Rešeršní práce Václava Kavky

1999/2000

Integrabilita setrvačníkových rovnic

Úvodní poznámky

Tématem této práce je plná integrabilita setrvačníkových rovnic. První kapitola je věnována odvození setrvačníkových rovnic a souhrnu základních poznatků potřebných v dalším výkladu. Ve druhé kapitole jsem se snažil vyložit základy teorie eliptických funkcí. Tuto matematickou část jsem se pokusil vyložit v pokud možno minimálním rozsahu při zachování logické konzistence.Třetí kapitola obsahuje několik poznámek o Lagrangeově formalismu, vyložených sice matematicky nekorektně, ale obvyklým fyzikálním přístupem. Čtvrtá kapitola se skládá z obecného řešení úlohy volného setrvačníku a pátá zase Lagrangeova. Práce je zakončena kapitolou úvah o integrabilitě setrvačníkových rovnic, kde jsem se pokusil vyložit aplikaci metody malého parametru na setrvačníkové rovnice.

Kapitola 1
Úvod

Souřadné soustavy a transformace
Nejdříve budu popisovat pohyb hmotného bodu s hmotností m, rotujícího kolem nějakého pevného bodu v prostoru. Do tohoto pevného bodu umístím počátek pravoúhlé a kladně orientované soustavy s. Do téhož bodu umístím počátek další pravoúhlé a kladně orientované soustavy S. Platí základní vztahy pro moment hybnosti
v soustavě s

$$\vec{m} = [\vec{q}, m\vec{v}] = m[\vec{q}, [\vec{\omega}, \vec{q}]]$$

v soustavě S

$$\vec{M} = m[\vec{Q}, [\vec{\Omega}, \vec{Q}]]$$

$$\vec{m}, \vec{M}$$

značí moment hybnosti v s a S,

$$\vec{q}, \vec{Q}, \vec{v}, \vec{V}, \vec{\omega}, \vec{\Omega}$$

značí po řadě polohu,rychlost a úhlovou rychlost.Malá a velká písmena odlišují příslušnost k soustavě s a S .Hmotnost je označena m.
Dále použiji jednotkové vektory příslušné hlavním směrům soustav. Tyto báze označím analogicky s a S.
Definuji množinu operátorů A v bázi S.

$$A_{\vec{Q}}\vec{X} = m[\vec{Q}, [\vec{X}, \vec{Q}]]$$

Poznámka:

$$A\vec{\Omega} = \vec{M}$$

Tvrzení: A je samosdružený.
Důkaz:

$$(A\vec{X}, \vec{Y}) = m([\vec{Q}, [\vec{X}, \vec{Q}]], \vec{Y}) = m([\vec{Y}, \vec{Q}], [\vec{X}, \vec{Q}]) = (\vec{X}, A\vec{Y})$$

Důsledek: Kinetická energie je kvadratická forma.
Důkaz: $(\vec{V}, \vec{V}) = ([\vec{\Omega} \times \vec{Q}], [\vec{\Omega} \times \vec{Q}]) =$

$$T = \frac{1}{2} m\vec{V}^2 = \frac{1}{2}(A\vec{\Omega}, \vec{\Omega})$$

Definice: Definuji transformaci B jako identické zobrazení z báze S do báze s.

$$\vec{x} = B\vec{X} \qquad B = {}^{S}E^{s}$$

Pokud

$$\dot{\vec{X}} = 0$$

Potom

$$\dot{\vec{x}} = B\dot{\vec{X}} + \dot{B}\vec{X} = \dot{B}\vec{X}$$

Ze speciální volby

$$\vec{x} = \vec{q}$$

Plyne

$$\dot{B}\vec{X} = [\vec{\omega}, \vec{x}]$$

$$\dot{\vec{x}} = B\dot{\vec{X}} + [\vec{\omega}, \vec{x}]$$

<u>Přechod k tuhému tělesu,</u> jehož pohyb je omezen na rotaci kolem nějakého pevného bodu

Dynamické veličiny tuhého tělesa se počítají pomocí integrálů. Budu předpokládat, že tyto integrály existují jako Riemannovy, což bude díky rozložení hmotnosti, spojitému až na množinu nulové míry stejně nejspíš vždycky splněno. Potom tyto integrály mohu s libovolnou přesností aproximovat konečnou sumou. Celkový moment hybnosti v soustavě S bude mít tedy tvar

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i A_i \vec{\Omega} = A\vec{\Omega}$$

A celková kinetická energie

$$T = \frac{1}{2}(A\vec{\Omega}, \vec{\Omega})$$

Poznámka: Protože A je samosdružený, existuje ortonormální báze z vlastních vektorů

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

Tuto bázi budu považovat za kladně orientovanou a budu ji nazývat hlavní osy setrvačnosti. Dále budu soustavu S považovat za shodnou s hlavními osami. Potom platí

$$M_i = I_i \Omega_i$$

Kde vlastní čísla operátoru A značím

$$I_i$$

a nazývám je hlavními momenty setrvačnosti.
Kinetická energie potom dostane tvar

$$T = \frac{1}{2} I_i \Omega_i^2$$

Poznámka: Pro fixní energii tvoří množina všech možných vektorů úhlové rychlosti povrch elipsoidu.

Eulerovy setrvačníkové rovnice

Definice: Tuhé těleso nazvu setrvačníkem tehdy a jen tehdy, pokud jeho jediným pohybem je rotace kolem nějakého pevného bodu.

Zákon zachování momentu hybnosti: Moment síly v s,S je označen písmeny

$$\vec{n},\vec{N}$$

$$\vec{n}=\dot{\vec{m}} \Rightarrow \vec{N}=\dot{\vec{M}}+[\vec{\Omega},\vec{M}]$$

Poznámka: Pokud je setrvačník volný, výsledná působící síla i moment sil jsou nulové potom platí

$$0=\dot{\vec{m}}=B\dot{\vec{M}}+[\vec{\omega},\vec{m}]=B(\dot{\vec{M}}+[\vec{\Omega},\vec{M}]) \Rightarrow \dot{\vec{M}}+[\vec{\Omega},\vec{M}]=0$$

Definice: Pravé strany implikací nazvu Eulerovy setrvačníkové rovnice.

Eulerovy úhly

Budu se snažit popsat vzájemnou polohu dvou kladně orientovaných soustav

$$(i_1,i_2,i_3),(i_1',i_2',i_3')$$

Definuji uzlovou přímku jako průnik rovin určených osami.

$$\vec{u}=(i_1,i_2)\cap(i_1',i_2')$$

Původní soustavu dostanu do polohy čárkované pomocí kompozice tří otočení

1. O úhel φ kolem třetí osy
2. O úhel θ kolem uzlové přímky
3. úhel ψ kolem třetí čárkované osy

Transformační vztahy budou mít tento tvar

	i_1	i_2	i_3
i_1'	$\cos\varphi\cos\theta\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi$	$\sin\varphi\cos\theta\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi$	$-\sin\theta\cos\psi$
i_2'	$-\cos\varphi\cos\theta\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi$	$-\sin\varphi\cos\theta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi$	$\sin\theta\sin\psi$
i_3'	$\cos\varphi\sin\theta$	$\sin\varphi\sin\theta$	$\cos\theta$

Úhly, které v transformacích vystupují budu nazývat Eulerovými úhly.
Jejich meze jsou

$$\theta\in(0,\pi)$$

$$\varphi\in(0,2\pi)$$

$$\psi\in(0,2\pi)$$

Vyjádření úhlové rychlosti

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{i}_3' + \dot{\varphi}\vec{i}_3$$

Rozepsáním podle transformační tabulky do čárkovaných proměnných získám

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$$

v Eulerových úhlech

Kapitola 2
Základy teorie eliptických funkcí

Obecné vlastnosti

Definice: Komplexní funkce f je eliptická, pokud je 2 periodická s periodami

$$2\omega_1, 2\omega_2$$

Kde

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin R$$

a zároveň f je holomorfní až na póly.

Definice: Buňkou nazvu kosodélník v komplexní rovině s vrcholy
$z, z + 2\omega_1, z + 2\omega_1 + 2\omega_2, z + 2\omega_2$
kde funkce f nemá na jeho hranicích póly.

Tvrzení 1: Eliptická funkce má v každé buňce konečný počet pólů.
Důkaz: Kdyby byl počet pólů nekonečný, měla by jejich množina hromadný bod, který by byl singulární a přitom ne izolovaný.

Tvrzení 2: Eliptická funkce má v každé buňce konečný počet nulových bodů.
Důkaz: Kdyby nebyl počet nulových bodů konečný, byla by její převrácená hodnota také eliptická a přitom by měla nekonečně mnoho pólů.

Tvrzení 3: Suma reziduí eliptické funkce je v každé buňce rovna nule.
Důkaz: Podle reziduové věty

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\{\int_t^{t+2\omega_1} + \int_{t+2\omega_1}^{t+2\omega_1+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_1+2\omega_2}^{t+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_2}^{t}\} f(z)dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_1}(f(z)-f(z+2\omega_2))dz - \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_2}(f(z)-f(z+2\omega_1))dz = 0$$

Tvrzení 4: Eliptická funkce, která v buňce nemá žádné póly je konstantní.
Důkaz: Pokud nemá v buňce žádné póly, je tam omezená nějakou konstantou **K**. Z 2 periodicity plyne, že stejná konstanta ji omezuje v celé komplexní rovině a zároveň platí, že jediná holomorfní omezená funkce je konstanta.

Definice: Komplexní čísla u a v jsou kongruentní právě tehdy, když

$$v = u + 2m\omega_1 + 2n\omega_2$$

Definice: Řádem eliptické funkce f rozumím součet násobností ireducibilních pólů. Ireducibilní znamená, že žádné dva nejsou kongruentní.

Tvrzení 5: Řád nekonstantní eliptické funkce je nejméně 2.
Důkaz: Pokud by byl roven 1,potom f má jen jeden ireducibilní pól prvního řádu a tedy reziduum nemůže být rovno 0.

