České vysoké učení technické

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky

školní rok 2001/2002

Zobecněné symetrie a zákony zachování duálních sigma modelů

Diplomová práce

Autor: Hynek Lavička

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval sám a uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze dne 8. srpna 2002

Poděkování

Děkuji nejbližší rodině za podporu při psaní této práce, Mgr. Saxaně Sedlačíkové za pečlivé přečtení a opravu chyb, Pavle Kosové za intelektuální podporu a mému školiteli Prof. ing. Ladislavu Hlavatému, DrSc. za odborné vedení a pomoc při zpracování této práce.

autor

Obsah

1 Úvod

Při popisu vývoje fyzikálních či matematických modelů dospíváme často k diferenciálním rovnicím, přičemž snahou je najít při zadaných počátečních podmínkách a okrajových podmínkách řešení, tj. pro každou možnou kombinaci nezávislých veličin najít závislé veličiny takovým způsobem, aby splňovaly diferenciální rovnice a počáteční a okrajové podmínky. Zcela obecně se podařilo vyřešit malé množství diferenciálních rovnic a nadále zůstává otázkou, proč některé lze vyřešit, tj. najít postup, jak získat řešení, a některé nikoliv. Za částečnou odpověď lze považovat existenci dostatečného množství zákonů zachování, ze kterých lze získat obecné řešení.

Jeden z prvních, kdo se problémem integrability začal zabývat, byl Sophus Lie, který zadefinoval pojem infinitesimální symetrie a provedl průkopnické práce v této oblasti. Další významnou osobou, jež zasáhla do dějin integrability, je Emma Noetherová, která odpověděla na otázku, jak souvisí symetrie variační úlohy se zákony zachování pro příslušné Euler-Lagrangeovy rovnice. Postupným vývojem se zjistilo, že lze teorii (klasických) symetrií rozšířit. Jejímu rozšíření, které zahrnuje transformace derivací vektorových polí, se věnuji v teoretické časti s náležitým matematickým úvodem do jetových prostorů tvořící matematickou podstatu této teorie. Okrajově se věnuji problému nedegenerovanosti, protože tento problém je více problémem technického fungování teorie než jejího praktického využití. Nakonec se věnuji problému zákonů zachování a zobecněných symetrií včetně formulace teorému Noetherové pro zobecněné symetrie.

V praktické části se zabývám Lie-Poisson T-duálním σ-modelem a jeho zobecněným symetriím do prvního řádu v derivacích a příslušným zákonům zachování. Stěžejním problémem je pro mě případ A, protože pokrývá velkou část z možných hodnot parameterů. Tyto hodnoty jsou významné tím, že rovnice systému jsou totálně nedegenerované - maximálního ranku a jsou lokálně řešitelné, a jsou řádu 2, protože to je zajímavý fyzikální případ. Zcela okrajově se věnuji případu B, který má sloužit jako demonstrační příklad výpočtu zobecněných symetrií.

2 Matematický základ zobecněných symetrií

2.1 Základní pojmy jet-prostorů

Definice 1

Nechť M a N jsou variety třídy C^∞, potom symbolem $C^\infty(M, N)$ označíme množinu všech C^∞ zobrazení $f : U \to N$, kde U je otevřená množina v M.

Prakticky budeme přepokládat, že varieta M bude prostor nezávislých proměnných a varieta N bude prostor závislých proměnných.

Definice 2

O zobrazeních $f, g \in C^\infty(M, N)$ řekneme, že souhlasí do řádu k v bodě $x \in M$ právě tehdy, když existují souřadnicové systémy v okolí $x \in M$ a v okolí $f(x) = g(x) \in N$, ve kterých mají stejný Taylorův rozvoj do řádu k.

Není těžké ukázat, že jestliže f a g souhlasí do řádu k pro pevně zvolené souřadnicové mapy, potom f a g souhlasí do řádu k pro libovolné jiné souřadnicové mapy.

Takto můžeme zavést relaci ekvivalence na $C^\infty(M, N)$ zobrazení f a g.

Definice 3

$f, g \in C^\infty(M, N)$ jsou ekvivalentní právě tehdy, když f a g souhlasí do řádu k. Množinu všech funkcí ekvivalentních s f do řádu k označíme $j^k_x f$.

Jestliže nyní zvolíme lokální souřadnicový systém v okolí bodu $x \in M$ x^a a lokální souřadnicový systém v okolí bodu $f(x) \in N$ z^μ, potom $j^k_x f$ je určeno čísly

$$x^a, z^\mu = f^\mu(x), \tag{1}$$

$$z^\mu_a = \partial_a f^\mu(x), \tag{2}$$

$$z^\mu_{a_1 a_2} = \partial_{a_1 a_2} f^\mu(x), \tag{3}$$

$$\ldots \tag{4}$$

$$z^\mu_{a_1 a_2 \ldots a_k} = \partial_{a_1 a_2 \ldots a_k} f^\mu(x), \tag{5}$$

kde $f^\mu(x)$ je souřadnicový zápis funkce f a kde $\partial_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ znamená parciální derivaci, např.

$$\partial_a f^\mu := \frac{\partial f^\mu}{\partial x^a}, \tag{6}$$

$$\ldots \tag{7}$$

$$\partial_{a_1 a_2 \ldots a_k} f^\mu := \frac{\partial^k f^\mu}{\partial x^{a_1} \ldots \partial x^{a_k}}, \tag{8}$$

kde indexy a, b, a_1, ... jsou v rozsahu $1 \ldots dim(M)$, μ je v rozsahu $1 \ldots dim(N)$.

Potom tedy soubor čísel

$$x^a, z^\mu, z^\mu_a, z^\mu_{a_1 a_2}, \ldots, z^\mu_{a_1 a_2 \ldots. a_k} \tag{9}$$

v definičním oboru příslušných souřadnicových map x^a a z^μ, symetrický v dolních indexech, ale jinak libovolný, je jedinečná třída ekvivalence.

Definice 4

k-jetovým bundlem variet M a N budeme rozumět množinu všech k-jetových prostorů $j^k_x f$, pro pevné k a všechna $x \in M$ a $f \in C^\infty(M, N)$.

Dále lze ukázat, že $J^k(M, N)$ má přirozenou diferencovatelnou strukturu viz. [2]

Definice 5

Zobrazení

$$\alpha : J^k(M,N) \to M,$$
$$\alpha(j^k_x f) = x \tag{10}$$

nazveme zdrojovým zobrazením a x se nazývá zdrojem $j^k_x f$.

Definice 6

Zobrazení

$$\beta : J^k(M,N) \to N,$$
$$\beta(j^k_x f) = f(x) \tag{11}$$

nazveme cílové zobrazení a $f(x)$ nazveme cílem $j^k_x f$.

Bodem v prostoru $J^k(M,N)$ rozumíme třídu ekvivalentních zobrazení, které mají stejný zdroj, stejný cíl a stejné derivace do řádu k pro všechny souřadnicové zápisy.

Pokud nyní vezmeme $\xi \in J^k(M,N)$ a x^a jako lokální souřadnice okolo $\alpha(\xi) \in M$ a dále z^μ jako lokální souřadnice v okolí $\beta(\xi) \in N$ a

$$z^\mu_a,\ z^\mu_{a_1 a_2},\ \dots,\ z^\mu_{a_1 a_2 \dots . a_k} \tag{12}$$

označují derivace do řádu k souřadnicového zápisu libovolného zobrazení ve třídě ekvivalence ξ, potom můžeme zvolit

$$x^a, z^\mu, z^\mu_a, z^\mu_{a_1 a_2}, \dots, z^\mu_{a_1 a_2 \dots a_k} \tag{13}$$

jako lokální souřadnice okolo ξ.

Definice 7

Lokální souřadnice (13) nazveme standardními souřadnicemi na $J^k(M,N)$ příslušející k souřadnicím x^a na M a z^μ na N.

Tato konvence označení standardních souřadnic na $J^l(M,N)$ pro $l \neq k$ by mohla vést ke dvoznačnosti, ale při bližším ohledání zde žádný problém nevyvstává.

Jestliže $k \geq l$, potom zanedbáním všech derivací vyšších než l získáme přirozenou projekci k-jetového bundlu do l-jetového bundlu

$$\begin{aligned} \pi^k_l : J^k(M,N) &\rightarrow J^l(M,N), \\ j^k_x f &\rightarrow j^l_x f, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\pi^k_l(x^a, z^\mu, z^\mu_a, ..., z^\mu_{a_1 \dots a_k}) = (x^a, z^\mu, z^\mu_a, ..., z^\mu_{a_1 \dots a_l}). \tag{15}$$

k-jetový bundle lze formulovat jiným, ale zcela ekvivalentním způsobem bez referenčních souřadnic [3].

Definice 8

Pokud $f \in C^\infty(M,N)$, potom k-jetovým rozšířením funkce f rozumíme

$$\begin{aligned} j^k f : U &\rightarrow J^k(M,N), \\ x &\rightarrow j^k_x f, \end{aligned} \tag{16}$$

kde U je definiční obor f.

Pokud složíme zdrojové zobrazení a k-jetové rozšíření funkce f, dostaneme

$$\alpha \cdot j^k f = I_U. \tag{17}$$

Pro případ $k = 0$ zjistíme, že $j^0 f$ je grafem f.

Definice 9

Nechť máme zobrazení zobrazující z h-jetového bundle variet M a N do variety P, tedy

$$\phi : J^h(M,N) \to P \tag{18}$$

takové, že ϕ je hladké. Potom jeho s-tou prolongací nazveme jedinečné zobrazení

$$pr^s\phi : J^{h+s}(M,N) \to J^s(M,P) \tag{19}$$

s vlastností, že pro každé $f \in C^\infty(M,P)$ diagram

$$\begin{tikzcd}
J^{h+s}(M,N) \arrow[r, "pr^s\phi"] & J^s(M,P) \\
M \arrow[u, "j^{h+s}f"] \arrow[ur, "j^s(\phi \circ j^h f)"'] &
\end{tikzcd}$$

komutuje.

Jestliže x^a, z^μ a y^A jsou lokální souřadnice na varietách M, N a P, kde $a \in \{1, ..., dimM\}$, $\mu \in \{1, ..., dimN\}$ a $A \in \{1, ..., dimP\}$, a dále jestliže ϕ má souřadnicový zápis

$$y^A = \phi^A(x^a, z^\mu, z^\mu_a, ..., z^\mu_{a_1 \ldots a_h}) \tag{20}$$

a funkce f má souřadnicový zápis

$$z^\mu = f^\mu(x^a), \tag{21}$$

potom $\phi . j^h f$ má souřadnicový zápis

$$y^A = \phi^A(x^a, f^\mu(x), \partial_a f^\mu(x), ..., \partial_{a_1 \ldots a_h} f^\mu(x)). \tag{22}$$

Definice 10

Totální derivací $D_b^{(k)}$ označíme

$$D_b^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x^b} + \sum_{a=1}^{dimM} \sum_{0 \leq |J| \leq k-1} z^\mu_{J,a} \frac{\partial}{\partial z^\mu_J}, \tag{23}$$

kde J je multiindex takový, že $J \equiv (j_1, ..., j_l)$, kde $j_i \in \{1, ..., dimM\}$, $i \in \{1, ..., l\}$, $|J| = l$ a

$$z^\mu_{J,a} = \frac{\partial z^\mu_J}{\partial x^a} = \frac{\partial^{l+1} z^\mu}{\partial x^a \partial x^{j_1} ... \partial x^{j_l}}. \tag{24}$$

Pokud nás nebude příliš zajímat, do jakého řádu $D_b^{(k)}$ působí, tak budeme psát D_b a budeme jím myslet

$$D_b = \frac{\partial}{\partial x^b} + \sum_{a=1}^{dimM} \sum_{J} z^\mu_{J,a} \frac{\partial}{\partial z^\mu_J}. \tag{25}$$

Jde o definici $dimM$ vektorových polí závislých na volbě souřadnic působících na prostoru $J^l(M, N)$ pro $l \geq k$ s důležitou vlastností, že pro libovolnou funkci ϕ pro $k > h$ platí

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\phi(x^a, f^\mu(x), \partial_a f^\mu(x), ..., \partial_{a_1 ... a_h} f^\mu(x))\right) \\ &= \left(D_b^{(k)} \pi_h^{h+1 *} \phi\right) \left(x^a, f^\mu(x), \partial_a f^\mu(x), ..., \partial_{a_1 ... a_{h+1}} f^\mu(x)\right), \end{aligned} \tag{26}$$

kde vyznačenou hvězdičkou rozumíme zobrazení transformujíci funkce na varietě indukované zobrazením mezi varietami.

Zdálo by se, že při definici symbolu D_b mohou vyvstat problémy s konvergencí, ale opak je pravdou, protože tento symbol bude vždy působit na funkci, která bude záviset na konečném řádu derivací, a potom tedy všechny členy (25) vyšší než tento řád budou rovny 0.

Dále bych rád uvedl dvě hojně užívaná zkrácení, která i já budu využívat:

1) Jestliže $D_b^{(k)}$ působí na funkci, která není přímo definovaná na prostoru $J^k(M, N)$, tak budu předpokládat, že na funkci zapůsobí indukované

zobrazení k přirozené projekci. Potom symbolem $D_b^{(k)}$ budeme mít na mysli

$$D_b^{(k)} = D_b^{(k)} \pi_l^{k\,*}. \tag{27}$$

Totéž bude platit i pro D_b.

2) Vícenásobná aplikace totální derivace se bude označovat

$$D_J^{(k)} = D_{b_1...b_s}^{(k)} \equiv D_{b_1}^{(k)} D_{b_2}^{(k)} ... D_{b_s}^{(k)}, \tag{28}$$

kde $J = (b_1, ..., b_s)$. Obdoba této formule bude platit i na D_b.

