Rešeršní práce : Betheho ansatz a Yang-Baxterovy rovnice

Libor Šnobl

20. května 1997

1 Úvod

V předložené rešeršní práci se budu zabývat metodou řešení úlohy nalézt vlastní vektory (či pro nekonečněrozměrné prostory vlastní funkce) a vlastní čísla pro případy určitých speciálních operátorů, takzvaným Betheho ansatzem. Nejprve stručně nastíním původní úlohu, k jejímuž řešení vznikla, a předvedu, jak ji lze touto metodou vyřešit. Pak ukáži, jak tuto úlohu lze přeformulovat v současném jazyce kvantové mechaniky. Nakonec se budu zabývat jedním z příkladů, ve kterých vede Betheho ansatz na zjednodušení dané úlohy, ač samotná úloha na první pohled nemá s původním Betheho problémem nic společného. Tímto příkladem bude problém více částic na přímce (či kružnici) se vzájemným působením daným δ-funkcí. Současně ukáži, jak se při řešení této úlohy došlo k rovnicím, které jsou nyní nazývány Yang-Baxterovy a které jsou od té doby pečlivě zkoumány matematiky i fyziky.

2 Původní Betheho úloha a její řešení

V roce 1931 byla publikována práce [1]. V tomto článku se H. Bethe zabýval kvantově mechanickou úlohou nalézt vlastní čísla a vlastní vektory matice, která odpovídala operátoru energie (tj. hamiltoniánu) lineárního řetízku n atomových jader. Původním podnětem této práce byla snaha vysvětlit feromagnetismus látek. Ovšem jejím největším přínosem se postupně ukázaly být nikoliv její výsledky, nýbrž metoda použitá při řešení úlohy, tzv. Betheho ansatz. Tuto metodu nyní ukáži.

Bethem řešená úloha byla zadána takto :

Je dán lineární řetízek n částic se spinem. Předpokládám, že spin r z nich ukazuje nahoru, spin zbylých ukazuje dolů. Částice oindexuji podle polohy v řetízku čísly 1,...,n. Definuji čísla $m_1, m_2, \ldots, m_r$ jako indexy částic se spinem nahoru tak, že $m_i < m_{i+1}, \forall i \in \{1, \ldots, r-1\}$. Tímto je jednoznačně určen stav řetízku. Odpovídající vlnovou funkci označím $\psi(m_1, m_2, \ldots, m_r)$. Obecnou vlnovou funkci řetízku pak vyjádřím jako

$$\Phi = \sum_{m_1,m_2,\ldots,m_r} a(m_1, m_2, \ldots, m_r)\psi(m_1, m_2, \ldots, m_r),$$

kde se sčítá přes všechny možné r-tice $m_1, m_2, \ldots, m_r \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $m_i < m_{i+1}, \forall i \in \{1, \ldots, r-1\}$. V této bázi prostoru stavů je dána "matice energie vzájemného působení" W, tj. hamiltonián, takto :

Na diagonále jsou elementy tvaru

$$W_{m_1,m_2,\ldots,m_r;m_1,m_2,\ldots,m_r} = E_0 - n'J,$$

kde E_0, J jsou dané konstanty a n' je počet párů sousedících částic se stejně orientovanými spiny. Nediagonální elementy jsou určeny takto:

$$W_{m_1,\dots,m_i,\dots,m_r;m_1,\dots,m_i+1,\cdots,m_r} = -J, i \in \{1,\dots,r\}, m_{i+1} \neq m_i + 1,$$

v ostatních případech jsou rovny nule.

Nyní hledám vlastní čísla e této matice a příslušné vlastní vektory

$$\psi = \sum_{m_1,m_2,\dots,m_r} a(m_1,m_2,\dots,m_r)\psi(m_1,m_2,\dots,m_r),$$

Tuto úlohu mohu převést na úlohu najít koeficienty $a(m_1,m_2,\dots,m_r)$ splňující rovnici

$$\begin{array}{rcl} 2\varepsilon a(m_1,m_2,\dots,m_r) & + & \\ \sum_{m'_1,m'_2,\dots,m'_r} [a(m'_1,m'_2,\dots,m'_r) - a(m_1,m_2,\dots,m_r)] & = & 0, \end{array} \tag{1}$$

kde $2\varepsilon J = e - E_0 + nJ$, e je hledané vlastní číslo a sčítá se přes všechny $m'_1, m'_2, \dots, m'_r$, které lze získat záměnou dvou sousedních částic s navzájem opačnými spiny, a současně splňující periodickou podmínku

$$a(m_1,\dots,m_i,\dots,m_r) = a(m_1,\dots,m_r,m_i+n), \forall i \in \{1,\dots,r\}. \tag{2}$$

Řešení provedu nejprve pro r = 1. V tomto případě rovnice (1) přecházejí na tvar

$$2\varepsilon a(i) + a(i+1) + a(i-1) - 2a(i) = 0, \forall i \in \{1,\dots,n-1\}. \tag{3}$$

Tento systém rovnic je systémem lineárních diferenčních rovnic, který je možné řešit substitucí $a(i) = r^i$:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon r^i + r^{i-1} + r^{i+1} - 2r^i &= 0 \\ r^2 + 2(\varepsilon - 1)r + 1 &= 0 \\ r = (1-\varepsilon) \pm \sqrt{(\varepsilon-1)^2 - 1} & \end{aligned}$$

Dále musí být splněna podmínka (2). Je vidět, že vzhledem k tvaru řešení postačí splnit $a(1+n) = a(1)$. Z této podmínky mohu rovnou vyloučit možnost $\varepsilon < 0$, respektive $\varepsilon \geq 2$ (jinak $|r| \neq 1$, a tedy žádaná rovnost neplatí ani pro moduly koeficientů $a(i)$). V případě $\varepsilon \in \langle 0, 2)$ je modul r (a tedy $a(i)$) roven 1, pro jeho fázi platí $cos\phi = 1 - \varepsilon$. Protože z podmínky (2) plyne $n\phi = 2\pi l, l \in \mathcal{Z}$, musí ε splňovat rovnici

$$\varepsilon = 1 - \cos\frac{2\pi l}{n}, l \in \{0,\dots,n-1\}.$$

Pak lze vyjádřit $r = e^{i\frac{2\pi l}{n}}$. Pro obecný tvar řešení (3) pak platí

$$a(j) = C_1[(1-\varepsilon) + \sqrt{(\varepsilon-1)^2 - 1}] + C_2[(1-\varepsilon) - \sqrt{(\varepsilon-1)^2 - 1}], \text{ tj.}$$

$$a(j) = C_1 e^{i\frac{2\pi l}{n}j} + C_2 e^{-i\frac{2\pi l}{n}j} = C_1 e^{i\frac{2\pi l}{n}j} + C_2 e^{i\frac{2\pi(n-l)}{n}j}.$$