Weierstrassovy eliptické funkce

Definice: Definuji funkci tímto vztahem

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n\in Z}\frac{1}{(z-2m\omega_1-2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}$$

Kde v sumaci je vynechán člen $m=n=0$

Poznámka: Tato řada absolutně konverguje pro všechna komplexní z s výjimkou

$$z = \Omega_{mn} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$$

Tyto body jsou póly.Všechno plyne z absolutní konvergence řady

$$\sum \frac{1}{k^2}$$

Odtud plyne i holomorfnost funkce

$$\wp(z)$$

Tvrzení 6: Tato funkce je 2 periodická.
Důkaz:

$$\wp'(z) = -2\sum_{m,n}\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^3}$$

je lichá funkce. Dále platí

$$\wp'(z+2\omega_1) = -2\sum_{m,n}\frac{1}{(z-\Omega_{mn}+2\omega_1)^3}$$

a také platí

$$\{\Omega_{mn}; m,n \in Z\} = \{\Omega_{mn} - 2\omega_1; m,n \in Z\}$$

a tedy

$$\wp'(z+2\omega_1) = \wp'(z) \Rightarrow \wp(z+2\omega_1) = \wp(z) + A$$

Zároveň

$$\wp(z) = \wp(-z)$$

Protože

$$z \to -z$$

mění jen pořadí sumace a výsledek neovlivní. Speciální volbou

$$z = -\omega_1$$

dostanu $A=0$

Analogicky pro

$$\omega_2$$

Důsledek: Tato funkce je eliptická.

Krátké povídání o diferenciálních rovnicích:

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2}$$

Je analytická v okolí 0. Taylorovým rozvojem dostanu

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = 3\sum(\Omega_{mn})^{-4} z^2 + 5\sum(\Omega_{mn})^{-6} z^4 + o(z^6)$$

označím

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{20} g_2 z^2 + \frac{1}{28} g_3 z^4 + o(z^6)$$
$$g_2 = 60\sum(\Omega_{mn})^{-4}$$
$$g_3 = 140\sum(\Omega_{mn})^{-6}$$

mám tedy

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{20} g_2 z^2 + \frac{1}{28} g_3 z^4 + o(z^6)$$
$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{1}{10} g_2 z + \frac{1}{7} g_3 z^3 + o(z^3)$$
$$\wp^3(z) = \frac{1}{z^6} + \frac{3}{20} g_2 z^{-2} - \frac{3}{28} g_3 + o(z^2)$$
$$\wp'^2(z) = 4z^{-6} - \frac{2}{5} g_2 z^{-2} - \frac{4}{7} g_3 + o(z^2)$$

takže

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3 = o(z^2)$$

Je tedy eliptická a analytická na okolí 0. Jediné možné singularity jsou však kongruentní s 0, proto je konstantní.Pokud

$$z \to 0$$

Dostanu

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

tedy řeší rovnici

$$y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$$

jejím obecným řešením je

$$\wp(\pm z + \alpha)$$

Integrální formule: rovnici

$$z = \int_{\xi}^{\infty} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-\frac{1}{2}} dt$$

Kde integrační cesta neprochází nulovými body převrácené hodnoty integrandu, převedu na tvar

$$\xi'^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3$$

a proto

$$\xi = \wp(z + \alpha)$$

Platí

$$\xi \to 0 \Rightarrow z \to \infty$$

proto

$$\alpha = \Omega_{mn}$$
$$\xi = \wp(z)$$

Konstanty : Nejdřív ukážu, že

$$\wp(\omega_1) \neq \wp(\omega_2) \neq \wp(\omega_3)$$
$$\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$$

Platí

$$\wp'(\omega_1) = -\wp'(-\omega_1) = -\wp'(\omega_1) = 0$$
$$\wp'(\omega_2) = 0$$
$$\wp'(\omega_3) = 0$$

Singularity

$$\wp'(z)$$

Jsou 3 násobné póly kongruentní s 0.To znamená, že jsem našel všechny nulové body této funkce v buňce.

Definuji:

$$e_i = \wp(\omega_i)$$

Potom tyto body jsou kořeny polynomu

$$4t^3 - g_2 t - g_3$$

Funkce

$$\wp(z) - e_i$$

má v bodě

$$\omega_i$$

2 násobný nulový bod.Protože

$$\wp(z)$$

má jen jeden dvojitý ireducibilní pól,nulové body

$$\wp(z) - e_1$$

jsou kongruentní s

$$\omega_1$$

Pokud by platilo

$$e_1 = e_2$$

potom

$$\wp(z) - e_1$$

má nulový bod v

$$\omega_2$$

který není kongruentní s

$$\omega_1$$

A dostal bych spor.

Porovnáním koeficientů polynomu

$$4t^3 - g_2 t - g_3$$

s jeho kořeny

$$e_1, e_2, e_3$$

dostáváme

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

$$e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\frac{1}{4} g_2$$

$$e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3$$

Tvrzení bez důkazu:

$$\wp(z + \omega_1) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(z) - e_1}$$

Definuji: Funkci

$$\xi(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m,n \in Z} \frac{1}{z - \Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2}$$

Při vynechání členu $m=n=0$.
Platí

$$\xi'(z) = -\wp(z)$$

Proto je tato funkce dobře definovaná a holomorfní kromě pólů

$$\Omega_{mn}$$

Tvrzení: Tato funkce je eliptická.
Důkaz: Byl by analogický důkazu v minulém odstavci.

Kvaziperiodicita:

$$\wp(z + 2\omega_1) = \wp(z)$$

Proto

$$\xi(z + 2\omega_1) = \xi(z) + 2\eta_1$$

Dosazením

$$z = -\omega_1$$

Dostáváme

$$\eta_1 = \xi(\omega_1)$$

analogicky

$$\eta_2 = \xi(\omega_2)$$

Tvrzení 7: Každá eliptická funkce f lze nakombinovat pomocí funkcí ξ.
Důkaz: Nechť mám dánu příslušnou ireducibilní množinu pólů.

$$a_1, \ldots a_n$$

V okolí bodu

$$a_k$$

Bude mít hlavní část $f(z)$ tvar

$$\frac{c_{k,1}}{z-a_k}+\dots\frac{c_{k,rk}}{(z-a_k)^{r_k}}$$

Definuji

$$F(z)=\sum_{k=1}^{n}\{c_{k,1}\xi(z-a_k)-c_{k,2}\xi'(z-a_k)+\dots\frac{(-1)^{r_k-1}}{(r_k-1)!}\xi^{r_k-1}(z-a_k)\}$$

Platí

$$F(z+2\omega_1)-F(z)=\sum_{k=1}^{n}2\eta_1 c_{k,1}$$

ale

$$\sum_{k=1}^{n}c_{k,1}=0$$

protože je to suma reziduí eliptické funkce.*F(z)* má tedy periody

$$2\omega_1, 2\omega_2$$

a *f(z)-F(z)* je eliptická. A protože nemá hlavní část, je navíc konstantní. Dostávám tedy

$$f(z)=A+\sum_{k=1}^{n}\{c_{k,1}\xi(z-a_k)\dots\frac{(-1)^{r_k-1}}{(r_k-1)!}c_{k,r_k}\xi^{r_k-1}(z-a_k)\}$$

Definuji:

$$\sigma(z)=z-\prod_{mn}\{(1-\frac{z}{\Omega_{m,n}})\exp(\frac{z}{\Omega_{m,n}}+\frac{z^2}{2\Omega_{m,n}^2})\}$$

Poznámka: Stejně jako u předchozích funkcí se zjistí, že je to holomorfní funkce až na póly

$$\Omega_{m,n}$$

a platí

$$\frac{d}{dz}\log(\sigma(z))=\xi(z)$$

<u>Jacobiho eliptické funkce</u>

Povídání o theta funkcích

Definuji:

$$\vartheta(z,q)=1+2\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2inz}$$

$$|q|<1$$

$$q=e^{i\pi\tau}$$

Poznámka: Tato řada absolutně konverguje.

Důkaz:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |q^{2n+1}||e^{2iz}| \to 0$$

Na omezené množině.

Důsledek: Řada lokálně stejnoměrně konverguje a mohu zaměnit sumaci s derivací.
Základní vlastnosti:

1.

$$\vartheta(z,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz$$

2.

$$\vartheta(z+\pi,q) = \vartheta(z,q)$$

3.

$$\vartheta(z+\pi\tau,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2ni(z+\pi\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2ni\pi\tau} e^{2niz} = -q^{-1}e^{-2iz}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1} q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)iz} =$$
$$= -q^{-1}e^{-2iz}\vartheta(z,q)$$

Poznámka: O theta funkci říkáme, že je kvazi 2 periodická s periodami $\pi, \pi\tau$ přes faktory

$$1, -q^{-1}e^{-2iz}$$

Definuji 4 druhy theta funkcí:

$$\vartheta_4(z,q) = \vartheta(z,q)$$

$$\vartheta_3(z,q) = \vartheta_4(z+\tfrac{1}{2}\pi,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz$$

$$\vartheta_1(z,q) = -ie^{iz+\frac{1}{4}\pi\tau}\vartheta_4(z+\tfrac{1}{2}\pi\tau,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1)^2}\sin(2n+1)z$$

$$\vartheta_2(z,q) = \vartheta_1(z+\tfrac{1}{2}\pi,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2}\cos(2n+1)z$$

Další vlastnosti theta funkcí:

1.

$$\frac{\vartheta'(z+\pi,q)}{\vartheta(z+\pi,q)} = \frac{\vartheta'(z,q)}{\vartheta(z,q)}$$

2.

$$\frac{\vartheta'(z+\pi\tau,q)}{\vartheta(z+\pi\tau,q)} = -2i + \frac{\vartheta'(z,q)}{\vartheta(z,q)}$$

Nulové body theta funkcí: Z kvaziperiodicity plyne, že pokud z je nulovým bodem libovolné theta funkce, potom $z+m\pi+n\pi\tau$ je také nulovým bodem