Tato notace nám pomůže upravit výraz $j^s(\phi . j^h f)$ v souřadnicovém vyjádření na

$$\begin{aligned}
y^A &= \phi^A(x^a, f^\mu(x), \partial_a f^\mu(x), ..., \partial_{a_1...a_h} f^\mu(x)), \\
y_b^A &= \left(D_b^{(h+s)} \phi^A\right)(x^a, f^\mu(x), \partial_a f^\mu(x), ..., \partial_{a_1...a_{h+1}} f^\mu(x)), \\
&... \\
y_{b_1...b_s}^A &= \left(D_{b_1...b_s}^{(h+s)} \phi^A\right)(x^a, f^\mu(x), \partial_a f^\mu(x), ..., \partial_{a_1...a_{h+s}} f^\mu(x)).
\end{aligned} \tag{29}$$

Formule (29) musí platit pro jakoukoli funkci f, proto musí mít $pr^s\phi$ souřadnicový zápis

$$\begin{aligned}
x^a &= x^a, \\
y^A &= \phi^A(x^a, z^\mu, z_a^\mu, ..., z_{a_1...a_h}^\mu), \\
y_b^A &= \left(D_b^{(h+s)} \phi^A\right)(x^a, z^\mu, z_a^\mu, ..., z_{a_1...a_{h+1}}^\mu), \\
&... \\
y_{b_1...b_s}^A &= \left(D_{b_1...b_s}^{(h+s)} \phi^A\right)(x^a, z^\mu, z_a^\mu, ..., z_{a_1...a_{h+s}}^\mu).
\end{aligned} \tag{30}$$

Potom zobrazení $pr^s\phi$ obsahuje zobrazení ϕ samotné a jeho první totální derivace vůči souřadnicím na varietě M.

2.2 Podmínky nedegenerovanosti diferenciálních rovnic

V této části se budu zajímat technickými záležitostmi, které jsou třeba ke správnému fungování teorie zobecněných symetrií systému diferenciálních rovnic

$$E_\mu[u] = E_\mu(x, u^{(n)}) = 0, \mu = 1, ..., l. \tag{31}$$

Definice 11

Nechť máme systém diferenciálních rovnic (31), potom o tomto systému řekneme, že je lokálně řešitelný v bodě

$$(x_0, u_0^{(n)}) \in \mathcal{S}_E \equiv \{(x, u^{(n)}) : E_\mu(x, u^{(n)}) = 0, \mu = \{1, ..., l\}\} \tag{32}$$

právě tehdy, když existuje hladké řešení $u = f(x)$ systému (31) definované pro x z okolí bodu x_0, který má tyto "počáteční podmínky" $u_0^{(n)} = pr^n f(x_0)$.

Definice 12

O systému (31) řekneme, že je lokálně řešitelný právě tehdy, když je lokálně řešitelný v každém bodě $\mathcal{S}_E$.

Definice 13

Nechť máme systém diferenciálních rovnic (31). O tomto systému řekneme, že je maximálního ranku právě tehdy, když Jakobiho matice

$$J_E(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial E_\mu}{\partial x^i}, \frac{\partial E_\mu}{\partial u_J^\alpha} \right) \tag{33}$$

vůči všem proměnným $(x, u^{(n)})$ je řádu l všude na $\mathcal{S}_E$.

Definice 14

Nechť máme systém (31), který je řádu n, potom jeho k-tou prolongací rozumíme systém řádu $n+k$ takový, že je získatelný z původního systému (31) aplikací operátoru D řádu k, tj.

$$E_{\mu}^{(k)}(x, u^{(n)}) \equiv D_J E(x, u^{(n)}) = 0, \quad \mu = 1, ..., l \tag{34}$$

kde $\#J = k$.

Lemma 1

Jestliže $u = f(x)$ je hladké řešení systému (31), potom je řešením libovolné prolongace systému (31).

Důkaz

Plyne přímo z předchozí definice.

Definice 15

Systém diferenciálních rovnic (31) nazveme totálně nedegenerovaný právě tehdy, když systém (31) a všechny jeho prolongace jsou maximálního ranku a jsou lokálně řešitelné.

2.3 Zobecněné symetrie diferenciálních rovnic

Předpokládejme vektorové pole

$$v = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_{\alpha}(x, u) \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \tag{35}$$

definované na otevřené podmnožině $M \subset X \times U$, kde symbolem X míníme prostor nezávislých proměnných a symbolem U prostor závislých proměnných. Funkce ξ^i a ϕ_{α} závisí pouze na $x \in X$ a $u \in U$. v generuje lokální jednoparametrickou grupu transformací $exp(\epsilon v)$, která působí bodově na prostoru

M. Zásadního zobecnění se nám podaří dosáhnout, když budeme předpokládat, že funkce ξ^i a ϕ_α závisí i na derivacích u.

2.3.1 Diferenciální funkce

Dříve než budu pokračovat v další teorii zobecněných vektorových polí, rád bych se zmínil o notaci, kterou budu používat. Všude v této kapitole bude množina $M \subset X \times U$ znamenat souvislou a otevřenou podmnožinu v prostoru nezávislých a závislých proměnných.

Prolongace $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$ jsou otevřené podmnožiny příslušných jetových prostorů s vlastností: $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)} \Leftrightarrow (x, u) \in M$. Nyní budu symbolem $\mathcal{A}$ myslet prostor hladkých funkcích $P(a, u^{(n)})$ zobrazujících do $\mathbf{R}$, závisejících na x, u a derivacích až do řádu n, kde n je nějaké přirozené konečné číslo, ale zatím nespecifikované. Funkce $P(a, u^{(n)})$ jsou definovány pro všechny body $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$. Elementy v prostoru $\mathcal{A}$ nazýváme diferenciální funkce. Každá diferenciální funkce je hladká funkce $P : M^{(n)} \to \mathbf{R}$ pro nějaké konečné n. Bude-li $m \geq n$, potom lze na funkci P nahlížet jako na funkci na $M^{(m)}$ tak, že souřadnice $(x, u^{(n)})$ jsou částí $(x, u^{(m)})$ na $M^{(m)}$.

Nebude-li nás přesně zajímat, na jakém řádu derivací u funkce P závisí, budeme psát $P[u]$, což bude znamenat $P(x, u^{(n)})$, kde n je konečné, ale zatím neurčené.

Nyní definuji prostor $\mathcal{A}^l$ jako prostor l-tic diferenciálních funkcí $P[u] = (P_1[u], ..., P_l[u])$, kde $P_j \in \mathcal{A}$, $j \in \{1, 2, ..., l\}$.

2.3.2 Zobecněná vektorová pole

Definice 16

Zobecněným vektorovým polem nazveme výraz

$$v = \sum_{i=1}^{p} \xi^i[u] \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{36}$$

Definice 17

N-tou prolongací zobecněného vektorového pole v rozumíme

$$pr^{(n)}v = v + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\#J \leq N} \phi_\alpha^J[u] \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \tag{37}$$

a speciálně definujeme nekonečnou prolongaci jako formální součet

$$prv = \sum_{i=1}^{p} \xi^i[u] \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J \phi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{38}$$

kde suma přes J je zamýšlena jako suma přes všechny multiindexy $J = (j_1, ..., j_k)$ pro $k \geq 0$, $1 \leq j_k \leq p$ kde

$$\phi_\alpha^J = D_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha. \tag{39}$$

Dále kde

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{40}$$

kde pro $J = (j_1, ..., j_k)$ je

$$u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^i \partial x^{j_1} ... \partial x^{j_k}}. \tag{41}$$

Pokud budeme předpokládat nějakou diferenciální funkci $P[u] = P(x, u^{(n)})$, potom $prv(P)$ je opět diferenciální funkce, ale obecně závisí na jiném řádu derivací. Diferenciální funkce P závisí pouze na konečně mnoha derivacích u, takže potom $prv(P)$ závisí na konečně mnoha derivacích a problém konvergence (38) nemusíme řešit.

Definice 18

Zobecněné vektorové pole v je zobecněná infinitesimální symetrie systému diferenciálních rovnic

$$E_\mu[u] = E_\mu(x, u^{(n)}) = 0, \mu = 1, ..., l \tag{42}$$

právě tehdy, když

$$prv[E_\mu] = 0, \mu = 1, ..., l \tag{43}$$

pro každé hladké řešení $u = f(x)$.

Výše uvedená definice je přímou analogií vět 2.31 a 2.72 z [1]. Abych mohl postupovat dále, musím položit požadavky nedegenerovanosti na systém E_μ. Dále musím předpokládat, že když v závisí na m-tém řádu derivací u, potom levá strana (43) bude obecně záležet na m+n-tém řádu derivací u. Proto budeme požadovat nedegenerovanost nejen na systém (42), ale i na jeho prolongace do libovolného řádu.

Globální předpoklad Nebude-li řečeno jinak, tak všechny systémy diferenciálních rovnic budou úplně nedegenerované a všechny jejich prolongace budou mít maximální rank a budou lokálně řešitelné.

Pokud bychom se ponořili více do problému a předpokládali, že systém E_μ je normální a analytický (více v [1] kapitola 2.6, v této kapitole se řeší technické problémy, které zdaleka překračují rámec této práce), potom E_μ splňuje tento předpoklad. Pak je platnost podmínky (43) pro všechny řešení ekvivalentní existenci diferenciálního operátoru $\mathcal{D}_{\mu\nu} = \sum_J P^J_{\nu\mu} D_J$, kde $P^J_{\nu\mu}$ takové, že

$$prv(E_\mu) = \sum_{\mu=1}^{l} \mathcal{D}_{\nu\mu} E_\mu \tag{44}$$

pro všechny funkce $u = f(x)$.

Formule (43) a (44) jsou užitečné verze základního infinitesimálního kritéria pro zobecněné infinitesimální symetrie.

2.3.3 Evoluční vektorová pole

Definice 19

Nechť $Q[u] = (Q_1[u], ..., Q_q[u]) \in \mathcal{A}^q$ je q-tice diferenciálních funkcí. Zobecněné vektorové pole

$$v_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{45}$$

se nazývá evoluční vektorové pole a Q nazveme její charakteristikou.

Budeme-li prolongovat evoluční vektorové pole v_Q, získáme

$$prv_Q = \sum_{\alpha,J} D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}. \tag{46}$$

Jakékoli zobecněné vektorové pole v formy (36) má svoji evoluční repezentaci v_Q s charakteristikou Q, která je

$$Q_\alpha = \phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha. \tag{47}$$

Věta 1

Zobecněné vektorové pole v je zobecněnou infinitesimální symetrií systému diferenciálních rovnic (42) $\Leftrightarrow$ evoluční reprezentace v_Q pole v je zobecněnou infinitesimalní symetrií (42).

Důkaz

Vyjdeme z toho, že aplikujeme prolongaci na zobecněné vektorové pole, které působí na systém diferenciálních rovnic (42) a následně oddělíme část příslušící evolučnímu vektorovému poli.

$$prvE_\mu = prv_Q E_\mu + \sum_{i=1}^{p} \xi^i D_i E_\mu \tag{48}$$

Druhý člen v rovnici (48) vypadne kvůli platnosti na množině řešení.

2.3.4 Ekvivalence zobecněných infinitesimálních symetrií a triviální symetrie

Definice 20

Jestliže si vezmeme evoluční vektorové pole v_Q tak, že $Q = 0$ na množině řešení (42), což tedy znamená, že v_Q je zobecněná infinitesimální symetrie (42), potom takové zobecněné infinitesimální symetrie nazveme triviální.

Definice 21

O zobecněném vektorovém poli budeme říkat, že je triviální, právě tehdy, když je příslušné evoluční vektorové pole triviální.

Definice 22

Dvě zobecněné infinitesimální symetrie v a v' jsou ekvivalentní, když $v - v'$ je triviální infinitesimální symetrie systému (42).

Výše uvedená definice zavádí relaci ekvivalence na prostoru zobecněných infinitesimálních symetrií pro daný systém. Budeme se snažit klasifikovat infinitesimální symetrie systému (42) až na triviální infinitesimální symetrie.

2.3.5 Výpočet zobecněných infinitesimálních symetrií

Principiálně je výpočet zobecněných symetrií shodný s výpočtem klasických symetrií, ale existují tyto rozdíly:
1) Budeme hledat infinitesimální symetrie v evolučním tvaru v_Q. To bude mít za následek zjednodušení výpočtu z počtu $p + q$ neznámých funkcí na q neznámých funkcí a dále zjednodušení výpočtu prolongací.

2) Už na začátku musíme zvolit řád derivací u, na kterých budou záviset charakteristiky $Q(x, u^{(m)})$. Bude platit, že čím zvolíme řád derivací vyšší, tím bude složitější infinitesimální symetrie spočítat. To samozřejmě znamená, že nenajdeme všechny infinitesimální transformace, ale pouze část, která nám může dát dostatečnou informaci o obecné formě infinitesimálních symetrií.
3) Musíme se nějakým způsobem vypořádat s existencí triviálních infinitesimálních symetrií, nejjednodušší způsob, jak se jich zbavit, je eliminace nadbytečných derivací Q substitucí s využitím prolongací systému (42).

2.3.6 Akce grup

Nyní se budeme zabývat problémem zjištění grupy transformací k zobecněnému vektorovému poli. Budeme znát zobecněné vektorové pole v a k němu budeme chtít sestrojit jednoparametrickou grupu $exp(\varepsilon v)$, ale je jasné, že akce nebude moci působit na $M \subset X \times U$, protože koeficienty v závisí na derivacích u, které se také transformují. Nelze také definovat akci grupy na nějakém konečném jet-prostoru $M^{(n)}$, neboť koeficienty $pr^{(n)}v$ budou záviset na stále vyšších derivacích u. Nejjednodušší cesta k řešení problému je definovat akci grupy $exp(\varepsilon v)$ na prostoru hladkých funkcí následujícím způsobem: Nahradíme v jeho evoluční reprezentací v_Q a budeme předpokládat systém rovnic

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = Q(x, u^{(m)}), \tag{49}$$

kde Q je charakteristika pole v_Q. Řešení (předpokládáme, že existuje) Cauchyho problému s počáteční podmínkou $u(x, 0) = f(x)$ bude hledanou grupovou akcí

$$[exp(\varepsilon v_Q)f](x) \equiv u(x, \varepsilon). \tag{50}$$

Zde předpokládáme, že řešení Cauchyho problému je jednoznačné pro počáteční podmínku $f(x)$, která je vybrána z příslušného prostoru funkcí, a kde ε

je dostatečně malé. Výsledný tok $exp(\varepsilon v_Q)$ bude na daném prostoru funkcí. Ověření předešlých tvrzení vede k velmi problematickým otázkám existence a jednoznačnosti řešení systému evolučních rovnic, jež jsou daleko za rozsahem této práce. Tyto výsledky jsou, pokud odhlédneme od řešení výše nastíněných problémů, formálně velmi přirozené a budou mít přímé praktické aplikace.

