \left\{\mathbf{X}:\Omega_\infty\to\mathcal{B}(\mathcal{K}) \mid \sup_{\omega\in\Omega_\infty}\|\mathbf{X}(\omega)\| =: \|\mathbf{X}\|_\infty < \infty\right\}$$

Pro $X\in\mathfrak{X}_s$ hermitovskou matice ve smyslu

$$(X)_{kmn}(\omega) = \left(\overline{(X)_{-knm}}\right)^t(\omega) \quad \forall k\in\mathbb{Z},\forall m,n\in\mathbb{N},\forall\omega\in\Omega_s$$

definujeme zobrazení κ_s do L^∞ , které matici X přiřadí operátor $\mathbf{X}$ pomocí složek.
Toto zobrazení je dobře definováno, protože

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}(\omega)\| &\leq \max\left\{\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{N}}|X_{kmn}(\omega)|, \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{N}}|X_{kmn}(\omega)|\right\}\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{N}}|X_{kmn}(\omega)|\end{aligned}$$

Z toho plynou odhady (normy $\|\ \|, \|\ \|_\infty$ jsou definovány jako v indukčním kroku)

$$\|\mathbf{X}\|_\infty \leq \|\iota_{\infty s}(X)\| \leq \|X\|_s$$

Čili toto zobrazení definuje omezený operátor, který je navíc hermitovský.

Z předchozího lze také vidět, že lze toto přiřazení provést i pro $\lceil\lceil X\rceil\rceil\in\mathfrak{X}$, jehož reprezentant je hermitovský a je nezávislé na výběru reprezentanu z obou tříd. Označíme ho κ_∞.

Tato zobrazení dodefinujeme opět i na podprostor $\mathbb{C}K_s$

$$(\kappa_s K_s)(\omega) := \mathbf{K}(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{N}}(\omega k + H_n)P_k\otimes Q_n \quad \textit{pro } \omega\in\Omega_\infty, s\in\mathbb{N}\cup\{\infty\} \tag{46}$$

Z předpisu také plyne, že pro každou hermitovskou $X\in\mathfrak{X}_s$

$$\kappa_s(X) = \kappa_\infty\iota_{\infty s}(X) \quad a \quad \kappa_s(X) = \kappa_u(\iota_{us}X), \forall s\leq u \tag{47}$$

Lemma 8. *Nechť $K_s, V_s, \mathfrak{X}_s$ jsou definovány jako v indukčním kroku*
a K *je definováno vztahem (46).*
Jestliže T_{s-1} je zobrazení $\mathbb{C}K_s\oplus\mathfrak{X}_s$ do sebe definované předpisem

$$T_{s-1} = e^{\Theta^{s-1}_{s-1}}\dots e^{\Theta^0_{s-1}}$$

kde

$$\Theta^s_u(X) = [\iota_{u+1,s+1}A_{s+1}, X] \quad \textit{pro } u\geq s$$

a A_{s+1} je antihermitovská z $\mathfrak{X}_{s+1}$.
Tak potom pro unitární zobrazení $U_s\in L^\infty$ definované na $\mathcal{K}$ předpisem

$$U_s(\omega) = e^{-i\kappa_{s+1}(iA_{s+1})(\omega)}\dots e^{-i\kappa_1(iA_1)(\omega)} \tag{48}$$

platí, že U_s zachovává definiční obor $\mathbf{K}(\omega)$, *tedy*

$$U_s(\omega)\,\mathrm{Dom}\,(\mathbf{K}(\omega)) = \mathrm{Dom}\,(\mathbf{K}(\omega)) \qquad \forall\omega\in\Omega_\infty$$

a pro každé v z definičního oboru $\boldsymbol{K}(\omega)$ a $\omega\in\Omega_\infty$ platí

$$\{\kappa_s T_{s-1}(K_s+V_s)\}(\omega)\ (v) = U_s(\mathbf{K}(\omega)+\kappa_s V_s)\,U_s^{-1}\ (v)$$

Důkaz je v dodatku.