Tvrzení 8: Libovolná theta fukce má v každé buňce právě 1 nulový bod.
Důkaz: Z principu argumentu je počet nulových bodů roven

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\vartheta'(z,q)}{\vartheta(z,q)} = \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi} \frac{\vartheta'(z,q)}{\vartheta(z,q)} - \frac{\vartheta'(z+\pi\tau,q)}{\vartheta(z+\pi\tau,q)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi\tau} \frac{\vartheta'(z,q)}{\vartheta(z,q)} - \frac{\vartheta'(z+\pi,q)}{\vartheta(z+\pi,q)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi} 2i dz = 1$$

Poznámka: Nulové body

$$\vartheta_1(z,q), \vartheta_2(z,q), \vartheta_3(z,q), \vartheta_4(z,q)$$

jsou kongruentní s

$$0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi\tau, \frac{\pi}{2}\tau$$

Čtverce theta funkcí: Při vhodně zvolených konstantách a, b je

$$\frac{a\vartheta_1^2(z)+b\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_2^2(z)}$$

2 periodická funkce, která má v každé buňce jen jeden jednoduchý pól a proto je kolnstantní. Další vhodnou normalizací dostanu

$$\vartheta_2^2(z) = a\vartheta_1^2(z)+b\vartheta_4^2(z)$$

pomocí hodnot v bodech

$$0, \frac{1}{2}\pi\tau$$

dostávám

$$\vartheta_2^2(z)\vartheta_4^2 = \vartheta_4^2(z)\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2(z)\vartheta_3^2$$
$$\vartheta_3^2(z)\vartheta_4^2 = \vartheta_4^2(z)\vartheta_3^2 - \vartheta_1^2(z)\vartheta_2^2$$

kde symboly bez argumentu z značí funkční hodnoty v bodě 0. Analogicky dostanu vztah transformací

$$z \to z+\frac{1}{2}\pi\tau$$

získám další vztahy.

$$\vartheta_1^2(z)\vartheta_4^2 = \vartheta_3^2(z)\vartheta_2^2 - \vartheta_2^2(z)\vartheta_3^2$$
$$\vartheta_3^2(z)\vartheta_4^2 = \vartheta_4^2(z)\vartheta_3^2 - \vartheta_1^2(z)\vartheta_2^2$$

A pro $z=0$

$$\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4 = \vartheta_3^4$$

Diferenciální rovnice a zavedení Jacobiho eliptických funkcí:

$$\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}$$

Je periodická přes $\pi,\tau\pi$ s faktory $-1,1$. Její derivace

$$\frac{\vartheta_1'(z)\vartheta_4(z)-\vartheta_4'(z)\vartheta_1(z)}{\vartheta_4^2(z)}$$

Má stejné faktory $-1,1$.Funkce

$$\Phi(z)=\frac{\vartheta_1'(z)\vartheta_4(z)-\vartheta_4'(z)\vartheta_1(z)}{\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)}$$

Má nejvýš jednoduché póly.Funkce

$$\frac{\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)}{\vartheta_4{}^2(z)}$$

Má faktory $-1,1$ a proto Φ(z) je 2 periodická.Proto je Φ(z) konstantní.

$$\lim_{z\to 0}\Phi(z)=\vartheta_4^2$$

Proto

$$\frac{d}{dz}\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}=\vartheta_4^2\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}$$

Pokud zapíšu

$$\xi(z)=\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}$$

Dostanu

$$\xi'^2=(\vartheta_2^2-\xi^2\vartheta_3^2)(\vartheta_3^2-\xi\vartheta_2^2)$$

Jejím obecným řešením je

$$\pm\frac{\vartheta_1(z+\alpha)}{\vartheta_4(z+\alpha)}$$

Záporné znaménko můžu nahradit posunem α o π. Substitucí

$$y=\xi\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$$

$$u=z\vartheta_3^2$$

Přejdu k rovnici

$$y'^2(u) = (1-y^2)(1-k^2y^2)$$
$$y = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}$$
$$k^{1/2} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$$

Definice: Funkci *y(u)* nazvu *sn(u,k)*.

Tato funkce je periodická přes

$$\pi\vartheta_3^2, \pi\tau\vartheta_3^2$$

S faktory $-1,1$ a je tedy 2 periodická přes

$$2\pi\vartheta_3^2, \pi\vartheta_3^2$$

Tyto periody nazvu

$$4K, 2iK'$$

Definice: Konstanta k se nazývá modulus. Definuji komplementární modulus k'.

$$k'^{1/2} = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}$$

Poznámka:

$$k^2 + k'^2 = 1$$

Funkce cn(u,k), dn(u,k):

Analogicky předešlému odstavci dojdu k rovnici

$$\frac{d}{dz}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)} = -\vartheta_3^2\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)}$$

Substitucí

$$y = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}$$
$$u = z\vartheta_3^2$$

Dostaneme

$$y'^2(u) = (1-u^2)(k'^2 + k^2u^2)$$
$$y = cn(u,k)$$

Stejným způsobem dostanu

$$\frac{d}{dz}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)} = -\vartheta_2^2 \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}$$

$$y = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)}$$

$$u = z\vartheta_3^2$$

$$y'^2(u) = (1-u^2)(u^2-k'^2)$$

$$y = dn(u,k)$$

Základní vlastnosti:

Z definic plyne

$$\frac{d}{du}sn(u) = cn(u)dn(u)$$

Z relací čtverců theta funkcí plyne

$$sn^2(u) + cn^2(u) = 1$$

$$k^2 sn^2(u) + dn^2(u) = 1$$

$$cn(0) = dn(0) = 1$$

Z definic zase *sn(u)* je lichá funkce.Z toho všeho plyne

$$\frac{d}{du}cn(u) = -sn(u)dn(u)$$

$$\frac{d}{du}dn(u) = -k^2 sn(u)cn(u)$$

Tvrzení bez důkazu:

$$sn(u+iK') = \frac{1}{k \cdot sn(u)}$$

Tvrzení: Necht' *f(z)* je eliúptická a má ireducibilní set pólů

$$\beta_1, \ldots \beta_n$$

Potom

$$f(z) = A + \sum_{r=1}^{n}\sum_{m=1}^{m_r}\frac{(-1)^{m-1}A_{rm}}{(m-1)!}\frac{d^m}{dz^m}\log\vartheta_1\left(\frac{\pi z - \pi\beta_r}{2\omega_1}, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

kde

$$A_{rm}$$

jsou koeficienty v hlavní části příslušné

$$\beta_r$$

Důkaz: Je analogický důkazu tvrzení 7.

Kapitola 3
Poznámky o Lagrangeově formalismu

Systémy s cyklickými souřadnicemi

Pokud mám Lagrangeovu funkci

$$L = L(q_1 \ldots q_n, \dot{q}_1, \ldots \dot{q}_n)$$

A Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0$$

Kde souřadnice

$$q_1 \ldots q_k$$

Jsou cyklické, potom

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \beta_r$$
$$r = 1..k$$

Jsou integrály pohybu.

Definuji:

$$R = R(q_{k+1}, \ldots q_n, \dot{q}_{k+1}, \ldots \dot{q}_n, \beta_1, \ldots \beta_k)$$
$$R = L - \sum_{r=1}^{k} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$$

Platí

$$\delta R = \delta(L - \sum_{r=1}^{k} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r})$$
$$\delta L = \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r$$
$$\delta(\sum_{r=1}^{k} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}) = \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r + \sum_{r=1}^{k} \dot{q}_r \delta\beta_r$$

Takže

$$\delta R = \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r - \sum_{r=1}^{k} \dot{q}_k \delta\beta_r$$

Dostávám

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} \quad .... r = k+1..n$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_r} = \frac{\partial R}{\partial q_r} \quad .... r = k+1..n$$
$$\dot{q}_r = -\frac{\partial R}{\partial \beta_r} \quad .... r = 1..k$$

Mám tedy modifikované Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial R}{\partial q_r} = 0 \quad ... r = k+1...n$$

Kapitola 4
Obecné řešení úlohy o volném setrvačníku

Budu řešit případ setrvačníku, kde výsledná působící síla i moment sil jsou nulové. Úloha je určena rovnicemi

$$\dot{\vec{M}} = [\vec{M}, \vec{\Omega}]$$
$$M_i = I_i \Omega_i$$

Pro účely dalšího výkladu zavedu nové značení

$$I_1 = A$$
$$I_2 = B$$
$$I_3 = C$$

V laboratorní soustavě platí zákon zachování momentu hybnosti

$$\dot{\vec{m}} = 0$$

Zvolím polohu laboratorní soustavy tak, aby platilo

$$\vec{m} = (0,0,d)$$
$$d \geq 0$$

Z odstavce o Eulerových úhlech potom plyne

$$M_1 = -d \cos\psi \sin\theta$$
$$M_2 = d \sin\theta \sin\psi$$
$$M_3 = d \cos\theta$$

Porovnáním se vzorci pro úhlovou rychlost dostáváme

$$\dot{\theta} \sin\psi - \dot{\varphi} \cos\psi \sin\theta = -\frac{d}{A} \sin\theta \cos\psi$$
$$\dot{\theta} \cos\psi + \dot{\varphi} \sin\psi \sin\theta = \frac{d}{B} \sin\theta \sin\psi$$
$$\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta = \frac{d}{C} \cos\theta$$

Vyřešením této soustavy vzhledem k prvním derivacím získám vztahy

$$\dot{\theta} = \frac{A-B}{AB} d \sin\theta \cos\psi \sin\psi$$
$$\dot{\varphi} = \frac{d}{A}\cos^2\psi + \frac{d}{B}\sin^2\psi$$
$$\dot{\psi} = \left(\frac{d}{C} - \frac{d}{A}\cos^2\psi - \frac{d}{B}\sin^2\psi\right)\cos\theta$$

Dále ze zákona zachování energie

$$A\Omega_1^2 + B\Omega_2^2 + C\Omega_3^2 = T$$

plyne

$$A\Omega_1^2 = T - B\Omega_2^2 - C\Omega_3^2$$

a dosazením vztahů pro úhlovou rychlost

$$A\frac{d^2}{A^2}\sin^2\theta\cos^2\psi = T - B\frac{d^2}{B^2}\sin^2\theta\sin^2\psi - C\frac{d^2}{C^2}\cos^2\theta$$
$$\frac{1}{A}\sin^2\theta\cos^2\psi = \frac{T}{d^2} - \frac{1}{B}\sin^2\theta\left(1-\cos^2\psi\right) - \frac{1}{C}\cos^2\theta$$
$$\frac{A-B}{AB}\sin^2\theta\cos^2\psi = -\frac{BT-d^2}{Bd^2} + \frac{B-C}{BC}\cos^2\theta$$

analogicky

$$\frac{A-B}{AB}\sin^2\theta\sin^2\psi = \frac{AT-d^2}{Ad^2} - \frac{A-C}{AC}\cos^2\theta$$

Odbočka k symetrickému setrvačníku:
Pokud $A=B$, dostávám na základě úvah ze začátku tohoto odstavce

$$\theta = \theta_0$$
$$\varphi = \frac{d}{A}t + \varphi_0$$
$$\psi = \left(\frac{d}{C} - \frac{d}{A}\right)\cos\theta_0 t + \psi_0$$

Přechod ke kulovému setrvačníku je již triviální.