Předpoklad jednoznačnosti implikuje, že $exp(\varepsilon v_Q)$ určuje lokální jednoparametrickou grupu transformací ([1], kapitola 1.2) na prostoru funkcí.

Věta 2

Evoluční vektorové pole v_Q je infinitesimální symetrií systému diferenciálních rovnic (42) $\Leftrightarrow$ příslušná akce grupy $exp(\varepsilon v)$ transformuje řešení na jiné řešení.

Poznámky k větě Tato věta dále předpokládá další technické věci:
1) (42) je totálně nedegenerovaný systém jako v globálním předpokladu.
2) Systém evolučních rovnic příslušejících v_Q je jednoznačně řešitelný v nějakém prostoru funkcí, který obsahuje všechny lokální řešení (42).
3) Systém lineárních rovnic (52), který se vyskytuje v důkazu, má jedinečné řešení.

Důkaz Nechť $u_\varepsilon = exp(\varepsilon v)f$ (zde ε v indexu neznamená derivaci). Jestliže u_ε je parametrizovaná množina řešení, potom

$$0 = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} E_\mu(x, u_\varepsilon^{(n)}) = \sum_{\alpha, J} D_J Q_\alpha(x, u_\varepsilon^{(n)}) \frac{\partial E_\mu}{\partial u_J^\alpha}(x, u_\varepsilon^{(n)}) = prv_Q[E_\mu(x, u_\varepsilon^{(n)})]. \tag{51}$$

Položením $\varepsilon = 0$ splníme (43). Předpokládejme, že platí (44) a že máme pro ε dostatečně malé řešení $v = (v^1, ..., v^l)$ systému lineárních evolučních rovnic

$$\frac{\partial v^\nu}{\partial \varepsilon} = \sum_\mu \mathcal{D}_{\nu\mu} v^\mu = \sum_{\mu, J} P^J_{\nu\mu}(x, u_\varepsilon^{(m)}(x)) v^\mu_J, \; \nu = \{1, ..., l\}, \tag{52}$$

které pro počáteční podmínku $v(x,0) \equiv 0$ je řešení $v(x,\varepsilon) \equiv 0$. Potom (43) a výše provedené výpočty implikují, že jestliže $u = f(x)$ je řešení (42), pak $v^\nu(x,\varepsilon) = E_\nu(x, u_\varepsilon^{(m)})$ splňuje Cauchyho problém, a potom platí $E_\nu(x, u_\varepsilon^{(m)}) = 0$ pro všechna ε, a tedy u_ε je řešením.

Jestliže $P[u]$ je diferenciální funkce a $u(x,\varepsilon)$ je hladké řešení (49), potom je

$$\frac{d}{d\varepsilon}P[u] = \sum_{\alpha,J} D_J Q_\alpha[u] \frac{\partial P}{\partial u_J^\alpha} = prv_Q(P). \tag{53}$$

Jinými slovy, $prv_Q(P)$ určuje infinitesimální změnu P podle akce jednoparametrické grupy generované v_Q

$$P[exp(\varepsilon v_Q)f] = P[f] + \varepsilon prv_Q(P)[f] + O(\varepsilon^2). \tag{54}$$

Pokud bychom postupovali v rozvíjení v mocninách ε výše, dostali bychom Lieovu řadu

$$P[exp(\varepsilon v_Q)f] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}(prv_Q)^n P[f], \tag{55}$$

kde $(prv_Q)^i(P) = prv_Q[(prv_Q)^{i-1}(P)]$. Zde se nebudu zabývat konvergencí (55).

2.3.7 Zobecněné infinitesimální symetrie a prolongace

Lemma 2

Jestliže v_Q je evoluční vektorové pole, potom

$$prv_Q[D_i P] = D_i[prv_Q(P)],\ i \in \{1, ..., p\} \tag{56}$$

pro všechna $P \in \mathcal{A}$. Současně pro vektorové pole

$$v^\star = \sum_{k=1}^{p} \xi^k[u] \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J \phi_\alpha^J[u] \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{57}$$

kde ξ^i, $\phi_\alpha^J \in \mathcal{A}$. Podmínka $[v^\star, D_i] = 0$ pro $i = 1, ..., p \Leftrightarrow$

$$v^{\star} = prv_Q + \sum_{k=1}^{p} c_k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{58}$$

pro nějaké $Q \in \mathcal{A}^q$, $c_1, ..., c_p \in \mathbf{R}$.

Důkaz

Nejdříve uvedu jednoduchou komutační relaci

$$\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_J}(D_i P) = D_i(\frac{\partial P}{\partial u^{\alpha}_J}) + \frac{\partial P}{\partial u^{\alpha}_{J-i}}, \tag{59}$$

kde $J - i$ je J, kterému umažeme jedno i, pokud se i v J nevyskytuje, potom člen definujeme jako nulu. Z toho pak vyplývá

$$prv_Q[D_i P] = \sum_{\alpha,J} D_J Q_{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_J}[D_i P] \tag{60}$$

$$= \sum_{\alpha,J} D_J Q_{\alpha} D_i(\frac{\partial P}{\partial u^{\alpha}_J}) + \sum_{\alpha,J} D_J Q_{\alpha} \frac{\partial P}{\partial u^{\alpha}_{J-i}}. \tag{61}$$

Přejmenujeme $J - i$ na J v druhé sumaci a dostaneme

$$prv_Q[D_i P] = \sum_{\alpha,J} D_J Q_{\alpha} D_i(\frac{\partial P}{\partial u^{\alpha}_J}) + \sum_{\alpha,J} D_i D_J Q_{\alpha} \frac{\partial P}{\partial u^{\alpha}_J}. \tag{62}$$

Opačná implikace:

$$D_i v^{\star} - v^{\star} D_i = \sum_{k=1}^{p} D_i \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{J,\alpha} (D_i \phi^J_{\alpha} - \phi^{J,i}_{\alpha}) \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_J}. \tag{63}$$

Tento výraz vynulujeme právě tehdy, když $D_i \xi^k = 0$ pro všechna i a k a $\phi^{J,i}_{\alpha} = D_i \phi^J_{\alpha}$ pro všechny i, J a α, z čehož potom plyne, že ξ^k je konstanta. Pomocí indukce získáme $\phi^J_{\alpha} = D_J Q_{\alpha}$, kde $Q_{\alpha} = \phi^0_{\alpha}$ je koeficient u $\partial_{u^{\alpha}}$.

Věta 3

Jestliže v_Q je zobecněnou infinitesimální symetrií systému (42) potom je též zobecněnou infinitesimální symetrií libovolné prolongace (42).

Důkaz

Všechny prolongace (42) jsou ve formě $D_J E_\mu = 0$, $\mu = \{1, ..., q\}$. Podle lemmatu 1 je

$$pr v_Q(D_J E_\mu) = D_J(pr v_Q(E_\mu)). \tag{64}$$

Jakmile u bude řešením, potom $pr v_Q(E_\mu)$ podle předpokladů vymizí na množině řešení.

2.3.8 Lieovy závorky

Klasické Lieovy infinitesimální symetrie tvořily Lieovu algebru a nyní vyvstává otázka, zda i zobecněné infinitesimální symetrie tvoří Lieovu algebru a jak je definována Lieova závorka.

Definice 23

Nechť v a w jsou zobecněná vektorová pole, potom jejich Lieova závorka $[v, w]$ je jednoznačně definována

$$pr[v, w](P) = prv[prw(P)] - prw[prv(P)] \tag{65}$$

pro všechny diferenciální funkce $P \in \mathcal{A}$.

Věta 4

a) Nechť v_Q a v_R jsou evoluční vektorová pole. Potom jejich Lieova závorka $[v_Q, v_R] = v_S$ je také evoluční vektorové pole s charakteristikou

$$S = pr v_Q(R) - pr v_R(Q), \tag{66}$$

přičemž působení $pr v_Q$ a $pr v_R$ na $R, S \in \mathcal{A}^q$ je po komponentách.
b) Obecněji, jestliže

$$v = \sum_i \xi^i[u] \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\alpha \phi_\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{67}$$

$$w = \sum_i \eta^i[u] \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\alpha \psi_\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{68}$$

potom

$$[v, w] = \sum_{i=1}^{p} (prv(\eta^i) - prw(\xi^i)) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} (prv(\phi_\alpha) - prw(\phi_\alpha)) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{69}$$

Dále jestliže v má charakteristiku Q a w má charakteristiku R, potom $[v, w]$ má charakteristiku S definovanou rovnicí (66).

Důkaz

V definici Lieovy závorky (65) vzaté s $v = v_Q$ a $w = v_R$ jsou koeficienty u $\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ čistě dány α-tou komponentou S v rovnici (66) pro $pr[v, w]$. Odtud dokážeme část a). Nyní stačí ukázat, že $[prv_Q, prv_R]$ je evoluční vektorové pole v_S, což plyne přímo z lemmy 1, protože prv_Q i prv_R komutují se všemi totálními derivacemi a neobsahují členy $\frac{\partial}{\partial x^i}$. To dokazuje část a).
Část b) Plyne přímo z definice Lieovy závorky.

Věta 5

Lieovy závorky vektorových polí mají následující vlastnosti:

a) Bilinearita

$$[cu + c'v, w] = c[u, w] + c'[v, w], \tag{70}$$

b) Antisymetrie

$$[v, w] = -[w, v], \tag{71}$$

c) Jakobiho identita

$$[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0, \tag{72}$$

pro jakákoli zobecněná vektorová pole u, v a w.

Věta 6

Množina zobecněných infinitesimálních symetrií nedegenerovaného systému (42) diferenciálních rovnic tvoří Lieovu algebru.

Důkaz

Vychází z výsledků předešlé věty.

2.4 Matematický základ zákonů zachování

Nyní když vím, jak se počítají zobecněné symetrie pro zadaný systém diferenciálních rovnic, mohu se ptát, jak souvisí se zákony zachování. Na tuto otázku by nám měla odpovědět následující kapitola.

2.4.1 Fréchetova derivace

Definice 24

Nechť $P[u] = P(x, u^{(n)}) \in \mathcal{A}^r$ je r-tice diferenciálních funkcí, potom fréchetovou derivací P je diferenciální operátor $D_P : \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^r$ definovaný takto:

$$D_P(Q) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} P[u + \varepsilon Q[u]] \tag{73}$$

pro $Q \in \mathcal{A}^q$.

Po úpravách pravé strany rovnice (73) lze získat vyjádření po složkách

$$(D_P)_{\mu\nu} = \sum_J \left(\frac{\partial P_\mu}{\partial u_J^\nu}\right) D_J, \ \ \mu \in \{1, ..., r\}, \, \nu \in \{1, ..., q\}. \tag{74}$$

Tedy D_P je matice $q \times r$ diferenciálních operátorů. Ve speciálním případě, pokud $P = E[u]$ je lineární deferenciální polynom, potom $D_P = E$ je stejný jako diferenciální operátor určující systém.

Lze najít souvislost mezi Fréchetovou derivací a evolučním vektorovým polem a tuto souvislost popisuje následující věta:

Věta 8

Jestliže $P \in \mathcal{A}^r$ a $Q \in \mathcal{A}^q$, potom

$$D_P(Q) = prv_Q(P). \tag{75}$$

Důkaz

Tvrzení plyne přímo z formulí (74) a (46).

Věta 9

Fréchetova derivace součinu dvou diferenciálních funkcí je

$$D_{PQ} = PD_Q + QD_P, \tag{76}$$

Důkaz

Plyne přímo z (73).

2.4.2 Euler-Lagrangeovy rovnice variačního problému

Variačním problémem budeme nazývat hledání extremály funkcionálu

$$\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L(x, u^{(n)})\, dx \tag{77}$$

pro nějakou třídu funkcí $u = f(x)$ definovanou na Ω. Integrand $L(x, u^{(n)})$ budeme nazývat lagrangiánem variačního problému $\mathcal{L}$. $L(x, u^{(n)})$ je hladká funkce x, u a derivací u do řádu n.

Definice 25

Nechť $\mathcal{L}[u]$ je variační problém. Variační derivací budeme myslet q-tici

$$\delta\mathcal{L}[u] = (\delta_1\mathcal{L}[u], ..., \delta_q\mathcal{L}[u]) \tag{78}$$

s vlastností

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathcal{L}[f + \varepsilon\eta] = \int_\Omega \delta\mathcal{L}[f(x)]\, \eta(x)\, dx, \tag{79}$$

přičemž $u = f(x)$ je hladká funkce definovaná Ω a $\eta(x) = (\eta^1(x), ..., \eta^q(x))$ je hladká funkce s kompaktním nosičem Ω, potom $f + \varepsilon\eta$ splňuje okrajové podmínky a výraz jako celek leží v prostoru funkcí, v němž extremalizujeme funkcionál $\mathcal{L}$.

Věta 10

Jestliže $u = f(x)$ je extremálou funkcionálu $\mathcal{L}[u]$, potom

$$\delta\mathcal{L}[f(x)] = 0, \ \ x \in \Omega. \tag{80}$$

Důkaz

Pokud f je extremálou, potom pro libovolné η s kompaktním nosičem Ω leží $f+\varepsilon\eta$ ve stejném funkčním prostoru jako f. $\mathcal{L}[f+\varepsilon\eta]$ musí mít extrémum pro $\varepsilon = 0$. Dosazením do (79) a požadováním platnosti pro všechna η, odkud potom plyne tvrzení.

