

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

# Provázání v optických sítích

Jaroslav Novotný

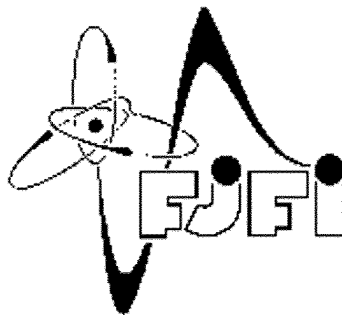
Diplomová práce

Leden 2001

Vedoucí diplomové práce:

Doc. Ing. Igor Jex, DrSc.

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



# Obsah

<b>Seznam symbolů</b>	<b>2</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2 Operátor hustoty</b>	<b>5</b>
2.1 Definice operátoru hustoty a jeho vlastnosti . . . . .	5
2.1.1 Operátor hustoty z pohledu funkcionální analýzy . . . . .	6
2.1.2 Popis čistých a smíšených stavů v kvantové fyzice . . . . .	7
2.2 Časový vývoj smíšeného stavu . . . . .	8
2.2.1 Operátor časového vývoje . . . . .	8
2.2.2 Liouvilleova rovnice . . . . .	9
2.3 Vázané systémy . . . . .	11
2.3.1 Neseparabilitnost vzájemně působících kvantových systémů . . .	11
2.3.2 Operátor hustoty složené soustavy a podsystemu . . . . .	12
2.4 Entropie v kvantové teorii . . . . .	13
<b>3 Korelace a provázání</b>	<b>17</b>
3.1 Provázání druhého řádu . . . . .	19
3.1.1 Index korelace indukovaný kvantovou entropií . . . . .	20
3.1.2 Míra provázání indukovaná Peres-Horodeckiho kritériem . . . .	22
3.1.3 Srovnání měř provázání na konkrétních příkladech . . . . .	24
3.2 Provázání vyšších řádů . . . . .	35
3.2.1 Schlienz - Mahlerův popis provázání . . . . .	35
3.2.2 Míra provázání . . . . .	40
3.2.3 Aplikace měř provázání na konkrétní příklady . . . . .	47
<b>4 Závěr</b>	<b>52</b>
<b>Poděkování</b>	<b>53</b>
<b>Literatura</b>	<b>55</b>

## Seznam symbolů

$a^*$	= číslo komplexně sdružené k číslu $a$
$\hat{A}$	= operátor nebo matice $A$
$\hat{A}^T$	= operátor transponovaný k operátoru $\hat{A}$
$\hat{A}^\dagger$	= sdružený operátor k operátoru $\hat{A}$
$\langle \hat{Q} \rangle$	= střední hodnota operátoru $\hat{Q}$
$Tr_a(\hat{Q})$	= stopa operátoru $\hat{Q}$ přes systém $a$
$\langle \dots, \dots \rangle$	= skalární součin
$ \psi\rangle$	= stavový vektor
$   \psi\rangle  $	= norma vektoru $ \psi\rangle$
$\hat{1}$	= jednotkový operátor
$\hat{0}$	= nulový operátor
$[, ]$	= komutační závorka
$\hat{H}$	= hamiltonián soustavy
$\hat{H}_I$	= interakční hamiltonián
$\hat{U}(t)$	= operátor časového vývoje
$\hat{a}_i$	= anihilační operátor $i$ -tého modu
$\hat{a}_i^\dagger$	= kreační operátor $i$ -tého modu
$\hat{n}_i$	= operátor počtu částic v $i$ -tém modu
$\hat{\rho}$	= operátor hustoty
$\hat{\sigma}$	= parciální transpozice operátoru hustoty
$\hat{\rho}_u$	= redukovaný operátor hustoty podsystemu $u$
$\hat{\rho}_{pure}$	= operátor hustoty čistého stavu
$i$	= komplexní jednotka
$\hat{E}_\psi$	= projektor na vektor $ \psi\rangle$
$\hbar$	= Planckova konstanta
$k_B$	= Boltzmanova konstanta
$\omega_i$	= parametr sítě
$G_{i,j}$	= parametr sítě
$\hat{\rho}_{i,j}$	= maticové elementy operátoru hustoty
$\alpha_i$	= amplituda koherentního stavu v $i$ -tém kanálu
$Q_a$	= informační obsah systému $a$
$S_N$	= von Neumannova entropie systému $a$
$S_{lin}$	= linearizovaná entropie
$E_N$	= negativní míra provázání
$E_S$	= součtová míra provázání
$E_L$	= logaritmická míra provázání
$I_c$	= index korelace
$\lambda$	= vektor koherence
$K_{ij}$	= korelační tenzor druhého řádu
$M_{ij}$	= metrický tenzor druhého řádu

# Kapitola 1

## Úvod

V současné době se intenzivně zkoumají hranice a možnosti kvantové teorie. Motivace pochází z různých oblastí fyziky. Jednou z těchto problematik je kvantový popis korelovaných stavů a její podmnožiny provázaných stavů dvou a více podsystémů. V klasické fyzice je otázka korelací podsystémů dostatečně dobře popsána, zatímco v kvantovém případě se situace stává podstatně složitější. Korelované stavy v kvantové fyzice mají vlastnosti, které leží mimo oblast klasické fyziky, a proto je často těžké jim intuitivně porozumět. Příkladem je slavný paradox Einsteina, Podolského a Rosena (viz [12]). Původně byl autory považován za důkaz neúplnosti kvantové mechaniky pro popis přírody. Později po formulování a experimentálním ověření Bellových nerovností (viz [13]) se ukázalo, že tento nelokální charakter fyzikálních zákonů a tedy i korelací není pouze důsledek kvantového popisu ale experimentálně potvrzený fakt.

Kromě studia těchto fundamentálních vlastností kvantové fyziky roste v současné době zájem o aplikace kvantových korelací. Mezi nejvýznamější a zároveň experimentálně ověřené patří kvantová kryptografie a teleportace (viz [14]) a dále celá oblast týkající se kvantových počítačů, kvantových kódů. S rostoucím významem korelací se potřeba jeho kvantifikace a kvalifikace stává stále naléhavější. V třetí kapitole se budeme věnovat popisu korelací a provázání druhého a vyššího řádu. V případě systému složeného z dvou podsystémů byli některé popisy již navrženy. V následujících kapitolách provedu podrobnější diskuzi výhod a nevýhod, které sebou tyto popisy přinášejí. U systému složeného z více než dvou podsystémů (vícečásticový systém) je nalezení vhodných nástrojů pro studium korelací vyšších řádů obtížné, a proto se budu v této práci soustředit na kvantifikaci podmnožiny korelovaných stavů - provázané stavy.

Pro studium složených systémů budu využívat formalismu operátoru hustoty. Poměrně jednoduchou cestou nám dovoluje rozšířit studium systémů v čistém stavu (stavy popsané paprskem z Hilbertova prostoru) o systémy v smíšeném stavu. Jeho výhodou je snadný popis podsystémů pomocí redukovaných operátorů hustoty. Umožňuje nám definovat pojmy nezbytné pro studium různých typů korelace včetně provázání a následně kvantifikovat korelované stavy. Vlastnosti operátoru hustoty, časový vývoj, popis složených soustav a podsystémů pomocí operátoru hustoty je

proveden v druhé kapitole. Na základě vlastností operátoru hustoty definujeme v druhé kapitole pojem entropie a provedeme rozbor jejích vlastností. V třetí kapitole se budeme věnovat popisu korelací a provázání druhého a vyššího řádu. Jednotlivé popisy aplikujeme na jednoduché fyzikální situace a na dva typy optických sítí, které nám umožňují generovat složitější fyzikální stavy.

# Kapitola 2

## Operátor hustoty

### 2.1 Definice operátoru hustoty a jeho vlastnosti

Existují dva závažné důvody, proč je nutné zavést do popisu fyzikálních situací operátor hustoty. První z nich je potřeba popisu všech fyzikálních situací. Chceme-li studovat podsystemy soustavy, stává se operátor hustoty, jak v dalších částech této práce uvidíme, elegantním nástrojem pro popis soustav a jejich podsystemů. Druhým důvodem je skutečnost, že předpovědi výsledků experimentů v kvantové fyzice jsou pravděpodobnostního charakteru. Vezměme například svazek elektronů prolétávajících Stern-Gerlachovým přístrojem. Z pokusu vyplývá, že nelze dopředu předpovědět, kterým z kanálů vybraný elektron vylítne. Víme jen, že pravděpodobnost obou výsledků je  $\frac{1}{2}$ . Průlet elektronu Stern-Gerlachovým přístrojem je vlastně měření, které přinutí daný elektron projít jedním z dvou kanálů (možných hodnot) pozorovatelné spinu. Do té doby, než byl přinucen změnit svůj stav do jedné z projekcí spinu, však byl v tomto smyslu v smíšeném stavu. Můžeme jen říci, že pravděpodobnost, že při měření spinu shledáme projekci spinu do z-tové osy kladnou nebo zápornou je v obou případech  $\frac{1}{2}$ . Takový stav již nelze popsat paprskem z Hilbertova prostoru. To nás vede k zavedení "zobecněného" popisu stavu pomocí operátoru hustoty, který pro tento experiment má tvar:  $\hat{\rho} = \frac{1}{2}\hat{E}_1 + \frac{1}{2}\hat{E}_2$ , kde  $\hat{E}_1$  a  $\hat{E}_2$  jsou projektory na jednodimenzionální podprostory přiřazené vlastním stavům operátoru spinu.

Označíme-li  $w_n$  pravděpodobnost, s kterou nalezneme danou soustavu ve stavu  $\psi_n$ , přiřadíme této soustavě analogicky jako v případě spinu operátor hustoty operátor hustoty ve tvaru

$$\hat{\rho} = \sum_n w_n \hat{E}_n, \quad (2.1)$$

( kde  $w_i$  je pravděpodobnost, že vybraný systém je ve stavu  $\psi_i$  a  $\hat{E}_i$  je projektor na paprsek určený tímto stavem ). Je třeba si uvědomit, že smíšeným stavem nazýváme případ, kdy ve statistické směsi jsou zastoupeny stavy s danou pravděpodobností a tedy nejde o superpozici stavů.

Výhody takto definovaného operátoru hustoty vysvětlím v kapitole 2.1.2, nyní se budu věnovat matematickým vlastnostem operátoru (2.1).

### 2.1.1 Operátor hustoty z pohledu funkcionální analýzy

Operátor určený vztahem (2.1) je omezený a pro jeho normu platí

$$\|\hat{\rho}\| = 1. \quad (2.2)$$

Rovněž je zřejmé, že operátor (2.1) je hermitovský s pozitivním číselným oborem. Přímo z definice platí

$$\sum_n \|\hat{\rho}\psi_n\|^2 = \sum_n w_n^2 < \sum_n w_n = 1 \quad (2.3)$$

(kde  $\psi_n$  je libovolná ortonormální báze)

Odtud plyne, že operátor (2.1) je Hilbert-Schmidtův a tedy patří mezi kompaktní operátory. Kompaktnost a uvedená omezenost nám zaručuje následující vlastnosti spektra:

- každý nenulový bod spektra je vlastní hodnota
- každá nenulová vlastní hodnota má konečnou násobnost
- spektrum má nejvýše jeden hromadný bod  $\lambda = 0$
- množina vlastních hodnot je nejvýše spočetná.
- vlastní hodnoty spektra náleží do intervalu  $< 0, 1 >$ .

**Poznámka:** Popisuje-li operátor hustoty čistý stav má pouze vlastní hodnotu 0 a 1.

Z kompaktnosti a hermitovosti nám plyne ještě jiné závažné tvrzení:  $\hat{\rho}$  má čisté bodové spektrum (Věta:Hilbert-Schmidt). Odtud je zřejmé, že operátor (2.1) lze vždy diagonalizovat.

Vzhledem k tomu, že  $Tr\hat{\rho} = \sum_j w_j = 1$ , lze operátor hustoty ztotožnit se statistickým operátorem. Množina všech operátorů hustoty tvoří konvexní podmnožinu jaderných operátorů.

Na závěr této části uvedu dvě tvrzení týkající se vlastností operátoru hustoty vzhledem k operaci stopa operátoru: První z nich zní

$$Tr(\hat{\rho}^2) \leq (Tr\hat{\rho})^2, \quad (2.4)$$

příčemž rovnost nastává  $\Leftrightarrow Tr\hat{\rho}^2 = Tr\hat{\rho} \Leftrightarrow \hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \Leftrightarrow \hat{\rho}$  je projektor (kde  $\hat{\rho}$  je statistický operátor).

Tvrzení plyne z faktu  $\sum_n w_n^2 \leq \sum_n w_n$ , příčemž rovnost nastane  $\Leftrightarrow w_j = 1$  pro právě jedno  $j$ .

Druhé tvrzení říká, že libovolné dva statistické operátory  $\hat{\rho}_1$  a  $\hat{\rho}_2$  splňují nerovnost

$$0 \leq Tr\{\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2\} \leq 1. \quad (2.5)$$

Podrobné studium operátorů v kvantové fyzice je podán v knize (viz [10]).

## 2.1.2 Popis čistých a smíšených stavů v kvantové fyzice

Pod pojmem smíšený stav chápeme soustavu obsahující více stejných systémů v různém stavu a pro popis smíšeného stavu jsme zvolili operátor hustoty (2.1). Z tohoto pohledu lze čistý stav považovat za limitní případ smíšeného stavu-tedy soustavu obsahující systémy pouze v jediném stavu. Operátor hustoty pro čistý stav má tedy tvar

$$\hat{\rho}_{pure} = \hat{E}_\psi, \quad (2.6)$$

kde  $\hat{E}_\psi$  je jednodimenzionální projektor na paprsek charakterizující čistý stav.

Uvažujme nyní soustavu obsahující systémy ve stavech  $\{\psi_n\}$ . Operátor hustoty pro tuto soustavu je

$$\hat{\rho} = \sum_n w_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|. \quad (2.7)$$

Zvolme nyní v Hilbertově prostoru ortonormální bázi  $\{\phi_n\}$ . Z principu superpozice plyne

$$|\psi_n\rangle = \sum_m a_m^{(n)} |\phi_m\rangle, \quad (2.8)$$

$$\langle\psi_n| = \sum_m a_m^{(n)*} \langle\phi_m|. \quad (2.9)$$

Tvar operátoru (2.1) lze tedy psát ve tvaru

$$\hat{\rho} = \sum_{nm} w_n a_m^{(n)} a_m^{(n)*} |\phi_m\rangle\langle\phi_m|. \quad (2.10)$$

Pro maticové elementy tedy platí

$$\rho_{ij} = \langle\phi_i|\hat{\rho}|\phi_j\rangle = \sum_n w_n a_i^{(n)} a_j^{(n)*}. \quad (2.11)$$

Pravděpodobnost, že soustavu popsanou stavem  $|\psi_n\rangle$  nalezneme ve stavu  $|\phi_n\rangle$ , je  $|a_n^n|^2$ , a pravděpodobnost, že při měření nalezneme soustavu popsanou operátorem (2.1) ve stavu  $|\phi_n\rangle$ , je

$$w = \rho_{nn} = \sum_n w_n |a_n^n|^2. \quad (2.12)$$

Z výrazu (2.12) vidíme, že

$$\rho_{nn} \geq 0 \quad (2.13)$$

Výsledek lze zobecnit následujícím způsobem:

Pravděpodobnost, že soustavu popsanou operátorem (2.7) nalezneme ve vybraném stavu  $|\psi\rangle$ , je rovna

$$w(\psi) = \langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle, \quad (2.14)$$

kde  $\|\psi\| = 1$ .

Toto tvrzení plyne z faktu, že

$$w(\psi) = \sum_n w_n |\langle\psi_n|\psi\rangle|^2. \quad (2.15)$$



Odtud vidíme, že popis smíšeného stavu, tak jak jsme jej zavedli v kapitole 2.1, nám umožňuje jednoduchým způsobem určit pravděpodobnost nalezení soustavy v daném stavu. Obdobnou úlohu hraje operátor hustoty při výpočtu střední hodnoty libovolné pozorovatelné  $\hat{Q}$  na soustavě popsané operátorem (2.7):

$$\langle \hat{Q} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{Q}), \quad (2.16)$$

(kde  $\hat{\rho}$  je normována k 1, tedy  $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$ . V opačném případě nabývá výraz pro střední hodnotu operátoru  $\hat{Q}$  tvaru  $\langle \hat{Q} \rangle = \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{Q})}{\text{Tr}\hat{\rho}}$ .) Důkaz tohoto tvrzení plyne z následující rovnosti

$$\begin{aligned} \langle \hat{Q} \rangle &= \sum_{mm'} \sum_n w_n a_m^{(n)} a_m^{(n)\dagger} \langle \psi_m | \hat{Q} | \psi_{m'} \rangle = \\ &= \sum_{mm'} \langle \psi_{m'} | \hat{\rho} | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{Q} | \psi_{m'} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{Q}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Výrazy (2.14) a (2.16) jsou důležitými výsledky, neboť z nich plyne, že operátor hustoty obsahuje veškerou fyzikální informaci obsaženou v soustavě. Tento fakt nám umožní v příštích kapitolách definovat pomocí operátoru hustoty informační obsah soustavy.

## 2.2 Časový vývoj smíšeného stavu

### 2.2.1 Operátor časového vývoje

Časový vývoj kvantově mechanického stavu je určen Schrödingerovou rovnicí

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle; \quad (2.18)$$

kde  $\hat{H}$  je hamiltonián systému. Budeme předpokládat, že hamiltonián není závislý na čase. Za tohoto předpokladu je časový vývoj stavu  $|\psi(t)\rangle$  určen vztahem

$$|\psi(t)\rangle = e^{-(i/\hbar)\hat{H}t} |\psi(0)\rangle, \quad (2.19)$$

což je formální řešení (2.18). Je-li  $|\psi(0)\rangle$  vlastním stavem hamiltoniánu, lze časový vývoj stavu  $|\psi(0)\rangle$  psát ve tvaru

$$|\psi(t)\rangle = e^{-(i/\hbar)E(\psi(0))t} |\psi(0)\rangle, \quad (2.20)$$

kde  $\hat{H}|\psi(0)\rangle = E(\psi(0))|\psi(0)\rangle$ . Pro případ nezávislého hamiltoniánu na čase je tedy řešení problému časového vývoje snadné.

Zkoumejme nyní problém hamiltoniánu, který je časově závislý. Hledáme řešení Schrödingerovi rovnice

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle. \quad (2.21)$$

Označme nyní symbolem  $\hat{U}(t)$  operátor časového vývoje, pro který platí

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle. \quad (2.22)$$

Využitím vztahů (2.21) a (2.22) získáme následující vztah

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t)}{\partial t} |\psi(0)\rangle = \hat{H}(t) \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle. \quad (2.23)$$

Vzhledem k tomu, že tento vztah platí pro libovolný vektor z Hilbertova prostoru, můžeme Schrödingerovu rovnici modifikovat do tvaru

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t)}{\partial t} = \hat{H}(t) \hat{U}(t). \quad (2.24)$$

Počáteční podmínka této diferenciální rovnice pro operátory : v čase  $t=0$  je operátor časového vývoje roven identickému zobrazení. Zavedením operátoru časového vývoje jsme tedy převedli úlohu řešení Schrödingerovi rovnice pro vektory z Hilbertova prostoru na úlohu řešení modifikované Schrödingerovi rovnice pro operátory na tomto Hilbertově prostoru. Stejným způsobem získáme analogický vztah pro operátor sdružený k operátoru časového vývoje

$$-i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t)^\dagger}{\partial t} = \hat{U}(t)^\dagger \hat{H}(t). \quad (2.25)$$

Sečtením vztahů (2.24) a (2.25) dostaneme

$$i\hbar \frac{\partial (\hat{U}(t)^\dagger \hat{U}(t))}{\partial t} = 0. \quad (2.26)$$

Operátor  $\hat{U}(t)^\dagger \hat{U}(t)$  je tedy nezávislý na čase a z počáteční podmínky pro  $\hat{U}(t)$  platí

$$\hat{U}(t)^\dagger \hat{U}(t) = \hat{I}. \quad (2.27)$$

Operátor časového vývoje je tedy unitární, což matematická znamená, že zachovává normu.