Asymetrický setrvačník: Budu předpokládat, že platí

$$A > B > C$$

Potom

$$AT = A\Omega_1^2 + AB\Omega_2^2 + AC\Omega_3^2 > d^2$$
$$AT - d^2 > 0$$

Analogicky

$$CT - d^2 < 0$$

Zatím nemám žádnou podobnou podmínku pro

$$BT - d^2$$

O tomto výrazu budu předpokládat, že je kladný.Pokud nebude, mohu stejné úvahy provést s výrazem

$$d^2 - BT$$

který kladný bude.
Pokud by platilo

$$BT = d^2$$

Dostali bychom

$$A\Omega_1^2(B-A) + C\Omega_3^2(B-C) = 0$$
$$\Omega_1 = \pm\sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}}\Omega_3$$

Eulerovy rovnice by se zredukovaly na soustavu

$$\dot{\Omega}_3 = K\Omega_2\Omega_3$$
$$\dot{\Omega}_2 = L\Omega_3^2$$

Kterou lze vyřešit separací.
<u>Pokračování řešení asymetrického setrvačníku:</u>
Použitím rovnice pro

$$\dot{\theta}$$

dostaneme

$$\frac{d}{dt}\cos\theta = -d\frac{A-B}{AB}\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi = -d\left(\frac{A-B}{AB}\sin^2\theta\cos^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{A-B}{AB}\sin^2\theta\sin^2\psi\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= -d\left(-\frac{BT-d^2}{Bd^2} + \frac{B-C}{BC}\cos^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{AT-d^2}{Ad^2} - \frac{A-C}{AC}\cos^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

Poznámka: Tato rovnice silně připomíná rovnice, pomocí kterých byly zavedeny Jacobiho eliptické funkce.

Poznámka: Stejným algoritmem, akorát trochu delším postupem získám podobné rovnice i pro

$$\sin\theta\cos\psi$$
$$\sin\theta\sin\psi$$

Věta:

$$\cos\theta = Rdn(u,k)$$
$$\sin\theta\sin\psi = Qsn(u,k)$$
$$\sin\theta\cos\psi = Pcn(u,k)$$

Kde

$$u = \lambda t + \varepsilon \qquad R^2 = \frac{C(AT - d^2)}{d^2(A - C)}$$

$$P^2 = \frac{A(d^2 - CT)}{d^2(A - C)} \qquad k^2 = \frac{(A - B)(d^2 - CT)}{(B - C)(AT - d^2)}$$

$$Q^2 = \frac{B(d^2 - CT)}{d^2(B - C)} \qquad \lambda^2 = \frac{(B - C)(AT - d^2)}{ABC}$$

Důkaz: Spočívá v dosazení.

Určení třetího Eulerova úhlu

Definuji: nějaké číslo a vztahem

$$sn(ia) = i\left(\frac{C(AT - d^2)}{A(d^2 - CT)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$cn(ia) = \left(\frac{d^2(A - C)}{A(d^2 - CT)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dn(ia) = \left(\frac{B(A - C)}{A(B - C)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pro třetí úhel máme rovnici

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{A} + d\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\sin^2\psi$$

pokud položím

$$\varepsilon = 0$$

dostávám

$$\cot\psi = \frac{cn(\lambda t)}{dn(ia)sn(\lambda t)}$$

$$\sin^2\psi = \frac{dn^2(ia)sn^2(\lambda t)}{1 - k^2 sn^2(ia)sn^2(\lambda t)}$$

podmínka pro pól

$$\sin^2\psi$$

tedy je

$$sn(\lambda t) = \pm\frac{1}{k \cdot sn(ia)} = \pm sn(ia \pm K')$$

takže λt je kongruentní s $\pm ia + iK'$

chování v okolí pólu:

$$\lambda t = ia + iK' + \delta$$

Rozvojem do prvního řádu získám

$$\sin^2\psi = \frac{dn^2(ia)}{2k^2 sn(ia)cn(ia)\cdot\delta}$$

Takže reziduum

$$d\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\sin^2\psi$$

Je

$$\frac{\lambda}{2i}$$

Analogicky reziduum v bodě

$$ia - iK'$$

Je rovno

$$-\frac{\lambda}{2i}$$

Podle odstavce o eliptických funkcích tedy dostávám

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{A} + \frac{\lambda}{2i}\left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left(\frac{\pi(\lambda t - ia)}{4K}\right) - \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left(\frac{\pi(\lambda t + ia)}{4K}\right) + 2\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left(\frac{ia}{4K}\right)\right)$$

a proto

$$e^{2i\varphi} = const\cdot\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi(\lambda t - ia)}{4K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi(\lambda t + ia)}{4K}\right)}\cdot e^{\frac{2id}{A}+2\lambda\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left(\frac{ia}{4K}\right)}$$

Kapitola 5
Obecné řešení Lagrangeova setrvačníku

Lagrangeův setrvačník je symetrický setrvačník, kde $A=B$ a pevný bod leží na třetí ose setrvačnosti. Řešení bude provedeno za předpokladu, že pevný bod leží pod hmotným středem ve vzdálenosti h. V opačném případě by se postupovalo analogicky.

Lagrangeova funkce v Eulerových úhlech bude mít tvar

$$L=\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}C(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2-mgh\cos\theta$$

Souřadnice φ a ψ jsou cyklické. Příslušné integrály pohybu mají tvar

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=A\dot{\varphi}\sin^2\theta+C(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta=a$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=C(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)=b$$

Modifikovaná Lagrangeova funkce bude

$$R=L-a\dot{\varphi}-b\dot{\psi}$$

$$R=\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2\frac{(a-b\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta}-\frac{b^2}{2C}-mgh\cos\theta$$

Třetí člen pravé strany je konstantní a proto jej mohu vynechat.
Úloha se zredukovala na jednorozměrný problém

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial R}{\partial\theta}=0$$

Zákon zachování energie bude znít

$$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2=-\frac{(a-b\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta}-mgh\cos\theta+E$$

Substitucí

$\cos\theta=x$
přejdu k rovnici

$$A^2\dot{x}^2=-(a-bx)^2-2Amgh(x-x^3)+2AE(1-x^2)$$

Pravá strana je polynom třetího řádu.Pro $x=-1$ je polynom záporný.Pro $x=1$je také záporný. Protože nějaké řešení musí existovat (experimentální fakt existence dětského vlčku), musí mezi $-1,1$ ležet dva kořeny. Pokud x jde do nekonečna, je polynom kladný. Mám tedy 3 kořeny

$$\cos\alpha<\cos\beta<\cosh\gamma$$

Separací přejdu k rovnici

$$\left(\frac{mgh}{2A}\right)^{\frac{1}{2}}dt=\left(4(x-\cos\alpha)(x-\cos\beta)(x-\cosh\gamma)\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

Substitucí

$$x=\frac{2A}{mgh}z+\frac{1}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cosh\gamma)=\frac{2A}{mgh}z+\frac{2AE+b^2}{6Amgh}$$

Dostanu

$$t + const = \int \left(4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)\right)^{-\frac{1}{2}} dz$$
$$e_1 = \frac{mgh}{2A}\cosh\gamma - \frac{2AE+b^2}{12A^2}$$
$$e_2 = \frac{mgh}{2A}\cos\beta - \frac{2AE+b^2}{12A^2}$$
$$e_3 = \frac{mgh}{2A}\cos\alpha - \frac{2AE+b^2}{12A^2}$$
$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$
$$e_1 > e_2 > e_3$$

Předešlý integrál je vlastně integrální formule pro Weierstrassovu funkci

$$\wp(t+\varepsilon)$$

Dostávám tedy

$$\cos\theta = \frac{2A}{mgh}\wp(t+\varepsilon) + \frac{2AE+b^2}{6Amgh}$$
$$x \in (\cos\alpha, \cos\beta) \Rightarrow \wp(t+\varepsilon) \in (e_3, e_2)$$

Tvrzení: Jediný způsob, jak zařídit, aby x zůstalo mezi $\cos\alpha$ a $\cos\beta$ je splnění podmínky

$$\varepsilon = \omega_3$$

Důkaz: Pravděpodobně je založen na tvrzení bez důkazu z odstavce o Weierstrassových funkcích.
Dostáváme tedy

$$\cos\theta = \frac{2A}{mgh}\wp(t+\varepsilon) + \frac{2AE+b^2}{6Amgh}$$

<u>Určení zbývajících úhlů:</u>

Mám rovnice

$$\dot{\varphi} = \frac{a - b\cos\theta}{A\sin^2\theta} \qquad \dot{\psi} = \frac{b}{C} - \frac{(a - b\cos\theta)\cos\theta}{A\sin^2\theta}$$