Důsledek : Jestliže, posloupnosti V_s, W_s, Θ_u^s jsou zvoleny jako v indukčním kroku, A_s je definováno vztahem (45) a aplikujeme-li zobrazení κ_∞ na rovnost (15) dostáváme $\forall v\in\mathrm{Dom}\,(\mathbf{K}(\omega))$ díky (47) na levé straně

$$\begin{aligned}
\kappa_s\left\{\widetilde{T_s}\left(K_\infty+\iota_{\infty s}(V_s)\right)\right\}(\omega)\ (v) &= \kappa_\infty\iota_{\infty s}T_{s-1}(K_s+V_s)(\omega)\ (v)\\
&= U_s(\omega)(\mathbf{K}(\omega)+\kappa_s V_s)\,U_s^{-1}(\omega)\ (v)
\end{aligned}$$

a na pravé straně

$$\begin{aligned}
&\kappa_\infty\{K_\infty+\mathcal{D}(\iota_{\infty s}W_s)+(1-\mathcal{D})(\iota_{\infty s}W_s-\iota_{\infty s-1}W_{s-1})\}(\omega)\ (v) =\\
&\mathbf{K}(\omega)\ v+\kappa_\infty\mathcal{D}(\iota_{\infty s}W_s)(\omega)\ (v)+\kappa_\infty(1-\mathcal{D})(\iota_{\infty s}W_s-\iota_{\infty s-1}W_{s-1})(\omega)\ (v)
\end{aligned}$$

Protože

$$\begin{aligned}
\|\kappa_s V_s-\mathbf{V}\|_\infty &\le \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{N}}|(V_s)_{kmn}-(V)_{kmn}|\\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{|k|\ge E_s}\sum_{m\in\mathbb{N}}|(V)_{kmn}|\to 0
\end{aligned}$$

posloupnost $\kappa_s V_s$ konverguje k potenciálu $\mathbf{V}$ v operátorové normě.

Dále pro posloupnost zobrazení U_s definované vztahem (48), platí odhad

$$\begin{aligned}
\|U_s-U_t\|_\infty &\le \left\{\exp\left(\sum_{j=t-1}^{s}\|\kappa_j A_j\|_\infty\right)-1\right\}\exp\left(\sum_{j=0}^{t}\|\kappa_j A_j\|_\infty\right)\\
&\le \exp\left(\sum_{j=0}^{s}\|A_j\|_j\right)-\exp\left(\sum_{j=0}^{t}\|A_j\|_j\right)
\end{aligned}$$

Ale protože

$$\sum_{s=0}^{\infty}\|A_s\|_s<\infty$$

tak existuje U, že $U_s\to U$ v prostoru L^∞

Takže shrneme-li, existuje posloupnost unitárních zobrazení U_s , které mají v L^∞ limitu U. Dále pro každé $s\in\mathbb{N}$ platí

$$U_s(\omega)\,\mathrm{Dom}\,(\mathbf{K}(\omega)) = \mathrm{Dom}\,(\mathbf{K}(\omega))\,,\ kde\ \omega\in\Omega_\infty$$

Existuje i posloupnost $\kappa_s V_s$, která má v L^∞ za limitu $\mathbf{V}$ a posloupnost $B_s\in L^\infty$, jdoucí v limitě k B v L^∞, jehož matice definovaná po složkách vztahem (30) je diagonální.

Tyto posloupnosti jsou takové, že pro každé $\omega\in\Omega_\infty$, pro každé $v\in\mathrm{Dom}\,\mathbf{K}(\omega)$ platí rovnost

$$U_s(\omega)(\mathbf{K}(\omega)+\kappa_s V_s)\,U_s^{-1}(\omega)\ (v) = \mathbf{K}(\omega)\,v+B_s(\omega)\,v$$

Lemma 9. *Nechť* $B_s, R_s \in L^\infty$ *konvergují v* L^∞ $B_s \to B,\ R_s \to R$ *a nechť* $\mathbf{K}(\omega)$ *je uzavřený operátor na* $\mathcal{K}$ *pro každé* $\omega \in \Omega_\infty$.

Předpokládejme, že $U_s \in L^\infty$ *jsou unitární zobrazení, které mají v* L^∞ *limitu* U.