**Poznámka:** Je-li hamiltonián nezávislý na čase, platí pro operátor časového vývoje vztah

$$\hat{U}(t) = e^{-(i/\hbar)\hat{H}t} \quad (2.28)$$

a pro operátor sdružený k operátoru časového vývoje

$$\hat{U}(t)^\dagger = e^{(i/\hbar)\hat{H}t}. \quad (2.29)$$

## 2.2.2 Liouvilleova rovnice

Uvažujme nyní soustavu popsanou operátorem hustoty (2.7). V čase  $t=0$  má operátor hustoty tvar

$$\hat{\rho}(0) = \sum_n w_n |\psi(0)_n\rangle \langle \psi(0)_n|. \quad (2.30)$$

Stavy systémů soustavy se však v čase vyvíjejí, a tedy i operátor hustoty soustavy se v čase vyvíjí:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_n w_n |\psi(t)_n\rangle \langle \psi(t)_n| = \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}(t)^\dagger. \quad (2.31)$$

**Poznámka:** Nezávisí-li hamiltonián na čase nabývá vztah pro časový vývoj operátoru hustoty tvar

$$\hat{\rho}(t) = e^{-(i/\hbar)\hat{H}t}\hat{\rho}(0)e^{(i/\hbar)\hat{H}t} \quad (2.32)$$

Derivováním operátoru (2.31) podle času dostaneme

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t)}{\partial t} \hat{\rho}(0) \hat{U}(t)^\dagger + i\hbar \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \frac{\partial \hat{U}(t)^\dagger}{\partial t} = \\ &= \hat{H}(t) \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}(t)^\dagger - \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}(t)^\dagger \hat{H}(t). \end{aligned}$$

Uvážíme-li vztah (2.31) získáme rovnici

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)], \quad (2.33)$$

Diferenciální rovnice (2.33) se nazývá **Liouvilleova rovnice**.

Výrazy (2.16), (2.31) a (2.33) jsou základní teoremy teorie smíšených stavů.

**Poznámka:** Předpokládejme nyní následující závislost hamiltoniánu

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t), \quad (2.34)$$

kde  $\|\hat{V}(t)\| \ll \|\hat{H}_0\|$ . Časový vývoj vlastních stavů  $|\mu_n^{(0)}\rangle$  hamiltoniánu  $\hat{H}_0$  je

$$|\mu_n(t)\rangle = e^{-\int_{t_0}^t V(t) dt} e^{-(i/\hbar)E_n(t-t_0)} |\mu_n^{(0)}\rangle. \quad (2.35)$$

Vztah plyne z řešení Schrödingerovi rovnice pro hamiltonián (2.34) s počáteční podmínkou vlastního stavu hamiltoniánu  $\hat{H}_0$ .

Tvoří-li tedy vlastní stavy hamiltoniánu  $\hat{H}_0$  bázi Hilbertova prostoru lze časový vývoj libovolného stavu  $|\psi^{(0)}\rangle$  vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_n C_n |\mu_n(t)\rangle = \sum_n C_n e^{-\int_{t_0}^t V(t) dt} e^{-(i/\hbar)E_n(t-t_0)} |\mu_n^{(0)}\rangle = \\ &= \sum_n C(t)_n e^{-(i/\hbar)E_n(t-t_0)} |\mu_n^{(0)}\rangle. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Odvodím vztah pro časovou závislost prvků matice hustoty v bázi  $\{|\mu_n^{(0)}\rangle\}$ . Pro prvky matice hamiltoniánu (2.34) platí

$$\langle \mu_{m'}^{(0)} | \hat{H}(t) | \mu_m^{(0)} \rangle = E_m^{(0)} \delta_{m'm} + \langle \mu_{m'}^{(0)} | \hat{V}(t) | \mu_m^{(0)} \rangle. \quad (2.37)$$

Užitím Liouvilleova teoremu a vztahu (2.37) dospějeme k rovnici pro časovou závislost členů matice hustoty

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)_{m'm}}{\partial t} = (E_{m'}^{(0)} - E_m^{(0)}) \hat{\rho}(t)_{m'm} + \langle \mu_{m'}^{(0)} | [\hat{V}(t), \hat{\rho}(t)] | \mu_m^{(0)} \rangle. \quad (2.38)$$

## 2.3 Vázané systémy

### 2.3.1 Neseparabilnost vzájemně působících kvantových systémů

V 2.kapitole jsme shrnuli obecné vztahy pro určení časového vývoje operátoru hustoty systému. Problém, který budeme řešit v této kapitole se týká vzájemné interakce dvou a více kvantových soustav.

Začnu analýzou následující situace. Máme dvě nezávislé soustavy částic. Tyto dvě soustavy sloučíme tak, aby mohlo docházet k vzájemné interakci těchto dvou soustav. Nás bude zajímat popis této složené soustavy a její časový vývoj v daných fyzikálních podmínkách. Označíme tyto dva podsystemy písmeny **a** a **b**. V daných podsystemech označíme ortogonální báze: pro systém **a**  $|\Phi_i\rangle$  a pro systém **b**  $|\phi_j\rangle$ . Hilbertův prostor spojené soustavy získáme jako tenzorový součin Hilbertových prostorů systému **a** a systému **b**. Je-li v tento moment systém **a** ve stavu  $|\Phi_\alpha\rangle$  a systém **b** ve stavu  $|\phi_\beta\rangle$  je výsledný stav spojené soustavy ve stavu  $|\psi_{in}\rangle = |\Phi_\alpha\rangle|\phi_\beta\rangle$ . Během vzájemného působení je časový vývoj určen operátorem časového vývoje, který je lineárním operátorem na tenzorovém součinu prostorů a má všechny vlastnosti dříve uvažovaného operátoru časového vývoje. Protože však počáteční stav  $|\psi_{in}\rangle$  se v čase vyvíjí, přejde v čase  $t$  do stavu popsany vektorem z Hilbertova prostoru spojené soustavy

$$|\psi_{in}\rangle \rightarrow |\psi(\alpha\beta)_{out}\rangle. \quad (2.39)$$

Je jasné z vlastností tenzorového součinu, že vektor  $|\psi(\alpha\beta)_{out}\rangle$  lze rozepsat v ortogonální bázi  $|\Phi_i\rangle|\phi_j\rangle$

$$|\psi(\alpha\beta)_{out}\rangle = \sum_{ij} a(ij, \alpha\beta) |\Phi_i\rangle |\phi_j\rangle. \quad (2.40)$$

Složením dvou podsystemů získáme systém, jehož stavovým prostorem je tenzorový součin Hilbertových prostorů (což je opět tenzorový součin) původních systémů, přičemž pro takto vybudovaný stavový prostor platí všechny zákony, které jsem až dosud uvedl.

Koeficienty ve výrazu (2.40) závisí na obou podsystemech a je důležité, že nelze obecně rozepsat libovolný stav spojené soustavy na tenzorový součin vektorů z daných podprostorů.

Máme-li však soustavu složenou ze dvou vzájemně neinteragujících systémů, nezávisí pravděpodobnost nalezení podsystemu  $\Phi$  ve stavu  $|\Phi_i\rangle$  na podsystemu  $\phi$  a pravděpodobnost nalezení podsystemu  $\phi$  ve stavu  $|\phi_j\rangle$  na podsystemu  $\Phi$ . Koeficienty ve výrazu (2.40) lze pak vyjádřit ve tvaru součinu  $a(ij, \alpha\beta) = a(i, \alpha)a(j, \beta)$  a výraz (2.40) lze vyjádřit ve tvaru tenzorového součinu vektorů z podsystemů

$$|\psi(\alpha\beta)_{out}\rangle = \left(\sum_i a(i, \alpha) |\Phi_i\rangle\right) \left(\sum_j a(j, \beta) |\phi_j\rangle\right) = |\Phi\rangle |\phi\rangle. \quad (2.41)$$

Jestliže dva podsystemy spolu vzájemně interagovali, není obecně možné jejich stav vyjádřit jako tenzorový součin vektorů z Hilbertova prostoru podsystemů. Tento

princip se někdy také nazývá **principem neseparability**. Má závažný důsledek pro časový vývoj podsystemu, který byl na počátku v čistém stavu. Princip neseparability způsobí, že po vzájemné interakci s jiným podsystemem jej nalezneme obecně ve smíšeném stavu.

Pro neinteragující podsystemy musí platit, že stavy v obou podsystemech **a** a **b** se vyvíjejí nezávisle na vývoji stavů v druhém podsystemu. Pro operátor časového vývoje celé soustavy platí

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_a(t) \otimes \hat{U}_b(t), \quad (2.42)$$

kde  $\hat{U}_a(t)$  a  $\hat{U}_b(t)$  jsou operátory časového vývoje na podsystemech **a** a **b**. V případě neinteragujících podsystemů je proto hamiltonián celého systému dán sumou dvou komutujících operátorů  $\hat{H} = \hat{H}_a \otimes \hat{I}_b + \hat{I}_a \otimes \hat{H}_b$ .

### 2.3.2 Operátor hustoty složené soustavy a podsystemu

Vezměme nyní dva (nebo více) vzájemně interagující kvantové systémy. V mnoha případech nastane situace, kdy nás zajímá pouze jeden z nich. Obecně lze vlastně říci, že nikdy náš zkoumaný systém není dokonale izolován, pouze vzájemnou interakci s ostatními kvantovými systémy někdy zanedbáváme.

Známe-li počáteční podmínky dvou neprovázaných podsystemů (např. jejich popis pomocí operátoru hustoty) známe i počáteční podmínku pro operátor hustoty soustavy složené z těchto podsystemů. Jeho časový vývoj je určen rovnicemi (2.31) a (2.33). Nás ale zajímá časový vývoj operátoru hustoty daného podsystemu  $\hat{\rho}(\psi, t)$ , kde  $\psi$  charakterizuje daný podsystem.

Sledujme nyní operátor  $\hat{Q}(\psi)$ , působící pouze na proměnné systému  $\psi$ . Prvky jeho matice se dají vyjádřit následujícím způsobem

$$\langle \Psi_i, \psi_j | \hat{Q}(\psi) | \Psi_i, \psi_j \rangle = \langle \psi_j | \hat{Q}(\psi) | \psi_j \rangle \delta_{i,i}. \quad (2.43)$$

S pomocí vztahů (2.16) a (2.43) můžeme vypočítat střední hodnotu operátoru  $\hat{Q}(\psi)$

$$\begin{aligned} \langle \hat{Q}(\psi, t) \rangle &= Tr \hat{\rho}(t) \hat{Q}(\psi) = \\ &= \sum_{i,i,j,j} \langle \Psi_i, \psi_j | \hat{\rho}(t) | \Psi_i, \psi_j \rangle \langle \Psi_i, \psi_j | \hat{Q}(\psi) | \Psi_i, \psi_j \rangle = \\ &= \sum_{j,j} [\sum_i \langle \Psi_i, \psi_j | \hat{\rho}(t) | \Psi_i, \psi_j \rangle] \langle \psi_j | \hat{Q}(\psi) | \psi_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Snadno nyní zjistíme prvky matice hustoty  $\hat{\rho}(\psi, t)$

$$\hat{\rho}(\psi, t)_{j,j} = \langle \psi_j | \hat{\rho}(\psi, t) | \psi_j \rangle = \sum_i \langle \Psi_i, \psi_j | \hat{\rho}(t) | \Psi_i, \psi_j \rangle, \quad (2.45)$$

a můžeme zapsat výraz (2.44) ve tvaru

$$\langle \hat{Q}(\psi, t) \rangle = \sum_{j,j} \langle \psi_j | \hat{\rho}(\psi, t) | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \hat{Q}(\psi) | \psi_j \rangle =$$

$$= \text{Tr} \hat{\rho}(\psi, t) \hat{Q}(\psi); \quad (2.46)$$

v souladu s vyjádřením (2.16). Celkovou informaci obsaženou v systému můžeme získat přes střední hodnoty  $\langle \hat{Q}(\psi, t) \rangle$ . Z výrazu (2.16) je vidět, že libovolnou z těchto středních hodnot můžeme najít, je-li známa matice  $\hat{\rho}(\psi, t)$ . V tomto smyslu obsahuje matice  $\hat{\rho}(\psi, t)$  veškerou informaci o systému  $\psi$ .

Operátor  $\hat{\rho}(\psi, t)$  je obvykle označován jako **redukovaný operátor hustoty**. Definujme nyní následující přiřazení

$$\text{Tr}_{\Psi} \hat{\rho}(t) = \sum_i \langle \Psi_i | \hat{\rho}(t) | \Psi_i \rangle. \quad (2.47)$$

Výraz (2.45) můžeme přepsat do tvaru

$$\langle \psi_j | \hat{\rho}(\psi, t) | \psi_j \rangle = \langle \psi_j | [\sum_i \langle \Psi_i | \hat{\rho}(t) | \Psi_i \rangle] | \psi_j \rangle = \langle \psi_j | \text{Tr}_{\Psi} \hat{\rho}(t) | \psi_j \rangle. \quad (2.48)$$

Z jednoznačnosti potom plyne

$$\hat{\rho}(\psi, t) = \text{Tr}_{\Psi} \hat{\rho}(t). \quad (2.49)$$

V případech, kdy nelze časový vývoj kvantového systému určit Schrödingerovou nebo Liouvilleovou rovnicí, aniž bychom museli použít nějaké tenzorové rozšíření původního Hilbertova prostoru nazýváme takový systém **otevřený**. V opačném případě, když k popisu stavu systému není nutné použít rozšířený Hilbertův prostor, nazýváme systém **uzavřený**. Časová evoluce otevřeného systému, se radikálně liší od časového vývoje uzavřených systémů. Ostatně to jsme mohli vidět již v předcházejících příkladech. Čistý stav uzavřeného systému se vždy operátorem časového vývoje zobrazí opět v čistý stav. Naproti tomu v otevřených systémech se čistý stav časovou evolucí rozruší a soustavu pak obecně nalezneme v statistické směsi.

Pro redukované operátory hustoty neplatí Liouvilleova rovnice.

## 2.4 Entropie v kvantové teorii

Z předcházejících kapitol víme, že operátor hustoty popisující daný stav, je nositelem veškeré informace o soustavě. Známe-li operátor hustoty obecně smíšeného stavu jsme schopni určit střední hodnotu libovolného operátoru a pravděpodobnost nalezení soustavy v daném stavu. Právě díky této vlastnosti operátoru hustoty můžeme na tuto úvahu navázat definicí entropie, jako absolutní míru neuspořádanosti soustavy. Uvedu dvě nejznámější (podrobněji a v širším rozsahu se obecnými vlastnostmi entropie zabývá kniha (viz [15])) a provedu rozbor jejich vlastností.

První z nich je **von Neumannova entropie** a je definována vztahem

$$S = -k_B \text{Tr} \{ \hat{\rho} \ln \hat{\rho} \}, \quad (2.50)$$

kde  $k_B$  je Boltzmanova konstanta a  $\hat{\rho}$  je operátor hustoty popisující daný systém.

**Poznámka:** Není těžké ověřit, že pro  $0 \leq x \leq 1$  platí

$$-e^{-1} \leq x \ln x \leq 0. \quad (2.51)$$

Vezměme nyní bázi  $|\psi_i\rangle$  v níž je operátor hustoty diagonální. Pak platí

$$\begin{aligned} \langle \psi_j | \hat{\rho} \ln \hat{\rho} | \psi_j \rangle &= \\ &= \langle \psi_j | \left( \sum_i w_i \hat{E}_i \right) \left( \sum_n \frac{(-1)^n}{n} \left( \sum_m w_m \hat{E}_m - \hat{I} \right)^n \right) | \psi_j \rangle = \\ &= w_j \ln w_j. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Odtud plyne pomocí vztahu (2.51)

$$0 \leq S = -Tr\{\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\} = -\sum_j w_j \ln w_j \leq +\infty, \quad (2.53)$$

přičemž nule je entropie rovna právě tehdy, jedná-li se o stav čistý.

Je-li soustava v čistém stavu, je míra neuspořádanosti nulová a my máme o soustavě maximální množství informace. Jestliže soustava je ve smíšeném stavu, je entropie pozitivní a je mírou odchylky od čistého stavu. Máme-li izolovaný systém, entropie zůstává v čase konstantní, neboť operátor hustoty se v čase vyvíjí podle vztahu (2.32).

Uvažujme nyní soustavu s dvěma podsystemy **a** a **b**. Její stav v daném čase je popsán operátorem hustoty a rovněž stav jednotlivých podsystemů je popsán redukovanými operátory hustoty. Operací  $Tr$  přes daný podsystem však ztrácíme informaci obsaženou ve vlastnostech vzniklých spojením podsystemů.

Entropie pro podsystem je definována analogickým způsobem jako ve vztahu pro celý systém (2.50)

$$S_{a(b)} = -k_B Tr_a \{ \hat{\rho}_{a(b)} \ln \hat{\rho}_{a(b)} \} \quad (2.54)$$

Fakt, že působením operátoru stopa přes daný podsystem ztrácíme informaci o vlastnostech vzniklých spojením podsystemů, se odráží v platnosti známého Araki-Lieboho teorému (dokázaný v roce 1970 ;[1])

$$|S_a - S_b| \leq S \leq S_a + S_b. \quad (2.55)$$

Obecně entropie daného systému není nezávislá na čase. Není však narozdíl od entropie definované v klasické fyzice monotoně rostoucí funkcí.

Druhá definice, kterou nyní uvedu, využívá vztahu (2.4). V odborné literatuře [11] je označována jako **linearizovaná entropie nebo míra čistoty stavu (purity)**. Budu ji nadále označovat symbolem  $S^{lin}$  a platí pro ni

$$S^{lin} = Tr(\hat{\rho} - \hat{\rho}^2), \quad (2.56)$$

kde  $\hat{\rho}$  je operátor hustoty zadané soustavy.

**Poznámka:** Vztah (2.56) lze upravit do tvaru

$$S^{lin} = 1 - Tr(\hat{\rho}^2). \quad (2.57)$$

Snadno nahlédneme, že linearizovaná entropie vlastně vznikla tak, že jsme v definici von Neumannovi entropie vzali první dva členy z Taylorova rozvoje. Linearizovaná a von Neumannova entropie jsou navzájem svázány nerovností

$$S_{lin} \leq S_N. \quad (2.58)$$

Obor hodnot, které může linearizovaná entropie nabývat, je tedy omezen relací

$$0 \leq S^{lin} \leq 1, \quad (2.59)$$

přičemž minima nabývá právě tehdy, když  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ . Tato situace nastává v případě, že operátor hustoty  $\hat{\rho}$  je jednodimenzionální projektor a popisuje čistý stav. Jinými slovy, míra neurčitosti definovaná lineárizovanou entropií je stejně jako v případě von Neumannovi entropie nulová právě tehdy, když je soustava v čistém stavu. Pro lineárizovanou entropii soustavy složené z dvou podsystémů **a** a **b** platí také relace (2.55)

$$|S_a^{lin} - S_b^{lin}| \leq S^{lin} \leq S_a^{lin} + S_b^{lin}, \quad (2.60)$$

kde  $S^{lin}$  je lin. entropie celé soustavy a  $S_{a(b)}^{lin}$  je lin. entropie podsystému a (b).