Protože chci najít bázi daného prostoru tvořenou vlastními vektory matice W a odpovídající vlastní čísla, mohu výsledek zapsat v kompaktním tvaru

$$\phi_l = \sum_{j=1}^{n} e^{i\frac{2\pi l}{n}j}\psi_j,\ \varepsilon_l = 1 - cos\frac{2\pi l}{n}, \tag{4}$$

kde ψ_j je vlnová funkce odpovídající stavu s j-tým spinem ukazujícím nahoru, ostatní ukazují dolů.

Dalším krokem je řešení případu $r = 2$. V tomto případě rovnice (1) přecházejí na tvar

$$\begin{aligned} 2(\varepsilon-2)a(i,j) + a(i,j+1) + a(i+1,j) + a(i,j-1) + a(i-1,j) &= 0 \quad (5)\\ \forall i,j \in \{1,\ldots,n-1\}, i < j-1 & \\ 2(\varepsilon-1)a(i,i+1) + a(i,i+2) + a(i-1,i+1) &= 0 \quad (6)\\ \forall i \in \{1,\ldots,n-1\} & \end{aligned}$$

K řešení těchto rovnic zvolím ansatz :

$$a(j,k) = C_1 e^{i(f_1 j + f_2 k)} + C_2 e^{i(f_1 k + f_2 j)}, \tag{7}$$

kde C_1, C_2, f_1, f_2 jsou zatím neurčené konstanty. Z počátku předpokládám, že f_1, f_2 jsou reálná čísla. Dosadím (7) do (5) a dostávám podmínku pro ε

$$\varepsilon = 2 - \cos f_1 - \cos f_2 \tag{8}$$

pro libovolnou volbu konstant C_1, C_2, f_1, f_2. Zbývá zajistit splnění (6) a (2). Abych splnil (6), formálně definuji $a(j,j)$ splňující

$$a(j+1,j+1) + a(j,j) - 2a(j,j+1) = 0. \tag{9}$$

Přičtením (9) k (6) dostávám rovnici tvaru (5), která je již splněna. Nyní ale musím splnit (9). Dosazením (7) do (9) dostávám po úpravě podmínku pro poměr C_1/C_2 :

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\sin\frac{f_1-f_2}{2} + i(\cos\frac{f_1+f_2}{2} - \cos\frac{f_1-f_2}{2})}{\sin\frac{f_1-f_2}{2} - i(\cos\frac{f_1+f_2}{2} - \cos\frac{f_1-f_2}{2})}.$$

Z výrazu na pravé straně je vidět, že pro $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$ je $|C_1/C_2| = 1$ a tedy lze volit substituci $C_1/C_2 = e^{i\phi}$, kde $\phi \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Protože násobení vektoru nenulovou konstantou je z hlediska hledání lineárně nezávislých vlastních vektorů operace nezajímavá, lze psát

$$a(j,k) = e^{i(f_1 j + f_2 k + \phi/2)} + e^{i(f_1 k + f_2 j - \phi/2)}. \tag{10}$$

Současně lze přepsat vztah pro C_1, C_2 na vztah pro ϕ

$$2\cot\frac{\phi}{2} = \cot\frac{f_1}{2} - \cot\frac{f_2}{2} \vee f_1 = \phi = 0 \neq f_2 \vee f_2 = \phi = 0 \neq f_1 \tag{11}$$

Dále musím splnit podmínku (2), tj.

$$e^{i(f_1 k + f_2 j + f_2 n + \phi/2)} + e^{i(f_1 j + f_2 k + f_1 n - \phi/2)} = e^{i(f_1 j + f_2 k + \phi/2)} + e^{i(f_1 k + f_2 j - \phi/2)}.$$

Tato podmínka má být splněna pro $\forall j, k \in \{1, \ldots, n\}, j < k$. Proto musí platit :

$$e^{i(f_2 n + \phi)} = 1,\ e^{i(f_1 n - \phi)} = 1.$$

Aby to bylo splněno, musí být

$$nf_2 + \phi = 2\pi\lambda_2,\ nf_1 - \phi = 2\pi\lambda_1,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{Z}.$$

Z důvodu periodičnosti výrazů v (7) se stačí omezit na $\lambda_1, \lambda_2 \in \{0, \ldots, n-1\}$ a vztahy přepsat do tvaru

$$f_1 = \frac{2\pi\lambda_1 + \phi}{n},\ f_2 = \frac{2\pi\lambda_2 - \phi}{n}. \tag{12}$$

Součet $f_1 + f_2$ dále budu značit k. Tímto jsou splněny všechny podmínky kladené na řešení (5),(6),(2) a současně je nalezen tvar všech řešení, která lze (za omezení na $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$) najít ve tvaru (7).

Nyní se budu zabývat otázkou, kolik řešení je možné pomocí ansatzu (7) skutečně najít. Těchto řešení je tolik, kolik je možno volit λ_1, λ_2 takových, že dostanu navzájem různá řešení. Je vidět, že případy $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \beta$ a $\lambda_2 = \alpha, \lambda_1 = \beta$ dávají stejný vlastní vektor (po vynásobení konstantou) a tedy postačí se zabývat pouze případy $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Pro $\lambda_1 < \lambda_2$ lze ukázat existenci ϕ řešení (11) při zadaných λ_1, λ_2 a definici f_1, f_2 dle (12). Pro $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ to plyne z toho, že pravá strana (11) je omezená spojitá funkce, díky $\lambda_1 < \lambda_2$ pro $\phi \in \langle -\pi, \pi \rangle$ kladná. Levá strana pro $\phi \in (0, \pi\rangle$ probíhá jako spojitá funkce všechna kladná čísla a tedy musí existovat alespoň jeden průsečík grafů levé a pravé strany jako funkce ϕ, tj. řešení (11). Pro $\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 \neq 0$ je existence řešení evidentní, postačí zvolit $\phi = 0$ a tím bude splněno $f_1 = \phi = 0 \wedge f_2 = \frac{2\pi\lambda_2}{n} \neq 0$. Pro $\lambda_1 = \lambda_2$ obdobné tvrzení obecně neplatí. Dále je nutné si povšimnout, že pro $\lambda_1 + 1 = \lambda_2$ dostávám po dosazení nezajímavé triviální řešení $a(i,j) = 0$. Z (12) a omezení na $\phi \in (-\pi, \pi\rangle$ plyne, že ostatní řešení jsou navzájem různá, celkem tedy mám zajištěno $\binom{n-1}{2}$ řešení získaných pomocí daného ansatzu (7).