Dále požadujeme pro každé $s \geq 0, \omega \in \Omega_\infty$

$$U_s(\omega)\,\mathrm{Dom}(\mathbf{K}(\omega)) = \mathrm{Dom}(\mathbf{K}(\omega))$$

a pro každé $s \geq 0, \omega \in \Omega_\infty, v \in \mathrm{Dom}(\mathbf{K}(\omega))$ *rovnost*

$$U_s(\omega)(\mathbf{K}(\omega) + R_s(\omega))\,U_s^{-1}(\omega)\,v = \mathbf{K}(\omega)\,v + B_s(\omega)\,v.$$

Potom tvrdíme:

$$U\,\mathrm{Dom}(\mathbf{K}(\omega)) = \mathrm{Dom}(\mathbf{K}(\omega)), \quad \forall \omega \in \Omega_\infty$$

a pro každé $\omega \in \Omega_\infty, v \in \mathrm{Dom}(\mathbf{K}(\omega))$ *platí rovnost*

$$U(\mathbf{K}(\omega) + R(\omega))\,U^{-1}v = \mathbf{K}(\omega)\,v + B(\omega)\,v$$

Důkaz. Je snadným důsledkem uzavřenosti $\mathbf{K}$. (Budeme pro přehlednost všude vynechávat ω).

$$x \in \mathrm{Dom}\,\mathbf{K} \Rightarrow U_s^{-1}x \to U^{-1}x,\ a\ \mathbf{K}U_s^{-1}x \to U^{-1}\mathbf{K}x + U^{-1}Bx - RU^{-1}x$$

z toho plyne, že

$$U^{-1}x \in \mathrm{Dom}\,\mathbf{K},\ \mathbf{K}U^{-1}x = U^{-1}\mathbf{K}x + U^{-1}Bx - RU^{-1}x$$

z čehož ihned plyne druhé tvrzení věty.

Víme, že pro každé $y \in \mathrm{Dom}\,\mathbf{K}$ je i $U_s y \in \mathrm{Dom}\,\mathbf{K}$ pro každé s. Tedy položíme-li $v := U_s y$ a využijeme předpokladu, získáme:

Protože

$$U_s y \to Uy,\ a\ \mathbf{K}U_s y \to U\mathbf{K}y + URy - BUy$$

z uzavřenosti $\mathbf{K}$ plyne, že $Uy \in \mathrm{Dom}\,\mathbf{K}$ a

$$\mathbf{K}Uy = U\mathbf{K}y + URy - BUy$$

Spojením obou

$$x \in \mathrm{Dom}\,\mathbf{K} \Rightarrow U^{-1}x \in \mathrm{Dom}\,\mathbf{K}$$
$$y \in \mathrm{Dom}\,\mathbf{K} \Rightarrow Uy \in \mathrm{Dom}\,\mathbf{K}$$

takže

$$U\,\mathrm{Dom}\,\mathbf{K} = \mathrm{Dom}\,\mathbf{K}$$

□

5. Hlavní věta

Teorém:

Nechť H je operátor na separabilním Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ a má čistě bodové spektrum. Přičemž každá vlastní hodnota H_n má konečnou degeneraci M_n. Předpkládejme, že pro tyto hodnoty platí podmínka (28) a že existuje kladné číslo r, pro které platí i druhá podmínka (29).

Nechť je dále dána silně spojitá množina V(t) 2π periodických hermitovských operátorů na $\mathcal{H}$.

Předpokládejme, že Floquetův Hamiltonián

$$K_F(\omega) := -i\partial_t + H + V(\omega t)$$

na prostoru $\mathcal{K} := L^2((0,T), \mathcal{H}, dt)$ s periodickou hraniční podmínkou v t a s kruhovou frekvencí $\omega \in \Omega_0$, kde Ω_0 je kompaktní interval a $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Jestliže V(t) splní podmínku (31) pro $\sigma = \left[r + \frac{3}{2}\right]$ a číslo ϵ je dostatečně malé,

tak existuje množina $\Omega_\infty \subset \Omega_0$ kladné Lebesgueovy míry, taková že pro každé $\omega \in \Omega_\infty$ má operátor $K_F(\omega)$ čistě bodové spektrum.

6. Dodatky

6.1. **Odhad míry Ω_∞.** Nechť je splněna podmínka (29) pro nějaké $r > 0$. A pro

$$\sigma := \left[r + \frac{3}{2}\right]$$

kde [ ] značí celou část, je splněna podmínka (31).

Jestliže položíme

$$\phi_s := \frac{\epsilon R_2}{a^{sr}} s^\alpha,\ E_s := a^s R_1$$

kde R_1, R_2, a, α jsou zatím libovolná reálná čísla a ϵ je definované vztahem (31).

Posloupnost W_s je definovaná pomocí indukčního kroku pro tyto posloupnosti ϕ_s, E_s.