Definice 26

Pro $1 \leq \alpha \leq q$, potom α-tý Eulerův operátor vypadá

$$\mathsf{E}_\alpha = \sum_J (-D)_J \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}. \tag{81}$$

Máme-li zadán variační problém, potom jeho variační derivace je $\delta\mathcal{L}[u] = \mathsf{E}(L)$.

Věta 11

Jestliže $u = f(x)$ je hladká extremála variačního problému $\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L(x, u^{(n)})\, dx$, potom musí být řešením Euler-Lagrangeových rovnic

$$\mathsf{E}_\nu(L) = 0, \ \ \nu \in \{1, ..., q\}. \tag{82}$$

Důkaz

Důkaz plyne z předchozí poznámky.

2.4.3 Sdružení diferenciálních operátorů

Definice 27

Jestliže

$$\mathrm{D} = \sum_J P_J[u] D_J, \quad P_J \in \mathcal{A} \tag{83}$$

je diferenciální operátor, potom jeho sdruženým diferenciálním operátorem nazveme takový operátor D^* s vlastností, že

$$\int_\Omega P\,\mathrm{D}Q\,dx = \int_\Omega Q\,\mathrm{D}^* P\,dx \tag{84}$$

pro libovolnou dvojici diferenciálních funkcí $P, Q \in \mathcal{A}$, které jsou nulové, když $u \equiv 0$, pro libovolnou integrační oblast $\Omega \subset \mathrm{R}^p$ a jakoukoli funkci $u = f(x)$ s kompaktním nosičem v Ω.

Integrací per-partes lze získat z (84) přímé vyjádření sdruženého diferenciálního operátoru

$$\mathrm{D}^* = \sum_J (-D)_J\,.P_J. \tag{85}$$

Aplikací sdruženého diferenciálního operátoru na $Q \in \mathcal{A}$ získám

$$\mathrm{D}^* Q = \sum_J (-D)_J\,(P_J Q)\,. \tag{86}$$

Při integraci per-partes dále z (84) plyne formule

$$P\,\mathrm{D}Q = Q\,\mathrm{D}^* P + DivA, \tag{87}$$

kde $A \in \mathcal{A}^p$ je bilineární výraz závisející na P, Q a jejich derivacích s koeficienty závisejícími na x, u a derivacích u. Ekvivalentně lze psát

$$\mathsf{E}\,(P\,\mathrm{D}Q) = \mathsf{E}\,(Q\,\mathrm{D}^* P)\,, \tag{88}$$

kde E je Eulerův operátor.

Jestliže $P \in \mathcal{A}^l$, potom sdružený operátor k operátoru s D_P je operátor $D_P^* : \mathcal{A}^l \to \mathcal{A}^q$, který vypadá pomocí (74) takto:

$$(D_P^*) = \sum_J (-D)_J \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial u_J^\nu}, \;\; \mu \in \{1, ..., l\}, \, \nu \in \{1, ..., q\}. \tag{89}$$

Z formule (89) lze vypozorovat souvislost mezi Eulerovým operátorem a Fréchetovou derivací. Jestliže $P \in \mathcal{A}$, potom

$$\mathsf{E}(P) = \left(\sum_J (-D)_J \frac{\partial P}{\partial u_J^\nu} \right) = D_P^*(1), \tag{90}$$

kde 1 je míněna konstantní diferenciální funkce. Odtud potom plyne důležitá formule pro působení Eulerova operátoru na součin diferenciálních funkcí

$$\mathsf{E}(P\,Q) = D_P^*(Q) + D_Q^*(P), \;\; P, Q \in \mathcal{A}^l, \tag{91}$$

která plyne z

$$\mathsf{E}(P\,Q) = \sum_{\mu=1}^{l} \left(\sum_J (-D)_J \left(\frac{\partial P_\mu}{\partial u_J^\nu} Q_\mu \right) + \sum_J (-D)_J \left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial u_J^\nu} P_\mu \right) \right). \tag{92}$$

2.4.4 Zákony zachování

Definice 28

Předpokládejme systém diferenciálních rovnic (42). Zákonem zachování tohoto systému nazveme výraz

$$DivP = 0, \tag{93}$$

který platí pro všechna řešení $u = f(x)$ daného systému, kde $P \in \mathcal{A}^q$, a dále

$$DivP = \sum_{i=1}^{p} D_i P_i. \tag{94}$$

Nechť máme systém (42), potom lze každý zákon zachování přepsat ve tvaru [1]

$$DivP = Q.E = \sum_{\nu=1}^{l} Q_\nu E_\nu. \tag{95}$$

l-tici funkcí Q_ν nazveme charakteristikou zákona zachování.

Definice 29

Nechť $E = 0$ je systém diferenciálních rovnic. Potom l-tice funkcí $Q \in \mathcal{A}^l$ je charakteristikou zákona zachování $\Leftrightarrow$

$$D_E^*(Q) + D_Q^*(E) = 0, \tag{96}$$

pro všchna (x, u).

Důkaz

Využitím věty 4.7 z [1] plyne, že $Q.E$ je úplná divergence (definice viz. [1]) právě tehdy, když $\mathsf{E}(Q.E) = 0$, a odtud potom použitím formule (91) plyne tvrzení věty.

Pokud bychom hledali nutnou podmínku, aby Q byla charakteristikou zákona zachování pro systém E, tak nalezneme tento předpoklad

$$D_E^*(Q) = 0 \tag{97}$$

na všech řešeních systému E. Tento tvar nám může posloužit k vyloučení funkcí Q, které by mohly být charakteristikou zákona zachování.

2.4.5 Variační symerie

Definice 30

Zobecněné vektorové pole

$$v = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{98}$$

je variační symetrie funkcionálu $\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L(x, u^{(n)})\, dx$ právě, když existuje p-tice diferenciálních funkcí $B[u] \in \mathcal{A}^p$ takových, že platí

$$prv(L) + LDiv(\xi) = DivB \tag{99}$$

pro všechna (x, u).

Další věta ukáže, jak efektivně můžeme omezit hledání pouze na variační symetrie v evoluční formě.

Věta 12

Zobecněné vektorové pole v je variační symetrií funkcionálu $\mathcal{L}[u] \Leftrightarrow$ jeho evoluční reprezentace v_Q je variační symetrií stejného funkcionálu.

Důkaz

Využitím prolongační formule (38) dostaneme

$$\begin{aligned} prv(L) + LDiv\xi &= prv_Q(L) + \textstyle\sum_{i=1}^{p} \xi^i D_i L + L \sum_{i=1}^{p} D_i \xi^i \\ &= prv_Q(L) + \textstyle\sum_{i=1}^{p} D_i(\xi^i L). \end{aligned} \tag{100}$$

Toto je následně ekvivalentní

$$prv_Q(L) = Div\tilde{B}, \tag{101}$$

kde $\tilde{B}_i = B_i - L\xi^i$.

Další věta by nám měla odpovědět na otázku, jak souvisí variační symetrie a zobecněné symetrie příslušných Euler-Lagrangeových rovnic.

Věta 13

Nechť zobecněné vektorové pole v je variační symetrie problému $\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L(x, u^{(n)})\, dx$, potom v je zobecněnou symetrií Euler-Lagrangeových rovnic $\mathsf{E}(L) = 0$.

Důkaz

Důkaz plyne z následujícího Lemmatu.

Lemma 3

Nechť $L \in \mathcal{A}$, $Q \in \mathcal{A}^q$. Potom

$$\mathsf{E}(prv_Q(L)) = prv_Q(\mathsf{E}(\mathsf{L})) + D_Q^* \mathsf{E}(L). \tag{102}$$

Důkaz

Užitím formule 4.39 z [1]

$$prv_Q(L) = Q.\mathsf{E}(L) + DivA \tag{103}$$

a formule (91) získáme

$$\mathsf{E}(prv_Q(L)) = \mathsf{E}(Q.\mathsf{E}) = D_{\mathsf{E}(L)}^*(Q) + D_Q^*(\mathsf{E}(L)). \tag{104}$$

Nyní využijeme důležitý výsledek, že $E = \mathsf{E}(L)$ jsou Euler-Lagrangeovy rovnice právě tehdy, když Fréchetova derivace diferenciální funkce E je samosdružený, tj. $D_E^* = D_E$, který plyne z věty 5.92 z [1]. Odkud potom plyne

$$D_{\mathsf{E}(L)}^*(Q) = D_{\mathsf{E}(L)}(Q) = prv_Q(\mathsf{E}(L)). \tag{105}$$

Důkaz věty 13

Z vět 1 a 12 můžeme nahradit v evolučním vektorovým polem v_Q bez narušení pravdivosti věty. Jestliže v_Q je variační symetrie, potom (101) implikuje, že levá strana (102) se vynuluje. Využijeme-li podmínku, že D_Q^* je lineární diferenciální operátor, potom (44) pro $E = \mathsf{E}(L)$ dokazují větu.

Věta 14

Nechť $E = 0$ je systém diferenciálních rovnic, jehož Fréchetova derivace je samosdružená $D_E^* = D_E$, takže E jsou Euler-Lagrangeovy rovnice nějakého variačního problému. Evoluční vektorové pole v_Q je variační symetrie příslušného variačního problému $\Leftrightarrow$

$$prv_Q(E) + D_Q^*(E) = 0 \tag{106}$$

pro všechna (x, u).

Důkaz

Plyne z věty 5.92 v [1]

2.5 Teorém Noetherové

Kdybychom se zabývali systémem diferenciálních rovnic, které jsou Euler-Lagrangeovými rovnicemi nějaké variační úlohy, a podívali se na podmínku pro charakteristiku zákona zachování (96) a podmínku pro symetrii variační úlohy (106), zjistíme, že spolu velmi úzce souvisí. S použitím teorému 4.26 z [1] dostáváme obecnou formu teorému Neotherové.

Věta 15

Zobecněné vektorové pole v představuje generátor jednoparametrické variační grupy symetrie funkcionálu $\mathcal{L}[u] = \int L dx \Leftrightarrow$ charakteristika $Q \in \mathcal{A}^q$ vektorového pole v je charakteristikou zákona zachování $Div P = 0$ pro příslušné Euler-Lagrangeovy rovnice $\mathsf{E}(L) = 0$. To jinými slovy znamená [1], že pokud $\mathcal{L}$ je nedegenerativní variační problém, potom zde existuje jednoznačné zobrazení mezi třídami ekvivalence netriviálních zákonů zachování a třídami ekvivalence variačních infinitesimálních symetrií.

Z hlediska výpočetního to tedy znamená, že pokud budeme mít spočítané infinitesimální symetrie pro nějaké Euler-Lagrangeovy rovnice a ověříme podmínku (106), tak potom příslušná charakteristika pro zobecněné vektorové pole tvoří charakteristiku zákona zachování pro příslušné diferenciální rovnice.

3 Analýza Lie-Poissonova T-duálního σ-modelu vzhledem k nejvyšším derivacím

3.1 Výpočet pohybových rovnic

Máme zadaný variační problém

$$\mathcal{L} = \int_{\mathbf{R}^2} L \; da\, db, \tag{107}$$

kde lagrangián vypadá

$$\begin{aligned} L = (x - (u+y)\rho + v\rho^2)\partial_b\, \sigma\, \partial_a\, \sigma + (y - v\rho)\partial_b\, \sigma\, \partial_a\, \rho \\ +(u - v\rho)\partial_b\, \rho\, \partial_a\, \sigma + v\partial_b\, \rho\, \partial_a\, \rho, \end{aligned} \tag{108}$$

kde parametry x, y, u, $v \in \mathbf{R}$ splňují

$$xv - uy \neq 0 \tag{109}$$

a $\rho \equiv \rho(a,b)$ a $\sigma \equiv \sigma(a,b)$. Euler-Lagrangeovy rovnice v tomto případě vypadají

$$\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_i \chi)}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \chi}\right) = 0, \tag{110}$$

kde $i \in \{a, b\}$ a $\chi \in \{\rho, \sigma\}$. Tím získáme pohybové rovnice

$$\begin{aligned} (u + y - 2v\rho)\left(\rho_{ab} - \rho_a\sigma_b - \rho_b\sigma_a\right) & & \\ -2\, v\, \rho_a\, \rho_b + 2\, \left(x + \rho\, \left(-u - y + v\, \rho\right)\right)\, \sigma_{ab} &=& 0, \qquad (111) \\ 2\, v\, \rho_{ab} + (u + y - 2\, v\, \rho)\, \left(\sigma_{ab} + \sigma_a\, \sigma_b\right) &=& 0. \qquad (112) \end{aligned}$$

3.2 Analýza systému vzhledem k nejvyšším derivacím

Jedná se o rovnice lineární v druhých derivacích a druhé derivace, které se zde objevují, jsou podle různých proměnných. Chceme-li výše popsané metody použít pro výpočet zobecněných symetrií, vyjádříme nejvyšší derivace systému (111) a (112) tak, abychom mohli požadovat platnost na množině řešení. Tím, že jsou zastoupeny nejvyšší derivace pouze podle různých proměnných, musí být matice členů u těchto derivací regulární. Když tomu tak nebude, obdržíme systém, ke kterému je třeba přistupovat trochu jinak. Získáme nerovnici

$$0 \neq \left\| \begin{array}{cc} u+y-2v\rho & 2(x+\rho(-u-y+v\rho)) \\ 2v & u+y-2v\rho \end{array} \right\|, \tag{113}$$

jejímž řešením získáme nerovnici

$$4xv \neq (u+y)^2 \,. \tag{114}$$

3.2.1 Platí podmínka (114) - případ A

V případě platnosti (114) můžeme rovnice (111) a (112) upravit na

$$\sigma_{ab} = \frac{-1}{D}\left(B^2\sigma_a\sigma_b + AB\left(\rho_a\sigma_b + \rho_b\sigma_a\right) + A^2\rho_a\rho_b\right), \tag{115}$$

$$\rho_{ab} = \frac{B}{D}\left(B\left(\rho_a\sigma_b + \rho_b\sigma_a\right) + A\rho_a\rho_b + C\sigma_a\sigma_b\right), \tag{116}$$

kde $A = 2v$, $B = u+y-2v\rho$, $C = 2(x-\rho(u+y)+v\rho^2)$ a $D = (u+y)^2 - 4vx$. To tedy znamená, že A a D jsou konstanty a B a C jsou funkce závisející na ρ. Spočítání zobecněných symetrií tohoto případu je stěžejním úkolem mé práce.