Převedení na kulový setrvačník:

$$\frac{b}{C} = \frac{b}{A} + \frac{b(A-C)}{AC}$$
$$\dot{\psi} = \frac{b(A-C)}{AC} + \frac{b - a\cos\theta}{A\sin^2\theta}$$

První člen pravé strany se stane po integraci lineárním a v dalších úvahách se jím nebudu zabývat.Nyní budu řešit vlastně úlohu o kulovém setrvačníku

$$\dot{\varphi} = \frac{a - b\cos\theta}{A\sin^2\theta} \qquad \dot{\psi} = \frac{b - a\cos\theta}{A\sin^2\theta}$$

Tyto rovnice dále upravím

$$\dot{\varphi} = \frac{a+b}{2A(\cos\theta+1)} - \frac{a-b}{2A(\cos\theta+1)}$$
$$\dot{\psi} = \frac{a+b}{2A(\cos\theta+1)} + \frac{a-b}{2A(\cos\theta-1)}$$

Dále dosadím

$$\cos\theta = \frac{2A}{mgh}\wp(t+\omega_3) + \frac{2AE+b^2}{6Amgh}$$
$$\wp(l) = \frac{mgh}{2A} - \frac{2AE+b^2}{12A^2}$$
$$\wp(k) = -\frac{mgh}{2A} - \frac{2AE+b^2}{12A^2}$$

l,k jsou vlastně hodnoty

$$t+\omega_3$$

pro

$$\theta = 0;\pi$$

Po dosazení dostávám

$$\dot{\varphi} = \frac{mgh(a+b)}{4A^2}\frac{1}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)} - \frac{mgh(a-b)}{4A^2}\frac{1}{\wp(t+\omega_3)-\wp(l)}$$
$$\dot{\psi} = \frac{mgh(a+b)}{4A^2}\frac{1}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)} + \frac{mgh(a+b)}{4A^2}\frac{1}{\wp(t+\omega_3)-\wp(l)}$$

Zpětnou substitucí

$$x = \frac{2A}{mgh}\wp(t+\omega_3) + \frac{2AE+b^2}{6Amgh}$$

do rovnice

$$A^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -(a-bx)^2 - 2Amgh(x-x^3) + 2AE(1-x^2)$$

dostanu

$$\wp'(k) = \frac{imgh(a+b)}{2A^2} \quad \wp'(l) = \frac{imgh(a-b)}{2A^2}$$

Mám tedy rovnice

$$2i\dot{\varphi} = \frac{\wp'(k)}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)} - \frac{\wp'(l)}{\wp(t+\omega_3)-\wp(l)}$$
$$2i\dot{\psi} = \frac{\wp'(k)}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)} + \frac{\wp'(l)}{\wp(t+\omega_3)-\wp(l)}$$

Funkce

$$\wp'(k)$$

Je eliptická s póly kongruentními s body

$t+\omega_3=\pm k$

a odpovídajícími rezidui ± 1.Podle tvrzení 7 odstavce o Weierstrassových funkcích platí

$$\frac{\wp'(k)}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)}=\xi(t+\omega_3-k)-\xi(t+\omega_3+k)+2\xi(k)$$

a proto

$$\int\frac{\wp'(k)dt}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)}=\log\frac{\sigma(t+\omega_3-k)}{\sigma(t+\omega_3+k)}+2\xi(k)t+const$$

Řešení rovnic pro zbývající Eulerovy úhly tedy bude

$$e^{2i(\varphi-\varphi_0)}=e^{2(\xi(k)-\xi(l))t}\frac{\sigma(t+\omega_3-k)\sigma(t+\omega_3+l)}{\sigma(t+\omega_3+k)\sigma(t+\omega_3+l)}$$

$$e^{2i(\psi-\psi_0)}=e^{2(\xi(k)+\xi(l))t}\frac{\sigma(t+\omega_3-k)\sigma(t+\omega_3-l)}{\sigma(t+\omega_3+k)\sigma(t+\omega_3+l)}$$

A to je vše o zlopověstném Lagrangeově setrvačníku.

Kapitola 6
Úvahy o integrabilitě setrvačníkových rovnic

Budu předpokládat, že osa z laboratorní soustavy je nastavena v kladném směru působící síly. V soustavě hlavních os potom sílu mohu napsat ve tvaru

$$\vec{F}=mg\left(\gamma\vec{X}+\gamma\vec{Y}+\gamma'\vec{Z}\right)$$
$$\vec{z}=\gamma\vec{X}+\gamma\vec{Y}+\gamma'\vec{Z}$$

Eulerovy rovnice potom mohu zapsat ve tvaru

$$A\dot{\Omega}_1+(C-B)\Omega_2\Omega_3=mg(y_0\gamma''-z_0\gamma')$$
$$B\dot{\Omega}_2+(A-C)\Omega_3\Omega_1=mg(z_0\gamma-x_0\gamma'')$$
$$C\dot{\Omega}_3+(B-A)\Omega_1\Omega_2=mg(x_0\gamma'-y_0\gamma)$$

Osa z laboratorní soustavy je nepohyblivá. Podle vztahů z úvodní kapitoly platí

$$\dot{\gamma}=\Omega_3\gamma'-\Omega_2\gamma''$$
$$\dot{\gamma}'=\Omega_1\gamma''-\Omega_3\gamma$$
$$\dot{\gamma}''=\Omega_2\gamma-\Omega_1\gamma'$$

Ve zbytku této práce se budu snažit najít podmínky integrability těchto šesti rovnic.
Integrály: Už teď mám několik integrálů těchto rovnic.
Zákon zachování energie:

$$A\Omega_1^2+B\Omega_2^2+C\Omega_3^2=2mgh(x_0\gamma+y_0\gamma'+z_0\gamma'')+C_1$$

Třetí složka momentu hybnosti v s:

$$A\Omega_1\gamma + B\Omega_2\gamma' + C\Omega_3\gamma'' = C_2$$

Geometrický integrál:

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

Zákon zachování energie odpovídá součtu Eulerových rovnic násobených

Ω_i

Druhý zákon dostanu součtem Eulerových rovnic násobených

γ_i

a posledních tří rovnic násobených

Ω_i

Třetí integrál odpovídá součtu druhé sady rovnic násobených

γ_i

Zamyšlení nad nezbytným počtem integrálů:

Zatím mám 3 integrály pro 6 rovnic.Tyto dvě sady rovnic mohu separovat od času a zapsat v tomto tvaru

$$dt = \frac{d\Omega_1}{P} = \frac{d\Omega_2}{Q} = \frac{d\Omega_3}{R} = \frac{d\gamma}{\Gamma} = \frac{d\gamma'}{\Gamma'} = \frac{d\gamma''}{\Gamma''}$$
$$AP = -(C-B)\Omega_2\Omega_3 + mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma')$$
$$BQ = -(A-C)\Omega_3\Omega_1 + mg(z_0\gamma - x_0\gamma'')$$
$$CR = -(B-A)\Omega_1\Omega_2 + mg(x_0\gamma' - y_0\gamma)$$
$$\Gamma = \Omega_3\gamma' - \Omega_2\gamma''$$
$$\Gamma' = \Omega_1\gamma'' - \Omega_3\gamma$$
$$\Gamma'' = \Omega_2\gamma - \Omega_1\gamma'$$

V posledních pěti rovnicích se nevyskytuje čas. Pokud je dokážu zintegrovat a napsat jejich řešení jako funkci například

Ω_1

budu řešit rovnici

$$t = \int \frac{d\Omega_1}{P} = F(\Omega_1)$$

Z fyzikálních důvodů očekávám existenci

$\Omega_1 = \Omega_1(t)$

Tedy vlastně inverzi integrálu.

To znamená, že už hledám pouze integrály pěti rovnic.

Z definice plyne

$$\frac{\partial P}{\partial \Omega_1} + \frac{\partial Q}{\partial \Omega_2} + \frac{\partial R}{\partial \Omega_3} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma} + \frac{\partial \Gamma'}{\partial \gamma'} + \frac{\partial \Gamma''}{\partial \gamma''} = 0$$

Získal jsem čtvrtý integrál. Otázka integrability se tedy zjednodušila na existenci jediného dalšího integrálu.

Metoda malého parametru:

Celý následující postup je založen na této větě z teorie diferenciálních rovnic v komplexním oboru.

Věta: Necht' mám dány dva systémy diferenciálních rovnic závislých na parametru

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1,\dots y_n,t,\alpha) \qquad \frac{dz_1}{dt} = f_1(z_1,\dots z_n,t,0)$$

$$\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(y_1,\dots y_n,t,\alpha) \qquad \frac{dz_n}{dt} = f_n(z_1,\dots z_n,t,0)$$

Pokud jsou pravé strany prvního systému analytické v prvních n proměnných na okolí $\alpha=0$ a druhý systém má holomorfní řešení v okolí nějaké dráhy L na komplexní rovině t potom i první systém má pro dostatečně malé hodnoty α holomorfní řešení podél L. Tato řešení lze rozvinout do řady

$$y_i(t) = y_i^0(t) + \alpha y_i^1(t) + \alpha^2 y_i^2(t) + \dots \qquad y_i^0(t) = z_i(t)$$

a budou nalezena v kvadraturách.

poznámka: Pravé strany obou částí systému Eulerových rovnic jsou polynomy v proměnných $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \gamma, \gamma', \gamma''$

a proto jsou analytické a konečné pro všechny konečné hodnoty těchto proměnných.

V rovnicích navíc nikde nevystupuje čas. Při posunutí v čase se tedy tvar rovnic nezmění. Nezmění se tedy ani tvar řešení. A pokud řešení mají kritický bod t při změně počátečních podmínek budou mít kritický bod $t+a$ pro libovolné a. To znamená, že řešení mají kritické body závislé na počátečních podmínkách.

Nová formulace problému: Je třeba najít případy, kdy řešení soustavy nemá kritické body závislé na počátečních podmínkách.