Abych našel dalších $n-1$ řešení (5), (6), (2), pozměním požadavky na f_1, f_2. Nyní předpokládám, že $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$. Omezím se na komplexně sdružená f_1, f_2, tj.

$$f_1 = u + iv,\ f_2 = u - iv,\ u \in \mathcal{R},\ v \in \mathcal{R}^+ \tag{13}$$

Odtud dostávám po úpravě vztah pro $\cot f_1/2$ (a analogicky i pro $\cot f_2/2$):

$$\cot f_1 = \frac{\sin u - i \sinh v}{\cosh v - \cos u}. \tag{14}$$

Je vidět, že nyní také $\phi \in \mathcal{C}$. Označím $\phi = \psi + i\chi,\ \psi, \chi \in \mathcal{R}$. Ze vztahů (12), které musí platit i v tomto případě, dostávám po porovnání reálných a ryze imaginárních složek

$$n(f_1 - f_2) = 2inv = 2\pi(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\phi,\ \psi = \pi(\lambda_2 - \lambda_1),\ \chi = nv \tag{15}$$

Pokud předpokládám, že v má hodnotu znatelně různou od nuly a že n je dostatečně velké (což je ve fyzikálních aplikacích splněno), musí být χ značně velké. To umožňuje provést odhady $e^{-\chi} = 0, \sinh \chi = \cosh \chi = e^{\chi}/2$ a tedy dostávám

$$\cot \phi/2 = -i(1 + 2e^{-\chi + i\psi})$$

. V tomto přiblížení z (11) plyne

$$\sinh v = \cosh v - \cos u, \text{tj. } e^{-v} = \cos u, \tag{16}$$

$$\varepsilon = \sin^2 u = 1/2(1 - \cos 2u) \tag{17}$$

Aby existovalo hledané v, musí být $\cos u \geq 0$, a tedy pro u dostávám požadavek $u \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ a ze vztahu $k = 2u + 2n\pi, n \in \mathcal{Z}$ (poněkud je pozměněna definice k, výsledky se však díky periodicitě nezmění) plyne:

$$u = \begin{cases} \frac{k}{2}, k \in \langle 0, \pi \rangle \\ \frac{k}{2} - \pi, k \in (\pi, 2\pi) \end{cases},$$

v je možné dopočítat ze vztahu $e^{-v} = \cos u$. Tímto jsem ovšem získal pouze první odhad. Dále je možné počítat zpřesnění $v = v_0 + \Delta$, kde v_0 označím získaný první odhad v. Lze ukázat, že buď tímto postupem dostanu konvergentní posloupnost odhadů, nebo naleznu další, dříve neuvažované, řešení pro $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$. Dále lze ukázat, že vlastní číslo ε je menší pro pár komplexně sdružených f_1, f_2 při daném $k = f_1 + f_2$, než pro libovolný reálný pár f_1, f_2 při tomtéž k.

Výše uvedený postup je dále možné zobecnit pro $r > 2$. V tomto případě dostávám z rovnice (1) následující typy rovnic:

Jestliže nejsou v r-tici $(m_1, \ldots, m_r)$ žádné sousedící indexy, získávám

$$2\varepsilon a(m_1, \ldots, m_r) + \sum_{i=1}^{r} [a(m_1, \ldots, m_i + 1, \ldots, m_r) + a(m_1, \ldots, m_i - 1, \ldots, m_r) - 2a(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_r)] = 0 \tag{18}$$

Jestliže $m_{k+1} = m_k + 1$, ostatní nesousedí:

$$2\varepsilon a(m_1,\dots,m_r) + \sum_{i=1,i\neq k,i\neq k+1}^{r} [a(m_1,\dots,m_i+1,\dots,m_r) + a(m_1,\dots,m_i-1,\dots,m_r) - 2a(m_1,\dots,m_i,\dots,m_r)] + a(m_1,\dots,m_k-1,m_k+1,\dots,m_r) + a(m_1,\dots,m_k,m_k+2,\dots,m_r) - 2a(m_1,\dots,m_k,m_k+1,\dots,m_r) = 0 \quad (19)$$

Podobné rovnice lze odvodit pro další případy více sousedících indexů. Nyní zobecním ansatz (7) na následující tvar:

$$a(m_1,\dots,m_r) = \sum_{P\in S_n} \exp\{i[\sum_{k=1}^{r} f_{P(k)} m_k \ + 1/2 \sum_{k<l} \phi_{P(k),P(l)}]\} \quad (20)$$

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{r} (1-\cos f_k) \quad (21)$$

Tímto ansatzem jsou opět splněny všechny rovnice tvaru (18) identicky. Zbylé rovnice opět převedu vhodnou definicí $a(m_1,\dots,m_k,m_k,\dots,m_r)$, $\forall m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots < m_r$, splňující

$$a(m_1,\dots,m_k,m_k,\dots,m_r) + a(m_1,\dots,m_k+1,m_k+1,\dots,m_r) - 2a(m_1,\dots,m_k,m_k+1,\dots,m_r) = 0 \quad (22)$$

na formální tvar rovnic (18). Zbývá splnit (22). Toho lze dosáhnout vhodnou volbou fází $\phi_{k,l}$:

$$2\cot\frac{\phi_{k,l}}{2} = \cot\frac{f_k}{2} - \cot\frac{f_l}{2},\ -\pi \le \phi_{k,l} \le \pi \quad (23)$$

Dále má být splněna podmínka periodicity (2). Rozepsáním této podmínky při ansatzu (20) a využitím $\phi_{k,l} = -\phi_{l,k}$ lze podobně jako pro $r=2$ dospět k podmínce na f_i, $\forall i \in \{1,\dots,r\}$:

$$nf_i = 2\pi\lambda_i + \sum_{k=1}^{r} \phi_{i,k},\ \lambda_i \in \mathcal{Z} \quad (24)$$

Dále se lze opět omezit na $f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathcal{R}$ a ukázat analogicky jako pro $r=2$, že dostaneme pouze $\binom{n-r+1}{r}$ řešení. Další řešení budu opět hledat s komplexními parametry $f_1, f_2, \dots, f_r$.