**Důkaz:** Uvažujme soustavu složenou ze dvou podsystémů. Operátor hustoty má pak tvar

$$\hat{\rho} = \sum_{ijkl} \alpha_{ijkl} |i\rangle_a |j\rangle_b \langle k|_a \langle l|_b \quad \sum_{ijkl} \alpha_{ijkl} = 1 \quad (2.61)$$

Redukované operátory hustoty podsystémů jsou

$$\hat{\rho}_a = \sum_{ik} \left( \sum_m \alpha_{imkm} \right) |i\rangle_a \langle k|_a \quad \sum_{ikm} \alpha_{imkm} = 1 \quad (2.62)$$

a

$$\hat{\rho}_b = \sum_{jl} \left( \sum_m \alpha_{mjml} \right) |j\rangle_b \langle l|_b \quad \sum_{jlm} \alpha_{mjml} = 1. \quad (2.63)$$

Dokažme nejdříve  $S_a^{lin} + S_b^{lin} \geq S^{lin}$ . Ze vztahů (2.56), (2.61), (2.62) a (2.63) je tato nerovnost ekvivalentní nerovnosti

$$\sum_{ik} \left( \sum_m \alpha_{imkm} - \left( \sum_m \alpha_{imkm} \right)^2 \right) + \quad (2.64)$$

$$+ \sum_{jl} \left( \sum_m \alpha_{mjml} - \left( \sum_m \alpha_{mjml} \right)^2 \right) \geq \sum_{ijkl} (\alpha_{ijkl} - \alpha_{ijkl}^2). \quad (2.65)$$

Využitím vlastností koeficientů  $\{\alpha_{ijkl}\}$  ji lze upravit na tvar

$$\sum_{i_1 j_1 k_1 l_1 i_2 j_2 k_2 l_2} \alpha_{i_1 j_1 k_1 l_1} \alpha_{i_2 j_2 k_2 l_2} - \sum_{ik} \left( \sum_{m_1 m_2} \alpha_{im_1 k m_1} \alpha_{im_2 k m_2} \right) - \quad (2.66)$$

$$- \sum_{jl} \left( \sum_{m_1 m_2} \alpha_{m_1 j m_1 l} \alpha_{m_2 j m_2 l} \right) + \sum_{ijkl} \alpha_{ijkl}^2 \geq 0. \quad (2.67)$$



Podrobnějším porovnáním jednotlivých částí výrazu snadno nahlédneme, že tato nerovnost je splněna. Druhá část tvrzení  $S^{lin} \geq |S_a^{lin} - S_b^{lin}|$  se dokáže obdobně. Využitím vztahů (2.56), (2.61), (2.62) a (2.63) a vlastností koeficientů  $\{\alpha_{ijkl}\}$  zjistíme, že tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$\sum_{(i_1 j_1 k_1 l_1)(i_2 j_2 k_2 l_2)} \alpha_{i_1 j_1 k_1 l_1} \alpha_{i_2 j_2 k_2 l_2} \geq \quad (2.68)$$

$$\geq \left| \sum_{j_l} \sum_{m_1 m_2} \alpha_{m_1 j m_1 l} \alpha_{m_2 j m_2 l} - \sum_{i_k} \sum_{m_1 m_2} \alpha_{i m_1 k m_1} \alpha_{i m_2 k m_2} \right| \quad (2.69)$$

Odtud vidíme, že i tato část tvrzení platí a celé tvrzení (2.60) je tímto dokázáno.

Na závěr této části uvedu důležitá tvrzení pro soustavy popsané Hilbertovým prostorem konečné dimenze.

**Tvrzení:**

- T1.** Maximální hodnota von Neumannovi entropie pro soustavu popsanou Hilbertovým prostorem dimenze  $N$  je  $S_{max} = k_B \ln N$ .
- T2.** Maximální hodnota Linearizované entropie pro soustavu popsanou Hilbertovým prostorem dimenze  $N$  je  $S_{max}^{lin} = 1 - \frac{1}{N}$ .
- T3.** V obou případech nabývá entropie maxima právě tehdy, když operátor hustoty soustavy lze napsat ve tvaru

$$\hat{\rho} = \frac{1}{N} \hat{I}. \quad (2.70)$$

**Důkaz:** Hledáním maxima dospějeme k úloze řešení extrémů na varietě  $\sum_{j=1}^N w_j = 1$ , kde  $w_j$  jsou vlastní hodnoty operátoru hustoty popisující hledanou soustavu s maximální entropií. Zjistíme, že v obou případech nastává maximum právě tehdy, když  $w_1 = w_2 = \dots = w_N = \frac{1}{N}$ , a tedy operátor hustoty má tvar (2.70).

# Kapitola 3

## Korelace a provázání

Za hlavní zdroj neklasických rysů kvantové mechaniky je považován princip superpozice. V případě složených soustav z více podsystémů je důsledkem principu superpozice existence důležité třídy stavů, kterým říkáme korelované. V klasické fyzice se s tímto pojmem setkáváme u statistických směsí, ale v kvantové fyzice nabývá tento pojem mnohem hlubšího významu. Přistupme nyní k definici dvou důležitých tříd korelovaných stavů, které se nazývají **separabilní** a **neprovázané**.

Předpokládejme, že máme soustavu  $K$  složenou z  $N$  vzájemně disjunktních podsystémů  $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^N$ , kde  $i \in \hat{N}$ . Nechtě  $2^N$  je množina všech možných podsystémů soustavy a  $\Theta(n)$  množina všech neuspořádaných  $n$ -tic z množiny  $2^N$  takových, že jejich sjednocení tvoří celou soustavu

$$\Theta(n) = \left\{ \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \mid A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = K \wedge A_i \in 2^N \right\}. \quad (3.1)$$

V neuspořádané  $n$ -tici nemohou být žádné dva prvky stejné, přičemž nezáleží na pořadí prvků. Označme symbolem  $\Theta$  množinu

$$\Theta := \Theta(2) \cup \Theta(3) \cup \dots \cup \Theta(N). \quad (3.2)$$

Pro každý prvek  $A \in \Theta$  definujme funkci  $\dim : \Theta \rightarrow \mathcal{N}$

$$\dim(A) = k \iff A \in \Theta(k). \quad (3.3)$$

**Definice:** Kvantový systém složený z  $N$  podsystémů  $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^N$  je separabilní, jestliže jeho operátor hustoty může být zapsán ve tvaru

$$\hat{\rho} = \sum_i \sum_{A \in \Theta} w_i^A \hat{\rho}_i^{(A_1)} \otimes \hat{\rho}_i^{(A_2)} \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_i^{(A_{\dim(A)})} \quad \wedge \quad \sum_i \sum_{A \in \Theta} w_i^A = 1, \quad (3.4)$$

kde  $\hat{\rho}^{(A_i)}$  je statistický operátor působící na Hilbertův prostor podsystému  $A_i$  (ne nutně redukovaný operátor hustoty operátoru  $\hat{\rho}$ ) a  $w_i^A$  jsou pozitivní váhové koeficienty.

**Definice:** Říkáme, že stav soustavy složený z  $N$  podsystémů  $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^N$  je neprovázaný nebo neobsahuje provázání  $N$ -tého řádu, lze-li její operátor hustoty  $\hat{\rho}$  vyjádřit ve tvaru

$$\hat{\rho} = \sum_{A \in \Theta} \alpha_A \hat{\rho}_{A_1} \otimes \hat{\rho}_{A_2} \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_{A_{\dim(A)}} \quad \wedge \quad \sum_{A \in \Theta} \alpha_A = 1, \quad (3.5)$$

kde  $\hat{\rho}_{A_i}$  je redukovaný operátor hustoty operátoru  $\hat{\rho}$  působící na Hilbertově prostoru podsystému  $A_i$  a  $\alpha_i$  jsou kladné koeficienty.

**Poznámka:** Je důležité si uvědomit, že všechny uvedené pojmy vždy úzce souvisí s počátečním výběrem podsystému a k němu jsou také vztaženy. Máme-li  $N$  podsystémů mluvíme o separabilitě či neprovázání  $N$ -tého řádu.

V literatuře jsou pojmem **provázané stavy** označovány stavy, které nejsou separabilní. Operátor hustoty provázaného stavu nelze vyjádřit ve tvaru (3.4). Z definic plyne, že neprovázané stavy jsou podmnožinou separabilních stavů. Stav, který je neprovázaný, však nemusí být nutně provázaný. Provázání je velice silný pojem a je velmi obtížné zjistit, zda-li je daný stav soustavy provázaný. Z tohoto důvodu se v této práci budeme soustředit na studium neprovázaných stavů. Pojem provázání budu proto používat výhradně ve vztahu k neprovázaným stavům definovaných vztahem (3.5).

V případě studia provázání druhého řádu bylo již navrženo několik popisů. Každý z nich má své výhody a nevýhody. Některé z popisů v následujících kapitolách uvedu a provedu jejich krátkou diskuzi. V případě provázání vyšších řádů je situace podstatně složitější. Popis se potom soustřeďuje nejen na sílu provázání příslušného řádu, ale zároveň na provázání nižších řádů možných podsoustav. Klasickými příklady silně korelovaných stavů jsou Bellovské stavy

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{big}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (3.6)$$

které jsou používány v kvantové teleportaci, nebo GHZ stav (tzv. Greenberger-Horne-Zeilinger stav) definovaný vztahem

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle). \quad (3.7)$$

Bellovské a GHZ stavy nemají žádné jednočásticové vlastnosti. Tím máme na mysli, že jejich jednočásticové redukované operátory hustoty jsou v maximálně smíšeném stavu

$$\hat{\rho}_a = \frac{1}{2} \hat{1}. \quad (3.8)$$

Takovéto čisté stavy považujeme za nejsilněji provázané.

Aby jsme mohli nějak kvantitativně postihnout sílu provázání daného stavu, musíme definovat míru provázání, která nám bude indikovat, zda-li je daný systém neprovázaný.

Sjednotme nyní představy o obecných vlastnostech, které by míra provázání měla mít. Mějme soustavu složenou z  $N$  podsystémů  $\{a_i\}_{i=1}^N$ . Míra provázání  $N$ -tého řádu by měla splňovat následující podmínky:

- (V1) Obor hodnot je pozitivní a nabývá 0 pro stavy, které neobsahují provázání  $N$ -tého řádu (neprovázané stavy).
- (V2) Míra by měla nabývat maxima pro soustavy v čistém stavu, jejichž oba podsystemy jsou popsány redukovanými operátory ve tvaru:

$$\hat{\rho}_{a(b)} = \frac{1}{N_{a_i}} \hat{I}_{a_i}; \quad (3.9)$$

kde  $N_{a_i}$  je dimenze Hilbertova prostoru popisující podsystém  $a_i$ .

- (V3) Míra provázání by měla být invariantní vzhledem k lokálním unitárním transformacím, čímž míníme unitární transformace působících na Hilbertových prostorech popisujících jednotlivé podsystémy soustavy. Formálně jsou tedy ve tvaru

$$\hat{U} = \hat{U}(1) \otimes \hat{U}(2) \otimes \dots \otimes \hat{U}(N), \quad (3.10)$$

kde  $\hat{U}(i)$  jsou unitární transformace jednotlivých Hilbertových prostorů podsystémů.

**Poznámka 1:** Vlastnost (V1) vyjadřuje nutnou podmínku, aby daný stav byl neprovázaný. Některé uváděné míry splňují dokonce silnější variantu vlastnosti (V1), jsou rovny nule právě tehdy, je-li daný stav provázaný.

**Poznámka 2:** Druhá podmínka se vztahuje na případ, kdy dimenze Hilbertova prostoru popisujícího soustavu je konečná. Touto podmínkou požadujeme aby míra provázání nabývala maximální hodnoty pro čisté stavy bez jednočásticových vlastností (**stav, kdy redukované operátory hustoty podsoustav popisují maximálně smíšený stav**).

**Poznámka 3:** Třetí podmínkou požadujeme, aby míra provázání byla nezávislá na volbě unitárně ekvivalentních Hilbertových prostorů jednotlivých podsystémů soustavy. Míra by měla být invariantní vůči lokálním změnám báze, které zachovávají normu.

Podívejme se nyní podrobněji na provázání druhého řádu. V další části tedy budeme studovat provázání dvou podsystémů (**dvoučásticové systémy**).

### 3.1 Provázání druhého řádu

Dále, neuvedu-li jinak, budu pod pojmem provázání míti na mysli provázání dvou podsystémů neboli provázání druhého řádu. Uvažujme tedy soustavu složenou ze dvou podsystémů  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ . Nechť  $\hat{\rho}$  je operátor hustoty popisující soustavu a  $\hat{\rho}_a$  a  $\hat{\rho}_b$  jsou redukované operátory hustoty podsystémů. Shrňme tedy ještě jednou pro případ dvou podsystémů definici neprovázaných stavů a požadované vlastnosti míry provázání. Lze-li napsat operátor hustoty  $\hat{\rho}$  ve tvaru

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_a \otimes \hat{\rho}_b, \quad (3.11)$$

říkáme, že tyto dva podsystémy nejsou provázané.

Míra provázání by měla splňovat vlastnosti:

**U1.** Obor hodnot je pozitivní a nabývá 0 pro každý neprovázaný stav.

**U2.** Míra by měla nabývat maxima pro soustavy v čistém stavu, jejichž oba pod-systémy jsou popsány redukovanými operátory ve tvaru:

$$\hat{\rho}_{a(b)} = \frac{1}{N_{a(b)}} \hat{I}_{a(b)}; \quad (3.12)$$

kde  $N_{a(b)}$  je dimenze Hilbertova prostoru popisující podsystem  $\mathbf{a}(\mathbf{b})$ .

**U3.** Míra provázání by měla být invariantní vzhledem k lokálním unitárním transformacím, čímž míníme unitární transformace působících na Hilbertových prostorech popisujících jednotlivé podsystemy soustavy. Formálně jsou tedy ve tvaru

$$\hat{U} = \hat{U}(1) \otimes \hat{U}(2), \quad (3.13)$$

kde  $\hat{U}(i)$  jsou unitární transformace jednotlivých Hilbertových prostorů podsystemů  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ .

Nyní se budu věnovat konkrétním popisům provázání druhého řádu.

### 3.1.1 Index korelace indukovaný kvantovou entropií

Pod indexem korelace mám na mysli absolutní míru charakterizující vzájemnou interakci dvou podsystemů dané soustavy. Opět máme soustavu s dvěma podsystemy  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ . V minulé kapitole jsem ukázal dvě různé definice kvantové entropie. Vzhledem k jejich společným vlastnostem budou následující úvahy pro linearizovanou a von Neumannovu entropii totožné. Entropie vyjadřuje míru neurčitosti obsaženou v daném systému. Odtud můžeme definovat informační obsah dané soustavy následujícím způsobem

$$Q = S^{max} - S, \quad (3.14)$$

kde  $S^{max}$  je maximální možná entropie, kterou daný systém může nabýt - stav soustavy s maximální mírou neuspořádanosti a  $S$  okamžitá entropie soustavy. Nyní již máme vytvořené prostředky, aby jsme mohli definovat index korelace jako míru informace obsaženou ve vlastnostech vzniklých spojením obou podsystemů

$$I_c = Q - (Q_a + Q_b); \quad (3.15)$$

kde  $Q$  je informační obsah celé soustavy a  $Q_{a(b)}$  informační obsah podsystemů. Vztah (3.15) lze přepsat do exaktnějšího tvaru. Uvážíme-li, že  $S^{max} = S_a^{max} + S_b^{max}$ , můžeme vztah pro index korelace upravit do tvaru

$$I_c = S_a + S_b - S. \quad (3.16)$$

S tímto vztahem budeme nadále pracovat.

Ověřme nyní zda-li, tato míra provázání splňuje požadované vlastnosti [U1-U3].

**Důkaz:**

- (U1) Vlastnost je zaručena platností Araki-Libeého teorému (2.54) a obdobné relace dokázané pro linearizovanou entropii (2.60). Dokonce platí, že index korelace je roven 0 právě tehdy, je-li stav neprovázaný.
- (U2) Z tvrzení [T1-T3] plyne, že entropie  $S_a$  a  $S_b$  nabývá v námi předpokládaném případě maxima. Vzhledem k čistému stavu celé soustavy je entropie  $S$  rovná 0. Odtud je již zřejmé, že index korelace definovaný vztahem (3.16) splňuje i vlastnost U2.
- (U3) Mějme dva Hilbertovy prostory  $\mathcal{H}$  a  $\mathcal{H}'$  popisující stejnou soustavu svázané unitární transformací ve tvaru (3.13). Pro příslušné vektory a operátory z Hilbertových prostorů  $\mathcal{H}$  a  $\mathcal{H}'$  tedy platí

$$|\psi'\rangle = (\hat{U}_a \otimes \hat{U}_b)|\psi\rangle \quad , \quad \hat{\rho}' = (\hat{U}_a \otimes \hat{U}_b)\hat{\rho}(\hat{U}_a^\dagger \otimes \hat{U}_b^\dagger) \quad (3.17)$$

a pro redukované operátory

$$\hat{\rho}'_a = \hat{U}_a \hat{\rho}_a \hat{U}_a^\dagger \quad a \quad \hat{\rho}'_b = \hat{U}_b \hat{\rho}_b \hat{U}_b^\dagger. \quad (3.18)$$

Z vlastností stopy operátoru vidíme, že

$$Tr\{(\hat{\rho}')^n\} = Tr\{\underbrace{\hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger}_{n \text{ krát}}\} = Tr\{(\hat{\rho})^n\} \quad n \in \mathcal{N}, \quad (3.19)$$

kde jsem využil vlastnosti unitárních operátorů  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{I}$  a invariantnosti stopy vůči cyklické záměně operátorů v argumentu stopy. Rozepíšeme-li definici von Neumanovi entropie, zjistíme, že

$$\begin{aligned} S &= -k_b Tr\{\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\} = -k_b Tr\{\hat{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\hat{\rho} - \hat{I})^n\} = \\ &= -k_b Tr\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{k=0}^n (-1)^k (\hat{\rho})^k\right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Linearizovanou entropii jsme definovali následovně

$$S_{lin} = Tr(\hat{\rho} - \hat{\rho}^2). \quad (3.21)$$

Přejdeme-li nyní k soustavě popsané Hilbertovým prostorem  $\mathcal{H}'$ , zůstanou hodnoty von Neumannovi a linearizované entropie soustavy i podsoustav vzhledem k platnosti vztahů (3.17),(3.18),(3.20) a (3.21) nezměněny, a tedy index korelace vlastní i třetí požadovanou vlastnost.

### 3.1.2 Míra provázání indukovaná Peres-Horodeckého kritériem

Než budeme pokračovat, připomenou znovu pojem separabilního stavu soustavy s dvěma podsystemy.