Případ asymetrického setrvačníku: (Momenty setrvačnosti jsou navzájem různé)

Zavedu konstanty

$$\pi = \frac{\sqrt{BC(C-B)}}{\sqrt{(C-B)(A-C)(B-A)}} \qquad \chi = \frac{\sqrt{CA(A-C)}}{\sqrt{(C-B)(A-C)(B-A)}} \qquad \rho = \frac{\sqrt{AB(B-A)}}{\sqrt{(C-B)(A-C)(B-A)}}$$

a provedu substituci

$$\Omega_1 = \pi p_1 \quad \Omega_2 = \chi q_1 \quad \Omega_3 = \rho r_1$$

Eulerovy rovnice dostanou tvar

$$\frac{dp_1}{dt} + q_1 r_1 = \frac{1}{A\pi}(y_0\gamma'' - z_0\gamma') \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \rho r_1\gamma' - \chi q_1\gamma''$$

$$\frac{dq_1}{dt} + r_1 p_1 = \frac{1}{B\chi}(z_0\gamma - x_0\gamma'') \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = \pi p_1\gamma'' - \rho r_1\gamma$$

$$\frac{dr_1}{dt} + p_1 q_1 = \frac{1}{C\rho}(x_0\gamma' - y_0\gamma) \qquad \frac{d\gamma''}{dt} = \rho q_1 - \pi p_1\gamma'$$

Další substituce:

$$p_1 = \frac{p_1'}{\alpha} \quad q_1 = \frac{q_1'}{\alpha} \quad r_1 = \frac{r_1'}{\alpha} \quad \gamma = \frac{\gamma_1}{\alpha} \quad \gamma' = \frac{\gamma_2}{\alpha} \quad \gamma'' = \frac{\gamma_3}{\alpha} \quad t = t_0 + \alpha\tau$$

Pro $\alpha=0$ bude mít první sada rovnic částečné řešení

$$p'_{10} = \frac{1}{\tau} = q'_{10} = r'_{10}$$

Druhá sada přejde na tvar

$$\frac{d\gamma_1}{d\tau} = \frac{\rho\gamma_2 - \chi\gamma_3}{\tau} \quad \frac{d\gamma_2}{d\tau} = \frac{\pi\gamma_3 - \rho\gamma_1}{\tau} \quad \frac{d\gamma_3}{d\tau} = \frac{\chi\gamma_1 - \pi\gamma_2}{\tau}$$

která má podle teorie rovnic Cauchy-Eulerova typu řešení

$\gamma_1 = \Gamma_1\tau^s \quad \gamma_2 = \Gamma_2\tau^s \quad \gamma_3 = \Gamma_3\tau^s$

dosazením dostaneme podmínku pro netriviální řešení homogenní soustavy

$$\begin{vmatrix} s & -\rho & \chi \\ \rho & s & -\pi \\ -\chi & \pi & s \end{vmatrix} = 0$$

$$s^3 + \left(\pi^2 + \rho^2 + \chi^2\right)s = 0$$

Z definice platí

$\pi^2 + \rho^2 + \chi^2 = -1$

Mám tedy tři možnosti

$s = 0 \quad s = 1 \quad s = -1$

Pokud $s=0$, dostanu

$$\frac{\Gamma_1}{\pi} = \frac{\Gamma_2}{\chi} = \frac{\Gamma_3}{\rho} \qquad \gamma_1 = \pi \quad \gamma_2 = \chi \quad \gamma_3 = \rho$$

Analogicky najdu řešení ve zbylých případech.
Řešení obecné soustavy bude mít tvar

$$p'_1 = p'_{10} + \alpha p_2 \quad q'_1 = q'_0 + \alpha q_2 \quad r'_1 = r'_{10} + \alpha r_2$$

Budu tedy řešit systém

$$\frac{dp_2}{d\tau} + \frac{q_2 + r_2}{\tau} = \frac{1}{A\pi}\left(y_0\gamma_3 - r_0\gamma_2\right)$$

$$\frac{dq_2}{d\tau} + \frac{r_2 + p_2}{\tau} = \frac{1}{B\chi}\left(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3\right)$$

$$\frac{dr_2}{d\tau} + \frac{p_2 + q_2}{\tau} = \frac{1}{C\rho}\left(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1\right)$$

Systém bez pravých stran je Cauchy-Eulerova typu.Jeho řešení opět najdu ve tvaru

$p'_2 = P\tau^s \quad q'_2 = Q\tau^s \quad r'_2 = R\tau^s$

Analogicky předchozím úvahám dojdu k podmínce

$$\begin{vmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & s \end{vmatrix} = 0$$

$$(s-1)\left(s^2 + s - 2\right) = 0$$

$$s_1 = 1 \quad s_2 = 1 \quad s_3 = 2$$

Při $s=1$ dostanu rovnici

$$P + Q + R = 0$$

Její řešení
$(P,Q,R)=[(1,-1,0),(1,0,1)]_{lin}$
Dostávám tedy

$$p_2'=\tau \quad q_2'=-\tau \quad r_2'=0$$
$$p_2'=\tau \quad q_2'=0 \quad r_2'=-\tau$$

Při s=-2 dostávám soustavu

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P\\ Q\\ R\end{pmatrix}=0$$
$$P=Q=R$$

Našel jsem řešení

$$p_2'=\frac{1}{\tau^2}=q_2'=r_2'$$

Obecné řešení najdu variací konstanty

$$(c_1'+c_2')\tau+\frac{c_3'}{\tau^2}=\frac{1}{A\pi}(y_0\gamma_3-z_0\gamma_2)$$
$$-c_1'+\frac{c_3'}{\tau^2}=\frac{1}{B\chi}(z_0\gamma_1-x_0\gamma_3)$$
$$-c_2'+\frac{c_3'}{\tau^2}=\frac{1}{C\rho}(x_0\gamma_2-y_0\gamma_1)$$

protože

$$\begin{vmatrix}\tau & 0 & \frac{1}{\tau^2}\\ -\tau & 0 & \frac{1}{\tau^2}\\ 0 & -\tau & \frac{1}{\tau^2}\end{vmatrix}=3$$

Cramerovým pravidlem dostanu

$$c_1'=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}\frac{1}{A\pi}(y_0\gamma_3-z_0\gamma_2) & \tau & \frac{1}{\tau^2}\\ \frac{1}{B\chi}(z_0\gamma_1-x_0\gamma_3) & 0 & \frac{1}{\tau^2}\\ \frac{1}{C\rho}(x_0\gamma_2-y_0\gamma_1) & -\tau & \frac{1}{\tau^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{3\tau}\begin{vmatrix}\frac{1}{A\pi}(y_0\gamma_3-z_0\gamma_2) & 1 & 1\\ \frac{1}{B\chi}(z_0\gamma_1-x_0\gamma_3) & 0 & 1\\ \frac{1}{C\rho}(x_0\gamma_2-y_0\gamma_1) & -1 & 1\end{vmatrix}$$

Ale od začátku požaduji, aby se mi nikde nevyskytovaly singularity závislé na t. Odtud tedy mám podmínku, za použití výsledku

$\gamma_1 = \pi \quad \gamma_2 = \chi \quad \gamma_3 = \rho$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{A\pi}(y_0\rho - z_0\chi) & 1 & 1 \\ \frac{1}{B\chi}(z_0\pi - x_0\rho) & 0 & 1 \\ \frac{1}{C\rho}(x_0\chi - y_0\pi) & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$0 = \frac{1}{A\pi}(y_0\rho - z_0\chi) - \frac{2}{B\chi}(z_0\pi - x_0\rho) + \frac{1}{C\rho}(x_0\chi - y_0\pi) =$$

$$= x_0\left[\frac{\chi}{C\rho} + \frac{2\rho}{B\chi}\right] + y_0\left[\frac{\rho}{A\pi} - \frac{\pi}{C\rho}\right] - z_0\left[\frac{\chi}{A\pi} + \frac{2\pi}{B\chi}\right]$$

Nyní provedu několik ošklivých úprav, které nepotřebují žádný komentář

$$\frac{\chi}{C\rho} + \frac{2\rho}{B\chi} = \frac{B\chi^2 + 2C\rho^2}{BC\chi\rho} = \frac{ABC(A-C) + 2ABC(B-A)}{ABC\sqrt{BC(A-C)(B-A)}} = \frac{2B-A-C}{\sqrt{BC(A-C)(B-A)}}$$

$$\frac{\rho}{A\pi} - \frac{\pi}{C\rho} = \frac{C\rho^2 - A\pi^2}{AC\pi\rho} = \frac{ABC(B-A) - ABC(C-B)}{ABC\sqrt{AC(C-B)(B-A)}} = \frac{2B-A-C}{\sqrt{AC(C-B)(B-A)}}$$

$$\frac{\chi}{A\pi} + \frac{2\pi}{B\chi} = \frac{B\chi^2 + 2A\pi^2}{AB\pi\chi} = \frac{ABC(A-C) + 2ABC(C-B)}{ABC\sqrt{AB(C-B)(A-C)}} = \frac{A+C-2B}{\sqrt{AB(C-B)(A-C)}}$$

Dosazením do předešlého vztahu dostávám podmínku

$$(2B-A-C)\left(x_0\sqrt{A(C-B)} + y_0\sqrt{B(A-C)} + z_0\sqrt{C(B-A)}\right) = 0$$

Z rovnic pro další konstany dostanu tyto podmínky

$$(2C-B-A)\left(x_0\sqrt{A(C-B)} + y_0\sqrt{B(A-C)} + z_0\sqrt{C(B-A)}\right) = 0$$

$$(2A-B-C)\left(x_0\sqrt{A(C-B)} + y_0\sqrt{B(A-C)} + z_0\sqrt{C(B-A)}\right) = 0$$

Protože předpoládám, že A, B, C jsou navzájem různé, mohu předpokládat i $A>B>C$. Jediný způsob, jak splnit všechny tři podmínky bude po rozdělení na reálnou a imaginární část vypadat takto

$$x_0\sqrt{A(B-C)} + z_0\sqrt{C(A-B)} = 0$$

$$y_0 = 0$$

Tento případ nazvu Appelrotovou úlohou. V tuto chvíli se zdá být kandidátem na integrabilní setrvačník.Pokud dále budu předpokládat

$x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Eulerovy rovnice vůbec nebudou záviset na parametru α a v tom případě bych vlastně úlohu skončil hned po první části.V tomto případě je tedy také podezření na integrabilní setrvačník. Úloha se nazývá Euler-Poissonova.