Tak potom existuje $\epsilon_0 > 0$, že platí li pro ϵ definované (31), že $\epsilon > \epsilon_0$, lze konstanty R_1, R_2, a, α volit tak, že množina

$$\Omega_\infty := \bigcap_{s=0}^{\infty} \Omega_s$$

je kladné Lebesgueovy míry.

Důkaz. Důkaz pouze naznačíme, přičemž nám půjde o zjištění postačující podmínky na stupeň diferencovatelnosti potenciálu V, aby celý algoritmus dobře konvergoval. Konkrétní počítání těchto konstant není ambicí této práce.

V dalším tedy předpokládáme, že konstanty tak R_1, R_2, a, α lze volit tak, že je splněna podmínka (43) a navíc platí pro každé $s, m \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega_s$

$$|(W_s)_{0mm}(\omega)| \leq \frac{1}{6}\Delta_0 \tag{49}$$

Označme $\Omega_s^{bad} := \Omega_0 \setminus \Omega_s$

Pro $(k,n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definujeme množinu $\Omega_{s+1}^{bad}(k,n,m)$ následujícím předpisem:

$$\omega \in \Omega_{s+1}^{bad}(k,n,m) \Leftrightarrow$$
$$d_{s+1} = \mathrm{dist}(\mathrm{Spec}\,(k\omega - \Delta_{mn} + (W_s)_{0nn}(\omega)), \mathrm{Spec}\,(W_s)_{0mm}(\omega)) < \psi_{s+1}(k,n,m)$$

kde ψ_{s+1} je definováno předpisem jako v indukčním kroku

$$\begin{aligned}\psi_{s+1} &:= \frac{|k|\,\Omega+|\Delta_{mn}|}{4} \qquad pro\,\frac{k\Omega}{\Delta_{mn}}\notin[\frac{1}{2},\,2]\;a\;m\neq n\\ &:= \phi_s\,e^{\frac{-|k|\rho_{s+1}}{2}}\sqrt{|k|}\left|\frac{\Delta_{mn}}{\delta}\right|(M_m\wedge M_n)^{\frac{1}{2}}\quad jinak\end{aligned}$$

Potom platí:

(1) $\Omega^{bad}_{s+1}(k,n,m)=\Omega^{bad}_{s+1}(-k,m,n)$ což je ihned vidět z definic.

(2) $\Omega^{bad}_{s+1}(k,n,m)=\emptyset$ pro (k,n,m) nekritický index

$$\begin{aligned}\frac{|k|\,\Omega+|\Delta_{mn}|}{4} &= \psi_{s+1}(k,n,m)\\ &> \mathrm{dist}(\mathrm{Spec}\,(k\omega-\Delta_{mn}+(W_s)_{0nn}(\omega))\,,\mathrm{Spec}\,(W_s)_{0mm}(\omega))\\ &\geq |k|\omega+|\Delta_{mn}|-\frac{1}{3}\Delta_0\geq\frac{8}{9}|k|\Omega+\frac{1}{2}|\Delta_{mn}|+\frac{1}{2}\Delta_0-\frac{1}{3}\Delta_0\\ &> \frac{|k|\Omega+|\Delta_{mn}|}{2}\end{aligned}$$

kde jsme využili: při první úpravě $\mathrm{dist}\,(\mathrm{Spec}\,(\alpha I+A)\,,\mathrm{Spec}\,(B))\geq|\alpha|-\|A\|-\|B\|$, platné pro každé komlexní číslo α, a libovolné konečné matice A,B, dále (49) a definice Ω_0,Δ_0

(3) $\left|\Omega^{bad}_{s+1}(k,n,m)\right|\leq\frac{4\psi_{s+1}}{k}M_mM_n$, pro (k,n,m) kritický index (z definice $k\neq0$), M_m je degenerace vlastní hodnoty H_m.

V kapitole 1. paragrafu 6.10 [4] je dokázáno následující lemma:

Nechť A je zobrazení které číslu $\omega\in\Omega\subset\mathbb{R}$ přiřadí hermitovskou matici rozměru N.

$\lambda_1(\omega)<\lambda_1(\omega)<\cdots<\lambda_N(\omega)$ jsou vlastní hodnoty A(ω).

Potom jestliže A, jako maticová funkce ω, je Lipschitzovská s konstantou L, tak pro každé $i\in\widehat{N}$

je λ_i jakožto funkce $\omega\in\Omega$ Lipschitzovská s konstantou L.