**Definice:** Kvantový systém složený ze dvou podsystemů  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  je separabilní, jestliže jeho operátor hustoty může být zapsán ve tvaru

$$\hat{\rho} = \sum_A w_A \hat{\rho}_A^{(a)} \otimes \hat{\rho}_A^{(b)} \quad \wedge \quad \sum_A w_A = 1, \quad (3.22)$$

kde  $\hat{\rho}_A^{(a)}$  a  $\hat{\rho}_A^{(b)}$  jsou operátory hustoty pro tyto dva podsystemy (ne nutně redukováné operátory operátoru  $\hat{\rho}$ ) a  $w_A$  jsou pozitivní váhové koeficienty.

Je zřejmé, že každý neprovázaný stav dvoukomponentového systému je separabilní. Zajímá nás, zda-li existuje nějaký způsob, jak zjistit, je-li daný systém separabilní. K tomuto účelu máme k dispozici několik kritérií. Známé jsou Bellova nerovnost (viz [13]), kterou separabilní systém vždy splňuje, nebo  $\alpha$ -entropie kritérium a pro nás v tuto chvíli nejdůležitější **Peres - Horodeckého kritérium** (viz [16]). Je jednoduchým algebraickým testem, který je nutnou podmínkou pro existenci dekompozice ve tvaru (3.22). Tuto podmínku separability nejlépe odvodíme explicitním vyjádřením maticových elementů. Vztah (3.22) má v maticových elementech tvar

$$\rho_{m\mu, n\theta} = \sum_A w_A (\hat{\rho}_A^{(a)})_{mn} (\hat{\rho}_A^{(b)})_{\mu\theta}. \quad (3.23)$$

Latinské indexy jsou vztaženy k prvnímu podsystemu a řecké k druhému. Definujme nyní novou matici,

$$\sigma_{m\mu, n\theta} = \rho_{n\mu, m\theta}. \quad (3.24)$$

Latinské indexy jsme transponovali, ale řecké zůstaly nezměněny. To samozřejmě není unitární transformace, nicméně  $\sigma$  matice je Hermitovská. Platí-li tedy pro operátor hustoty rovnost (3.22), můžeme zapsat operátor  $\hat{\sigma}$  do tvaru

$$\hat{\sigma} = \sum_A w_A (\hat{\rho}_A^{(a)})^T \otimes \hat{\rho}_A^{(b)}. \quad (3.25)$$

Vzhledem ke skutečnosti, že transponovaná matice  $(\rho_A^{(a)})^T = \rho_A^{(a)*}$  je pozitivně semi-definitní matice s jednotkovou stopou, je operátor  $\hat{\sigma}$  opět operátorem hustoty. Odtud plyne, že žádná vlastní hodnota operátoru  $\hat{\sigma}$  nemůže být záporná. Nazveme-li operaci (3.24) parciální transpozicí, můžeme formulovat Peres - Horodeckého kritérium následovně:

**Tvrzení:** Nutnou podmínkou, aby systém byl separabilní, je nezápornost vlastních hodnot matice získané parciální transpozice.

**Poznámka:** Pro soustavu, jejíž podsystemy jsou popsány Hilbertovými prostory dimenze dvě, platí dokonce opačné tvrzení. Jsou-li všechny vlastní hodnoty matice získané parciální transpozicí operátoru hustoty nezáporné, je stav soustavy separabilní.

Přístupme nyní k definici míry provázání založené na právě dokázaném kritériu. Víme, že máme-li separabilní systém, jsou všechny vlastní hodnoty parciální transpozice nezáporné. Nabízí se tedy možnost navrhnout míru provázání vhodnou volbou vztahu založeném na právě získaném faktu o vlastních hodnotách parciální transpozice operátoru hustoty. V literatuře se uvádí míra definovaná následujícím způsobem

$$E_N(\rho) = |\min\{0, \lambda_1^{T_a}, \lambda_2^{T_a}, \lambda_3^{T_a}, \dots\}|, \quad (3.26)$$

kde  $\lambda_i^{T_a}$  jsou vlastní hodnoty parciální transpozice operátoru hustoty. V literatuře se někdy označuje výše uvedená míra jako **negativní**. Dále budeme používat toto označení.

Na několika příkladech srovnám tuto míru s indexem korelace. Již na příkladu optické sítě se ukazuje, že tato míra není citlivá k případu, kdy v optické síti roste počet vstupních fotonů v signálu, neboť místo očekávaného nárůstu naopak velikost provázání podle této míry klesá. Vysvětlení je jednoduché, neboť míra definovaná vztahem (3.26) nikterak neobráží všechny záporné vlastní hodnoty, ale pouze nejmenší z nich. Má-li míra reflektovat výše zmíněnou skutečnost, musí míra zohledňovat všechny záporné vlastní hodnoty parciální transpozice. Definujme nyní dvě míry provázání.

První z nich budu dále nazývat **součtová** a předepíšu ji vztahem

$$E_S(\hat{\rho}) = \sum_i |\lambda_i^{T_a}| \quad \wedge \quad \lambda_i^{T_a} < 0. \quad (3.27)$$

Druhou nazvu **logaritmická** a definuju ji vztahem

$$E_L(\hat{\rho}) = - \sum_i |\lambda_i^{T_a}| \ln(|\lambda_i^{T_a}|) \quad \wedge \quad \lambda_i^{T_a} < 0. \quad (3.28)$$

Věnujme se nyní právě definovaným mírám provázání z pohledu vlastností **(U1)** - **(U3)**.

Vlastnost **(U1)** splněna je, neboť všechny tři míry jsme definovali na základě Peres - Horodeckého kritéria, který je nutnou podmínkou pro to, aby daná soustava byla v separabilním stavu. Jinými slovy neprovázaný stav (3.11) splňuje podmínku separability, a tedy vlastní hodnoty parciální transpozice jeho operátoru hustoty jsou všechny nezáporné a obě míry provázání nabývají pro neprovázaný stav nulovou hodnotu. Opačné tvrzení však neplatí. Je-li hodnota míry provázání nulová, jsou všechny vlastní čísla parciální transpozice nezáporná, ale odtud neplyne, že daný stav je separabilní, neboť Peres - Horodeckého kritérium je pouze nutnou podmínkou.

**Poznámka:** V případě, že soustava je složená z podsystémů popsaných Hilbertovými prostory s dimenzí dva, platí, že jsou-li tyto míry pro daný stav nulové, je tento stav separabilní.

Na otázku, zda-li míry splňují vlastnost **(U2)**, neumím odpovědět. Z příkladů řešených v kapitole (3.1.3) plyne, že logaritmická míra tuto vlastnost nesplňuje. Ostatní míry v řešených příkladech tuto skutečnost nepotvrdily.



Vlastnost **(U3)** splněna je. Máme dva Hilbertovy prostory  $\mathcal{H}$  a  $\mathcal{H}'$  popisující stejnou soustavu svázané unitární transformací ve tvaru (3.13). Maticové prvky  $\rho_{m\mu,n\theta}$  lze zapsat následovně

$$\rho_{m\mu,n\theta} = \langle m, \mu | \hat{\rho} | n, \theta \rangle. \quad (3.29)$$

Pro maticové elementy unitární transformace ve tvaru (3.13) platí

$$\begin{aligned} (\hat{U}(1) \otimes \hat{U}(2))_{m\mu,n\theta} &= \langle m, \mu | (\hat{U}(1) \otimes \hat{U}(2)) | n, \theta \rangle = \langle m | \hat{U}(1) | n \rangle \langle \mu | \hat{U}(2) | \theta \rangle = \\ &= (\hat{U}(1))_{m,n} (\hat{U}(2))_{\mu,\theta}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Odtud vidíme, že

$$\begin{aligned} (\hat{\rho}')_{m\mu,n\theta} &= \{(\hat{U}(1) \otimes \hat{U}(2)) \hat{\rho} (\hat{U}(1)^\dagger \otimes \hat{U}(2)^\dagger)\}_{m\mu,n\theta} = \\ &= (\hat{U}(1) \otimes \hat{U}(2))_{m\mu,n\theta} (\hat{\rho})_{i\alpha,j\beta} (\hat{U}(1)^\dagger \otimes \hat{U}(2)^\dagger)_{j\beta,n\theta} = \\ &= (\hat{U}(1))_{m,i} (\hat{U}(2))_{\mu,\alpha} (\hat{\rho})_{i\alpha,j\beta} (\hat{U}(1)^\dagger)_{j,n} (\hat{U}(2)^\dagger)_{\beta,\theta}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

S použitím právě získaných vztahů můžeme vyjádřit maticové elementy operátoru  $\hat{\sigma}'$ , který vznikne parciální transpozicí operátoru hustoty  $\hat{\rho}'$ .

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma}')_{m\mu,n\theta} &= (\hat{\rho}')_{n\mu,m\theta} = (\hat{U}(1))_{n,i} (\hat{U}(2))_{\mu,\alpha} (\hat{\rho})_{i\alpha,j\beta} (\hat{U}(1)^\dagger)_{j,m} (\hat{U}(2)^\dagger)_{\beta,\theta} \\ &= (\hat{U}(1))_{m,i} (\hat{U}(2))_{\mu,\alpha} (\hat{\rho})_{j\alpha,i\beta} (\hat{U}(1)^\dagger)_{j,n} (\hat{U}(2)^\dagger)_{\beta,\theta} \\ &= (\hat{U}(1)^T)_{m,j} (\hat{U}(2))_{\mu,\alpha} (\hat{\rho})_{i\alpha,j\beta} ((\hat{U}(1)^T)^\dagger)_{i,n} (\hat{U}(2)^\dagger)_{\beta,\theta}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Operátor  $\hat{\sigma}'$  je svázaný s operátorem  $\hat{\sigma}$  unitární transformací  $\hat{U}' = \hat{U}(1)^T \otimes \hat{U}(2)$

$$\hat{\sigma}' = \{(\hat{U}(1)^T \otimes \hat{U}(2)) \hat{\sigma} \{((\hat{U}(1)^T)^\dagger \otimes (\hat{U}(2)^\dagger))^\dagger\}. \quad (3.33)$$

Unitární transformace ponechávají spektra operátorů beze změny, a proto i obě míry ( součtová i logaritmická ) jsou invariantní vůči transformaci (3.22). Tím jsme dokázali vlastnost **(U3)**.

Podívejme se nyní na některé zajímavé fyzikální systémy a zkusme rozsah využití jednotlivých měř provázání pro tyto konkrétní situace.

### 3.1.3 Srovnání měř provázání na konkrétních příkladech

#### Směs čistých a smíšených korelovaných stavů

První případ, kterým se budu zabývat je směs korelovaných stavů v čistém a smíšeném stavu popsaných operátorem hustoty ve tvaru

$$\hat{\rho} = \alpha \{|00\rangle + |11\rangle\} \{ \langle 00| + \langle 11| \} + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \{|01\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 10|\}. \quad (3.34)$$

Řešíme tedy případ, kdy dimenze podsystémů je  $N_a = N_b = 2$ . Podívejme se nejdříve na index korelace.

*Index Korelace:*

Redukované operátory hustoty jsou

$$\hat{\rho}_a = \frac{1}{2} \{ |1\rangle_a \langle 1|_a + |0\rangle_a \langle 0|_a \} \quad (3.35)$$

a

$$\hat{\rho}_b = \frac{1}{2} \{ |1\rangle_b \langle 1|_b + |0\rangle_b \langle 0|_b \}. \quad (3.36)$$

Spektra vlastních hodnot obou redukovaných operátorů jsou totožná,

$$\sigma(\hat{\rho}_{a(b)}) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}. \quad (3.37)$$

Snadno nahlédneme, že

$$S_a + S_b = 2 \ln 2. \quad (3.38)$$

Operátor hustoty  $\hat{\rho}$  má následující maticové vyjádření

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Spektrum operátoru hustoty  $\hat{\rho}$  je množina

$$\sigma(\hat{\rho}) = \left\{ \frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} - \alpha, 2\alpha, 0 \right\}. \quad (3.40)$$

Jednoduchou diskuzí možných případů, které mohou nastat, zjistíme ze vztahu pro index korelace (3.16)

$$I_c = \begin{cases} 2 \ln 2 + 2\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \ln\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + 2\alpha \ln 2\alpha & 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ \ln 2 & \alpha = 0 \\ 2 \ln 2 & \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.41)$$

*Míry indukované Peres-Horodeckého kritériem:*

Musíme nejdříve určit vlastní hodnoty parciální transpozice operátoru hustoty (3.34).

Maticový zápis parciální transpozice  $\hat{\rho}^{T_a}$  snadno určíme ze vztahu (3.39)

$$\rho^{T_a} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & \frac{1}{2} - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Spektrum parciální transpozice operátoru  $\hat{\rho}$  je tedy

$$\sigma(\hat{\rho}^{T_a}) = \left\{ \alpha, \alpha, \frac{1}{2} - 2\alpha, \frac{1}{2} \right\}. \quad (3.43)$$

Z podmínek obsažených v definici stavu (3.34) na koeficient  $\alpha$  vidíme, že jedinou zápornou vlastní hodnotou parciální transpozice je

$$\sigma^-(\hat{\rho}^{T_\alpha}) = \left\{ \frac{1}{2} - \alpha \right\} \quad \text{pro} \quad \frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{2}. \quad (3.44)$$

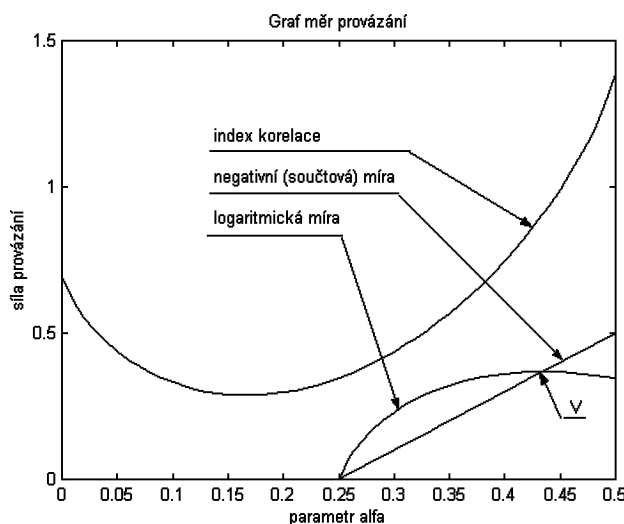
Negativní míra se shoduje se součtovou a má hodnotu

$$E_N = E_S = \begin{cases} 0 & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4} \\ 2\alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.45)$$

Logaritmická míra  $E_L$  je rovna

$$E_L = \begin{cases} 0 & 0 \leq \alpha < \frac{1}{4} \\ \left(\frac{1}{2} - 2\alpha\right) \ln\left(2\alpha - \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.46)$$

Zobrazme nyní získané výsledky do jednoho grafu



**Obr. 3.1:** Graf indexu korelace, negativní, součtové a logaritmické míry

Z obrázku vidíme hned několik závažných poznatků. Prvním z nich je skutečnost, že logaritmická míra nenabývá maxima pro  $\alpha = \frac{1}{2}$ , nýbrž nabývá maxima v bodě  $V(\alpha = 0.43)$ . Nespĺňuje tedy vlastnost **(U2)**. Dalším (nutno říci očekávaným) poznatkem je nižší citlivost všech tří měř indukovaných Peres - Horodeckého kritériem vůči stavům popsaných operátorem (3.34) pro parametr  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$ . Očekávaný právě proto, že Peres - Horodeckého kritérium je nutná a zároveň postačující podmínka pro to, aby daný systém byl separabilní. Z rozboru zobrazených průběhů měř můžeme říci, že stavy s parametrem  $\alpha$  z intervalu  $(0, \frac{1}{4}]$  jsou separabilní, ale nejsou neprovázané.

## Dva korelované spiny

V této části ukáží výpočet měř pro dobře známý příklad korelace dvou spinů popsané čistým stavem

$$|\psi\rangle = \alpha^{1/2}|1\rangle_a|0\rangle_b + (1 - \alpha)^{1/2}e^{i\omega}|0\rangle_a|1\rangle_b; \quad (3.47)$$

kde stavy  $|1\rangle$  a  $|0\rangle$  lze chápat jako vlastní stavy operátoru z-ové komponenty spinu a  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Opět řešíme soustavu, jejíž podsystémy jsou popsány Hilbertovým prostorem, jehož dimenze je dva.

*Index korelace:*

Operátory hustoty podsystémů nalezneme ve tvaru

$$\hat{\rho}_a = \alpha|1\rangle_a\langle 1|_a + (1 - \alpha)|0\rangle_a\langle 0|_a \quad (3.48)$$

a

$$\hat{\rho}_b = \alpha|0\rangle_b\langle 0|_b + (1 - \alpha)|1\rangle_b\langle 1|_b. \quad (3.49)$$

Vzhledem k tomu, že entropie celé soustavy je nula, stačí vypočítat entropie podsystémů

$$S_{a(b)} = -Tr\left\{\hat{\rho}_{a(b)}\left(\sum_n \frac{(-1)^n}{n}(\hat{\rho}_{a(b)} - \hat{I})^n\right)\right\}. \quad (3.50)$$

Vzhledem k tomu, že

$$Tr\left\{\hat{\rho}_{a(b)}(\hat{\rho}_{a(b)} - \hat{I})^n\right\} = \alpha(\alpha - 1)^n + (1 - \alpha)(-1)^n\alpha^n, \quad (3.51)$$

má index korelace tohoto systému velikost

$$I_c = -2\left[\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}(\alpha(\alpha - 1)^n + (1 - \alpha)(-1)^n\alpha^n)\right]. \quad (3.52)$$

Úpravou výrazu (3.52) s použitím vlastností rozvoje logaritmu dostaneme index korelace ve tvaru

$$I_c = -2[\alpha \ln \alpha + (1 - \alpha) \ln (1 - \alpha)]. \quad (3.53)$$

Index korelace je maximální, když  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Pro tuto hodnotu nabývá index korelace velikosti

$$I_c^{max} = 2 \ln 2. \quad (3.54)$$

*Míry indukované Peres - Horodeckého kritériem:*

Operátor hustoty systému popsaneho vektorem (3.47) má tvar

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = & \alpha|10\rangle\langle 10| + (1 - \alpha)|01\rangle\langle 01| + \\ & + \alpha^{1/2}(1 - \alpha)^{1/2} \exp(-i\omega)|10\rangle\langle 01| + \\ & + \alpha^{1/2}(1 - \alpha)^{1/2} \exp(i\omega)|01\rangle\langle 10|. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Maticový zápis výše uvedeného operátoru hustoty je

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha^{\frac{1}{2}}(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{-i\omega} & 0 \\ 0 & \alpha^{\frac{1}{2}}(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{i\omega} & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

A parciální transpozice operátoru hustoty  $\hat{\rho}$  má tvar

$$\rho^{\mathbf{Ta}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha^{\frac{1}{2}}(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{-i\omega} \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ \alpha^{\frac{1}{2}}(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{i\omega} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Z charakteristického polynomu spočítáme vlastní hodnoty parciální transpozice a zjistíme, že její spektrum je množina

$$\sigma(\hat{\rho}^{\mathbf{Ta}}) = \{\alpha, 1-\alpha, \sqrt{\alpha(1-\alpha)}, -\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\}. \quad (3.58)$$

Odtud snadno určíme, které vlastní hodnoty ze spektra jsou záporné. Vzhledem k parametru  $\alpha$ , který je vymezen podmínkou  $0 \leq \alpha \leq 1$ , je to pouze vlastní číslo

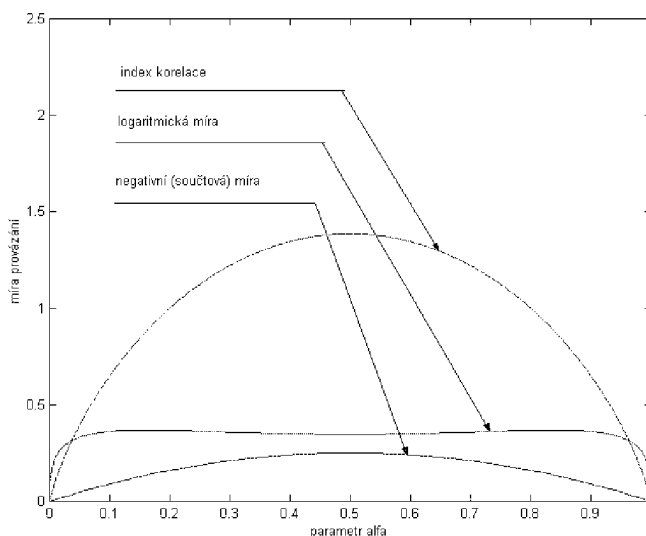
$$\sigma^-(\hat{\rho}^{\mathbf{Ta}}) = \{-\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\}. \quad (3.59)$$

Opět jednoduchým rozbohem možných případů, které mohou nastat, zjistíme z definičních vztahů pro míry, že

$$E_N = E_S = \sqrt{\alpha(1-\alpha)}, \quad (3.60)$$

$$E_L = \begin{cases} 0 & \alpha = 0, 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\alpha(1-\alpha)} \ln(\alpha(1-\alpha)) & 0 < \alpha < 1. \end{cases} \quad (3.61)$$

Získané výsledky zobrazme do jednoho grafu



**Obr. 3.2:** Graf indexu korelace, negativní, součtové a logaritmické míry

Opět vidíme, že logaritmická míra nesplňuje vlastnost **(U2)**, neboť nenabývá maxima pro  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Ostatní míry na této parametrické množině stavů (3.47) vlastnost **(U2)** splňují.