3.2.2 Neplatí podmínka (114)

To znamená, že v (114) platí rovnost. Abychom rovnici rozřešili, budeme předpokládat další podmínku.

3.2.2.1 Předpoklad $v = 0$.

Tím jsme z (114) získali rovnici

$$(u+y)^2 = 0, \tag{117}$$

z níž plyne $u + y = 0$, přičemž z nerovnosti (109) obdržíme $u \neq 0$ a $y \neq 0$.

3.2.2.1.1 Předpoklad $x \neq 0$ - případ B.

Systém (111) a (112) se tedy zjednoduší na

$$\sigma_{ab} = 0. \tag{118}$$

3.2.2.1.2 Předpoklad $x = 0$,

odkud v případě možné volby $x = 0$ získáme systém

$$0 = 0. \tag{119}$$

3.2.2.2 Předpoklad $v \neq 0$.

Potom obdržíme podmínku

$$x = \frac{(u+y)^2}{4v}. \tag{120}$$

Když nyní vyjádřené x dosadíme do (111) a (112), tak získáme

$$\rho_{ab} + E\left(\sigma_{ab} + \sigma_a\sigma_b\right) = 0 \tag{121}$$

$$E^2\sigma_a\sigma_b + E\left(\rho_a\sigma_b + \rho_b\sigma_a\right) + \rho_a\rho_b = 0, \tag{122}$$

kde $E = \frac{u+y-2v\rho}{2v}$. V systému (121) a (122) se druhé derivace vyskytují pouze v rovnici (121), tedy rovnici (122) můžeme zderivovat podle vhodné proměnné a vyeliminovat druhou derivaci podle jedné ze závislých proměnných. Z rovnice (122) lze za jistých předpokladů vyjádřit σ_a.

3.2.2.2.1 Případ $E^2\sigma_b + E\rho_b = 0$.

Nyní nemůžeme z (122) vyjádřit σ_a. Z podmínky $E^2\sigma_b + E\rho_b = 0$ dostáváme buď $E = 0$ nebo $E\sigma_b + \rho_b = 0$.

3.2.2.2.1.1 Podmínka $E = 0$,

z níž plyne $\rho = \frac{u+y}{2v}$. Potom rovnice (121) i (122), a tedy i (111) a (112) jsou splněny, přičemž σ lze zvolit libovolně.

3.2.2.2.1.2 Podmínka $E\sigma_b + \rho_b = 0$,

potom je

$$\rho = e^{\sigma} \left(C(a) - \frac{u+y}{2v}\sigma \right), \tag{123}$$

kde $C(a)$ je nějaká libovolná funkce. Rovnice (121) a (122) vypadají

$$\begin{aligned} (F - C + F\sigma)^2\sigma_a\sigma_b + (F - C + F\sigma)\sigma_b C' &= 0, && (124) \\ (C - F(2+\sigma))\sigma_a\sigma_b - (F - C + F\sigma)\sigma_{ab} + \sigma_b C' &= 0, && (125) \end{aligned}$$

kde $F = \frac{u+y}{2v}$. Tyto rovnice lze dále upravit na 1 rovnici

$$G(G\sigma_{ab} + (2G + F)\sigma_a\sigma_b) = 0, \tag{126}$$

kde $G = F - C + F\sigma$.

Případ $G = 0$. Z nerovnosti (109) vyplývá, že $F \neq 0$. Potom je tedy

$$\sigma = \frac{C}{F} - 1 \tag{127}$$

a z (123) spočítáme

$$\rho = Fe^{\frac{C}{F}-1}. \tag{128}$$

Nyní není složité ověřit, že (124-125) jsou triviálně splněny, a tudíž jsou splněny rovnice (121-122). Řešením je tedy v tomto případě

$$\sigma = \frac{2vC}{u+y} - 1, \tag{129}$$

$$\rho = \frac{u+y}{2v} e^{\frac{2vC}{u+y}-1}. \tag{130}$$

Případ $G\sigma_{ab} + (2G + F)\sigma_a\sigma_b \neq 0$. Nyní víme, že $G \neq 0$, protože jinak bychom dostali předchozí případ. Rovnice pro σ je tedy

$$\sigma_{ab} + \left(2 + \frac{F}{G}\right)\sigma_a\sigma_b = 0. \tag{131}$$

Tato rovnice lze vyřešit, ale pouze v implicitním tvaru

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{C}{2F} + \frac{\sigma}{2}\right) e^{2\sigma} = I(a) + J(b). \tag{132}$$

Z rovnice (123) bychom spočítali ρ a dostali hledané funkce řešící (121-122).

3.2.2.2.2 Případ $E^2\sigma_b + E\rho_b \neq 0$

Potom lze vyjádřit σ_a z (122) a dosazením do (121) dostaneme systém

$$\sigma_a = \frac{\rho_a}{F - \rho}, \tag{133}$$

$$2E\rho_{ab} + \rho_a\rho_b + E^2\sigma_a\sigma_b = 0, \tag{134}$$

Nyní máme analyzován model na jednotlivé případy, které mohou nastat při vyjadřování nejvyšších derivací. Při výpočtu zobecněných symetrií se budu věnovat případu A, který je stěžejní pro tuto práci, a potom případu B, jež zase bude velmi pěkně ilustrovat, jak počítat zobecněné symetrie do libovolného řádu v derivacích.

4 Výpočet zobecněných symetrií pro Lie-Poisson T-duální σ-model

Pro výpočet zobecněných symetrií budeme využívat teorii z kapitoly 2. Máme tedy vektorové pole

$$v = Q_1 \partial_\sigma + Q_2 \partial_\rho, \tag{135}$$

kde Q_1 a Q_2 jsou nějaké funkce v proměnných a, b, σ, ρ a derivací až do nějakého zatím neurčeného, ale konečného řádu.

4.1 Zobecněné symetrie vlnové rovnice - Případ B

Máme vyšetřovat systém

$$\sigma_{ab} \;=\; 0. \tag{136}$$

Tuto rovnici umíme explicitně vyřešit, nicméně teoreticky můžeme studovat její symetrie a zobecněné symetrie.

Pokud bychom tento případ brali jako speciální případ Lie-Poisson T-duálního σ-modelu, tak není totálně nedegenerovaným systémem. Jestliže ale vezmeme pouze rovnici (136) samotnou, tak to bude totálně nedegenerovaný systém.

4.1.1 Symetrie prvního řádu

Budeme předpokládat závislost charakteristické funkce Q na derivacích do prvního řádu, tzn. $Q \equiv Q(a, b, \sigma, \rho, \sigma_a, \sigma_b)$. Nyní aplikujeme formuli (43) a sepíšeme všechny podmínky, které z této formule plynou. Dostaneme systém

$$Q_{b\sigma_a} + \sigma_b Q_{\sigma\sigma_a} \;=\; 0, \tag{137}$$

$$Q_{a\sigma_b} + \sigma_a Q_{\sigma\sigma_b} \;=\; 0, \tag{138}$$

$$Q_{\sigma_a \sigma_b} = 0, \tag{139}$$

$$\sigma_a \sigma_b Q_{\sigma\sigma} + \sigma_a Q_{b\sigma} + \sigma_b Q_{a\sigma} + Q_{ab} = 0. \tag{140}$$

Jejich řešením dostáváme

$$Q = R_1(a, \sigma_a) + R_2(b, \sigma_b) + R_3\sigma + R_4(a) + R_5(b), \tag{141}$$

kde R_1 a R_2 jsou libovolné funkce 2 proměnných, R_4 a R_5 jsou libovolné funkce 1 proměnné a R_3 je libovolná konstanta.

4.1.2 Symetrie n-tého řádu

Předpokládáme závislost funkcí Q na derivacích do n-tého řádu. Nejdříve je třeba si uvědomit, že použitím formule (43) se vyeliminují členy, kde se vyskytuje libovolně vysoká derivace podle jedné proměnné současně s derivací podle druhé proměnné. To plyne z požadavku platnosti formule (43) na množině řešení. Dále pouze pro tento důkaz zavedu označení $\sigma_{a^i b^j} \equiv \sigma_{a\ldots ab\ldots b}$, kde a se vyskytuje v indexu i-krát a b j-krát. Použitím formule (43) získáme rovnice

$$Q_{\sigma_{a^n} \sigma_{b^n}} = 0, \tag{142}$$

$$Q_{b\sigma_{a^n}} + \sigma_b Q_{\sigma\sigma_{a^n}} + \sigma_{b^2} Q_{\sigma_b \sigma_{a^n}} + \cdots + \sigma_{b^n} Q_{\sigma_{a^n} \sigma_{b^{n-1}}} = 0, \tag{143}$$

$$Q_{a\sigma_{b^n}} + \sigma_a Q_{\sigma\sigma_{b^n}} + \sigma_{a^2} Q_{\sigma_a \sigma_{b^n}} + \cdots + \sigma_{a^n} Q_{\sigma_{a^{n-1}} \sigma_{b^n}} = 0, \tag{144}$$

$$\begin{aligned}
& Q_{ab} + \sigma_b Q_{a\sigma} + \sigma_{bb} Q_{a\sigma_b} + \cdots + \sigma_{b^n} Q_{a,\sigma_{b^{n-1}}} \\
& \sigma_a Q_{b\sigma} + \sigma_a \sigma_b Q_{\sigma\sigma} + \sigma_a \sigma_{b^2} Q_{\sigma\sigma_b} + \cdots + \sigma_a \sigma_{b^n} Q_{\sigma\sigma_{b^{n-1}}} \\
& \sigma_{aa} Q_{b\sigma_a} + \sigma_{aa} \sigma_b Q_{\sigma\sigma_a} + \sigma_{a^2} \sigma_{bb} Q_{\sigma_a \sigma_b} + \cdots + \sigma_{aa} \sigma_{b^n} Q_{\sigma_a \sigma_{b^{n-1}}} \\
& \vdots \\
& \sigma_{a^n} Q_{b\sigma_{a^{n-1}}} + \sigma_{a^n} \sigma_b Q_{\sigma\sigma_{a^{n-1}}} \\
& + \sigma_{a^n} \sigma_{bb} Q_{\sigma_{a^{n-1}} \sigma_b} + \ldots + \sigma_{a^n} \sigma_{b^n} Q_{\sigma_{a^{n-1}} \sigma_{b^{n-1}}} = 0,
\end{aligned} \tag{145}$$

jejichž řešením je

$$Q = R_1(a, \sigma_a, \ldots, \sigma_{a^n}) + R_2(b, \sigma_b, \ldots, \sigma_{b^n}) + R_3\sigma + R_4(a) + R_5(b), \quad (146)$$

kde R_1 a R_2 jsou libovolné funkce v $n+1$ proměnných, R_3 je libovolná konstanta a R_4 a R_5 jsou libovolné funkce jedné proměnné.

4.2 Zobecněné symetrie případu A

Systém (111-112) je totálně nedegenerovaný. Budeme předpokládat, že charakteristiky vektorového pole v závisí na derivacích funkcí ρ a σ do řádu 1. Použijeme formuli (43) a požadujeme platnost na množině řešení. Potom z koeficientů u členů $\sigma_{aa}\sigma_{bb}$, $\sigma_{aa}\rho_{bb}$, $\rho_{aa}\sigma_{bb}$ a $\rho_{aa}\rho_{bb}$ získáme rovnice

$$Q_{1,\sigma_a\sigma_b} = 0, \quad (147)$$

$$Q_{1,\sigma_a\rho_b} = 0, \quad (148)$$

$$Q_{1,\rho_a\sigma_b} = 0, \quad (149)$$

$$Q_{1,\rho_a\rho_b} = 0, \quad (150)$$

$$Q_{2,\sigma_a\sigma_b} = 0, \quad (151)$$

$$Q_{2,\sigma_a\rho_b} = 0, \quad (152)$$

$$Q_{2,\rho_a\sigma_b} = 0, \quad (153)$$

$$Q_{2,\rho_a\rho_b} = 0, \quad (154)$$

které nám dávají na Q_1 podmínku

$$Q_1(a, b, \sigma, \rho, \sigma_a, \sigma_b, \rho_a, \rho_b) = P_1(a, b, \sigma, \rho, \sigma_a, \rho_a) + P_2(a, b, \sigma, \rho, \sigma_b, \rho_b), \quad (155)$$

$$Q_2(a, b, \sigma, \rho, \sigma_a, \sigma_b, \rho_a, \rho_b) = R_1(a, b, \sigma, \rho, \sigma_a, \rho_a) + R_2(a, b, \sigma, \rho, \sigma_b, \rho_b), \quad (156)$$

kde funkce P_1, P_2, R_1 a R_2 jsou zcela libovolné.