Nyní uspořádáme všechny různé vlastní hodnoty $\lambda^n_i(\omega)$ matice $(W_s)_{onn}(\omega)$, kde $\omega\in\Omega_s$.

Potom

$$\Omega^{bad}_{s+1}(k,n,m)\subset\bigcup_{\substack{1\leq i\leq M_m\\1\leq j\leq M_n}}\Omega^{bad}_{s+1}(k,n,m,i,j)$$

kde

$$\Omega^{bad}_{s+1}(k,n,m,i,j)=\{\omega\in\Omega_s|\;|\omega k-\Delta_{mn}+\lambda^n_i(\omega)-\lambda^m_i(\omega)|<\psi_{s+1}\}$$

což se dokáže rozepsáním. (Stále předpokládáme kritický index).

Potom pro $\omega,\omega'\in\Omega^{bad}_{s+1}(k,n,m,i,j)\,,\;\omega\neq\omega'$ platí

$$\begin{aligned}\frac{2\psi_{s+1}}{|\omega-\omega'|} &\geq \inf_{k,m,n,i,j,\omega,\omega'}\left|\frac{\omega k-\Delta_{mn}+\lambda^n_i(\omega)-\lambda^m_i(\omega)-(\omega' k-\Delta_{mn}+\lambda^n_i(\omega')-\lambda^m_i(\omega'))}{\omega-\omega'}\right|\\ &\geq \inf_{k,m,n,i,j,\omega,\omega'}\left|k+\frac{\lambda^n_i(\omega)-\lambda^n_i(\omega')}{\omega-\omega'}-\frac{\lambda^m_i(\omega)-\lambda^m_i(\omega')}{\omega-\omega'}\right|\end{aligned}$$

A podle ocitovaného lemmatu s využitím (43) dostáváme

$$\frac{2\psi_{s+1}}{|\omega-\omega'|}\geq|k|-\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}|k|$$

A odtud již plyne

$$\left|\Omega_{s+1}^{bad}(k,n,m)\right| \leq M_m M_n \frac{4\psi_{s+1}}{k}.$$

Což jsme chtěli ukázat.

(4) Díky bodům (1), (2), (3) platí

$$\left|\Omega_{s+1}^{bad}\right| = \left|\bigcup_{k,n,m} \Omega_{s+1}^{bad}(k,n,m)\right| \leq 2 \sum_{\substack{n,m\in\mathbb{N},k>0 \\ \frac{k\Delta_{mn}}{\Omega}\in[\frac{1}{2}\Omega,2\Omega]}} 4\phi_s k^{-\frac{1}{2}} e^{-\rho_{s+1}\frac{k}{2}} \frac{\Delta_{mn}}{\delta}\mu_{mn}$$

$\mu_{mn} := M_m M_n \left(\min\left(M_n, M_m\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

V dalších úpravách se budou před sumou objevovat konstanty. Jak jsme však již řekli nebudeme se o ně zajímat a budeme je všechny označova shodně symbolem $C(\sigma,\Omega,\delta)$, v závorce je závislost na jiných konstantách.

Nyní odhadneme sumu přes k, odhadem počtu členů krát největší člen. Dostáváme

$$\left|\Omega_{s+1}^{bad}\right| \leq C(\sigma,\Omega,\delta)\,\phi_s \sum_{\substack{n,m\in\mathbb{N}, \\ \frac{\Delta_{mn}}{\Omega}>\frac{1}{2}}} \mu_{mn}\left(\frac{\Delta_{mn}}{4\Omega}\right)^{-r}\left(\frac{\Delta_{mn}}{4\Omega}\right)^{r+\frac{3}{2}} e^{-\rho_{s+1}\frac{\Delta_{mn}}{4\Omega}}$$

Nyní využijeme $\sup_{x>0} x^{\alpha}e^{-\beta x} = \left(\frac{\alpha}{e\beta}\right)^{a}$

$$\left|\Omega_{s+1}^{bad}\right| \leq C(\sigma,\Omega,\delta)\,\phi_s \left(\frac{1}{\rho_{s+1}}\right)^{r+\frac{3}{2}} \sum_{\substack{n,m\in\mathbb{N}, \\ \frac{\Delta_{mn}}{\Omega}>\frac{1}{2}}} \mu_{mn}\left(\Delta_{mn}\right)^{-r}$$