### Optická síť s $M$ vstupy

Obecná síť je systém mnoha interagujících prvků. Potřeba porozumět chování světla v kvantových sítích má dva kořeny. Prvním je použití sítí pro velmi přesný informační přenos nebo měření, při kterém je nutné kvantovou neurčitost snížit na minimum. Druhým je možnost testovat některé předpovědi kvantové mechaniky na optických sítích. Síť lze zadat např. jejím systémovým hamiltoniánem nebo tzv. transformační funkcí, která určuje relaci mezi vstupem a výstupem. Z pohledu transformační funkce lze síť rozdělit na lineární (kombinace čoček, zrcadel, dělič paprsků) a nelineární (Kerrové medium, fázové konjugace, zesilovače). V případě lineární transformace má relace mezi vstupem a výstupem následující tvar

$$\hat{b} = \hat{L}\hat{a}, \quad (3.62)$$

kde  $\hat{a}$  je anihilační operátor popisující vstup,  $\hat{b}$  je anihilační operátor popisující výstup a  $\hat{L}$  je lineární transformace mezi vstupním a výstupním anihilačním operátorem.

Sítě také rozdělujeme na pasivní, které nemění počet částic v soustavě, a aktivní, které naopak tento počet mění.

Fyzikální stavy, které jsme řešili v předcházejících příkladech, byli jednoduché a měli ilustrovat vlastnosti jednotlivých měř provázání. Pro realizaci a studium složitějších provázaných stavů použijeme optickou síť zadanou systémovým hamiltoniánem

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^M \omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M G_{i,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j, \quad (3.63)$$

kde  $\omega_i, G_{i,j} \in \mathfrak{R}$ ,  $G_{i,j} = G_{j,i}$  a  $G_{i,i} = 0$  pro všechna  $i, j \in \hat{M}$ . Uvažovaná síť patří mezi nelineární pasivní sítě s  $M$  vstupy ( $M \geq 2$ ).

Předpokládejme nyní, že do této sítě s  $M$  mody vstupuje světelný stav  $|\psi_0\rangle$  složený z  $M$  modů, přičemž  $i$ -tý je v kanonickém koherentním stavu s amplitudou  $\alpha_i$

$$|\psi_0\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_M\rangle, \quad (3.64)$$

kde

$$|\alpha_i\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha_i|^2}{2}\right) \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |n_i\rangle. \quad (3.65)$$

Časový vývoj  $|\psi(t)\rangle$  stavu  $|\psi_0\rangle$  v síti s časově nezávislým hamiltoniánem (3.63) má tvar

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi_0\rangle = \exp(i\hat{H}t)|\psi_0\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \hat{H}^n\right)|\psi_0\rangle \quad (3.66)$$

Odtud tedy

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_M|^2)\right] \sum_{n_1, \dots, n_M=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \left[\sum_{i=1}^M \omega_i n_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M G_{i,j} n_i n_j\right] * \\ & * \frac{\alpha_1^{n_1} \dots \alpha_M^{n_M}}{\sqrt{n_1! \dots n_M!}} |n_1, \dots, n_M\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_M|^2)\right] * \\ & * \sum_{n_1, \dots, n_M=0}^{\infty} \exp\left[\left(\sum_{i=1}^M \omega_i n_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M G_{i,j} n_i n_j\right) it\right] \frac{\alpha_1^{n_1} \dots \alpha_M^{n_M}}{\sqrt{n_1! \dots n_M!}} |n_1, \dots, n_M\rangle \quad (3.67) \end{aligned}$$

Původně  $M$  nezávislých koherentních stavů se navzájem provázali. Celou soustavu nelze vyjádřit jako tenzorový součin nezávislých stavů. Pro řešení korelací musíme přejít k operátorovému popisu stavů. Operátor hustoty odpovídající stavu  $|\psi(t)\rangle$  má tvar

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_C(t) &= |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| = \exp[-(|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_M|^2)] = \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_M=0}^{\infty} \sum_{m_1, \dots, m_M=0}^{\infty} \exp\left[\left[\sum_{i=1}^M \omega_i (n_i - m_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M G_{i,j} (n_i n_j - m_i m_j)\right] it\right] * \end{aligned}$$

$$* \frac{\alpha_1^{n_1} \dots \alpha_M^{n_M} \alpha_1^{*m_1} \dots \alpha_M^{*m_M}}{\sqrt{n_1! \dots n_M! m_1! \dots m_M!}} |n_1, \dots, n_M\rangle \langle m_1, \dots, m_M|. \quad (3.68)$$

Naším úkolem je aplikovat definované míry provázání na dva vybrané mody  $u$  a  $v$  popsané redukovaným operátorem hustoty  $\hat{\rho}_{uv}$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{uv}(t) = & \exp [-(|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_M|^2)] * \\ & * \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \sum_{m_1, m_2} \exp \{[\omega_u(n_1 - m_1) + \omega_v(n_2 - m_2)]it\} \exp \{G_{uv}(n_1 n_2 - m_1 m_2)it\} * \\ & * \frac{\alpha_u^{n_1} \alpha_v^{n_2} \alpha_u^{*m_1} \alpha_v^{*m_2}}{\sqrt{n_1! n_2! m_1! m_2!}} \prod_{j=1, j \neq u, v}^M \exp \{|\alpha_j|^2 \exp \{[G_{u,j}(n_1 - m_1) + G_{v,j}(n_2 - m_2)]it\}\} \\ & |n_1, n_2\rangle \langle m_1, m_2|. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Vidíme, že jde o komplikovaný operátor hustoty. Nebudu uvádět celý postup, jak analyticky vyřešit index korelace, neboť je velmi pracný a zdlouhavý. Spočívá v nalezení redukovaných operátorů  $\hat{\rho}_u$  a  $\hat{\rho}_v$  příslušných k vybraným modům  $u$  a  $v$ . Následně spočteme jednotlivé entropie vystupující ve vztahu pro index korelace a vyjádříme index korelace

$$\begin{aligned} I_c = & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^j \sum_{n_1, \dots, n_M=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{j} \binom{j}{l} \frac{\exp [-(l+1)(|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_M|^2)]}{n_1! \dots n_{l+1}!} \{|\alpha_u|^{2(n_1 + \dots + n_{l+1})} * \\ & * \exp \{ \sum_{j=1, j \neq u}^M |\alpha_j|^2 [\sum_{k=1}^l \exp [G_{u,j}(n_{k+1} - n_k)it] + \exp [G_{u,j}(n_1 - n_{l+1})it]] \} + \\ & + |\alpha_v|^{2(n_1 + \dots + n_{l+1})} \exp \{ \sum_{j=1, j \neq v}^M |\alpha_j|^2 [\sum_{k=1}^l \exp [G_{v,j}(n_{k+1} - n_k)it] + \exp [G_{v,j}(n_1 - n_{l+1})it]] \} \} + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^j \sum_{n_1, \dots, n_{2l+2}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{j} \binom{j}{l} \frac{\exp [-(l+1)(|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_M|^2)]}{n_1! \dots n_{2l+2}!} K(n_1, \dots, n_{2l+2}) * \\ & * \exp \{ \sum_{j=1, j \ni u, v}^M |\alpha_j|^2 [\sum_{k=1}^l \exp [G_{u,j}(n_{2k+1} - n_{2k-1})it] \exp [G_{v,j}(n_{2k+2} - n_{2k})it] + \\ & + \exp [G_{u,j}(n_{2k+1} - n_{2k-1})it] \exp [G_{v,j}(n_{2k+2} - n_{2k})it]] \}, \end{aligned} \quad (3.70)$$



kde

$$K(n_1, \dots, n_{2l+2}) = |\alpha_u|^{2(n_1+n_3+\dots+n_{2l+1})} |\alpha_v|^{2(n_2+n_4+\dots+n_{2l+2})}. \quad (3.71)$$

**Poznámka:** Pro dvoumodový vstup lze výsledek značně zjednodušit, neboť  $S_{uv} = 0$ , protože operátor  $\hat{\rho}_{uv}(t)$  popisuje čistý stav.

$$I_c = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^j \sum_{n_1, \dots, n_M=0}^{\infty} \frac{-1^l}{j} \binom{j}{l} \frac{\exp[-(l+1)(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)]}{n_1! \dots n_{l+1}!} * \\ * \left\{ |\alpha_1|^{2(n_1+\dots+n_{l+1})} \exp \left\{ |\alpha_2|^2 \left[ \sum_{k=1}^l \exp[G_{1,2}(n_{k+1} - n_k)it] + \exp[G_{1,2}(n_1 - n_{l+1})it] \right] \right\} + \right. \\ \left. + |\alpha_2|^{2(n_1+\dots+n_{l+1})} \exp \left\{ |\alpha_1|^2 \left[ \sum_{k=1}^l \exp[G_{2,j}(n_{k+1} - n_k)it] + \exp[G_{2,j}(n_1 - n_{l+1})it] \right] \right\} \right\} \quad (3.72)$$

Numerické vyčíslení tohoto vztahu je vzhledem k jeho složitosti v současné době nemožné. Povšimněme si však dvou důsledků, které z analytického řešení plynou:

(I) Stupeň korelace je závislý pouze na velikosti amplitudy. Fáze amplitudy nemá na provázání vliv.

(II) Index korelace vykazuje v čase periodické chování. Délka periody závisí na parametrech  $G_{i,j}$ . Snadno se přesvědčíme, že když dosadíme  $G_{u,j} = 0$ , nedojde k žádnému provázání.

**Poznámka:** V případě, že místo koherentních stavů pošleme na vstup fokovské stavy, nedojde mezi mody k žádnému provázání.

Pro ostatní míry indukované Peres - Horodeckého kritériem nelze nalézt analytické řešení. Můžeme však řešit stupeň korelace dvou modů numericky. Vzhledem k vlastnostem kanonických koherentních stavů rozložíme jednotlivé vstupní mody na dvě části

$$|\alpha_i\rangle = \left( \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_i|^2\right) \frac{\alpha_i^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |n_i\rangle \right) = \\ = \underbrace{\left( \sum_{n_i=0}^N \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_i|^2\right) \frac{\alpha_i^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |n_i\rangle \right)}_{|\psi_0^c\rangle} + \underbrace{\left( \sum_{n_i=N+1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_i|^2\right) \frac{\alpha_i^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |n_i\rangle \right)}_{|\psi_0^{rest}\rangle} \quad (3.73)$$

tak, že norma vektoru  $|\psi_0^{rest}\rangle$  je dostatečně malá a dále budeme popisovat vstupní  $i$ -tý mod  $\alpha_i$  vektorem  $|\psi_0^{rest}\rangle$ . Stačí tedy vyřešit provázanost dvou vybraných modů  $u, v$  popsáných redukováným operátorem

$$\hat{\rho}_{uv}^{0c}(t) = \exp[-(|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_M|^2)]*$$

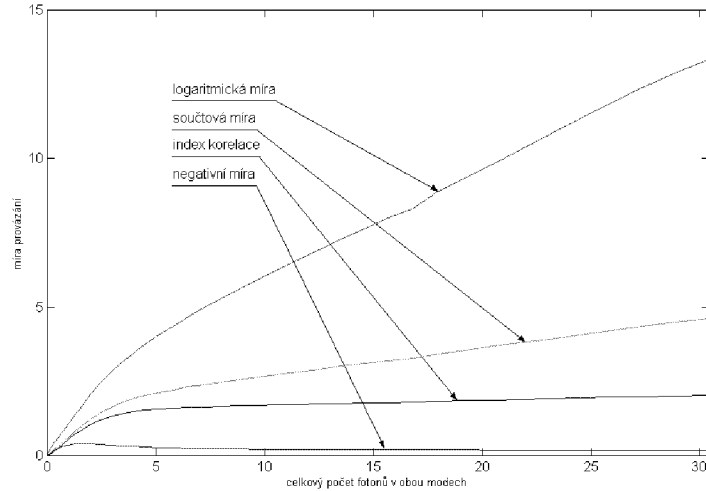
$$\begin{aligned}
& * \sum_{n_1, n_2=0}^{N^2} \sum_{m_1, m_2}^{N^2} \exp \{[\omega_u(n_1 - m_1) + \omega_v(n_2 - m_2)]it\} \exp \{G_{uv}(n_1 n_2 - m_1 m_2)it\} * \\
& * \frac{\alpha_u^{n_1} \alpha_v^{n_2} \alpha_u^{*m_1} \alpha_v^{*m_2}}{\sqrt{n_1! n_2! m_1! m_2!}} \prod_{j=1, j \neq u, v}^M \exp \{|\alpha_j|^2 \exp \{[G_{u,j}(n_1 - m_1) + G_{v,j}(n_2 - m_2)]it\}\} \\
& |n_1, n_2\rangle \langle m_1, m_2|, \tag{3.74}
\end{aligned}$$

kde  $N$  je dostatečně velké. To znamená, že stopa operátoru hustoty

$$\hat{\rho}_0^C = |\psi_0^C\rangle \langle \psi_0^C| \tag{3.75}$$

je v řádu, který potřebujeme, dostatečně blízká jedničce.

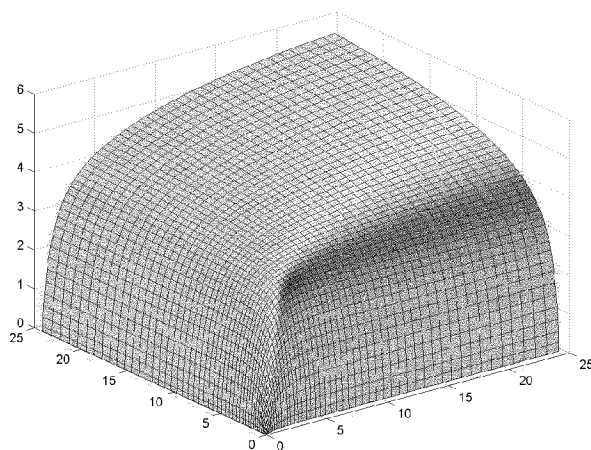
Nyní řešíme provázanost stavu popsaného konečně dimenzionálním operátorem. Hledáme tedy vlastní hodnoty operátoru (3.74) a vlastní hodnoty jeho parciální transpozice. Na obrázku (3.3) vidíme srovnání indexu korelace s mírami indukovanými Peres - Horodeckého kritériem pro dvoumodový vstup s parametrem  $G_{12} = 1$ .



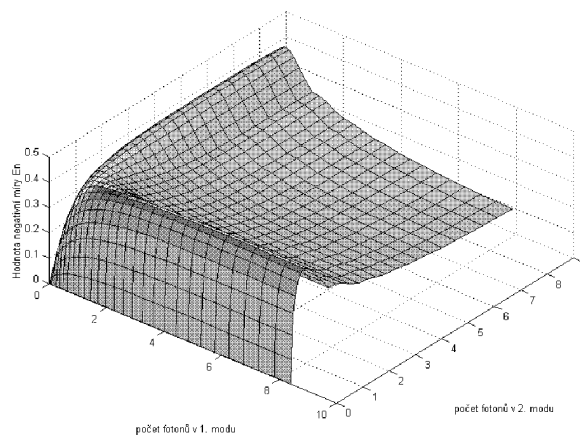
**Obr. 3.3:** Srovnání indexu korelace, negativní, součtové a logaritmické míry v závislosti na počtu fotonů (v obou modech je stejný počet fotonů).

Všechny míry kromě negativní mají typově stejný průběh. S rostoucím počtem excitací vstupujících do vzájemné interakce roste i míra provázání. Jedinou výjimkou je negativní míra. Je to způsobeno tím, že zohledňuje pouze nejmenší negativní vlastní hodnotu parciální transpozice. Tento fakt jsme samozřejmě nepostřehli u

příkladů, kde měla parciální transpozice pouze jednu vlastní hodnotu. Negativní míra je tedy určitým numerickým testem, zda-li je daný stav separabilní. Ale nemůže být v složitějších případech numerickým testem pro určení síly korelace. Podívejme se nyní na grafy jednotlivých měř pro dvoumodový vstup v závislosti na amplitudě  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ .

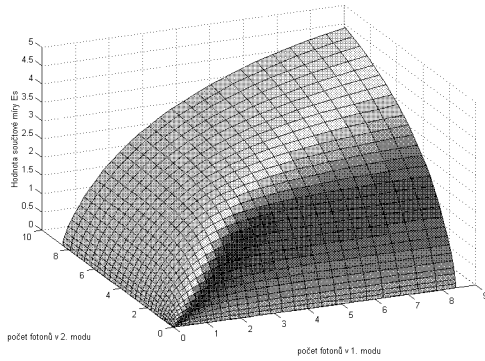


**Obr. 3.4:** Graf indexu korelace v závislosti na počtu fotonů v prvním a druhém modu,  $G_{12} = 1$  a  $t = 1$ .

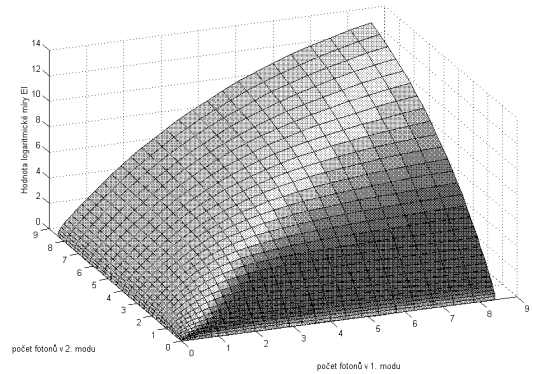


**Obr. 3.5:** Graf negativní míry v závislosti na počtu fotonů v prvním a druhém modu,  $G_{12} = 1$  a  $t = 1$ .

Získané výsledky v grafech potvrzují naše poznatky. Všechny míry jsou symetrické vzhledem k amplitudám  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ . Kromě negativní míry vykazují testy síly



**Obr. 3.6:** Graf součtové míry v závislosti na počtu fotonů v prvním a druhém modu,  $G_{12} = 1$  a  $t = 1$ .



**Obr. 3.7:** Graf logaritmické míry v závislosti na počtu fotonů v prvním a druhém modu,  $G_{12} = 1$  a  $t = 1$ .

korelace podobnou závislost síly provázání na počtu fotonů vstupujících do vzájemné interakce. Jinými slovy definují stejné uspořádání na množině výstupních stavů ze sítě. Z numerických výpočtů dále plyne, že síla provázání není závislá na fázi amplitud. To koresponduje s našimi teoretickými poznatky, neboť operátor hustoty (3.74) rovněž není závislý na fázi amplitud.