Nechť $f_k = u_k + iv_k, u_k, v_k \in \mathcal{R}$. Z (24) plyne, že pak alespoň jeden $\phi_{k,l}$ má imaginární část řádu n. To umožňuje provést první přiblížení

$$2\cot\phi_{k,l} = \cot f_k/2 - \cot f_l/2 = -2i \quad (25)$$

Oproti případu r=2 nyní předpokládám řešení f_k v poněkud obecnější podobě, označované jako vlnový komplex s m vlnami

$$\cot f_\kappa/2 = a - i\kappa,\ \kappa = -(m-1), -(m-3), \ldots, m-1 \tag{26}$$

Dále je možné ze vztahu $\cot(u+iv) = \frac{\sin u - i \sinh v}{\cosh v - \cos u}$ najít

$$\frac{\sin u_\kappa}{\cosh v_\kappa - \cos u_\kappa} = a \tag{27}$$

$$\frac{\sinh v_\kappa}{\cosh v_\kappa - \cos u_\kappa} = \kappa \tag{28}$$

a u_κ, v_κ nalézt:

$$u_\kappa = \arctan \frac{2a}{a^2+\kappa^2-1},\ v_\kappa = \arg\tanh \frac{2\kappa}{a^2+\kappa^2+1} \tag{29}$$

Opět zavedu označení $k = \sum_\kappa f_\kappa = \sum_\kappa u_\kappa$ Pak je možné vyjádřit po úpravě $a = m \cot k/2$ a najít vlastní číslo příslušné danému vlnovému komplexu

$$\varepsilon_m = 1/m(1 - \cos k) \tag{30}$$

Lze ukázat, že pro pevně dané k je toto vlastní číslo nejmenší pro vlnový komplex o r vlnách a že pro všechny vlnové komplexy je příslušná vlastní hodnota menší než pro případ $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{R}$. Dále je možné provést úvahy analogické případu $r = 2$ ohledně dalšího přiblížení a celkového počtu nalezených řešení. Po provedení těchto úvah lze dospět k závěru, že tímto postupem lze nalézt všechna (ve smyslu lineárně nezávislá) řešení.

3 Souvislost Betheho úlohy a spinového hamiltoniánu

V této kapitole chci ukázat souvislost mezi úlohou řešenou Bethem a modernějším pohledem (použitém například v [2]) využívajícím takzvaný spinový hamiltonián cyklického řetízku n částic, což je operátor na prostoru $C^2 \otimes C^2 \otimes \cdots \otimes C^2$ tvaru

$$H = -1/2J \sum_{j=1}^{n} \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} + \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} + \Delta \sigma_z^j \sigma_z^{j+1} \tag{31}$$

kde $\sigma_i^j = I \otimes I \otimes \cdots \otimes \sigma_i \otimes \cdots \otimes I$, I je identický operátor, σ_i je Pauliho matice, v definici vystupující na j-tém místě, Δ a J dané konstanty. Přitom předpokládám cykličnost řetízku, tj. operátor σ_i^{n+1} definuji roven σ_i^1.

Nyní řeším úlohu nalézt vlastní čísla a vlastní vektory tohoto hamiltoniánu. Ukáži, že tuto úlohu je možné pro určitou speciální hodnotu parametru Δ převést na úlohu řešenou v [1]. Vyjdu z toho, že operátor celkové hodnoty z-tové komponenty spinu

$$S_z = \hbar/2 \sum_{j=1}^{n} \sigma_z^j \tag{32}$$

komutuje s hamiltoniánem (31).

Důkaz:

$$[S_z, H] = [\hbar/2 \sum_{j=1}^{n} \sigma_z^j, -1/2J \sum_{j=1}^{n} \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} + \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} + \Delta \sigma_z^j \sigma_z^{j+1}] =$$

$$-1/4J\hbar(\sum_{j=1}^{n} \sigma_z^j \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} + \sum_{j=1}^{n} \sigma_z^{j+1} \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} + \sum_{j=1}^{n} \sigma_z^j \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} + \sum_{j=1}^{n} \sigma_z^{j+1} \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} -$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} \sigma_z^j - \sum_{j=1}^{n} \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} \sigma_z^{j+1} - \sum_{j=1}^{n} \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} \sigma_z^j - \sum_{j=1}^{n} \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} \sigma_z^{j+1}) =$$

$$1/4\hbar J\{\sum_{j=1}^{n} i\sigma_y^j \sigma_x^{j+1} + \sum_{j=1}^{n} i\sigma_x^j \sigma_y^{j+1} - \sum_{j=1}^{n} i\sigma_x^j \sigma_y^{j+1} - \sum_{j=1}^{n} i\sigma_y^j \sigma_x^{j+1}\} = 0$$

kde jsem využil komutačních vlastností σ-matic ($[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ a vlastnosti tensorového součinu $\forall A, B \in \mathcal{L}(C^2) : [A \otimes I, I \otimes B] = 0$.

Z této komutativity plyne, že lze úžit operátor H na vlastní podprostory operátoru S_z. (Neboť, jestliže V_λ je vlastní podprostor odpovídající vlastnímu číslu λ operátoru S_z, pak $(S_z H)V_\lambda = (HS_z)V_\lambda = \lambda H V_\lambda \Longrightarrow (S_z - \lambda I)HV_\lambda = 0 \Longrightarrow HV_\lambda \subset V_\lambda$ a tedy lze zúžit, operátory H a S_z mají společné vlastní vektory).