Tímto byl rozebrán problém integrability asymetrického setrvačníku.

Symetrický setrvačník: Budu předpokládat, že $A=B$. Zavedu parametr $\Lambda = 1 - \frac{C}{A}$

Dále budu předpokládat, že platí $\frac{mg}{A}=1$. Pokud to nebude pravda, bude se mi pravá strana rovnic normovat příslušným koeficientem a s ní i řešení, ale na jejich existenci to nebude mít vliv. Dále zavedu parametr $n=\frac{mg}{C}$. Potom bude platit $\frac{1}{n}=1-\Lambda$

Eulerovy rovnice budou mít následující tvar

$$\frac{d\Omega_1}{dt}-\Lambda\Omega_2\Omega_3=-z_0\gamma' \qquad \frac{d\gamma}{dt}=\Omega_3\gamma'-\Omega_2\gamma''$$
$$\frac{d\Omega_2}{dt}+\Lambda\Omega_3\Omega_1=z_0\gamma-x_0\gamma'' \qquad \frac{d\gamma'}{dt}=\Omega_1\gamma''-\Omega_3\gamma$$
$$\frac{d\Omega_3}{dt}=nx_0\gamma' \qquad \frac{d\gamma''}{dt}=\Omega_2\gamma-\Omega_1\gamma'$$

Pokud $\frac{mg}{A}\neq 1$, budou pravé strany první sady rovnic ještě normovány příslušným nenulovým koeficientem, který ale v dalším výkladu zanedbám, protože nebude hrát žádnou roli.

Provedu substituci

$\Omega_1=\alpha p_1 \quad \Omega_2=q_1 \quad \Omega_3=\alpha r_1 \quad \gamma=\gamma_1 \quad \gamma'=\alpha\gamma_1' \quad \gamma''=\gamma_1''$

Eulerovy rovnice nabudou tvar

$$\frac{dp_1}{dt}-\Lambda q_1r_1=-z_0\gamma_1' \qquad \frac{d\gamma_1}{dt}=-q_1\gamma''+\alpha^2r_1\gamma_1'$$
$$\frac{dq_1}{dt}=z_0\gamma_1-x_0\gamma_1'-\alpha^2r_1p_1 \qquad \frac{d\gamma_1'}{dt}=p_1\gamma_1''-r_1\gamma_1$$
$$\frac{dr_1}{dt}=nx_0\gamma_1 \qquad \frac{d\gamma_1''}{dt}=q_1\gamma_1-\alpha^2p_1\gamma_1'$$

Nejdříve zase budu řešit soustavu pro *$\alpha=0$*. Její částečné řešení bude

$p_1=r_1=\gamma_1'=0$

Zbylá částečná řešení najdu ve tvaru

$$q_1=\frac{Q}{t} \qquad \gamma_1=\frac{\Gamma}{t^2} \qquad \gamma_1''=\frac{\Gamma''}{t^2}$$

Dosazením získám rovnice

$$-Q=z_0\Gamma-x_0\Gamma'' \quad -2\Gamma=-Q\Gamma'' \quad -2\Gamma''=Q\Gamma$$

Z nich potom

$$Q^2=-4 \qquad Q=2i$$
$$\Gamma=\frac{-2i}{z_0+ix_0} \quad \Gamma''=\frac{-2}{z_0+ix_0}$$

Mám tedy řešení

$$p_1=r_1=\gamma_1'=0 \quad q_1=\frac{2i}{t} \quad \gamma_1=\frac{-2i}{z_0+ix_0}\frac{1}{t^2} \qquad \gamma_1''=\frac{-2}{z_0+ix_0}\frac{1}{t^2}$$

Řešení Eulerových rovnic tedy bude mít tvar

$$p_1=\alpha^2p_2 \qquad q_1=\frac{2i}{t}+\alpha^2p_3 \qquad r_1=\alpha^2r_2$$
$$\gamma_1=\frac{-2i}{z_0+ix_0}\frac{1}{t^2}+\alpha^2\gamma_2 \qquad \gamma_1'=\alpha^2\gamma_2' \qquad \gamma_1''=\frac{-2}{z_0+ix_0}\frac{1}{t^2}+\alpha^2\gamma_2''$$

Dosazením do Eulerových rovnic dostanu

$$\frac{dp_2}{dt} - \frac{2i\Lambda}{t} r_2 + z_0 \gamma_2'' = 0$$

$$\frac{dr_2}{dt} - nx_0 \gamma_2' = 0$$

$$\frac{d\gamma_2'}{dt} + \frac{2}{z_0 + ix_0} \frac{1}{t^2} p_2 - \frac{2i}{z_0 + ix_0} \frac{1}{t^2} r_2 = 0$$

Po substituci

$$\gamma_2' = \frac{G}{t}$$

získám opět Cauchy-Eulerovy rovnice s řešením

$p_2 = Pt^s \quad r_2 = Rt^s \quad G = Ht^s$

Dosazením dostanu opět podmínku

$$\begin{vmatrix} s & -2i\Lambda & z_0 \\ 0 & s & -nx_0 \\ \dfrac{2}{z_0 + ix_0} & \dfrac{-2i}{z_0 + ix_0} & s-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$s^3 - s^2 - 2s \frac{inx_0 + z_0}{z_0 + ix_0} + 4i \frac{\Lambda n x_0}{z_0 + ix_0} = 0$$

Protože

$\Lambda n = n - 1$

mohu předešlý výraz zapsat takto

$$(s-2)\left(s^2 + s - 2\frac{(x_0 + iz_0)(n-1)x_0}{x_0^2 + z_0^2} \right) = 0$$

Pokud by tento polynom měl komplexní kořeny, Cauchy –Eulerova řešení by měla kritický bod v $t=0$. Substitucí $\tau = t-a$ dostanu kritický bod závislý na počátečních podmínkách.
Důsledek: Požaduji splnění podmínky

$$(n-1)x_0 z_0 = 0$$

n=1: Potom $\Lambda=0$ a tedy $A=C$.Dostávám takzvaný případ kinetické symetrie $A=B=C$.

Poznámka: Díky symetrii $A=B$ mohu hlavní osy volit bez újmy na obecnosti tak, aby

$$y_0 = 0$$

Další případ:
$x_0 = y_0 = 0 \quad A = B$
A to je Lagrangeův setrvačník.

Poslední případ: Pokud

$z_0 = 0$

polynom přejde na tvar

$$s^2 + s - 2(n-1) = 0$$

$$n = 1 + \frac{s(s+1)}{2}$$

$$A = B \quad y_0 = z_0 = 0 \quad n\ldots celé$$

Aby Cauchy-Eulerova řešení byla jednoznačnými funkcemi, musí být s celé. Proto musí být celé i n. Napíšu ještě jednou soustavu Eulerových rovnic pro tento případ

$$\frac{d\Omega_1}{dt} - \Lambda\Omega_2\Omega_3 = 0 \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \Omega_3\gamma' - \Omega_2\gamma''$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} - \Lambda\Omega_3\Omega_1 = -x_0\gamma'' \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = \Omega_1\gamma'' - \Omega_3\gamma$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = nx_0\gamma' \qquad \frac{d\gamma''}{dt} = \Omega_2\gamma - \Omega_1\gamma'$$

Substitucí

$$\Omega_1 = \alpha p_1 \quad \Omega_2 = \alpha q_1 \quad \gamma'' = \alpha\gamma_1''$$

dostanu částečná řešení

$$p_1 = q_1 = \gamma_1'' = 0$$

a pro $\alpha=0$ řeším systém

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = nx_0\gamma' \quad \frac{d\gamma}{dt} = \Omega_3\gamma' \quad \frac{d\gamma'}{dt} = -\Omega_3\gamma$$

Jeho částečné řešení najdu ve tvaru

$$\Omega_3 = \frac{R}{t} \quad \gamma = \frac{\Gamma}{t^2} \quad \gamma' = \frac{\Gamma'}{t^2}$$

Dosazením najdu

$$R = 2i \quad \Gamma = -\frac{2}{nx_0} \quad \Gamma' = -\frac{2i}{nx_0}$$

Analogicky k postupu v předešlých úvahách

$$\Omega_1 = \alpha^2 p_2 \qquad \gamma = -\frac{2}{nx_0}\frac{1}{t^2} + \alpha^2\gamma_2$$

$$\Omega_2 = \alpha^2 q_2 \qquad \gamma' = -\frac{2i}{nx_0}\frac{1}{t^2} + \alpha^2\gamma_2'$$

$$\Omega_3 = \frac{2i}{t} + \alpha^2 r_2 \qquad \gamma'' = \alpha^2\gamma_2''$$

Dosazením do Eulerových rovnic dostanu

$$\frac{dp_2}{dt} - \Lambda q_2\frac{2i}{t} = 0 \quad \frac{dq_2}{dt} + \Lambda p_2\frac{2i}{t} + x_0\gamma_2'' = 0 \quad \frac{d\gamma''}{dt} + \frac{2}{nx_0}\frac{1}{t^2}q_2 - \frac{2i}{nx_0}\frac{1}{t^2}p_2 = 0$$

Substitucí

$$\gamma_2'' = \frac{G}{t}$$

dostanu Cauchy-Eulerovy rovnice s řešením

$p_2 = Pt^s \quad q_2 = Qt^s \quad G = Ht^s$

Jako obvykle dostanu podmínku

$$\begin{vmatrix} s & -2i\Lambda & 0 \\ 2i\Lambda & s & x_0 \\ -\frac{2i}{nx_0} & \frac{2}{nx_0} & s-1 \end{vmatrix} = 0$$

díky

$$\frac{1}{n} = 1 - \Lambda$$

dostanu

$$(s-2)\left(s^2 + s - (2\Lambda - 1)2\Lambda\right) = 0$$

s řešeními

$$2, -2\Lambda, 2\Lambda - 1$$

a tedy

$$n = \frac{2}{s+2} \quad n = \frac{2}{1-s}$$

Z definice platí:

$$n = \frac{mg}{C} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} 1 > s \geq -1 \\ 0 \geq s > -2 \end{matrix}$$

Diskuse těchto případů:

$$s = 0 \Rightarrow n = 1 \vee n = 2 \Rightarrow \Lambda = 0 \vee \frac{1}{2}$$

$$s = -1 \Rightarrow n = 2 \vee n = 1 \Rightarrow \Lambda = \frac{1}{2} \vee 0$$

Závěr:

$\Lambda = 0 \Rightarrow A = B = C$

Dostávám opět případ kinetické symetrie.