Takže použijeme-li definici μ_{mn} a (29) získáme konečně odhad

$$\left|\Omega_{s+1}^{bad}\right| \leq C(\sigma,\Omega,\delta)\,\phi_s \left(\frac{1}{\rho_{s+1}}\right)^{r+\frac{3}{2}} \Delta_r^{-r}(\Omega)$$

Nyní dosadíme za naše posloupnosti a budeme vyšetřovat existenci

$$\sum_{s=0}^{\infty} \phi_s \left(\frac{1}{\rho_{s+1}}\right)^{r+\frac{3}{2}} = K(R_1,R_2,a,\alpha,\sigma,r,\epsilon) \sum_{s=0}^{\infty} s^{\alpha}\left(a^{-s+1}\right)^{\sigma-\left(r+\frac{3}{2}\right)}$$

$K(R_1,R_2,a,\alpha,\sigma,r,\epsilon)$ je konstanta závisející na uvedených parametrech.

Nyní jestliže bude splněna podmínka (a je to podmínka pro diferencovatelnost V)

$$\sigma = \left[r+\frac{3}{2}\right]$$

kde r je určeno podmínkou (29). a [ ] značí celou část, tak suma na pravé straně výrazu

$$\left|\bigcup_{s=0}^{\infty} \Omega_{s+1}^{bad}\right| \leq C(\sigma,\Omega,\delta) \sum_{s=0}^{\infty} \phi_s \left(\frac{1}{\rho_{s+1}}\right)^{r+\frac{3}{2}}$$

bude konečná a volbou dostatečně malého ϵ lze zajistit, že nebude větší než délka intervalu Ω_0.

Takže míra

$$\left|\Omega_{\infty}\right| = \left|\bigcap_{s=0}^{\infty} \Omega_s\right| \geq \left|\Omega_0 \setminus \bigcup_{s=0}^{\infty} \Omega_{s+1}^{bad}\right| > 0$$

□

6.2. **Důkaz lemmatu 8.**

Lemma 8. *Nechť $K_s, V_s, \mathfrak{X}_s$ jsou definovány jako v indukčním kroku a $\boldsymbol{K}$ je definováno vztahem (46).*

Jestliže T_{s-1} je zobrazení $\mathbb{C}K_s \oplus \mathfrak{X}_s$ do sebe definované předpisem

$$T_{s-1} = e^{\Theta_{s-1}^{s-1}} \dots e^{\Theta_{s-1}^{0}}$$

kde

$$\Theta_u^s(X) = [\iota_{u+1,s+1}A_{s+1}, X] \quad \text{pro } u \geq s$$

a A_{s+1} je antihermitovská z $\mathfrak{X}_{s+1}$.

Tak potom pro unitární zobrazení U_s definované na $\mathcal{K}$

$$U_s(\omega) = e^{-i\kappa_{s+1}(iA_{s+1})(\omega)} \dots e^{-i\kappa_1(iA_1)(\omega)}$$

platí, že pro každé $\omega \in \Omega_\infty$ $U_s(\omega)$ zachovává definiční obor $\mathbf{K}(\omega)$, tedy

$$U_s(\omega)\,\mathrm{Dom}(\mathbf{K}(\omega)) = \mathrm{Dom}(\mathbf{K}(\omega))$$

a pro každé v z definičního oboru $\boldsymbol{K}(\omega)$ a $\omega \in \Omega_\infty$ platí

$$\{\kappa_s T_{s-1}(K_s + V_s)\}(\omega)\ (v) = U_s(\omega)(\mathbf{K}(\omega) + \kappa_s V_s)\,U_s^{-1}(\omega)\ (v)$$

Důkaz. Zobrazení κ_s je pro iA_s dobře definované, protože A_s je antihermitovská.

$-i\kappa_s(iA_s)$ budeme označovat $\mathbf{A}_s$

Pro přehlednost budeme všude vynechávat ω.