Nyní určím vlastní čísla a vlastní vektory operátoru S_z. To lze nejlépe udělat, zapíši-li operátor S_z v bázi prostoru dimenze 2^n definované takto:

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\eta_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\eta_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\cdots \\
\eta_{2^N} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

tj. η_j má $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ na pozicích, na nichž je v binárním zápisu čísla j-1 číslice 1 , na místech odpovídajících 0 v binárním zápisu je $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dále postupuji indukcí podle hodnoty parametru n (tj. počtu částic). Pro $n = 1$ platí $S_z = \hbar/2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tato matice má vlastní čísla $\pm\hbar/2$ a příslušné vlastní vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pro indukční krok n-1 $\longrightarrow$ n platí z definice operátoru S_z a tensorového součinu $S_z = \hbar/2\sigma_z \otimes I^{(n-1)} + I \otimes S_z^{(n-1)}$, kde $S_z^{n-1} = \hbar/2 \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_z^{(j)(n-1)}$, operátory s horním indexem (n-1) značí operátory na prostoru dimenze 2^{n-1}, tj. odpovídající $n-1$ částicím. Předpokládám, že matice operátoru $S_z^{(n-1)}$ je diagonální, $\lambda_{k+1} = \lambda_k - \hbar$ a λ_k, kde $k \in \{0, \dots, n-1\}$, je vlastní číslo $S_z^{(n-1)}$ s násobností $\binom{n-1}{k}$ (tyto předpoklady jsou opodstatněny tím, že pro n=1 jsou splněny, dále je zahrnuji do indukčního předpokladu). Matici operátoru S_z uvažuji rozdělenou na 4 čtvercové bloky. Z indukčního předpokladu vidím, že pouze diagonální bloky jsou nenulové. V horním bloku má operátor S_z tvar $S_z^{(n-1)} + \hbar/2I$ a tedy $\lambda_k + \hbar/2$ je $\binom{n-1}{k}$ násobným vlastním číslem v tomto bloku. V dolním bloku má operátor S_z tvar $S_z^{(n-1)} - \hbar/2I$ a tedy $\lambda_k - \hbar/2$ je $\binom{n-1}{k}$ násobným vlastním číslem v dolním bloku. Celkem číslo $\lambda_k + \hbar/2$ je $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ násobným vlastním číslem operátoru S_z, $\lambda_{n-1} - \hbar/2$ je jednonásobným vlastním číslem S_z. Současně je vidět, že rozdíl po sobě jdoucích vlastních čísel operátoru S_z je opět $\hbar$. Tímto je indukční krok proveden.

Jednotlivé vlastní podprostory operátoru S_z označím V_k (tj. V_k odpovídá vlastnímu číslu $\lambda_k = \hbar/2(n-2k)$).

Nyní provedu zúžení operátoru H na jednotlivé vlastní podprostory operátoru S_z. Přitom využívám platnosti následujícího vztahu (lze jej ověřit přímým dosazením) :

$$\sigma_x^k \sigma_x^{k+1} + \sigma_y^k \sigma_y^{k+1} = 2(\sigma_+^k \sigma_-^{k+1} + \sigma_-^k \sigma_+^{k+1}),$$

kde $\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
σ_+^k, σ_-^k jsou opět definovány pomocí tensorového součinu (stejně jako σ_x^k atd.). Hamiltonián H tedy mohu přepsat :

$$H = -J/2 \sum_{j=1}^{n} 2(\sigma_+^k \sigma_-^{k+1} + \sigma_-^k \sigma_+^{k+1}) + \sigma_z^k \sigma_z^{k+1}. \tag{33}$$

Je vidět, že pro $k = 0$ je $\dim V_0 = 1$, a tedy po zúžení přímo dostávám vlastní vektor operátoru H

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Podobný výsledek lze získat pro $k = n$.

Nyní zúžím H na podprostor V_1 odpovídající vlastnímu číslu operátoru S_z $\lambda_1 = \hbar/2(n-2)$. Z výše odvozených vlastností vlastních čísel vím, že $\dim V_1 = n$ a volím bázi :

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\psi_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\cdots & \\
\psi_n &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Snadno lze ověřit, že $\psi_j \in V_1$, ψ_j tvoří lineárně nezávislý systém o n vektorech, tedy tvoří bázi prostoru V_1. Nyní najdu $H\psi_k$. Pomocí vztahů

$$\sigma_+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \sigma_-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

dostávám vztah

$$H\psi_k = -1/2J(\Delta(n-4)\psi_k + 2\psi_{k+1} + 2\psi_{k-1}). \tag{36}$$

Vlastní vektory hamiltoniánu H hledám ve tvaru lineární kombinace bazických vektorů

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} a(k)\psi_k.$$

Takto vyjádřený vektor dosadím do rovnice pro vlastní vektory $E\phi = H\phi$, kde E je hledané vlastní číslo, a pomocí (36) získávám vztahy pro koeficienty a(i):

$$(-\frac{2E}{J} - \Delta(n-4))a(j) = 2a(j+1) + 2a(j-1), \tag{37}$$

kde $a(0) := a(n), a(n+1) := a(1)$. Tyto vztahy je možné substitucí při $\Delta = 1$ $4\varepsilon = \frac{2E}{J} + n$ převést na rovnice řešené Bethem pro r=1. Je vhodné si povšimnout, že podobný výsledek dostaneme i při zúžení na podprostor V_{n-1}, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_{n-1} = \hbar/2(2-n)$.

Analogicky lze postupovat i v případě dalších podprostorů V_k. Ukáži to na případě $k = 2$, pro $k > 2$ je postup obdobný. V tomto případě je přirozené volit bázi V_2 v následující podobě, indexované dvěma indexy (analogicky pro $k = 3$ 3 indexy atd.) $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i < j$:

$$\begin{aligned}
\psi_{1,2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\psi_{1,3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdots \\
\psi_{2,3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\cdots \\
\psi_{n-1,n} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Opět, jako pro $k = 1$ lze ověřit, že jsem definoval bázi. Vyjádřím, jak působí hamiltonián H na bazické vektory. S použitím definice (33) a vztahů (35) dostávám vyjádření:

$$
(-\frac{2H}{J} - \Delta(n-8))\psi_{i,j} = 2(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}), \tag{38}
$$
$$
\text{pro } i < j-1, |j-i| < n-1
$$
$$
(-\frac{2H}{J} - \Delta(n-4))\psi_{i,i+1} = 2\psi_{i-1,i+1} + 2\psi_{i,j+2}, \tag{39}
$$
$$
\text{pro } i \in \{1, \cdots, n-1\}
$$
$$
(-\frac{2H}{J} - \Delta(n-4))\psi_{1,n} = 2\psi_{2,n} + 2\psi_{n-1,n}, \tag{40}
$$

kde definuji $\psi_{i,n+1} = \psi_{1,i}, \psi_{0,i} = \psi_{i,n}$.