$\Lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow A = B = 2C \wedge y_0 = z_0 = 0$

A to je úloha Kovalevské.

Vyloučení Appelrotovy úlohy: Vrátím se ještě jednou k úloze

$$x_0\sqrt{A(B-C)}+z_0\sqrt{C(A-B)}=0 \qquad y_0=0$$

Po substituci

$$\Omega_1=\pi p \quad \Omega_2=\chi q \quad \Omega_3=\rho r$$

kde π,χ,ρ byly definovány v odstavci o asymetrickém setrvačníku, dostanu Eulerovy rovnice ve tvaru

$$\frac{dp}{dt}+qr=-\frac{1}{A\pi}z_0\gamma' \qquad \frac{d\gamma}{dt}=\rho r\gamma'-\chi q\gamma''$$
$$\frac{dq}{dt}+rp=\frac{1}{B\chi}\left(z_0\gamma-x_0\gamma''\right) \qquad \frac{d\gamma'}{dt}=\pi p\gamma''-\rho r\gamma$$
$$\frac{dr}{dt}+pq=\frac{1}{C\rho}x_0\gamma' \qquad \frac{d\gamma''}{dt}=\chi q\gamma-\pi p\gamma'$$

Ze zadání úlohy platí

$$\frac{z_0}{A\pi}+\frac{x_0}{C\rho}=0$$

Po substituci

$$p=\alpha p_1 \quad r=\alpha r_1 \quad \gamma'=\alpha\gamma_1'$$

při $\alpha=0$ dostanu částečná řešení

$$p_1=r_1=\gamma_1'=0$$

Částečná řešení zbylých rovnic najdu ve tvaru

$$q=\frac{Q}{t} \quad \gamma=\frac{\Gamma}{t^2} \quad \gamma''=\frac{\Gamma''}{t^2}$$

Dosazením vypočtu

$$Q=\frac{2i}{\chi} \quad \Gamma=\frac{-2Bi}{z_0+ix_0} \quad \Gamma''=\frac{2B}{z_0+ix_0}$$

Celkově tedy dostávám

$$p=\alpha p_2 \qquad q=\frac{2i}{\chi}\frac{1}{t}+\alpha q_2 \qquad r=\alpha r_2$$
$$\gamma=\frac{2Bi}{z_0+ix_0}\frac{1}{t^2}+\alpha\gamma_2 \qquad \gamma'=\alpha\gamma_2' \qquad \gamma''=\frac{2B}{z_0+ix_0}\frac{1}{t^2}+\alpha\gamma_2''$$

Substitucí

$$\gamma_1'=\frac{G}{t}$$

převedu část soustavy na rovnice Cauchy-Eulerova typu s řešeními

$$p_2=Pt^s \quad r_2=Rt^s \quad G=Ht^s$$

a dosazením dostanu opět podmínku

$$\begin{vmatrix} s & \frac{2i}{\chi} & \frac{z_0}{A\pi} \\ \frac{2i}{\chi} & s & -\frac{x_0}{C\rho} \\ -\frac{2B\pi}{z_0+ix_0} & -\frac{2Bi\rho}{z_0+ix_0} & s-1 \end{vmatrix}=0$$

tedy

$$\begin{vmatrix} s & \dfrac{2i}{\chi} & \dfrac{z_0}{A\pi} \\ \dfrac{2i}{\chi} & s & \dfrac{z_0}{A\pi} \\ -\dfrac{2B\pi}{z_0+ix_0} & -\dfrac{2Bi\rho}{z_0+ix_0} & s-1 \end{vmatrix} = 0$$

Tento polynom má za kořen

$$s = \frac{2i}{\chi}$$

To je číslo čistě imaginární a proto integrály nejsou jednoznačnými funkcemi. Appelrottova úloha tedy není integrabilní.

Čtvrtý integrál úlohy Kovalevské:

Dosazením do Eulerových rovnic se lze přesvědčit o tom, že

$$(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 - c\gamma)^2 + (2\Omega_1\Omega_2 - c\gamma')^2 = k^2$$

$$c = \frac{mgx_0}{C}$$

je integrál. Jeho nalezení je následující. Při použití konstanty c dostane první sada Eulerových rovnic následující tvar

$$2\frac{d\Omega_1}{dt} - \Omega_2\Omega_3 = 0$$

$$2\frac{d\Omega_2}{dt} + \Omega_3\Omega_1 = -c\gamma''$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = c\gamma'$$

odtud dostanu

$$2\frac{d(\Omega_1 + i\Omega_2)}{dt} = -i\Omega_3(\Omega_1 + i\Omega_2) + ci\gamma''$$

Z druhé sady plyne

$$\frac{d(\gamma + i\gamma')}{dt} = -i\Omega_3(\gamma + i\gamma') + i\gamma''(\Omega_1 + i\Omega_2)$$

Vyloučením členu γ'' z rovnic dostanu

$$\frac{d\left((\Omega_1 + i\Omega_2)^2 - c(\gamma + i\gamma')\right)}{dt} = -i\Omega_3\left((\Omega_1 + i\Omega_2)^2 - c(\gamma + i\gamma')\right)$$

tedy

$$\frac{d}{dt}\ln\left((\Omega_1 + i\Omega_2) - c(\gamma + i\gamma')\right) = -\Omega_3 i$$

transformací $i \to -i$ dostanu

$$\frac{d}{dt}\ln\left((\Omega_1 - i\Omega_2) - c(\gamma - i\gamma')\right) = \Omega_3 i$$

a tedy

$$\left((\Omega_1 + i\Omega_2)^2 - c(\gamma + i\gamma')\right)\left((\Omega_1 - i\Omega_2)^2 - c(\gamma - i\gamma')\right) = k^2$$

odtud dostávám integrál

$$\left(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 - c\gamma\right)^2 + \left(2\Omega_1\Omega_2 - c\gamma'\right)^2 = k^2$$

Závěr

Úloha Euler-Poissona je částí úlohy o volném setrvačníku a byla úplně vyřešena v kapitole 4. Případ kinetické symetrie je součástí Lagrangeovy úlohy. Ta byla obecně vyřešena v páté kapitole. V těchto případech mám obecné řešení už přímo hotové a není tedy třeba hledat čtvrtý integrál. V úloze Kovalevské byl čtvrtý integrál nalezen a je tedy také integrabilní. Metoda malého parametru tedy odhaluje tyto integrabilní případy setrvačníků:

1. Euler-Poissonův setrvačník

   $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

2. Lagrangeův setrvačník

   $A = B \qquad x_0 = y_0 = 0$

3. Úloha Kovalavské

   $A = B = 2C \qquad y_0 = z_0 = 0$

~~**Poznámka na závěr:** Je třeba si uvědomit, že věta, na které je metoda malého parametru založena má charakter postačující, nikoli nutné podmínky. Stále tedy existuje možnost nalézt další integrabilní případy.~~

Tohle je slabost: Je třeba si uvědomit, že jsme pokryli všechny případy.
kdyby nebyly [illegible] rovnice [illegible]
Painlevého vlastnost – viz doplnění [illegible].
! Neexistuje další integrabilní případ se splněnou P-vlastností.

P-vlastnost: obecné řešení systému dif. rovnic nemá pohyblivé větvící body (kritické singularity)
větvící body: řešením rce je fce v „komplexním smyslu" – vícehodnotová fce (třeba odmocnina)
→ bod, kde se mění číslo „značení" fce = větvící bod (pro $\sqrt{z}$ ⇒ 0)

? proč vadí pohyblivé (na poč. podmínkách závislé větvící) body? ⇒ právě v nich může „přeskočit" z jedné trajektorie na druhou a nedokáži předpovědět, po které pojede dál
⇒ ztráta deterministickosti ⇒ neintegrabilní chování
? Co je to integrabilita? – nejuspokojivější definice ve smyslu chování, ne algebraického řešení: je P-vlastnost.

Seznam použité literatury:

1. Arnold: Analytical methods of classical mechanics (ruský překlad)
   Podle této knihy jsem vypracoval úvodní kapitolu.
2. E. T. Whittaker, G. N. Watson: A course of modern analyses
   1952,
   Odtud jsem napsal kapitolu o eliptických funkcích.
3. E. T. Whittaker: A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies
   1964, Oxford University Press
   Z této knihy jsem opsal řešení volného a Lagrangeova setrvačníku.
4. V. V. Golubjev: Lekcii po itěgrirovaniju uravněnij dviženija t'aželovo tvěrdovo těla okolo něpodvižnoj točki ; 1953, Gostěchizdat
   Tato kniha je celá o integrabilitě setrvačníků, ale bohužel jsem ji sehnal příliš pozdě.To, co jsem z ní pochopil jsem napsal do poslední kapitoly.

Prohlašuji, že jsem k této práci nepoužil žádnou literaturu, kromě výše uvedené v seznamu.

Václav Kavka