Díky (44) stačí, když dokážeme

$$\kappa_s\left(e^{\Theta_{s-1}^{s-1}}V_s\right) = e^{-i\kappa_s(iA_s)}\,(\kappa_s V_s)\,e^{i\kappa_s(iA_s)}$$

dále

$$e^{\Theta_{s-1}^{s-1}}\,\mathrm{Dom}\,\mathbf{K} = \mathrm{Dom}\,\mathbf{K}$$

a že pro každé $v \in \mathrm{Dom}\,\mathbf{K}$ platí

$$\kappa_s\left(e^{\Theta_{s-1}^{s-1}}K_s\right)(v) = e^{\mathbf{A}_s}\mathbf{K}e^{-\mathbf{A}_s}\,v$$

Nejprve pro V_s.

$$\kappa_s\left(e^{\Theta_{s-1}^{s-1}}V_s\right) = \kappa_s\left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\Theta_{s-1}^{s-1}\right)^n}{n!}V_s\right) = \kappa_s\left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ad_{A_s})^n}{n!}V_s\right)$$

$(ad_{A_s})^n X = [A_s, [A_s, \dots [A_s, X]\dots]]$ počet komutátorů je n, a $ad^0 := 1$.

Potom protože κ_s je spojité zobrazení a protože matici násobku dvou matic odpovídá při zobrazení κ_s operátor složení dostáváme

$$\begin{aligned}\kappa_s\left(e^{\Theta_{s-1}^{s-1}}V_s\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\kappa_s[A_s, [A_s, \dots [A_s, V_s]\dots]] = \sum_{n=0}^{\infty}[\mathbf{A}_s, [\mathbf{A}_s, \dots [\mathbf{A}_s, \kappa_s V_s]\dots]] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ad_{\mathbf{A}_s})^n}{n!}\kappa_s V_s\end{aligned}$$

a tvrzení pro V_s plyne již ze známé formule platné pro každé $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$

$$e^{ad_A} B = e^A B e^{-A}$$

Nyní pro **K**. Nejprve budeme chtít ukázat, že

$$\mathbf{A}_s (\mathrm{Dom}\, \mathbf{K}) \subset \mathrm{Dom}\, \mathbf{K} \tag{50}$$

K tomu využijeme následujícího tvrzení, jež je vlastně bezprostředním důsledkem uzavřenosti **K**.

Tvrzení: Předpokládejme, že **A**,**B** jsou omezené operátory na $\mathcal{K}$, **K** je uzavřený na $\mathcal{K}$.

Nechť existuje nejvýše spočetná množina $\{e_i\} \subset \mathrm{Dom}\, \mathbf{K}$ taková že

(1) $\forall v \in \mathrm{Dom}\, \mathbf{K}, \quad \exists v_n = \sum_{i \in J} \xi_i^n e_i$, kde J je konečná a $v_n \to v$, $\mathbf{K} v_n \to \mathbf{K} v$

(2) $\forall i \quad A e_i \in \mathrm{Dom}\, \mathbf{K} \quad a\; \mathbf{K} A e_i = A \mathbf{K} e_i + \mathbf{B} e_i$

potom

$$A\, \mathrm{Dom}\, \mathbf{K} \subset \mathrm{Dom}\, \mathbf{K}, \quad a\; \forall v \in \mathrm{Dom}\, \mathbf{K},\; \mathbf{K} A v = A \mathbf{K} v + \mathbf{B} v$$

Odtud již snadno plyne (50), stačí za $\{e_i\}$ zvolit vlastní bázi **K**, která zaručuje splnění prvního předpokladu, $\mathbf{A} := \mathbf{A}_s$ a využít (5).

Takže **B** položíme jako $\mathbf{B} := \kappa_s \{-\iota_{s-1} (1 - \mathcal{D}_{s-1}) (W_{s-1} - \iota_{s-2} W_{s-2}) - [A_s, \iota_{s-1} \mathcal{D}_{s-1} W_{s-1}]\}$

Ještě budeme potřebovat identitu platnou pro $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} A^j B A^{n-1-j} = e^{-A} \frac{e^{ad_A} - 1}{ad_A} B \tag{51}$$

Výraz na pravé straně je opět definován mocninou řadou. Důkaz se provede indukcí.

Nyní nechť $v \in \mathrm{Dom}\, \mathbf{K}$ z toho tedy podle již dokázaného (50) platí

$$v_N := \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} (\mathbf{A}_s)^n \in \mathrm{Dom}\, \mathbf{K}, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

A platí

$$\mathbf{K} v_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\mathbf{K} (\mathbf{A}_s)^n v - (\mathbf{A}_s)^n \mathbf{K} v\right) + \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} (\mathbf{A}_s)^n\right) \mathbf{K} v$$

Člen pro n=0 je u první sumy nulový.