Vlastní vektory hledám ve tvaru

$$
\phi = \sum_{i<j} a(i,j)\psi_{i,j} \tag{41}
$$

Dosazením (41) do (33) , použitím (38), (39), (40) a lineární nezávislosti bazických vektorů dostávám vztahy pro koeficienty a(i,j):

$$
(-\frac{2E}{J} - \Delta(n-8))a(i,j) = \tag{42}
$$
$$
= 2(a(i,j+1) + a(i,j-1) + a(i+1,j) + a(i-1,j)),
$$
$$
\text{pro } i < j-1, |j-i| < n-1
$$
$$
(-\frac{2E}{J} - \Delta(n-4))a(i,i+1) = 2a(i-1,i+1) + 2a(i,j+2) \quad , \tag{43}
$$
$$
\text{pro } i \in \{1, \cdots, n-1\}
$$
$$
(-\frac{2E}{J} - \Delta(n-4))a(1,n) = 2a(2,n) + 2a(n-1,n) \quad , \tag{44}
$$

kde definuji $a(i,n+1) = a(1,i), a(0,i) = a(i,n)$. Použitím těchto definic lze současně rovnici (44) zahrnout do rovnic (43) jako rovnici pro $i = n$. Opět při $\Delta = 1$ dostávám po substituci $4\varepsilon = \frac{2E}{J} + n$ rovnice řešené Bethem a mohu použít jeho způsob jejich řešení. Stejný ansatz pro koeficienty a(i,j) lze použít i pro $\Delta \neq 1$. Potom dostávám pozměněné vztahy pro E (či ε) a i poněkud jiné podmínky na $f_1, f_2, \cdots$, ovšem opět jsem schopen najít některé vlastní vektory. Pro $k > 2$ lze postupovat obdobně, pouze získávám více (po výše uvedeném přepisu pro $i = n$ atd. celkem k) typů rovnic, které jsou analogické rovnicím Betheho (tj. po substituci za ε pro $\Delta = 1$ dostávám přesně rovnice Betheho).

4 Systém více částic s interakcí danou δ-funkcí

V této kapitole chci ukázat použití Betheho metody na jiné úloze, než byla původní, a naznačit souvislost Betheho ansatzu a Yang-Baxterových rovnic. Jedná se o kvantově mechanickou úlohu nalézt vlastní funkce a vlastní čísla (tj. možné hodnoty energie) hamiltoniánu (45), kterou vyřešil poprvé C. N. Yang a stručné shrnutí svého postupu publikoval v [3].

Budu se zabývat jednorozměrným systémem N částic na přímce s hamiltoniánem

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \partial^2/\partial x_i^2 + 2c\sum_{j=2}^{N}\sum_{i=1}^{j} \delta(x_i - x_j), c \in \mathcal{R}^+ \tag{45}$$

Hledám vlastní funkce ψ (a vlastní čísla E) tohoto hamiltoniánu (tj. splňující $E\psi = H\psi$), přičemž požaduji, aby tyto funkce ψ byly spojité. Úlohu je možné vyřešit nejdříve na jednotlivých oblastech

$$G_Q = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{R}^N | x_{Q(1)} < x_{Q(2)} < \ldots < x_{Q(N)}\}, Q \in S_N$$

(S_N značí permutační grupu N prvků). Na těchto oblastech hamiltonián (45) přechází v hamiltonián N volných částic. Pokud zvolím libovolnou n-tici čísel $k_1, \ldots, k_N$, lze dosazením snadno ověřit, že na G_Q funkce $e^{i(k_{P(1)}x_{Q(1)}+\ldots+k_{P(N)}x_{Q(N)})}$ je vlastní funkcí (45) pro libovolnou volbu $P \in S_N$ a příslušné vlastní číslo je $E = \sum_{i=1}^{N} k_i^2$. Protože E nezávisí na P, je libovolná lineární kombinace

$$\sum_{P \in S_N} a(P) e^{i(k_{P(1)}x_{Q(1)}+\ldots+k_{P(N)}x_{Q(N)})}$$

opět vlastní funkcí operátoru (45) na G_Q se stejnou hodnotou vlastního čísla E. Nyní provedu na základě těchto poznatků ansatz podobný Betheho ansatzu : definuji funkci ψ pomocí definice zúžení ψ na jednotlivé oblasti G_Q

$$\psi|_{G_Q}(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{P \in S_N} [Q^{-1}, P^{-1}] e^{i(p_{P(1)}x_{Q(1)}+\ldots+p_{P(N)}x_{Q(N)})}, \tag{46}$$

kde $[Q, P]$ jsou zatím neurčené komplexní konstanty, o číslech $k_1, \ldots, k_N$ předpokládám, že jsou navzájem různá (význam tohoto požadavku se ukáže později, při odvození (47) a (48)). Tyto $[Q, P]$ je možné uspořádat do matice $N! \times N!$ indexované pomocí $Q, P \in S_N$.

Nyní určím podmínky, za kterých má takto definovaná funkce na hranicích oblastí limity z jedné i druhé strany shodné, tj. za kterých lze spojitě dodefinovat na celý prostor $\mathcal{R}^N$. Mám-li oblasti G_Q a $G_{Q'}$, které sousedí, musí existovat $j \in \{1, \ldots, N-1\}$ takové, že $Q' = Q * (j, j+1)$, kde $(j, j+1) \in S_N$ značí transpozici j-tého a j+1-ního prvku, $*$ značí skládání permutací (později budu znak $*$ vynechávat, nebude-li hrozit chybná interpretace) definované :

$$P, Q \in S_N, P = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & N \\ P(1) & \ldots & P(N) \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & N \\ Q(1) & \ldots & Q(N) \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow P * Q = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & N \\ P(Q(1)) & \ldots & P(Q(N)) \end{pmatrix},$$

neboť za sousedící považuji takové oblasti, že existuje část nadroviny v $\mathcal{R}^N$ určené rovnicí $x_j = x_{j+1}$ taková, že je součástí hranice obou oblastí. Aby funkce ψ bylo možné spojitě dodefinovat, musím při dosazení libovolného vektoru $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{R}^N, x_{Q(1)} < \ldots < x_{Q(j)} = x_{Q(j+1)} < \ldots < x_{Q(N)}$ do předpisu pro $\psi|_Q$ a $\psi|_{Q'}$ dostat stejné číslo. Díky tomu, že $k_1, \ldots, k_N$ jsou navzájem různá, je tato podmínka ekvivalentní

$$[Q,P]+[Q,P(j,j+1)] = [Q(j,j+1),P]+[Q(j,j+1),P(j,j+1)], \forall P \in S_N \quad (47)$$