Z koeficientů úměrných ρ_{aa}, ρ_{bb}, σ_{aa} a σ_{bb} obdržíme rovnice

$$\begin{aligned} DP_{1,b\rho_a} + \rho_b(2ABP_{1,\rho_a} + B^2\sigma_a P_{1,\rho_a\rho_a} + DP_{1,\rho\rho_a} - A^2P_{1,\sigma_a} \\ -AB\sigma_a P_{1,\rho_a\sigma_a} + A\rho_a(BP_{1,\rho_a\rho_a} - AP_{1,\rho_a\sigma_a}) + A^2R_{1,\rho_a}) \\ +\sigma_b(2B^2P_{1,\rho_a} + BC\sigma_a P_{1,\rho_a\rho_a} - ABP_{1,\sigma_a} - B^2\sigma_a P_{1,\rho_a\sigma_a} \\ +B\rho_a\left(BP_{1,\rho_a\rho_a} - AP_{1,\rho_a\sigma_a}\right) + DP_{1,\sigma\rho_a} + ABR_{1,\rho_a}) = 0, \end{aligned} \tag{157}$$

$$\begin{aligned} DP_{1,b\sigma_a} + \rho_b(B^2P_{1,\rho_a} + DP_{1,\rho\sigma_a} + AB\rho_a P_{1,\rho_a\sigma_a} \\ +B^2\sigma_a P_{1,\rho_a\sigma_a} - A^2\rho_a P_{1,\sigma_a\sigma_a} - AB\sigma_a P_{1,\sigma_a\sigma_a} + A^2R_{1,\sigma_a}) \\ +\sigma_b(BCP_{1,\rho_a} + BC\sigma_a P_{1,\rho_a\sigma_a} - B^2\sigma_a P_{1,\sigma_a\sigma_a} \\ +B\rho_a\left(BP_{1,\rho_a\sigma_a} - AP_{1,\sigma_a\sigma_a}\right) + DP_{1,\sigma\sigma_a} + ABR_{1,\sigma_a}) = 0, \end{aligned} \tag{158}$$

$$\begin{aligned} DR_{1,b\rho_a} - \rho_b(B^2P_{1,\rho_a} - B^2\sigma_a R_{1,\rho_a\rho_a} - DR_{1,\rho\rho_a} + A^2R_{1,\sigma_a} \\ +AB\sigma_a R_{1,\rho_a\sigma_a} + A\rho_a\left(-BR_{1,\rho_a\rho_a} + AR_{1,\rho_a\sigma_a}\right)) \\ +\sigma_b(-BCP_{1,\rho_a} + BC\sigma_a R_{1,\rho_a\rho_a} - ABR_{1,\sigma_a} - B^2\sigma_a R_{1,\rho_a\sigma_a} \\ +B\rho_a\left(BR_{1,\rho_a\rho_a} - AR_{1,\rho_a\sigma_a}\right) + DR_{1,\sigma\rho_a}) = 0, \end{aligned} \tag{159}$$

$$\begin{aligned} DR_{1,b\sigma_a} + \rho_b(-B^2P_{1,\sigma_a} + B^2R_{1,\rho_a} + DR_{1,\rho\sigma_a} - 2ABR_{1,\sigma_a} \\ +AB\rho_a R_{1,\rho_a\sigma_a} + B^2\sigma_a R_{1,\rho_a\sigma_a} - A^2\rho_a R_{1,\sigma_a\sigma_a} - AB\sigma_a R_{1,\sigma_a\sigma_a}) \\ +\sigma_b(-BCP_{1,\sigma_a} + BCR_{1,\rho_a} - 2B^2R_{1,\sigma_a} + B^2\rho_a R_{1,\rho_a\sigma_a} \\ +BC\sigma_a R_{1,\rho_a\sigma_a} - AB\rho_a R_{1,\sigma_a\sigma_a} - B^2\sigma_a R_{1,\sigma_a\sigma_a} + DR_{1,\sigma\sigma_a}) = 0, \end{aligned} \tag{160}$$

$$\begin{aligned} DP_{2,a\rho_b} + \rho_a(2ABP_{2,\rho_b} + B^2\sigma_b P_{2,\rho_b\rho_b} + DP_{2,\rho\rho_b} - A^2P_{2,\sigma_b} \\ -AB\sigma_b P_{2,\rho_b\sigma_b} + A\rho_b(BP_{2,\rho_b\rho_b} - AP_{2,\rho_b\sigma_b}) + A^2R_{2,\rho_b}) \\ +\sigma_a(2B^2P_{2,\rho_b} + BC\sigma_b P_{2,\rho_b\rho_b} - ABP_{2,\sigma_b} - B^2\sigma_b P_{2,\rho_b\sigma_b} \\ +B\rho_b(BP_{2,\rho_b\rho_b} - AP_{2,\rho_b\sigma_b}) + DP_{2,\sigma\rho_b} + ABR_{2,\rho_b}) = 0, \end{aligned} \tag{161}$$

$$DP_{2,a\sigma_b} + \rho_a(B^2P_{2,\rho_b} + DP_{2,\rho\sigma_b} + AB\rho_bP_{2,\rho_b\sigma_b}$$
$$+B^2\sigma_bP_{2,\rho_b\sigma_b} - A^2\rho_bP_{2,\sigma_b\sigma_b} - AB\sigma_bP_{2,\sigma_b\sigma_b} + A^2R_{2,\sigma_b})$$
$$+\sigma_a(BCP_{2,\rho_b} + BC\sigma_bP_{2,\rho_b\sigma_b} - B^2\sigma_bP_{2,\sigma_b\sigma_b}$$
$$+B\rho_b(BP_{2,\rho_b\sigma_b} - AP_{2,\sigma_b\sigma_b}) + DP_{2,\sigma\sigma_b} + ABR_{2,\sigma_b}) = 0, \tag{162}$$

$$DR_{2,a\rho_b} - \rho_a(B^2P_{2,\rho_b} - B^2\sigma_bR_{2,\rho_b\rho_b} - DR_{2,\rho\rho_b} + A^2R_{2,\sigma_b}$$
$$+AB\sigma_bR_{2,\rho_b\sigma_b} + A\rho_b(-BR_{2,\rho_b\rho_b} + AR_{2,\rho_b\sigma_b}))$$
$$+\sigma_a(-BCP_{2,\rho_b} + BC\sigma_bR_{2,\rho_b\rho_b} - ABR_{2,\sigma_b} - B^2\sigma_bR_{2,\rho_b\sigma_b}$$
$$+B\rho_b\,(BR_{2,\rho_b\rho_b} - AR_{2,\rho_b\sigma_b}) + DR_{2,\sigma\rho_b}) = 0, \tag{163}$$

$$DR_{2,a\sigma_b} + \rho_a(-B^2P_{2,\sigma_b} + B^2R_{2,\rho_b} + DR_{2,\rho\sigma_b} - 2ABR_{2,\sigma_b}$$
$$+AB\rho_bR_{2,\rho_b\sigma_b} + B^2\sigma_bR_{2,\rho_b\sigma_b} - A^2\rho_bR_{2,\sigma_b\sigma_b} - AB\sigma_bR_{2,\sigma_b\sigma_b})$$
$$+\sigma_a(-BCP_{2,\sigma_b} + BCR_{2,\rho_b} - 2B^2R_{2,\sigma_b} + B^2\rho_bR_{2,\rho_b\sigma_b}$$
$$+BC\sigma_bR_{2,\rho_b\sigma_b} - AB\rho_bR_{2,\sigma_b\sigma_b} - B^2\sigma_bR_{2,\sigma_b\sigma_b} + DR_{2,\sigma\sigma_b}) = 0, \tag{164}$$

kde $A = 2v$, $B = u+y-2v\rho$, $C = 2(x-\rho(u+y)+v\rho^2)$ a $D = (u+y)^2-4vx$. Z každé z rovnic (157-164) dostaneme 3 další, neboť každá z nich obsahuje lineární závislost na σ_a, ρ_a nebo σ_b, ρ_b, přičemž koeficienty jsou na těchto souřadnicích nezávislé. Potom tedy dostáváme rovnice

$$P_{\alpha,\beta\gamma_\delta} = 0, \tag{165}$$

$$R_{\alpha,\beta\gamma_\delta} = 0, \tag{166}$$

$$2ABP_{\alpha,\rho_\delta} + B^2\sigma_\delta P_{\alpha,\rho_\delta\rho_\delta} + DP_{\alpha,\rho\rho_\delta} - A^2P_{\alpha,\sigma_\delta} - AB\sigma_\delta P_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta}$$
$$+AB\rho_\delta P_{\alpha,\rho_\delta\rho_\delta} - A^2\rho_\delta P_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta} + A^2R_{\alpha,\rho_\delta} \quad = 0, \tag{167}$$
$$2B^2P_{\alpha,\rho_\delta} + BC\sigma_\delta P_{\alpha,\rho_\delta\rho_\delta} - ABP_{\alpha,\sigma_\delta} - B^2\sigma_\delta P_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta}$$

$$+B^2\rho_\delta P_{\alpha,\rho_\delta\rho_\delta} - AB\rho_\delta P_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta} + DP_{\alpha,\sigma\rho_\delta} + ABR_{\alpha,\rho_\delta} = 0, \quad (168)$$

$$B^2 P_{\alpha,\rho_\delta} + DP_{\alpha,\rho\sigma_\delta} + AB\rho_\delta P_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta} + B^2\sigma_\delta P_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta}$$

$$-A^2\rho_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta\sigma_\delta} - AB\sigma_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta\sigma_\delta} + A^2 R_{\alpha,\sigma_\delta} = 0, \quad (169)$$

$$BCP_{\alpha,\rho_\delta} + BC\sigma_\delta P_{\alpha,rho_\delta\sigma_\delta} - B^2\sigma_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta\sigma_\delta} + B^2\rho_\delta P_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta}$$

$$-AB\rho_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta\sigma_\delta} - AB\sigma_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta\sigma_\delta} + A^2 R_{\alpha,\sigma_\delta} = 0, \quad (170)$$

$$B^2 P_{\alpha,\rho_\delta} - B^2\sigma_\delta R_{\alpha,\rho_\delta\rho_\delta} - DR_{\alpha,\rho\rho_\delta} + A^2 R_{\alpha,\sigma_\delta}$$

$$+AB\sigma_\delta R_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta} - AB\rho_\delta R_{\rho_\delta\rho_\delta} + A^2\rho_\delta R_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta} = 0, \quad (171)$$

$$BCP_{\alpha,\rho_\delta} - BC\sigma_\delta R_{\alpha,\rho_\delta\rho_\delta} + ABR_{\alpha,\sigma_\delta} + B^2\sigma_\delta R_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta}$$

$$-B^2\rho_\delta R_{\alpha,\rho_\delta\rho_\delta} + AB\rho_\delta R_{1,\rho_\delta\sigma_\delta} - DR_{\alpha,\sigma\rho_\delta} = 0, \quad (172)$$

$$B^2 P_{\alpha,\sigma_\delta} - B^2 R_{\alpha,\rho_\delta} - DR_{\alpha,\rho\sigma_\delta} + 2ABR_{\alpha,\sigma_\delta}$$

$$-AB\rho_\delta R_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta} - B^2\sigma_\delta R_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta} + A^2\rho_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta\sigma_\delta} + AB\sigma_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta\sigma_\delta} = 0, \quad (173)$$

$$BCP_{\alpha,\sigma_\delta} - BCR_{\alpha,\rho_\delta} + 2B^2 R_{\alpha,\sigma_\delta} - B^2\rho_\delta R_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta}$$

$$-BC\sigma_\delta R_{\alpha,\rho_\delta\sigma_\delta} + AB\rho_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta\sigma_\delta} + B^2\sigma_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta\sigma_\delta} + DR_{\alpha,\sigma\sigma_\delta} = 0, \quad (174)$$

kde $\gamma \in \{\rho, \sigma\}$, $\alpha \in \{1, 2\}$, $\beta, \delta \in \{a, b\}$ tak, že jestliže $\alpha = 1 \Rightarrow (\beta = b \wedge \delta = a)$ a $\alpha = 2 \Rightarrow (\beta = a \wedge \delta = b)$.

8 rovnic (165-166) nám upraví (155) a (156) na

$$Q_1(a, b, \sigma, \rho, \sigma_a, \sigma_b, \rho_a, \rho_b) = P_1(a, \sigma, \rho, \sigma_a, \rho_a)$$

$$+P_2(b, \sigma, \rho, \sigma_b, \rho_b) + P_3(a, b, \sigma, \rho), \quad (175)$$

$$Q_2(a, b, \sigma, \rho, \sigma_a, \sigma_b, \rho_a, \rho_b) = R_1(a, \sigma, \rho, \sigma_a, \rho_a)$$

$$+R_2(b, \sigma, \rho, \sigma_b, \rho_b) + R_3(a, b, \sigma, \rho), \quad (176)$$

kde P_1, P_2, P_3, R_1, R_2 a R_3 jsou libovolné funkce, ale jiné než v rovnicích (155) a (156).