## 3.2 Provázání vyšších řádů

Hledání popisu korelací, či silnějšího pojmu provázání, vícečasticových systémů je velmi obtížné. Studium by se mělo soustředit nejen na sílu korelace, ale zajímají nás rovněž možné korelace podsystemů. Vzhledem k obtížnosti celého problému zůžím svůj zájem na studium silnějšího pojmu provázání. Cílem tohoto zájmu je najít kritérium (numerický test), zda-li je daný stav provázaný, jakého řádu provázání obsahuje a může-li být tento numerický test vhodnou mírou pro určení síly provázání. Zajímavý a poměrně úspěšný popis byl navržen J. Schlienem a G. Mahlerem [9]. Jeho nevýhodou je, že je navržen pouze pro systémy konečné dimenze. Nicméně, jak později uvidíme, je pro nás motivujícím příkladem, který úzce souvisí s naším navrhovaným popisem. Navíc je založen na dekompozici daného stavu bez nutnosti použití diagonalizačních a maximalizačních procedur.

### 3.2.1 Schlien - Mahlerův popis provázání

Hned v úvodu znovu zdůrazňuji, že tento popis se týká pouze kvantových systémů s Hilbertovým prostorem  $\mathcal{H}$  konečné dimenze  $N$ . Libovolný Hermitovský operátor  $\hat{L}$  na tomto prostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci jednotkového operátoru a

generátorů  $SU(N)$  algebry

$$\hat{L} = \frac{\lambda}{N} \hat{1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N^2-1} \lambda_j \hat{\lambda}_j, \quad (3.76)$$

kde koeficient  $\lambda$  je určen normalizační podmínkou  $\lambda = Tr(\hat{L})$ ,  $\{\hat{\lambda}\}_{i=1}^{N^2-1}$  jsou generátory  $SU(N)$  algebry a tedy splňují relaci

$$Tr\{\hat{\lambda}_i\} = 0, \quad (3.77)$$

$$Tr\{\hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (3.78)$$

Koeficienty  $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N^2-1}$  lze vyjádřit ve tvaru

$$\lambda_j = Tr\{\hat{\lambda}_j \hat{L}\}. \quad (3.79)$$

Pro případ  $N = 2$  mohou být generátory reprezentovány Pauliho maticemi. Nadále budu pracovat s generátory definovanými následujícím způsobem. Označme  $\hat{P}_{jk}$  projekční operátor

$$\hat{P}_{jk} = |j\rangle\langle k|, \quad (3.80)$$

kde  $|n\rangle$  jsou ortonormální vlastní stavy Hermitovského operátoru  $\hat{L}$  na  $\mathcal{H}$ . To samozřejmě jde, neboť Hermitovský operátor je normální a protože jsme na lineárním prostoru konečné dimenze je i Hilbert - Schmidtův. Z teorie lineárních operátorů plyne, že je to operátor s čistě bodovým spektrem. Zkonstruuje  $N^2 - 1$  operátorů  $\{\hat{\lambda}_j\}$

$$\{\hat{\lambda}_j\}_{j=1}^{N^2-1} := \{\hat{u}_{12}, \hat{u}_{13}, \dots, \hat{v}_{12}, \hat{u}_{13}, \dots, \hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_{N-1}\} \quad (j = 1, \dots, N^2 - 1), \quad (3.81)$$

kde

$$\hat{w}_l = -\sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} (\hat{P}_{11} + \hat{P}_{22} + \dots + \hat{P}_{ll} - l\hat{P}_{l+1, l+1}), \quad (3.82)$$

$$\hat{u}_{jk} = \hat{P}_{jk} + \hat{P}_{kj}, \quad (3.83)$$

$$\hat{v}_{jk} = i(\hat{P}_{jk} - \hat{P}_{kj}) \quad (3.84)$$

pro  $1 \leq l \leq N - 1$  a  $1 \leq j < k \leq N$ .

Operátor hustoty lze zapsat ve tvaru

$$\hat{\rho} = \frac{1}{N} \hat{1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N^2-1} \lambda_j \hat{\lambda}_j. \quad (3.85)$$

Vektor  $\lambda = \{\lambda_j\}$  je  $(N^2 - 1)$  - dimenzionální vektor označovaný jako **vektor koherence** nebo také **zobecněný Blochův vektor**. Vzhledem k hermitovosti operátoru  $\hat{\rho}$  je vektor koherence reálný. Důležité je zmínit transformační vlastnosti vektoru koherence vzhledem k unitární transformaci  $\hat{U}$

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}' = \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger. \quad (3.86)$$

Dekompozicí  $\hat{\rho}'$  do tvaru (3.85) s koeficienty  $\lambda'_j$  a využitím invariantnosti operátory stopy vzhledem k cyklické záměně operátorů v argumentu získáme transformační vztah pro složky  $\lambda'_j$  transformovaného vektoru koherence

$$\lambda'_j = Tr\{\hat{\lambda}_j \hat{\rho}'\} = Tr\{\hat{U}^\dagger \hat{\lambda}_j \hat{U} \hat{\rho}\}. \quad (3.87)$$

Operátor  $\hat{U}^\dagger \hat{\lambda}_j \hat{U}$  lze vzhledem k jeho hermitovosti rovněž zapsat pomocí generátorů  $SU(N)$  algebry

$$\hat{U}^\dagger \hat{\lambda}_j \hat{U} = \frac{1}{2} Tr\{\hat{U}^\dagger \hat{\lambda}_j \hat{U} \hat{\lambda}_j \hat{\lambda}_j\} =: T_{ij} \hat{\lambda}_j. \quad (3.88)$$

Koeficienty  $T_{ij}$  lze chápat jako prvky reálné matice rozměru  $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ . Odtud dosazením vztahu (3.88) do výrazu (3.87) získáme konečný vztah pro transformaci vektoru koherence

$$\lambda_i \rightarrow \lambda'_i = T_{ij} \lambda_j. \quad (3.89)$$

$T$  je orthonormální matice a platí pro ni relace

$$\sum_{i=1}^{N^2-1} T_{ij} T_{ik} = \delta_{jk}, \quad \sum_{i=1}^{N^2-1} T_{ji} T_{ki} = \delta_{jk}. \quad (3.90)$$

Aplikujeme-li na operátor hustoty dvě unitární transformace  $\hat{U}_1$  a  $\hat{U}_2$ , bude mít výsledná transformační matice  $T$  tvar

$$T_{ik}(\hat{U}_1 \hat{U}_2) = T_{ij}(\hat{U}_1) T_{jk}(\hat{U}_2). \quad (3.91)$$

Matice  $T$  tedy popisuje  $(N^2 - 1)$  - dimenzionální reprezentaci grupy  $SU(N)$ .

## Dva podsystémy

Máme soustavu složenou ze dvou podsystémů **a** a **b** popsané stavovým Hilbertovým prostorem  $\mathcal{H}_a$  a  $\mathcal{H}_b$  s dimenzí  $N_a$  a  $N_b$ . Bázi  $SU(N_a N_b)$  algebry získáme tenzorovým součinem generátorů  $SU(N_a)$  a  $SU(N_b)$ . V duchu této myšlenky můžeme operátor hustoty  $\hat{\rho}$  soustavy složené ze dvou komponent psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = & \frac{1}{N_a N_b} \hat{1}_a \otimes \hat{1}_b + \frac{1}{2N_b} \sum_{i=1}^{N_b^2-1} \lambda(b) (\hat{\lambda}_i \otimes \hat{1}_b) + \frac{1}{2N_a} \sum_{i=1}^{N_a^2-1} \lambda(b) (\hat{1}_a \otimes \hat{\lambda}_i) \\ & + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N_a^2-1} \sum_{j=1}^{N_b^2-1} K_{ij}(a, b) (\hat{\lambda}_i \otimes \hat{\lambda}_j). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Faktor  $\frac{1}{N_a N_b}$  opět normalizuje stopu operátoru hustoty na jedničku. Vektory koherence  $\lambda(a)$  a  $\lambda(b)$ , pro něž platí

$$\lambda_i(a) = Tr\{\hat{\rho}(\hat{\lambda}_i \otimes \hat{1}_b)\} \quad (3.93)$$

$$\lambda_i(b) = Tr\{\hat{\rho}(\hat{1}_a \otimes \hat{\lambda}_i)\}, \quad (3.94)$$

určují vlastnosti jednotlivých podsystémů, neboť pro redukované operátory hustoty platí

$$\hat{\rho}_a = Tr_b\{\hat{\rho}\} = \frac{1}{N_a}\hat{1}_a + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_a^2-1}\lambda_i(a)\hat{\lambda}_i \quad (3.95)$$

$$\hat{\rho}_b = Tr_a\{\hat{\rho}\} = \frac{1}{N_b}\hat{1}_b + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_b^2-1}\lambda_i(b)\hat{\lambda}_i. \quad (3.96)$$

V tenzoru druhého řádu  $K_{ij}(a, b)$

$$K_{ij}(a, b) = Tr\{\hat{\rho}(\hat{\lambda}_i \otimes \hat{\lambda}_j)\} \quad (3.97)$$

je obsažena informace o korelaci dvou podsystémů **a** a **b**. Tenzor  $K_{ij}(a, b)$  se nazývá korelační. Označme rozdíl

$$M_{ij}(a, b) := K_{ij}(a, b) - \lambda_i(a)\lambda_j(b) \quad (3.98)$$

jako prvky tenzoru  $M(a, b)$ . Z definice tenzoru  $M(a, b)$  (3.98) vidíme, že jeho složky jsou nulové pro libovolnou neprovázanou systavu dvou podsystémů. Proto nazýváme tenzor  $M(a, b)$  **tenzorem provázání**. Stav libovolné dvoukomponentové soustavy je jednoznačně určen tenzorem provázání  $M(a, b)$  a Blochovy vektory  $\lambda(a)$  a  $\lambda(b)$ .

Uvažujme nyní unitární transformaci ve tvaru  $\hat{U}(a) \otimes \hat{U}(b)$ , kde  $\hat{U}(a)$ , resp.  $\hat{U}(b)$ , je unitární transformace na  $\mathcal{H}_a$ , resp.  $\mathcal{H}_b$ . Stejně jako v případě vektoru koherence zjistíme transformační vlastnosti koeficientů

$$\lambda_i(a(b)) \longrightarrow T_{ik}(a(b))\lambda_k(a(b)), \quad (3.99)$$

$$K_{ij} \longrightarrow T_{ik}(a)T_{jn}(b)K_{kn}, \quad (3.100)$$

kde  $T(a(b))$  je přiřazená transformační matice dle (3.88) k  $\hat{U}(a(b))$ . Ze vztahu (3.100) a definice tenzoru  $M$  (3.98) plyne, že transformace tenzoru provázání je stejná jako tenzoru  $K_{ij}(a, b)$ ,

$$M_{ij} \longrightarrow T_{ik}(a)T_{jn}(b)M_{kn}. \quad (3.101)$$

Definujme nyní na základě znalosti tenzoru provázání míru provázání. Označme  $N$  jako  $\min(N_a, N_b)$  a definujme míru provázání následovně

$$\beta = \frac{N^2}{4(N^2-1)}Tr\{M^T M\}, \quad (3.102)$$

kde  $\frac{N^2}{4(N^2-1)}$  je normalizační faktor, aby

$$0 \leq \beta \leq 1. \quad (3.103)$$

Využijeme-li definičního vztahu pro tenzor provázání (3.98), můžeme míru provázání  $\beta$  přepsat do tvaru

$$\beta = \frac{N^2}{4(N^2-1)}\sum_{i=1}^{N_a^2-1}\sum_{j=1}^{N_b^2-1}\{K_{ij}(a, b) - \lambda_i(a)\lambda_j(b)\}^2. \quad (3.104)$$

## Soustava se třemi a více podsystémy

Stejným způsobem, kterým jsme definovali generátory  $SU(N)$  algebry soustavy s dvěma podsystémy, můžeme definovat generátory  $SU(N)$  soustavy s třemi a více komponentami. Podívejme se na případ soustavy složené ze tří podsystémů, které budeme pro snazší zápis označovat čísly 1,2 a 3. Libovolný operátor hustoty je zcela popsán třemi zobecněnými Blochovými vektory  $\lambda(m)$ ,  $m = 1,2,3$ , třemi dvousystémovými korelačními tenzory  $K_{ij}(m,n)$ ,  $1 \leq m < n \leq 3$  a jedním třísystémovým tenzorem  $K_{ijk}(1,2,3)$  třetího řádu definovaným vztahem

$$K_{ijk}(1,2,3) = Tr\{\hat{\rho}(\hat{\lambda}_i(1) \otimes \hat{\lambda}_j(2) \otimes \hat{\lambda}_k(3))\}. \quad (3.105)$$

Odpovídající tenzor provázání třetího řádu dostaneme odečtením všech součinů tenzorů provázání nižšího řádu a zobecněných Blochových vektorů od korelačního tenzoru třetího řádu:

$$M_{ij}(m,n) = K_{ij}(m,n) - \lambda_i(m)\lambda_j(n), \quad (3.106)$$

$$M_{ijk}(1,2,3) = K_{ijk}(1,2,3) - \lambda_i(1)M_{jk}(2,3) - \lambda_j(2)M_{ik}(1,3) - \lambda_k(3)M_{ij}(1,2) - \lambda_i(1)\lambda_j(2)\lambda_k(3). \quad (3.107)$$

Z jakého důvodu označujeme tento tenzor jako tenzor provázání třetího řádu? Důvodem je skutečnost, že pro libovolný neprovázaný stav jsou prvky tohoto tenzoru nulové. Důkaz provedu až v kapitole 3.96, neboť je založen na definici míry provázání soustavy s třemi podsystémy.

Podívejme se na následující situaci. Předpokládejme, že máme soustavu v čistém stavu a tenzor provázání třetího řádu není nulový (vzhledem k tomu, že mluvíme o celé soustavě, znamená to, že soustava obsahuje provázání třetího řádu). Zajímá nás, mohou-li být všechny tři tenzory provázání a vektory koherence nulové. Uvažujme speciální případ, kdy dimenze všech tří podsystémů je  $N$ . V takovém případě má operátor hustoty tvar

$$\hat{\rho} = \frac{1}{N^3}\hat{1} \otimes \hat{1} \otimes \hat{1} + \frac{1}{8} \sum_{i,j,k=1}^{N^2-1} M_{ijk}(1,2,3)\hat{\lambda}_i(1) \otimes \hat{\lambda}_j(2) \otimes \hat{\lambda}_k(3). \quad (3.108)$$

Rozdělme nyní soustavu na dva podsystémy a spočítejme jejich příslušné redukované operátory hustoty, např.  $\hat{\rho}_{12}$  a  $\hat{\rho}_3$ . Protože stopa přes generátory  $SU(N)$  algebry je nulová, jsou oba redukované operátory hustoty v maximálně smíšeném stavu. Jejich von Neumannova entropie je tedy  $\ln N^2$  a  $\ln N$ . Celý operátor ale reprezentuje čistý stav, a proto entropie celého systému je nulová. Z Araki - Lieboho teorému plyne, že entropie obou podsystémů musí být stejná. To je spor. Odpověď je tedy záporná. Jak celý postup zobecnit na popis provázání soustavy s  $n$  podsystémy? Stejným způsobem jako v případě tří podsystémů nalezneme generátory  $SU(N)$  algebry a obecně vyjádříme operátor hustoty. Podobně jako v případě tří podsystémů (3.109) vyjádříme postupně tenzory provázání od druhého řádu až po tenzor provázání  $n$ -tého řádu.



### 3.2.2 Míra provázání

V minulé části jsme ukázali, že hlavní myšlenkou Schlienz - Mahlerova popisu je vypočtení tenzoru provázání odečtením všech součinnových kombinací tenzorů provázání nižších řádů od korelačního tenzoru, např. pro soustavu s třemi podsystémy je tenzor provázání třetího řádu definován následovně

$$M_{ijk}(1, 2, 3) = K_{ijk}(1, 2, 3) - \lambda_i(1)M_{jk}(2, 3) - \lambda_j(2)M_{ik}(1, 3) - \lambda_k(3)M_{ij}(1, 2) - \lambda_i(1)\lambda_j(2)\lambda_k(3). \quad (3.109)$$

Odečtením všech korelací nižšího řádu získáme tenzor, který indikuje provázání nejvyššího řádu. Formulujeme výše zmíněnou ideu v pojmech vzdálenost operátoru hustoty  $\hat{\rho}$  popisující náš zkoumaný stav od objektu  $\hat{\rho}_{approx}$ , který reprezentuje korelace nižšího řádu. Vzdálenost mezi dvěma Hermitovskými operátory definujeme jako

$$D(\hat{\rho}, \hat{\rho}_{approx}) = \sqrt{\text{Tr}\{(\hat{\rho} - \hat{\rho}_{approx})^2\}} \quad (3.110)$$

a odtud

$$D(\hat{\rho}, \hat{\rho}_{approx}) = \sqrt{\text{Tr}\{\hat{\rho}^2\} + \text{Tr}\{\hat{\rho}_{approx}^2\} - 2\text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{\rho}_{approx}\}}. \quad (3.111)$$

Pro případ, že oba objekty (operátor hustoty a operátor reprezentující nižší korelace) jsou operátory hustoty čistého stavu, redukuje se vztah pro vzdálenost těchto objektů na

$$D(\hat{\rho}, \hat{\rho}_{approx}) = \sqrt{2 - 2|\langle \psi | \psi_{approx} \rangle|^2}, \quad (3.112)$$

kde je  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  a  $\hat{\rho}_{approx} = |\psi_{approx}\rangle\langle\psi_{approx}|$ . Obor hodnot vzdálenosti  $D$  je z intervalu  $[0, 2]$ . Můžeme jej snadno přeskálovat, vynásobíme-li vzdálenost faktorem  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Maximum nabývá v případě, když  $\text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{\rho}_{approx}\} = 0$ , což znamená, že aproximujeme operátor hustoty jeho ortogonálním doplňkem.