Dále požaduji, aby normálová složka derivace funkce ψ měla v bodech na hranici skok velikosti $2c\psi(x_1, \ldots, x_N)$. Tato podmínka zajišťuje splnění rovnice s δ-funkcí $E\psi = H\psi, E = \sum_{i=1}^N k_i^2$ na $\mathcal{R}^N$. Po dosazení (46) do této podmínky dostávám

$$\begin{aligned} i(k_{P(j+1)} - k_{P(j)})([Q,P] - [Q,P(j,j+1)] + [Q(j,j+1),P] \\ -[Q(j,j+1),P(j,j+1)]) = 2c([Q,P] + [Q,P(j,j+1)]) \end{aligned} \quad (48)$$

Jestliže zavedu $x_{j,l} = \frac{ic}{k_j - k_l}$, lze podmínky (47) a (48) ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} [Q(j,j+1),P] = x_{P(j),P(j+1)}[Q,P] + (1 + x_{P(j),P(j+1)})[Q,P(i,i+1)], \\ \forall Q,P \in S_N, i \in \{1, \ldots, N-1\} \end{aligned} \quad (49)$$

Tyto podmínky tvoří $(N-1)(N!)^2$ rovnic pro $(N!)^2$ neznámých. Jedná se tedy o přeurčený systém rovnic. Otázkou je, zda má řešení a na kolika volných parametrech toto řešení závisí (tj. kolik existuje lineárně nezávislých řešení).

Tento problém nyní převedu na úlohu ukázat o určitých operátorech, že tvoří representaci permutační grupy. Chápu-li $|P^{-1}\rangle = \sum_{Q \in S_N} [Q,P]Q^{-1}$ (vhodnost definice pomocí Q^{-1} vyplyne později) jako prvek grupového okruhu, tj. vektorového prostoru dimenze $N!$ tvořeného lineárními kombinacemi prvků S_N s distributivní operací násobení vektorů definovanou na bazických vektorech jako v S_N, lze rovnici (49) přepsat pomocí matic $T_{j,j+1}$ ve tvaru

$$[Q(j,j+1),P] = \sum_{P' \in S_N} [Q,P']\langle P'|T_{j,j+1}|P\rangle, \quad (50)$$

kde $T_{j,j+1}$ je definována :

$$\langle P'|T_{j,j+1}|P\rangle = \begin{cases} x_{P(j),P(j+1)},\ P' = P \\ 1 + x_{P(j),P(j+1)},\ P' = P(j,j+1) \\ 0,\ P' \neq P \& P' \neq P(j,j+1) \end{cases} \tag{51}$$

Protože $(j,j+1) * |P^{-1}\rangle = \sum_{Q\in S_N}[Q,P](j,j+1) * Q^{-1} =$
$\sum_{Q\in S_N}[Q,P](Q*(j,j+1))^{-1} = \sum_{Q\in S_N}[Q(j,j+1),P]Q^{-1}$, lze (50) přepsat ve tvaru

$$(j,j+1) * |P^{-1}\rangle = \sum_{Q\in S_N}[Q(j,j+1),P]Q^{-1} =$$
$$\sum_{Q\in S_N}\{x_{P(j),P(j+1)}[Q,P] + (1 + x_{P(j),P(j+1)})[Q,P(j,j+1)]\}Q^{-1} =$$
$$x_{P(j),P(j+1)}|P^{-1}\rangle + (1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(j,j+1))^{-1}\rangle =$$
$$\sum_{P'\in S_N}\langle P'|T_{j,j+1}|P\rangle|P^{-1}\rangle =$$
$$T_{j,j+1}|P^{-1}\rangle. \tag{52}$$

Ukáži, že $T_{j,j+1}$ tvoří representaci permutační grupy. K tomu postačí ukázat, že jsou splněny relace

$$T_{j,j+1}T_{j,j+1} = I, \tag{53}$$

kde I je identický operátor, a

$$T_{j,j+1}T_{j+1,j+2}T_{j,j+1} = T_{j+1,j+2}T_{j,j+1}T_{j+1,j+2}. \tag{54}$$

Nejprve ověřím podmínku (53)

$$T_{j,j+1}T_{j,j+1}|P^{-1}\rangle = T_{j,j+1}(x_{P(j),P(j+1)}|P^{-1}\rangle +$$
$$(1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(j,j+1))^{-1}\rangle) = x^2_{P(j),P(j+1)}|P^{-1}\rangle +$$
$$x_{P(j),P(j+1)}(1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(j,j+1))^{-1}\rangle +$$
$$x_{P(j+1),P(j)}(1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(j,j+1))^{-1}\rangle +$$
$$(1 + x_{P(j+1),P(j)})(1 + x_{P(j),P(j+1)})|P^{-1}\rangle = |P^{-1}\rangle,$$

díky $x_{P(j+1),P(j)} = -x_{P(j),P(j+1)}$.

Relaci (54) lze dokázat vyjádřením

$$T_{j,j+1}T_{j+1,j+2}T_{j,j+1}|P^{-1}\rangle =$$
$$T_{j,j+1}T_{j+1,j+2}(x_{P(j),P(j+1)}|P^{-1}\rangle + (1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(j,j+1))^{-1}\rangle) =$$
$$\ldots = x_{P(j),P(j+2)}(1 + x_{P(j+1),P(j+2)}x_{P(j),P(j+1)})|P^{-1}\rangle +$$
$$x_{P(j),P(j+2)}x_{P(j+1),P(j+2)}(1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(j,j+1)^{-1}\rangle +$$
$$x_{P(j),P(j+1)}x_{P(j),P(j+2)}(1 + x_{P(j+1),P(j+2)})|(P(j+1,j+2))^{-1}\rangle +$$
$$(1 + x_{P(j),P(j+1)})(1 + x_{P(j),P(j+2)})(1 + x_{P(j+1),P(j+2)})|(P(j,j+2))^{-1}\rangle +$$
$$x_{P(j),P(j+1)}(1 + x_{P(j),P(j+2)})(1 + x_{P(j+1),P(j)})|(P(123))^{-1}\rangle +$$
$$x_{P(j+1),P(j+2)}(1 + x_{P(j),P(j+2)})(1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(132))^{-1}\rangle,$$