Dosazením (175) a (176) do (167-174) dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial\chi}(AB\rho_\delta P_{\alpha,\rho_\delta} + ABP_\alpha + B^2\sigma_\delta P_{\alpha,\rho_\delta} + DP_{\alpha,\rho} + A^2R_\alpha - AB\sigma_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta} - A^2\rho_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta}) = 0, \tag{177}$$

$$\frac{\partial}{\partial\chi}(B^2\rho_\delta P_{\alpha,\rho_\delta} + B^2P_\alpha + BC\sigma_\delta P_{\alpha,\rho_\delta} - B^2\sigma_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta} + DP_{\alpha,\sigma} + ABR_\alpha - AB\rho_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta}) = 0, \tag{178}$$

$$\frac{\partial}{\partial\chi}(B^2P_\alpha - B^2\sigma_\delta R_{\alpha,\rho_\delta} - DR_{\alpha,\rho} + A^2\rho_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta} + AB\sigma_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta} - AB\rho_\delta R_{\alpha,\rho_\delta} + ABR_\alpha) = 0, \tag{179}$$

$$\frac{\partial}{\partial\chi}(BCP_\alpha - BC\sigma_\delta R_{\alpha,\rho_\delta} + AB\rho_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta} + B^2\sigma_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta} - B^2\rho_\delta R_{\alpha,\rho_\delta} + B^2R_\alpha - DR_{\alpha,\sigma}) = 0, \tag{180}$$

kde $\chi \in \{\sigma_a, \sigma_b, \rho_a, \rho_b\}$. Odtud plyne, že (167-174) lze jednou zintergrovat. Po provedené integraci obdržíme systém

$$AB\rho_\delta P_{\alpha,\rho_\delta} + ABP_\alpha + B^2\sigma_\delta P_{\alpha,\rho_\delta} + DP_{\alpha,\rho} + A^2R_\alpha - AB\sigma_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta} - A^2\rho_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta} = \eta_{1,\alpha}, \tag{181}$$

$$B^2\rho_\delta P_{\alpha,\rho_\delta} + B^2P_\alpha + BC\sigma_\delta P_{\alpha,\rho_\delta} - B^2\sigma_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta} + DP_{\alpha,\sigma} + ABR_\alpha - AB\rho_\delta P_{\alpha,\sigma_\delta} = \eta_{2,\alpha}, \tag{182}$$

$$B^2P_\alpha - B^2\sigma_\delta R_{\alpha,\rho_\delta} - DR_{\alpha,\rho} + A^2\rho_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta} + AB\sigma_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta} - AB\rho_\delta R_{\alpha,\rho_\delta} + ABR_\alpha = \eta_{3,\alpha}, \tag{183}$$

$$BCP_\alpha - BC\sigma_\delta R_{\alpha,\rho_\delta} + AB\rho_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta} + B^2\sigma_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta} - B^2\rho_\delta R_{\alpha,\rho_\delta} + B^2R_\alpha - DR_{\alpha,\sigma} = \eta_{4,\alpha}, \tag{184}$$

kde libovolné funkce $\eta_{i,\alpha}$, $i \in \{1,2,3,4\}$ závisí pro $\alpha = 1$ na a, σ a ρ a pro $\alpha = 2$ na b, σ a ρ.

Systém (181-184) nyní musíme rozřešit. Začneme tím, že rovnici (181) vynásobíme B a odečteme od (182) přenásobenou A. Dále rovnici (183) násobenou C odečteme od (184) násobenou B a dostaneme rovnice

$$
\begin{aligned}
B\sigma_\delta P_{\alpha,\rho_\delta} + BP_{\alpha,\rho} - AP_{\alpha,\sigma} &= \theta_{1,\alpha}, && (185)\\
CR_{\alpha,\rho} - BR_{\alpha,\sigma} + A\rho_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta} & && \\
+B\sigma_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta} - B\rho_\delta R_{\alpha,\rho_\delta} + BR_\alpha &= \theta_{2,\alpha}, && (186)
\end{aligned}
$$

kde $\theta_{1,\alpha}$ a $\theta_{2,\alpha}$ jsou libovolné funkce získané z $\eta_{i,\alpha}$, $i \in \{1,2,3,4\}$ závisející pro $\alpha = 1$ na a, σ a ρ a pro $\alpha = 2$ na b, σ a ρ. Mělo by smysl řešit kvazilineární systém (185) a (186) najednou, ale tato cesta je slepá a nevede k rozřešení systému (181-184) jako celku. Proto vyřeším pouze rovnici (185).

Případ když $A \neq 0$

Rovnice (185) má řešení pro $\alpha = 1$

$$P_1 = S_1(a, Be^{-\sigma}, \sigma_a, \rho_a - \sigma_a\rho) + T_1, \tag{187}$$

a pro $\alpha = 2$

$$P_2 = S_2(b, Be^{-\sigma}, \sigma_b, \rho_b - \sigma_b\rho) + T_2, \tag{188}$$

kde S_1, S_2 jsou libovolné funkce a T_1 a T_2 jsou nějaká řešení (185). Výpočtem bychom zjistili, že $T_1 = -\frac{\int_0^\sigma \theta_{1,1}(a, \frac{u+y+e^{t-\sigma}\,(-u-y+A\,\rho)}{A}, t)\,dt}{A}$ a $T_2 = -\frac{\int_0^\sigma \theta_{1,2}(b, \frac{u+y+e^{t-\sigma}\,(-u-y+A\,\rho)}{A}, t)\,dt}{A}$. Nahlédneme-li na rovnici (175) a (176), zjistíme, že můžeme bez újmy na obecnosti psát pro $\alpha = 1$

$$P_1 = S_1(a, Be^{-\sigma}, \sigma_a, \rho_a - \sigma_a\rho) \tag{189}$$

a pro $\alpha = 2$

$$P_2 = S_2(b, Be^{-\sigma}, \sigma_b, \rho_b - \sigma_b\rho), \tag{190}$$

protože T_1 a T_2 jsou funkce pouze a, b, σ a ρ a lze je zahrnout do P_3 v (175).

Nyní se z rovnice (186) pokusíme spočítat R_α, které vychází

$$R_1 = \rho_a S_3\left(a, \rho_a e^{-\sigma}, \frac{\rho_a^2}{C}, \frac{((2x-(u+y)\rho)\sigma_a + B(\rho_a - \rho\sigma_a))^2}{C}\right), \quad (191)$$

$$R_2 = \rho_b S_4\left(b, \rho_b e^{-\sigma}, \frac{\rho_b^2}{C}, \frac{((2x-(u+y)\rho)\sigma_b + B(\rho_b - \rho\sigma_b))^2}{C}\right), \quad (192)$$

kde S_3 a S_4 jsou libovolné funkce v příslušných proměnných. Opět jsem zanedbal člen v proměnných a, b, σ a ρ.

Nyní si násobíme rovnici (181) C a (182) B a dostaneme

$$B\rho_\delta P_{\alpha,\rho_\delta} + (B\sigma_\delta + A\rho_\delta)P_{\alpha,\sigma_\delta} + BP_{\alpha,\sigma} - CP_{\alpha,\rho} + BP + AR = \theta_{3,\alpha}, \quad (193)$$

kde $\theta_{3,\alpha}$ je libovolná funkce v proměnných a, b, ρ a σ.

Dosazením z (189-192) do (193)

$$\begin{aligned} & e^{2\sigma}S_\alpha\kappa - e^\sigma\left(e^\sigma\kappa\sigma_\delta - A\eta - G\sigma_\delta\right) \\ & S_{2+\alpha}(a, \frac{\eta + \frac{(G-e^\sigma\kappa)\sigma_\delta}{A}}{e^\sigma}, \frac{\left(A\eta + \left(G - e^\sigma\kappa\right)\sigma_\delta\right)^2}{A\left(-D + e^{2\sigma}\kappa^2\right)}, \frac{\left(Ae^\sigma\eta\kappa - D\sigma_\delta + e^\sigma G\kappa\sigma_\delta\right)^2}{A\left(-D + e^{2\sigma}\kappa^2\right)}) \\ & + e^\sigma\left(G\eta + X\sigma_\delta\right)S_{\alpha,\eta} - DS_{\alpha,\kappa} - Ae^\sigma\eta S_{\alpha,\sigma_\delta} - e^\sigma G\sigma_\delta S_{\alpha,\sigma_\delta} = 0, \quad (194) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & BS_\alpha(a, \frac{-\left(B\sqrt{\mu}\right) + \sqrt{\nu}}{\sqrt{C}}, \frac{B\lambda}{\sqrt{C}\sqrt{\mu}}, \frac{X\sqrt{\mu} - \left(G\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu}\right)\rho}{\sqrt{C}}) \\ & - \frac{B\left(-\left(B\sqrt{\mu}\right) + \sqrt{\nu}\right)\left(S3 + \lambda S3_\lambda + 2\mu S3_\mu + 2B\sqrt{\mu}\sqrt{\nu}S3_\nu\right)}{C\sqrt{\mu}} \\ & - A\sqrt{C}\lambda\sqrt{\mu}S3_\lambda - \frac{2B\sqrt{\mu}}{\sqrt{C}}\left(B\mu S3_\mu + \sqrt{\nu}\left(2G^2\sqrt{\mu} - G\left(\sqrt{\nu} + 2A\sqrt{\mu}\rho\right)\right.\right. \\ & \left.\left. + A\left(-\left(X\sqrt{\mu}\right) + \rho\left(\sqrt{\nu} + A\sqrt{\mu}\rho\right)\right)\right)S3_\nu\right) = 0, \quad (195) \end{aligned}$$

kde $G = u + y$, $\eta = \rho_\delta - \rho\sigma_\delta$, $\kappa = Be^{-\sigma}$, $\nu = \frac{((2x-(u+y)\rho)\sigma_\delta + B(\rho_\delta - \rho\sigma_\delta)))^2}{C}$, $\lambda = \rho_\delta e^{-\sigma}$ a $\mu = \frac{\rho_\delta^2}{C}$.

Na rovnice (194) a (195) musíme nahlížet jako na podmínky pro S_α nebo $S_{2+\alpha}$ současně. Tyto rovnice nejsou obecně řešitelné, a tudíž nelze ve výpočtu pokračovat.

Celkově spočítané charakteristiky jsou

$$Q_1 = S_1(a, Be^{-\sigma}, \sigma_a, \rho_a - \sigma_a\rho) + S_2(b, Be^{-\sigma}, \sigma_b, \rho_b - \sigma_b\rho) + P_3(a, b, \rho, \sigma), \qquad (196)$$

$$Q_2 = \rho_a S_3\left(a, \rho_a e^{-\sigma}, \frac{\rho_a^2}{C}, \frac{((2x-(u+y)\rho)\sigma_a + B(\rho_a - \rho\sigma_a))^2}{C}\right) + \rho_b S_4\left(b, \rho_b e^{-\sigma}, \frac{\rho_b^2}{C}, \frac{((2x-(u+y)\rho)\sigma_b + B(\rho_b - \rho\sigma_b))^2}{C}\right) + R_3(a, b, \rho, \sigma), \qquad (197)$$

kde funkce S_i, $i \in \{1, ..., 4\}$, P_3 a R_3 splňují (194), (195). Dále vzniknou 2 rovnice z koeficientů úměrných jedničce, o nichž se zde nebudu zmiňovat.

Případ když $A = 0$, t.j. $v = 0$

Rovnice (185) a (186) se zjednoduší na

$$B\sigma_\delta P_{\alpha,\rho_\delta} + BP_{\alpha,\rho} = \theta_{1,\alpha}, \qquad (198)$$

$$CR_{\alpha,\rho} - BR_{\alpha,\sigma} + B\sigma_\delta R_{\alpha,\sigma_\delta} - B\rho_\delta R_{\alpha,\rho_\delta} + BR_\alpha = \theta_{2,\alpha}, \qquad (199)$$

kde $B = u + y$ a $C = 2x - 2(u + y)\rho$, přičemž z (109) a $D \neq 0$ platí $u + y \neq 0$, $u \neq 0$ a $y \neq 0$, takže potom $B \neq 0$ a C je lineární v ρ.

Rovnice (198) má řešení pro $\alpha = 1$

$$P_1 = S_1(a, \sigma, \sigma_a, \rho_a - \sigma_a\rho) + T_1(a, \sigma, \rho) \qquad (200)$$

a pro $\alpha = 2$

$$P_2 = S_2(b, \sigma, \sigma_b, \rho_b - \sigma_b\rho) + T_2(b, \sigma, \rho), \qquad (201)$$

kde S_1, S_2 jsou libovolné funkce a T_1 a T_2 jsou nějaká řešení (198) bez pravé strany. Výpočtem bychom zjistili, že $T_1(a, \sigma, \rho) = -\frac{\int_0^\rho \theta_{1,1}(a,t,\sigma)\, dt}{u+y}$ a $T_2(b, \sigma, \rho) = -\frac{\int_0^\rho \theta_{1,2}(b,t,\rho)\, dt}{u+y}$ a opět lze T_1 a T_2 zahrnout do funkce P_3.

Dosazením spočítaného P_α do (186) získáme

$$S_\alpha + S_{\alpha,\sigma} - \sigma_\delta S_{\alpha,\sigma_\delta} + \left(\Lambda + \sigma_a \left(\frac{x}{B} - 2\rho\right)\right) S_{\alpha,\Lambda} = \eta_{2,\alpha}, \tag{202}$$

kde $\Lambda = \rho_\delta - \sigma_\delta \rho$. Člen u ρ porovnáme s nulou a získáme

$$S_\Lambda = 0, \tag{203}$$

odkud potom plyne, že (202) bude

$$S_\alpha + S_{\alpha,\sigma} - \sigma_\delta S_{\alpha,\sigma_\delta} = \eta_{2,\alpha}. \tag{204}$$

Řešení je potom pro $\alpha = 1$

$$P_1 = \sigma_a T_1(a, \sigma_a e^\sigma) + T_3(a, \sigma, \rho) \tag{205}$$

a pro $\alpha = 2$

$$P_2 = \sigma_b T_2(b, \sigma_b e^\sigma) + T_4(b, \sigma, \rho). \tag{206}$$

Funkce T_3 a T_4 jsou libovolným řešením nehomogenní úlohy a lze je opět zahrnout do P_3, protože vychází pouze v proměnných a, b, ρ a σ a protože T_1 a T_2 jsou libovolné funkce.

Nyní se tedy podařilo splňit rovnice (181) a (182) a zbývá řešit (183) a (184). Místo těchto rovnic raději budu řešit systém (199) a (183). (199) má řešení pro $\alpha = 1$

$$R_1 = \rho_a S_3 \left(a, \sigma_a \rho_a, \sigma_a e^\sigma, \sigma_a^2 \left(\frac{x}{B} - \rho\right)\right) + T_5(a, \sigma, \rho) \tag{207}$$

a pro $\alpha = 2$

$$R_2 = \rho_b S_4 \left(b, \sigma_b \rho_b, \sigma_b e^\sigma, \sigma_b^2 \left(\frac{x}{B} - \rho\right)\right) + T_6(b, \sigma, \rho), \tag{208}$$

kde S_3 a S_4 jsou libovolné funkce v příslušných proměnných a T_5, T_6 jsou nějaká řešení nehomogenní rovnice vycházející v proměnných a, b, σ a ρ, a tudíž je lze zahrnout do R_3.