#### Dva podsystémy

Pro případ soustavy s dvěma podsystémy **1** a **2** definujeme  $\hat{\rho}_{approx}$  následovně

$$\hat{\rho}_{approx} = \text{Tr}_2\{\hat{\rho}\} \otimes \text{Tr}\{\hat{\rho}\} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2. \quad (3.113)$$

Míra provázání druhého řádu je potom vyjádřena jako

$$D_2(\hat{\rho}) = \sqrt{\text{Tr}\{(\hat{\rho} - \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2)^2\}}. \quad (3.114)$$

Z definice triviálně plyne, že míra je nulová právě tehdy, když soustava je neprovázaná.

Předpokládejme transformaci Hilbertova prostoru celé soustavy ve tvaru

$$\hat{U} = \hat{U}(1) \otimes \hat{U}(2). \quad (3.115)$$

Pro operátor hustoty a redukované operátory hustoty jeho podsystémů platí

$$\hat{\rho} \longrightarrow \hat{\rho}' = \hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger, \quad \hat{\rho}_1 \longrightarrow \hat{\rho}'_1 = \hat{U}(1)\hat{\rho}_1\hat{U}(1)^\dagger, \quad \hat{\rho}_2 \longrightarrow \hat{\rho}'_2 = \hat{U}(2)\hat{\rho}_2\hat{U}(2)^\dagger. \quad (3.116)$$

Dosažením (3.116) do (3.114) dostaneme

$$\begin{aligned} D_2 \longrightarrow D_2 &= \sqrt{\text{Tr}\left\{(\hat{U}(1) \otimes \hat{U}(2))\hat{\rho}(\hat{U}(1) \otimes \hat{U}(2))^\dagger - (\hat{U}(1)\hat{\rho}_1\hat{U}(1)^\dagger) \otimes (\hat{U}(2)\hat{\rho}_2\hat{U}(2)^\dagger)\right\}^2} \\ &= \sqrt{\text{Tr}\left\{(\hat{U}(1) \otimes \hat{U}(2))(\hat{\rho} - \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2)(\hat{U}(1) \otimes \hat{U}(2))^\dagger\right\}^2} = D_2. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Míra je tedy invariantní vůči transformaci (3.115) a splňuje vlastnost **U(3)**.

Uvažujeme soustavu složenou z dvou podsystémů konečné dimenze  $N_1$  a  $N_2$ . Víme, že operátor hustoty lze vyjádřit ve tvaru (3.92) a redukované operátory jsou popsány rovnicemi (3.96). Dosadíme-li tyto vztahy do míry provázání druhého řádu, dostaneme

$$D_2 = \frac{1}{4} \sqrt{\text{Tr}\left\{\sum_{i=1}^{N_1^2-1} \sum_{j=1}^{N_2^2-1} [K_{ij}(1,2) - \lambda_i(1)\lambda_j(2)](\hat{\lambda}_i \otimes \hat{\lambda}_j)\right\}^2}. \quad (3.118)$$

S využitím vztahů pro generátory  $SU(N)$  aleger (3.77) a (3.78) dostaneme pro míru provázání vztah

$$D_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_1^2-1} \sum_{j=1}^{N_2^2-1} [K_{ij}(1,2) - \lambda_i(1)\lambda_j(2)]^2}. \quad (3.119)$$

Zjistili jsme, že míry provázání definované vztahy (3.114) a (3.102) jsou pro případ systémů popsaných Hilbertovými prostory konečné dimenze svázány vztahem

$$\beta = D_2^2 \frac{N^2}{N^2 - 1}. \quad (3.120)$$

Míra (3.102) je vzhledem k výše zmíněnému faktu invariantní vzhledem k transformaci (3.115).

Podívejme se na vlastnost **U(3)**. Jakékoliv důkazy týkající se úlohy, pro jaké stavy nabývá míra maxima, jsou velmi obtížné, neboť se již odvíjejí od přímé struktury koeficientů, kterými je operátor hustoty určen. Podařilo se mi ukázat, že na množině čistých stavů, dosahuje míra  $D_2$  a proto i míra (3.102) maxima pro stavy s nulovým vektorem koherence.

#### **Důkaz:**

Soustava je v čistém stavu. Označme jej například  $|\psi\rangle$ . Její operátor hustoty je  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ . Libovolný čistý stav  $|\psi\rangle$  lze přepsat Schmidtovou dekompozicí do tvaru

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i \underbrace{|i(1)\rangle \otimes |i(2)\rangle}_{|ii\rangle}, \quad (3.121)$$

kde  $N = \min(N_1, N_2)$ . Koeficienty  $\alpha_i$  lze zvolit reálné. Stavový vektor  $|ii\rangle = |i(1)\rangle \otimes |i(2)\rangle$  je tenzorový součin stavových vektorů jednotlivých podsystémů. Pro stavové vektory  $|i(1)\rangle$  a  $|i(2)\rangle$  platí relace ortogonality

$$\langle i(1)|j(1)\rangle = \delta_{ij}, \quad \langle i(2)|j(2)\rangle = \delta_{ij}. \quad (3.122)$$

Snadno nahlédneme, že matice redukovaného operátoru hustoty soustavy v čistém stavu zapsaného v Schmidtově dekompozici musí být diagonální. Se znalostí této skutečnosti a způsobu, jak jsme konstruovali generátory  $SU(N)$  algebry, zjistíme, že vztah (3.92) můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = & \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \left( \frac{1}{N_1 N_2} \hat{1} \otimes \hat{1} + \frac{1}{2N_2} \sum_{l=1}^{N_1-1} w_l^{(i)}(1) \hat{w}_l \otimes \hat{1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2N_1} \sum_{\tilde{l}=1}^{N_2-1} w_{\tilde{l}}^{(i)}(2) \hat{1} \otimes \hat{w}_{\tilde{l}} + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{N_1-1} \sum_{\tilde{l}=1}^{N_2-1} w_l^{(i)}(1) w_{\tilde{l}}^{(i)}(2) \hat{w}_l \otimes \hat{w}_{\tilde{l}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i<j}^N \alpha_i \alpha_j (\hat{u}_{ij} \otimes \hat{u}_{ij} - \hat{v}_{ij} \otimes \hat{v}_{ij}), \end{aligned} \quad (3.123)$$

kde  $\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 = 1$ . Z tohoto vztahu můžeme snadno vyčíst koeficienty vektorů koherence a korelačního tenzoru. Dosazením koeficientů do vztahu pro míru provázání (3.119) dostaneme

$$\begin{aligned} D_2^2 = & 2 \sum_{i,j=1, i<j}^N \alpha_i^2 \alpha_j^2 + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{N_1-1} \sum_{\tilde{l}=1}^{N_2-1} \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 w_l^{(i)}(1) w_{\tilde{l}}^{(i)}(2) - \sum_{i,j=1}^N \alpha_i^2 \alpha_j^2 w_l^{(i)}(1) w_{\tilde{l}}^{(j)}(2) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Jak jsem již poznamenal, redukované operátory jsou v tomto případě diagonální. Jediné nenulové koeficienty v rozkladu do generátorů  $SU(N)$  algebry stojí u  $(N_1 - 1)$  generátorů  $\hat{w}_l$  prvního podsystému a  $(N_2 - 1)$  generátorů  $\hat{w}_{\tilde{l}}$  druhého podsystému. Z definice (3.81) generátorů  $\hat{w}_l$  víme, že jejich vlastní hodnoty jsou

$$\begin{aligned} w_l^{(n)}(m) &= -\sqrt{\frac{2}{l(l+1)}}, \quad 1 \leq n \leq l \\ w_l^{(l+1)}(m) &= l\sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \\ w_l^{(n)}(m) &= 0, \quad l+1 < n \leq N_m, \end{aligned} \quad (3.125)$$

kde  $m$  je příslušný index podsystému. Pro diagonální redukované operátory hustoty  $\hat{\rho}_1$  a  $\hat{\rho}_2$  platí

$$\hat{\rho}_m |n\rangle_m = \rho_m |n\rangle_m. \quad (3.126)$$

Aplikujeme-li tyto rovnosti na projekční operátory  $\hat{P}_{mm}$  dostaneme následující sumační pravidlo pro vlastní hodnoty  $w_l^n(m)$ :

$$\sum_{l=1}^{N_m-1} w_l^i(m)w_l^j(m) = 2\delta_{ij} - \frac{2}{N_m} \quad (3.127)$$

Upravme nyní dle právě získaného pravidla výraz pro míru (3.124)

$$D_2^2 = 1 - 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i^6 + \sum_{i,j=1}^N \alpha_i^4 \alpha_j^4. \quad (3.128)$$

Řešíme extrém míry ve tvaru (3.128) na varietě zadané rovnicí  $\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 = 1$ . Úloha je ekvivalentní problému nalézt extrémální hodnotu Lagrangeova multiplikátoru

$$\Lambda(\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = 1 - 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i^6 + \sum_{i,j=1}^N \alpha_i^4 \alpha_j^4 - \omega \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 - 1 \right). \quad (3.129)$$

Z podmínky pro extrém  $\partial_k \Lambda(\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0$  dostaneme rovnici

$$-2\alpha_k \left( 6\alpha_k^4 - 4\alpha_k^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j^4 + \omega \right) = 0. \quad (3.130)$$

Odtud vidíme, že nastávají dvě možnosti

$$\alpha_k = 0 \quad \vee \quad \alpha_k^2 = \frac{-2M\omega \pm \sqrt{(-2M\omega)^2 - 6\omega}}{6}, \quad (3.131)$$

kde  $M$  je počet nenulových koeficientů  $\alpha_i$ . Z podmínky  $\sum_{i=1}^M \alpha_i^2 = 1$  zjistíme, že hodnota nenulových koeficientů  $\alpha_k$  je

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{M}}. \quad (3.132)$$

Vztah pro míru (3.128) můžeme upravit do tvaru

$$D_2^2 = 1 - \frac{1}{M^2}. \quad (3.133)$$

$D_2^2$  je vzhledem k parametru  $M$  na intervalu  $(0, +\infty)$  rostoucí funkcí, a proto nabývá maximální hodnotu pro  $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{N}}$ .

Čistý stav soustavy dvou podsystémů popsanými Hilbertovými prostory konečné dimenze  $N_1$  a  $N_2$ , pro který míra (3.92) nabývá maxima, má tvar

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |i(1)\rangle |i(2)\rangle, \quad (3.134)$$

příčmenná hodnota míry pro tento stav je

$$D_2^{max} = \sqrt{1 - \frac{1}{N^2}}, \quad (3.135)$$

kde  $N = \min(N_1, N_2)$ . Tím je tvrzení dokázáno.

## Provázání soustavy s třemi a více podsystemy

V případě soustavy s třemi podsystemy označenými čísly **1, 2 a 3** hledáme  $\hat{\rho}_{approx}$  ve tvaru

$$\hat{\rho}_{approx}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \alpha_1 \hat{\rho}_{12} \otimes \hat{\rho}_3 + \alpha_2 \hat{\rho}_{13} \otimes \hat{\rho}_2 + \alpha_3 \hat{\rho}_{23} \otimes \hat{\rho}_1 + \alpha_4 \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \otimes \hat{\rho}_3. \quad (3.136)$$

Pro parametry  $\{\alpha_i\}_{i=1}^4$  nechť platí  $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1$ . Tato podmínka nám zaručuje, že  $\hat{\rho}_{approx}$  plně reprodukuje jednočasticové podsystemy soustavy

$$Tr_{ij}\{\hat{\rho}_{approx}\} = Tr_{ij}\{\hat{\rho}\}, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \quad (3.137)$$

Zajímavou otázkou je, lze-li zvolit parametry  $\{\alpha_i\}_{i=1}^4$  tak, aby  $\hat{\rho}_{approx}$  plně reprodukovala nejen všechny jednočasticové podsystemy ale zároveň i dvoučasticové podsystemy. Odpověď je kladná. Existuje právě jeden výběr parametrů  $\alpha_i$  takový, že  $\hat{\rho}_{approx}$  plně reprodukuje všechny jednočasticové a dvoučasticové podsystemy pro libovolný stav soustavy

$$\{\alpha\}_{i=1}^4 = \{1, 1, 1, -2\} \quad (3.138)$$

a operátor  $\hat{\rho}_{approx}$  má tvar

$$\hat{\rho}_{approx}(1, 1, 1, -2) = \hat{\rho}_{12} \otimes \hat{\rho}_3 + \hat{\rho}_{13} \otimes \hat{\rho}_2 + \hat{\rho}_{23} \otimes \hat{\rho}_1 - 2\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \otimes \hat{\rho}_3. \quad (3.139)$$

Snadno ověříme, že pro libovolně vybraný dvoučasticový podsystem platí

$$Tr_i\{\hat{\rho}_{approx}\} = Tr_i\{\hat{\rho}\}. \quad (3.140)$$

Plně tedy určuje měření na libovolně vybraném podsystemu, neboť střední hodnota pozorovatelné  $\hat{A}$  na daném stavu je určena vztahem

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr\{\hat{\rho}\hat{A}\}. \quad (3.141)$$

V tomto duchu je proto dobrou aproximací operátoru hustoty  $\hat{\rho}$ . Operátor (3.139) není obecně operátorem hustoty. Redukované operátory jsou však operátory hustoty shodné s redukovanými operátory operátoru hustoty  $\hat{\rho}$ .

Druhý způsob, jak definovat  $\hat{\rho}_{approx}$ , je motivován myšlenkou, aby  $\hat{\rho}_{approx}$  byl statistickým operátorem. To lze obecně zaručit jen tak, že koeficienty  $\alpha_i$  budou z intervalu  $[0, 1]$ . Tato podmínka je postačující, nikoliv však nutná. Nechť  $D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  je vzdálenost operátoru hustoty  $\hat{\rho}$  od operátoru  $\hat{\rho}_{approx}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$

$$D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \sqrt{Tr\left\{\hat{\rho} - \hat{\rho}_{approx}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\right\}^2}. \quad (3.142)$$

Definujme nyní oba dva typy měř provázání. První označíme  $D_3^{particle}$  a druhou  $D_3^{min}$  a definujme je vztahy

$$D_3^{particle} = D_3(1, 1, 1, -2) = \sqrt{Tr\left\{\hat{\rho} - \hat{\rho}_{approx}(1, 1, 1, -2)\right\}^2}, \quad (3.143)$$

$$D_3^{min} = \min \left\{ D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \mid \hat{\rho}_{approx}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \geq 0 \right\}. \quad (3.144)$$

Pro soustavu, jejíž stav je popsán operátorem hustoty ve tvaru

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{approx}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \quad (3.145)$$

nabývají obě míry hodnotu 0. Míra  $D_3^{min}$  určuje nutnou a zároveň postačující podmínkou pro to, aby daný stav byl neprovázaný, neboť míra  $D_3^{min} = 0$  právě tehdy, když stav je neprovázaný. Míra  $D_3^{min}$  je numerický test, zda-li je daný stav neprovázaný. Naproti tomu míra  $D_3^{particle}$  určuje pouze nutnou podmínkou pro to, aby daný stav byl neprovázaný. Numerický test se však v tomto případě sestává pouze z vyčíslení míry  $D_3^{particle}$  a není nutné řešit extrémální úlohu. To je v případech, kdy je stav složitý, velmi výhodné.

Obě míry splňují vlastnost **(V1)**, přičemž míra  $D_3^{min}$  splňuje i její silnější variantu. Stejným způsobem jako v případě míry provázání pro soustavu s dvěma podsystémy ověříme, že tyto míry jsou invariantní vzhledem k transformaci (3.10). Obě míry tedy splňují i vlastnost **(V3)**.

Podívejme se nyní na tvar obou měř v případě, že podsystémy soustavy jsou popsány Hilbertovými prostory konečné dimenze  $N_1$ ,  $N_2$  a  $N_3$ . Libovolný operátor hustoty má v rozkladu do generátorů  $SU(N)$  algebry tvar

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \hat{1} + \frac{1}{2N_2 N_3} \sum_{i=1}^{N_1^2-1} \lambda_i(1) \left( \hat{\lambda}_i \otimes \hat{1} \otimes \hat{1} \right) + \dots \\ &+ \frac{1}{4N_3} \sum_{i=1}^{N_1^2-1} \sum_{j=1}^{N_2^2-1} K_{ij}(1, 2) \left( \hat{\lambda}_i \otimes \hat{\lambda}_j \otimes \hat{1} \right) + \dots \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{N_1^2-1} \sum_{j=1}^{N_2^2-1} \sum_{k=1}^{N_3^2-1} K_{ijk}(1, 2, 3) \left( \hat{\lambda}_i \otimes \hat{\lambda}_j \otimes \hat{\lambda}_k \right). \end{aligned} \quad (3.146)$$

Z výše uvedeného tvaru operátoru hustoty pomocí vztahů pro generátory  $SU(N)$  algebry (3.77) a (3.78) spočítáme redukované operátory hustoty a dosadíme je do vztahu  $\hat{\rho} - \hat{\rho}_{approx}$

$$\begin{aligned} \hat{\rho} - \hat{\rho}_{approx} &= \frac{1}{4N_3} (1 - \alpha_1) \sum_{i=1}^{N_1^2-1} \sum_{j=1}^{N_2^2-1} M_{ij}(1, 2) \left( \hat{\lambda}_i \otimes \hat{\lambda}_j \otimes \hat{1} \right) + \dots \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{N_1^2-1} \sum_{j=1}^{N_2^2-1} \sum_{k=1}^{N_3^2-1} \left[ K_{ijk}(1, 2, 3) - \alpha_1 M_{ij}(1, 2) \lambda_k(3) - \alpha_2 M_{ik}(1, 3) \lambda_j(2) - \right. \\ &\left. - \alpha_3 M_{jk}(2, 3) \lambda_i(1) - \lambda_i(1) \lambda_j(2) \lambda_k(3) \right] \left( \hat{\lambda}_i \otimes \hat{\lambda}_j \otimes \hat{\lambda}_k \right). \end{aligned} \quad (3.147)$$

Kde jsme v souladu s naší konvencí označili

$$M_{ij}(m, n) = K_{ij}(m, n) - \lambda_i(m) \lambda_j(n). \quad (3.148)$$

Dosaďme výraz (3.147) do vztahu pro  $D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  a upravme jej pomocí vztahů pro generátory  $SU(N)$  algebry (3.77) a (3.78)

$$\begin{aligned}
D_3^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &= \frac{1}{4}(1 - \alpha_1)^2 \sum_{i=1}^{N_1^2-1} \sum_{j=1}^{N_2^2-1} M_{ij}^2(1, 2) + \dots \\
&+ \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{N_1^2-1} \sum_{j=1}^{N_2^2-1} \sum_{k=1}^{N_3^2-1} \left[ K_{ijk}(1, 2, 3) - \alpha_1 M_{ij}(1, 2)\lambda_k(3) - \alpha_2 M_{ik}(1, 3)\lambda_j(2) - \right. \\
&\left. - \alpha_3 M_{jk}(2, 3)\lambda_1(1) - \lambda_i(1)\lambda_j(2)\lambda_k(3) \right]^2, \tag{3.149}
\end{aligned}$$

Míra  $D_3^{min}$  je v případě soustavy s podsystemy popsanými Hilbertovými prostory konečné dimenze určena minimální hodnotou výrazu (3.149) vzhledem k parametrům  $\alpha_i$  takovým, že  $\hat{\rho}_{approx}$  má kladný číselný obor. Naproti tomu míru  $D_3^{particle}$  jsme schopni vyjádřit přímo

$$\begin{aligned}
D_3^{particle} &= \frac{1}{\sqrt{8}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1^2-1} \sum_{j=1}^{N_2^2-1} \sum_{k=1}^{N_3^2-1} \left[ K_{ijk}(1, 2, 3) - M_{ij}(1, 2)\lambda_k(3) - \right. \right. \\
&\left. \left. - M_{ik}(1, 3)\lambda_j(2) - M_{jk}(2, 3)\lambda_1(1) - \lambda_i(1)\lambda_j(2)\lambda_k(3) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.150}
\end{aligned}$$

Pomocí vztahu (3.109) můžeme tento vztah upravit na tvar

$$D_3^{particle} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1^2-1} \sum_{j=1}^{N_2^2-1} \sum_{k=1}^{N_3^2-1} M_{ijk}^2(1, 2, 3) \right\}, \tag{3.151}$$

kde  $M_{ijk}(1, 2, 3)$  jsou elementy tenzoru provázání třetího řádu.