Rozepsáním lze snadno ověřit, že pro $n \geq 1$ platí

$$\mathbf{K} (\mathbf{A}_s)^n v - (\mathbf{A}_s)^n \mathbf{K} v = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{A}_s)^j [\mathbf{K}, \mathbf{A}_s] (\mathbf{A}_s)^{n-1-j} v$$

Označíme-li $\mathbf{B} := [\mathbf{A}_s, \mathbf{K}]$ což jak víme je podle předchozího tvrzení omezený operátor na $\mathcal{K}$, získáme.

$$\mathbf{K} v_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{A}_s)^j \mathbf{B} (\mathbf{A}_s)^{n-1-j} + \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} (\mathbf{A}_s)^n\right) \mathbf{K} v$$

Protože $v_N \to e^{-\mathbf{A}_s} v$ a podle (**??**) platí

$$\mathbf{K} v_N \to e^{-\mathbf{A}_s} \frac{e^{ad_{\mathbf{A}_s}} - 1}{ad_{\mathbf{A}_s}} \mathbf{B} v + e^{-\mathbf{A}_s} \mathbf{K} v$$

tak s využitím uzavřenosti **K** dostáváme

$$e^{-\mathbf{A}_s} v \in \mathrm{Dom}\, \mathbf{K}, \quad a\; \mathbf{K} e^{-\mathbf{A}_s} v = e^{-\mathbf{A}_s} \frac{e^{ad_{\mathbf{A}_s}} - 1}{ad_{\mathbf{A}_s}} ad_{\mathbf{A}_s} \mathbf{K} v + e^{-\mathbf{A}_s} \mathbf{K} v$$

z toho plyne

$e^{-\mathbf{A}_s}\operatorname{Dom}\mathbf{K}\subset\operatorname{Dom}\mathbf{K}\Rightarrow\operatorname{Dom}\left(\mathbf{K}+\frac{e^{ad_{\mathbf{A}_s}}-1}{ad_{\mathbf{A}_s}}ad_{\mathbf{A}_s}\mathbf{K}\right)=\operatorname{Dom}\left(e^{\mathbf{A}_s}\mathbf{K}e^{-\mathbf{A}_s}\right)=\operatorname{Dom}\mathbf{K}$

a pro každé $v\in\operatorname{Dom}\mathbf{K}$ rovnost

$$e^{\mathbf{A}_s}\mathbf{K}e^{-\mathbf{A}_s}v=e^{ad_{\mathbf{A}_s}}\mathbf{K}\mathbf{v}$$

Jestliže uděláme limitu z druhé strany, tak podobně dostaneme, že i

$$e^{-\mathbf{A}_s}\operatorname{Dom}\mathbf{K}\subset\operatorname{Dom}\mathbf{K}$$

Takže máme

$$e^{\mathbf{A}_s}\operatorname{Dom}\mathbf{K}=\operatorname{Dom}\mathbf{K}.$$

K dokončení důkazu užijeme

$$\begin{aligned}\kappa_s\left(e^{ad_{A_s}}K_s\right)v &= \kappa_s\left(K_s+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ad_{A_s})^n}{n!}K_s\right)v=\mathbf{K}v+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\kappa_s\frac{(ad_{A_s})^n}{n!}K_s\right)v\\ &= \mathbf{K}v+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ad_{\mathbf{A}_s})^n}{n!}\mathbf{K}\right)v=\left(e^{ad_{\mathbf{A}_s}}\mathbf{K}\right)v\end{aligned}$$

postup je podobný jako u V_s, nyní jsme však využili faktu, že $ad_{\mathbf{A}_s}\mathbf{K}$ jak už víme je omezený operátor.

Tím je důkaz dokončen. $\square$

Reference

[1] P. Duclos, P. Šťovíček: Floquet Hamiltonians with Pure Point Spectrum, Commun. Math. Phys. **177** , 327-347 (1996).

[2] M. Combescure: The quantum stability problem for time-periodic perturbations of the harmonic oscillator. Ann. Inst. Henri Poincaré **47**, 62-82 (1987); Erratum: Ann. Inst. Henri Poincaré **47**, 451-454 (1987).

[3] P. Duclos, P. Šťovíček, M. Vittot: Perturbation of an eigen-value from a dense point spectrum: A general Floquet Hamiltonian. Ann. Inst. Henri Poincaré **71**, 241-301 (1999).

[4] T. Kato: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, New York, 1996.