Další výpočet provedu pouze pro $\alpha = 1$, neboť jde o analogii pouze se záměnou b za a. Rovnice (183) se zjednoduší na

$$S_1 = \phi S_{3,\omega} + \phi S_{3,\phi} + S_3 + \eta_{3,1}, \tag{209}$$

kde $\phi = \sigma_a \rho_a$, $\psi = \sigma_a e^{\sigma}$, $\omega = \sigma_a^2 \left(\rho - \frac{2x-u-y}{u+y}\right)$ a $\Omega = e^{\left(\frac{u+y}{2x-u-y}-1\right)\sigma}$. S_3 závisí pouze na proměnných a, ϕ, ψ. Řešení je

$$S_3 = \frac{1}{\phi} S_5(1, \psi, \Omega - \phi) + S_1, \tag{210}$$

kde S_5 libovolná funkce. $\eta_{3,1}$ mohu opět přídat do P_3.

Již nyní je vidět jistá podobnost řešení s případem vlnové rovnice a vskutku, když zavedeme místo

$$\tau = e^{\sigma}, \tag{211}$$

tak dostaneme z (112) vlnovou rovnici v proměnné τ.

Nyní zbývají koeficienty úměrné jedničce, které dávají rovnice

$$\begin{aligned}
&\sigma_a \left(B \left(P3_b + P3_{b\sigma} + \left(2\, P3_\rho + P3_{\rho\sigma}\right) \rho_b\right)\right.\\
&+ \left(\left(2\,x - 2\,B\,\rho\rho\right) P3_\rho + B\,P3_\sigma + B\,P3_{\sigma\sigma}\right) \sigma_b)\\
&+B \left(P3_{ab} + P3_{a\rho}\,\rho_b + \left(P3_a + P3_{a\sigma}\right) \sigma_b\right.\\
&+\rho_a \left(P3_{b\rho} + P3_{\rho\rho}\,\rho_b + \left(2\,P3_\rho + P3_{\rho\sigma}\right) \sigma_b\right)) = 0,
\end{aligned} \tag{212}$$

$$\begin{aligned}
&B\,R3_{ab} - B\,P3_b\,\rho_a + B\,R3_{b\rho}\,\rho_a - 2\,x\,P3_b\,\sigma_a\\
&+2\,B\,\rho\rho\,P3_b\,\sigma_a - B\,R3_b\,\sigma_a + B\,R3_{b\sigma}\,\sigma_a\\
&+\rho_b \left(B \left(-P3_a + R3_{a\rho} + \left(-2\,P3_\rho + R3_{\rho\rho}\right) \rho_a\right)\right.\\
&+ \left(-\left(\left(2\,x - 2\,B\,\rho\rho\right) P3_\rho\right) - B\,P3_\sigma + B\,R3_{\rho\sigma}\right) \sigma_a)\\
&-2\,x\,P3_a\,\sigma_b + 2\,B\,\rho\rho\,P3_a\,\sigma_b - B\,R3_a\,\sigma_b + B\,R3_{a\sigma}\,\sigma_b\\
&-2\,x\,P3_\rho\,\rho_a\,\sigma_b + 2\,B\,\rho\rho\,P3_\rho\,\rho_a\,\sigma_b - B\,P3_\sigma\,\rho_a\,\sigma_b
\end{aligned}$$

$$+B\,R3_{\rho\sigma}\,\rho_a\,\sigma_b + 2\,B\,R3\,\sigma_a\,\sigma_b - 4\,x\,P3_{\sigma}\,\sigma_a\,\sigma_b$$

$$+4\,B\,\rho\rho\,P3_{\sigma}\,\sigma_a\,\sigma_b + 2\,x\,R3_{\rho}\,\sigma_a\,\sigma_b - 2\,B\,\rho\rho\,R3_{\rho}\,\sigma_a\,\sigma_b$$

$$-3\,B\,R3_{\sigma}\,\sigma_a\,\sigma_b + B\,R3_{\sigma\sigma}\,\sigma_a\,\sigma_b = 0. \qquad (213)$$

Tyto rovnice jsou explicitně vyjádřeny v proměnných σ_a, σ_b, ρ_a a ρ_b, odkud plynou rovnice

$$P_{3,ab} = 0, \qquad (214)$$

$$P_{3,a\rho} = 0, \qquad (215)$$

$$P_{3,b\rho} = 0, \qquad (216)$$

$$P_{3,\rho\rho} = 0, \qquad (217)$$

$$P_{3,a} + P_{3,a\sigma} = 0, \qquad (218)$$

$$P_{3,b} + P_{3,b\sigma} = 0, \qquad (219)$$

$$2\,P_{3,\rho} + P_{3,\rho\sigma} = 0, \qquad (220)$$

$$(2\,x - 2\,B\,\rho)\;P_{3,\rho} + B\,P_{3,\sigma} + B\,P_{3,\sigma\sigma} = 0, \qquad (221)$$

$$R_{3,ab} = 0, \qquad (222)$$

$$P_{3,a} - R_{3,a\rho} = 0, \qquad (223)$$

$$P_{3,b} - R_{3,b\rho} = 0, \qquad (224)$$

$$2P_{3,\rho} - R_{3,\rho\rho} = 0, \qquad (225)$$

$$2(B\rho - x)P_{3,a} - BR_{3,a} + BR_{3,a\sigma} = 0, \qquad (226)$$

$$2(B\rho - x)P_{3,b} - BR_{3,b} + BR_{3,b\sigma} = 0, \qquad (227)$$

$$2(B\rho - x)P_{3,\rho} - B(P_{3,\sigma} + R_{3,\rho\sigma}) = 0, \qquad (228)$$

$$2BR_3 + 4(B\rho - x)P_{3,\sigma} + 2(x - B\rho)R_{3,\rho} - 3BR_{3,\sigma} + BR_{3,\sigma\sigma} = 0, \qquad (229)$$

které mají řešení

$$P_3 = S_5\rho e^{-2\sigma} + (S_6(a) + S_7(b))e^{-\sigma} - S_5\frac{x}{B}e^{-2\sigma} + S_8e^{-\sigma}, \qquad (230)$$

$$R_3 = (S_6(a) + S_7(b))\rho e^{-\sigma} + S_5 e^{-2\sigma}\rho^2 + (S_8 e^{-\sigma} - S_5 \frac{2x}{B} e^{-2\sigma})\rho$$
$$-(S_6(a) + S_7(b))\frac{x}{B}e^{-\sigma} - \frac{x}{B}S_8 e^{-\sigma} + S_5\frac{x}{B}e^{-2\sigma} + e^{\sigma}(S_9 + S_{10}e^{\sigma}), \qquad (231)$$

kde S_6 a S_7 jsou libovolné funkce příslušné proměnné a S_5, S_8, S_9 a S_{10} jsou libovolné konstanty.

Charakteristiky zobecněného vektorového pole pro tento případ vypadají

$$Q_1 = \sigma_a S_1(a, \sigma_a e^{\sigma}) + \sigma_b S_2(b, \sigma_b e^{\sigma})$$
$$+S_5 \rho e^{-2\sigma} + (S_6(a) + S_7(b))e^{-\sigma} - S_5\frac{x}{B}e^{-2\sigma} + S_8 e^{-\sigma}, \qquad (232)$$
$$Q_2 = \frac{S_3\left(a, \sigma_a e^{\sigma}, \sigma_a \rho_a - \sigma_a^2\left(\rho - \frac{x}{B}\right)\right)}{\sigma_a} + \rho_a S_1(a, \sigma_a e^{\sigma})$$
$$+\frac{S_4\left(b, \sigma_b e^{\sigma}, \sigma_b \rho_b - \sigma_b^2\left(\rho - \frac{x}{B}\right)\right)}{\sigma_b} + \rho_b S_1(b, \sigma_b e^{\sigma})$$
$$+(S_6(a) + S_7(b))\rho e^{-\sigma} + S_5 e^{-2\sigma}\rho^2 + (S_8 e^{-\sigma} - S_5\frac{2x}{B}e^{-2\sigma})\rho$$
$$-(S_6(a) + S_7(b))\frac{x}{B}e^{-\sigma} - \frac{x}{B}S_8 e^{-\sigma} + S_5\frac{x}{B}e^{-2\sigma} + e^{\sigma}(S_9 + S_{10}e^{\sigma}). \qquad (233)$$

Nyní vyvstává zajímavá otázka, zda-li jsem dostal nějaké výsledky, které bych nedostal s použitím klasických symetrií t.j. ty které mají charakteristiky lineární v prvních derivacích. Odpověď na předchozí otázku je kladná a těmi členy, které toto způsobují jsou ty, ve kterých se vyskytují funkce S_1 a S_2, jmenovitě to způsobuje jejich druhý argument, a S_3, S_4, kde to způsobuje druhý a třetí argument. Zbývající členy lze dostat použitím klasických symetrií.

5 Zákony zachování

Nyní mám spočítány zobecněné infinitesimální symetrie a je třeba najít příslušné charakteristiky zákonů zachování. K tomu ale musíme splnit formuli (106), kterou si ještě trochu upravím a napíšu ve složkách

$$\sum_J \left(\frac{\partial E_1}{\partial \sigma_J} D_J Q_1 + \frac{\partial E_1}{\partial \rho_J} D_J Q_2 + (-D)_J \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \sigma_J} E_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma_J} E_2 \right) \right) = 0, \quad (234)$$

$$\sum_J \left(\frac{\partial E_2}{\partial \sigma_J} D_J Q_1 + \frac{\partial E_2}{\partial \rho_J} D_J Q_2 + (-D)_J \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \rho_J} E_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \rho_J} E_2 \right) \right) = 0, \quad (235)$$

kde

$$E_1 = \sigma_{ab} + \frac{1}{D} \left(B^2 \sigma_a \sigma_b + AB \left(\rho_a \sigma_b + \rho_b \sigma_a \right) + A^2 \rho_a \rho_b \right), \quad (236)$$

$$E_2 = \rho_{ab} + \frac{-B}{D} \left(B \left(\rho_a \sigma_b + \rho_b \sigma_a \right) + A \rho_a \rho_b + C \sigma_a \sigma_b \right). \quad (237)$$

5.1 Případ $A \neq 0$

Pro tento případ jsem dostal implicitní vyjádření symetrií, a tudíž nemá smysl zaobírat se splnitelností (106).

5.2 Případ $A = 0$

Rovnice (234) a (235) přejdou na

$$\begin{aligned} D_{ab} Q_1 + \sigma_a D_b Q_1 + \sigma_b D_a Q_1 - D_a \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \sigma_a} E_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma_a} E_2 \right) & \\ - D_b \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \sigma_b} E_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma_b} E_2 \right) + \frac{\partial Q_1}{\partial \sigma} E_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma} E_2 &= 0, \quad (238) \\ D_{ab} Q_2 - \rho_b D_a Q_1 - \rho_a D_b Q_1 - \sigma_b D_a Q_2 - \sigma_a D_b Q_2 - 2 \sigma_a \sigma_b Q_2 & \\ - \frac{C}{B} \left(\sigma_b D_a Q_1 + \sigma_b D_b Q_1 \right) - D_a \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \rho_a} E_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \rho_a} E_2 \right) & \\ - D_b \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \rho_b} E_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \rho_b} E_2 \right) + \frac{\partial Q_1}{\partial \rho} E_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \rho} E_2 &= 0, \quad (239) \end{aligned}$$

kterým vyhovuje pouze

$$Q_1 = \sigma_a S_1(a) + \sigma_b S_2(b), \tag{240}$$

$$Q_2 = \rho_a S_1(a) + \rho_b S_2(b), \tag{241}$$

kde S_1 a S_2 jsou libovolné funkce v příslušných proměnných, potom jsou tyto Q_1 a Q_2 charakteristikami variačních symetrií a tudíž podle teorému Noetherové tvoří charakteristiky zákonů zachování, které potom vypadají

$$\begin{aligned} &Q_1 E_1 + Q_2 E_2 \\ &= DivP = 0, \end{aligned} \tag{242}$$

kde P je zachovávající se veličina, ale protože řešení není jednoznačné, neboť je to jedna rovnice pro dvě hledané funkce, nebudu se jí podrobněji věnovat.

Výše uvedené charakteristiky (240) a (241) lze spočítat z klasických symetrií, neboť jsou lineární v prvních derivacích a dále jsou v proměnných a a b.

6 Závěr

Ve své diplomové práci jsem se věnoval teorii zobecněných symetrií a její matematické podstatě, tj. teorii jetových prostorů, a dále zákonům zachování a teorému Noetherové.

Následně jsem tuto teorii použil na příklad Lie-Poissonova T-duálního σ-modelu. Výpočet zobecněných symetrií se rozdělil na dva případy, přičemž dopočítat do konce lze pouze jedna větev. Výsledek je (232) a (233). Ze spočítaných zobecněných symetrií jsou variačními symetriemi pouze (240) a (241), jež jsou podle teorému Noetherové charakteristikou zákonů zachování. Zobecněné symetrie, které jsou variačními symetriemi, jsou taková pole, jež lze spočítat klasickou Lieovou metodou. Tento výsledek je mírně frustrující a naznačuje, že zřejmě půjde o neintegrabilní model, i když na této úrovni to nelze tvrdit s jistotou.

Literatura

[1] P. Olver, *Aplication of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, 1993, ISBN 0-387-95000-1

[2] . A. E. Pirani, D. C. Robinson, W. F. Shadwick, *Local jet bundle formulation of Backlund transformations*, ISBN 90-277-1036-8

[3] R. Abraham, *Lectures of smale on differential topology*, 1963

[4] S. Wolfram, *Mathematica*,Addison-Wesley publishing company, 1991, ISBN 0-201-51502-4

[5] L. Hlavatý, L. Šnobl, *Poisson Lie T-dual Models with Two-dimensional Targets*, Mod. Phys. Let. A, Vol. 17, No. 7, 429-434, 2002