Nyní jsme již schopni dokázat, že tenzor provázání třetího řádu je pro neprovázané stavy nulový. Pro neprovázané stavy je míra provázání  $D_3^{partical}$  rovna nule. S pomocí vztahu (3.151) odtud plyne, že všechny elementy tenzoru provázání třetího řádu musí být nulové.

Zda-li obě míry splňují vlastnost **(U2)** neumím odpovědět. Obě míry jsou však shodné na množině stavů s nulovými vektory koherence. V řešených příkladech parametrických množin stavů se nepotvrdilo, že by tato vlastnost splněna nebyla. Tato otázka zůstává nadále otevřena. Na závěr této části uvedu tvar vzdálenosti  $D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ , který je užitečný pro zjednodušení výpočtů při řešení konkrétních fyzikálních situací a ukazuje, jakým způsobem můžeme rozšířit naše úvahy na systémy čtyř a více podsystemů.

$$D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \left\{ Tr(\hat{\rho}_{diff}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4))^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3.152}$$

kde

$$\hat{\rho}_{diff}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\hat{\rho} - \underbrace{\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \otimes \hat{\rho}_3}_{\hat{\rho}_{1,2,3}}) - \alpha_1 \underbrace{(\hat{\rho}_{12} - \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2) \otimes \hat{\rho}_3}_{\hat{\rho}_{12,3}} -$$

$$-\alpha_2 \underbrace{(\hat{\rho}_{13} - \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_3) \otimes \hat{\rho}_2}_{\hat{\rho}_{13,2}} - \alpha_3 \underbrace{(\hat{\rho}_{23} - \hat{\rho}_2 \otimes \hat{\rho}_3) \otimes \hat{\rho}_1}_{\hat{\rho}_{23,1}}. \quad (3.153)$$

Pro operátor  $\hat{\rho}_{approx}(1, 1, 1, -2)$ , který volíme jako aproximaci popisující všechny podsystémy, potom platí

$$\hat{\rho}_{approx}(1, 1, 1, -2) = \hat{\rho}_{12,3} + \hat{\rho}_{13,2} + \hat{\rho}_{23,1} + \hat{\rho}_{1,2,3}. \quad (3.154)$$

Ptáme-li se jakým způsobem rozšířit naše úvahy na soustavu se čtyřmi a více podsystémy, naskytá se následující úvaha. Předpokládejme soustavu s podsystémy **1**, **2**, **3** a **4**. Definujme následující operátory

$$\hat{\rho}_{a,b,c,d} = \hat{\rho}_a \otimes \hat{\rho}_b \otimes \hat{\rho}_c \otimes \hat{\rho}_d, \quad (3.155)$$

$$\hat{\rho}_{ab,cd} = (\hat{\rho}_{ab} - \hat{\rho}_a \otimes \hat{\rho}_b) \otimes (\hat{\rho}_{cd} - \hat{\rho}_c \otimes \hat{\rho}_d), \quad (3.156)$$

$$\hat{\rho}_{abc,d} = (\hat{\rho}_{ab,c} + \hat{\rho}_{ac,b} + \hat{\rho}_{bc,a} + \hat{\rho}_{a,b,c}) \otimes \hat{\rho}_d. \quad (3.157)$$

Potom hledaným objektem  $\hat{\rho}_{approx}$ , který aproximuje všechny podsystémy soustavy se čtyřmi komponentami, je analogicky ke vztahu (3.154) operátor

$$\hat{\rho}_{approx} = \hat{\rho}_{123,4} + \hat{\rho}_{124,3} + \dots + \hat{\rho}_{12,34} + \hat{\rho}_{13,24} + \dots + \hat{\rho}_{a,b,c,d}. \quad (3.158)$$

Další kroky jsou stejné jako v případě soustavy s třemi podsystémy.

### 3.2.3 Aplikace měř provázání na konkrétní příklady

#### Příklad 1

První příklad, který budeme řešit je stav určený operátorem hustoty

$$\hat{\rho} = \alpha |GHZ\rangle\langle GHZ| + \frac{1-\alpha}{2} (|+++\rangle\langle +++| + |--\rangle\langle --|), \quad (3.159)$$

kde

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+++ \rangle + |--\rangle) \quad ; \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3.160)$$

Redukované operátory jednotlivých podsystémů jsou

$$\hat{\rho}_{12} = \hat{\rho}_{13} = \hat{\rho}_{23} = \frac{1}{2} (|++\rangle\langle ++| + |--\rangle\langle --|), \quad (3.161)$$

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_3 = \frac{1}{2} (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|). \quad (3.162)$$

Po dosazení redukovaných operátorů podsystémů do vztahu pro vzdálenost  $D_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  a vhodné úpravě výrazu dostaneme

$$D_3^2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{8}(\lambda_1 - 1)^2 + \frac{1}{8}(\lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_3 - 1)^2. \quad (3.163)$$



Minimum výrazu nastává pro  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . Snadno ověříme, že  $\hat{\rho}_{approx}(1, 1, 1, -2)$  je v tomto případě pozitivní. Pro míry provázání plyne

$$D_3^{particle} = D_3^{max} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \quad (3.164)$$

Obě míry jsou na parametrické množině stavů (3.159) shodné. Je to důsledek skutečnosti, že vektory koherence jsou nulové. Maximum obou měř nastává pro  $\alpha = 1$ . GHZ stav je v této parametrické množině stavů nejsilněji provázán.

## Příklad 2

Dalším stavem, na který aplikujeme výpočet měř, je čistý stav

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \phi |+++ \rangle + i \sin \phi | - ++ \rangle + i \sin \phi | + -- \rangle + \cos \phi | --- \rangle \right\}, \quad (3.165)$$

Redukované operátory podsystémů mají tvar

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{12} = \hat{\rho}_{13} = \frac{1}{2} & \left[ \cos^2 \phi \left( |++ \rangle \langle ++| + |-- \rangle \langle --| \right) + \right. \\ & + \sin^2 \phi \left( |-+ \rangle \langle -+| + +- \rangle \langle +-| \right) + i \sin \phi \cos \phi \left( |-+ \rangle \langle ++| + \right. \\ & \left. \left. ++ \rangle \langle - -| + +- \rangle \langle -+| + +- \rangle \langle +-| + - - \rangle \langle +-| \right) \right], \end{aligned} \quad (3.166)$$

$$\hat{\rho}_{23} = \frac{1}{2} (|++ \rangle \langle ++| + |-- \rangle \langle --|), \quad (3.167)$$

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_3 = \frac{1}{2} (|+ \rangle \langle +| + |- \rangle \langle -|). \quad (3.168)$$

Dosazením operátorů do  $D_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  a úpravami, které pro velkou pracnost nebudu uvádět, dostaneme

$$D_3^2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \frac{1}{2} + (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_3 - 1)^2. \quad (3.169)$$

Minimum nastává pro  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  a  $\hat{\rho}_{approx}(1, 1, 1, -2)$  splňuje pro tyto koeficienty podmínku pozitivnosti. Míry jsou si rovny

$$D_3^{particle} = D_3^{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.170)$$

Míra provázání v tomto případě je shodná s mírou provázání GHZ stavu. Důvod je prostý. Stav (3.165) je svázán s GHZ stavem lokální unitární transformací

$$\hat{U} = \hat{U}(1) \otimes \hat{U}(2) \otimes \hat{U}(3) = \begin{pmatrix} \cos \phi & i \sin \phi \\ i \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \otimes \hat{1} \otimes \hat{1}. \quad (3.171)$$

### Příklad 3

Podívejme se nyní na směs dvou GHZ stavů popsanou operátorem hustoty

$$\hat{\rho} = \frac{\alpha}{2} \left( |+++ \rangle + |-- \rangle \right) \left( \langle +++ | + \langle -- | \right) + \frac{1-\alpha}{2} \left( |+- \rangle + |-+- \rangle \right) \left( \langle +- | + \langle -+ | \right), \quad (3.172)$$

kde  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Redukované operátory mají tvar

$$\hat{\rho}_{12} = \hat{\rho}_{23} = \frac{\alpha}{2} (|++ \rangle \langle ++ | + |-- \rangle \langle -- |) + \frac{1-\alpha}{2} (|+- \rangle \langle +- | + |-+- \rangle \langle -+ |), \quad (3.173)$$

$$\hat{\rho}_{13} = \frac{1}{2} (|++ \rangle \langle ++ | + |-- \rangle \langle -- |), \quad (3.174)$$

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_3 = \frac{1}{2} (|+ \rangle \langle + | + |- \rangle \langle - |). \quad (3.175)$$

Po dosazení právě získaných vztahů do vzdálenosti  $D_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  dostaneme

$$D_3^2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \frac{1}{8} \left[ (2\alpha - 1)^2 (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + (2\alpha - 1)^2 (\lambda_3 - 1)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \alpha^2 + (\alpha - 1)^2 \right]. \quad (3.176)$$

Diskuzí případů, které mohou nastat, zjistíme, že

$$D_3^{min} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \alpha^2 + (\alpha - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} & \alpha \neq \frac{1}{2}, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \\ \frac{1}{2} & \alpha = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 1, \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad (3.177)$$

a

$$D_3^{particle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \alpha^2 + (\alpha - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.178)$$

$D_3^{min}$  je spojitou funkcí parametru  $\alpha$ . Obě míry jsou opět shodné. To je očekávaný výsledek, neboť vektory koherence mají nulové všechny složky. Maximum nabývají míry provázání pro hodnoty  $\alpha = 0$  a  $\alpha = 1$ . Nejsilněji provázané stavy v parametrické množině stavů (3.172) jsou GHZ stavy.

### Příklad 4

Poslední případ, kterým se budu zabývat a na který budu aplikovat teorii provázání je stav realizovaný optickou sítí.

Uvažujme síť určenou transformačním vztahem mezi vstupními  $\{\hat{a}_i^\dagger\}_{i=1}^3$  a výstupními kreačními operátory  $\{\hat{b}_i^\dagger\}_{i=1}^3$  jednotlivých modů ve tvaru

$$U_{kj} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{pmatrix}, \quad (3.179)$$

kde  $x = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

Označme transformaci mezi výstupní a vstupním stavem  $\hat{U}$

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{U}|\psi_{in}\rangle. \quad (3.180)$$

Potom pro transformaci vstupních a výstupních kreačních operátorů platí

$$\hat{b}_i^\dagger = \hat{U}\hat{a}_i^\dagger\hat{U}^\dagger = \sum_{j=1}^3 U_{ij}\hat{a}_j^\dagger. \quad (3.181)$$

Vstupní stav, na kterém budeme testovat, zda-li se vývojem v síti prováže, zvolíme fokovský stav

$$|\psi_{in}\rangle = |111\rangle. \quad (3.182)$$

Výstupní stav je potom dán vztahem

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{U}|\psi_{in}\rangle = \hat{U}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_3^\dagger|000\rangle = \underbrace{(\hat{U}\hat{a}_1^\dagger\hat{U}^\dagger)}_{\hat{b}_1^\dagger} \underbrace{(\hat{U}\hat{a}_2^\dagger\hat{U}^\dagger)}_{\hat{b}_2^\dagger} \underbrace{(\hat{U}\hat{a}_3^\dagger\hat{U}^\dagger)}_{\hat{b}_3^\dagger} \hat{U}|000\rangle. \quad (3.183)$$

Pomocí transformačního vztahu pro kreační operátory (3.181) můžeme výstupní stav vyjádřit ve tvaru

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{27}} \left( \hat{a}_1^\dagger + x^2\hat{a}_2^\dagger + x^4\hat{a}_3^\dagger \right) \left( \hat{a}_1^\dagger + x\hat{a}_2^\dagger + x^2\hat{a}_3^\dagger \right) \left( \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger \right) |000\rangle \quad (3.184)$$

Postupnými úpravami lze tento vztah přepsat na tvar

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{27}} \left[ \sqrt{6}|300\rangle + \sqrt{6}|030\rangle + \sqrt{6}|003\rangle - 3|111\rangle \right]. \quad (3.185)$$

Operátor hustoty je

$$\hat{\rho}_{out} = |\psi_{out}\rangle\langle\psi_{out}|. \quad (3.186)$$

Redukované operátory hustoty jednotlivých podsystémů mají tvar

$$\hat{\rho}_{12} = \hat{\rho}_{13} = \hat{\rho}_{23} = \frac{1}{9} \left[ 2|30\rangle\langle 30| + 2|03\rangle\langle 03| + 2|30\rangle\langle 03| + \right. \\ \left. + 2|03\rangle\langle 30| + 2|00\rangle\langle 00| + 3|11\rangle\langle 11| \right], \quad (3.187)$$

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_3 = \frac{1}{9} \left[ 2|3\rangle\langle 3| + 3|1\rangle\langle 1| + 4|0\rangle\langle 0| \right]. \quad (3.188)$$

Dosažením právě získaných redukovaných operátorů hustoty do výrazu  $D_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  zjistíme, že výpočet míry provázání  $D_3^{min}$  je velmi komplikovaný, neboť je těžké najít minimum ze vzdálenosti  $D_3^2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  a přitom splnit podmínky kladené na koeficienty  $\lambda_i$  požadavkem pozitivnosti operátoru  $\hat{\rho}_{approx}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ . Pro kvantifikaci míry provázání z tohoto důvodu použijeme míru provázání  $D_3^{particle}$ . Nebudu uvádět

poměrně pracný postup. Výsledkem je zjištění, že míra provázání výstupního stavu je

$$D_3^{partical} = \frac{498}{27^2} \doteq 0.68312. \quad (3.189)$$

Pro srovnání stav

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3} \left( |111\rangle + |222\rangle + |333\rangle \right) \left( \langle 111| + \langle 222| + \langle 333| \right), \quad (3.190)$$

který považujeme na úrovni tří hladinových systémů za nejsilněji provázaný (reprezentuje čistý stav a všechny vektory koherence stavu (3.190) jsou nulové), má hodnotu míry provázání

$$D_3^{min} = D_3^{particle} = \sqrt{\frac{20}{27}} \doteq 0.86066. \quad (3.191)$$

Původně neprovázaný stav vstupující do sítě se silně provázal.

# Kapitola 4

## Závěr

Provázání hraje důležitou roli v moderních fyzikálních aplikacích. Mezi nejslibnější patří kvantová kryptografie a kvantové počítače. V současnosti se největší důraz klade na soustavy dvouhladinových systémů. Soustavy složené z vícehladinových podsystémů zatím nebyli příliš studovány. Proto je zajímavé studovat provázání i v podsystémech s vyššími dimenzemi.

Při analýze provázání jsme vycházeli z formalismu operátoru hustoty. Jednotlivé podsystémy popisujeme redukovanými operátory hustoty. Jedna z možností jak pohlížet na dvoučásticové provázání je index korelace. Index korelace se snaží postihnout množství informace, které je obsaženo v dvoučásticových vlastnostech systému. Využívá k tomu pojmu entropie, která je definovaná jako míra neurčitosti obsažená v daném stavu. Vlastnosti indexu korelace a jeho schopnost postihnout míru provázání jsme studovali na konkrétních fyzikálních případech a provedli srovnání s dalšími mírami provázání indukovanými Peres-Horodeckého kritériem neseparability. Na úrovni dvou dvouhladinových systémů nám tyto míry umožňují úplnou klasifikaci korelací.

Značná část práce je věnována problematice vícečásticového provázání. Motivování prací J.Schlienze a G.Mahlera jsme míru provázání definovali jako vzdálenost mezi daným stavem a jeho aproximací konstruovanou pomocí redukovaných operátorů hustoty. Na základě dvou odlišných přístupů jsme definovali dva typy aproximací a tomu odpovídající dva typy měř provázání. Studovali jsme jejich vlastnosti a jejich vzájemnou souvislost s tenzorem provázání. Zdá se, že uvedený postup lze zobecnit na studium provázání soustav s čtyřmi a více komponentami. Na řešených příkladech parametrických množin tří dvouhladinových systémů se ukazuje, že obě míry mají schopnost kvantifikovat provázání.

Provázání složitějších stavů jsme studovali na stavech generovaných optickými sítěmi. Pro koherentní vstupy jsme podali kvantitativní analýzu. Limitujícím bodem bylo numerické zvládnutí úlohy. Pro koherentní stavy to značilo omezení amplitudy koherentních stavů, respektive počtu vstupních stavů s nenulovou koherentní amplitudou. Numerická náročnost neumožnila studium provázání pro neklasické vstupy.

Vzhledem k potenciálním možnostem provázání se dá očekávat, že uvedená problematika bude zajímavou i v nejbližší budoucnosti.

# Poděkování

Tato studie vznikla jako diplomová práce. Chtěl bych poděkovat svému školiteli panu Doc.Ing. Igoru Jexovi, DrSc. za odborné vedení a trpělivost při odhalování mých neznalostí a celkové korigování mé práce.

# Literatura

- [1] H.Araki,E.H.Lieb: Entropy inequalities,Commun.math.Phys. 18 (1970),160
- [2] S.M.Barnett,S.J.D.Phoenix: Entropy as a measure of quantum correlations,Phys.Rev. A 40 (1989),2404
- [3] S.M.Barnett,S.J.D.Phoenix: Information theory, squeezing and Quantum correlation,Physical Review A44 (1991),535
- [4] K. Blum: Density matrix theory and applications,Plenum,1981
- [5] J. Formánek: Úvod do kvantové teorie,Academia, 1983
- [6] J. Formánek: Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie pole /1,Karolinum,1998
- [7] J. Peřina,Z. Hradil,B. Jurčo: Quantum optics and fundamentals of physics, Kluwer Academic Publishers, 1994
- [8] J. Peřina: Quantum statistics of linear and nonlinear optical Phenomena, SNTL, 1984
- [9] J.Schlienz,G.Mahler: Description of entanglement,Physical Review A52 (1995),4396
- [10] J. Blank,P. Exner,M. Havlíček: Lineární operátory v kvantové fyzice, Karolinum, 1993
- [11] J. Eisert,M. B. Plenio: A comparison of entanglement measures, Journal of modern optics 46 (1999), 145
- [12] A.Einstein, B.Podolski, N. Rosen: Can quantum - mechanical description of physical reality be considered complete?, Physical Review 47 (1935), 777
- [13] J.S.Bell: On the Einstein Podolski Rosen paradox, Physics 1 (1964), 195
- [14] D.Bouwmeester, A.Ekert, A.Zeilinger: The physics of Quantum Information, Springer, 2000
- [15] A.Wehr: General properties of entropy, Reviews of modern physics 50 (1978), 221

- [16] M.Horodecki, P.Horodecki, R.Horodecki: Separability of mixed quantum states: Necessary and sufficient condition, Report No. quant-ph/9605038