Jestliže provedu tytéž úpravy pro $T_{j,j+1}T_{j+1,j+2}T_{j,j+1}|P^{-1}\rangle$, dostanu stejný výsledek. Tím je dokázána relace (54) a tedy operátory $T_{j,j+1}$ tvoří representaci permutační grupy. Z toho plyne, že pokud zvolím $[I, P], \forall P \in S_N$, mohu definovat $[Q, P]$ tím, že permutaci Q rozložím na součin transpozic a opakovaně použiji (50) jako definice pro určení $[Q'(j, j+1), P]$ z $[Q', P]$. Protože $T_{j,j+1}$ tvoří representaci permutační grupy, nebude tato definice $[Q, P]$ závislá na volbě rozkladu Q na transpozice, který není určen jednoznačně. Současně je vidět, že tímto jsou splněny rovnice (50), protože při volbě rozkladu $Q(j, j+1)$ je možné rozložit Q a pak vynásobením (j,j+1) získat rozklad $Q(j, j+1)$ a tedy vzhledem k definici $[Q, P]$ je (50) splněna. Dále vidím, že řešení (49) závisí na N! volných parametrech.

Pro další výpočty se ukazuje jako praktičtější místo operátorů $T_{j,j+1}$ používat operátory $Y_{j,j+1}$ definované takto

$$Y_{j,j+1}|P^{-1}\rangle = \frac{(j, j+1) - x_{P(j),P(j+1)}I}{1 + x_{P(j),P(j+1)}} * |P^{-1}\rangle, \tag{55}$$

což lze díky splnění (52) psát také ve tvaru

$$Y_{j,j+1}|P^{-1}\rangle = |(P(j, j+1))^{-1}\rangle. \tag{56}$$

Dále je možné zavést označení pro speciální prvky grupového okruhu

$$Y^{i,k}_{j,j+1} = \frac{(j, j+1) - x_{i,k}I}{1 + x_{i,k}} \tag{57}$$

a působení operátorů $Y_{j,j+1}$ zapsat pomocí $Y^{i,k}_{j,j+1}$

$$Y_{j,j+1}|P^{-1}\rangle = Y^{P(j),P(j+1)}_{j,j+1}|P^{-1}\rangle \tag{58}$$

Současně je vidět, že operátory $Y_{j,j+1}$ opět tvoří representaci permutační grupy, neboť

$$\begin{gathered} Y_{j,j+1}Y_{j,j+1}|P^{-1}\rangle = Y_{j,j+1}|(P(j, j+1))^{-1}\rangle = |(P(j, j+1)(j, j+1))^{-1}\rangle = |P^{-1}\rangle \\ \Rightarrow Y_{j,j+1}Y_{j,j+1} = I \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Y_{j,j+1}Y_{j+1,j+2}Y_{j,j+1}|P^{-1}\rangle = Y_{j,j+1}Y_{j+1,j+2}|(P(j, j+1))^{-1}\rangle = \\ Y_{j,j+1}|(P(j, j+1)(j+1, j+2))^{-1}\rangle = |(P(j, j+1)(j+1, j+2)(j, j+1))^{-1}\rangle = \\ |(P(j+1, j+1)(j, j+1)(j+1, j+2))^{-1}\rangle = Y_{j+1,j+2}Y_{j,j+1}Y_{j+1,j+2}|P^{-1}\rangle \\ \Rightarrow Y_{j,j+1}Y_{j+1,j+2}Y_{j,j+1} = Y_{j+1,j+2}Y_{j,j+1}Y_{j+1,j+2} \end{gathered}$$

Dále lze tyto vztahy přepsat pro vektory (prvky grupového okruhu) $Y^{i,k}_{j,j+1}$. Uvědomím-li si totiž, jak operátory $Y_{j,j+1}$ působí, a přepíši to pomocí $Y^{i,k}_{j,j+1}$, dostávám vztahy

$$Y^{i,k}_{j,j+1}Y^{k,i}_{j,j+1} = I \tag{59}$$

$$Y^{l,k}_{j,j+1}Y^{i,k}_{j+1,j+2}Y^{i,l}_{j,j+1} = Y^{i,l}_{j+1,j}Y^{i,k}_{j,j+1}Y^{l,k}_{j+1,j+2}, \tag{60}$$

pro libovolné $j \in \{1,\dots,N-2\}$ a $i,k,l \in \{1,\dots,N\}$. Rovnice (60) vyjadřuje dosti obecný tvar Yang-Baxterovy rovnice. Současně nám tento způsob jejího odvození poskytuje některá její řešení závislá na parametrech $k_1,\dots,k_N$.

V předchozím odstavci jsem ukázal, jak lze pomocí Betheho ansatzu najít některá řešení parciální diferenciální rovnice $E\psi = H\psi$, ovšem zatím jsem nebral v úvahu okrajové podmínky. Nyní budu uvažovat tutéž úlohu, ovšem s okrajovou podmínkou danou požadavkem periodicity řešení s periodou L. Mám-li G_Q oblast příslušnou permutaci Q a C permutaci $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & N-1 & N \\ 2 & 3 & 4 & \dots & N & 1 \end{pmatrix}$, pak požaduji

$$\begin{gathered} \psi|_Q(x_{Q(1)},\dots,x_{Q(N)}) = \psi|_{QC}(x_{Q(2)},\dots,x_{Q(N)},x_{Q(1)+L}), \\ \forall(x_{Q(1)},\dots,x_{Q(N)}),\ x_{Q(1)} < \dots < x_{Q(N)},\ x_{Q(N)} - x_{Q(1)} < L \end{gathered} \tag{61}$$

Tuto podmínku lze dosadit do (46) a odvodit další vztahy, které mají $[Q,P]$ splňovat:

$$[Q,P] = [QC,PC]e^{ik_{P(1)}L} \tag{62}$$

Po přepsání pomocí vektorů $|P^{-1}\rangle$ dostávám podmínku (61) ve tvaru

$$C|(PC)^{-1}\rangle = |P^{-1}\rangle e^{ik_{P(1)}L} \tag{63}$$

Dále vyjádřím pomocí $C = (1,N)(1,N-1)\dots(1,3)(1,2)$ a vztahu (56)

$$|(PC)^{-1}\rangle = Y_{N_1,N}\dots Y_{2,3}Y_{1,2}|P^{-1}\rangle,$$

přepíši pomocí rovností

$$(m,n)Y^{l,k}_{j,j+1} = Y^{l,k}_{j,j+1}(m,n), \forall n,m < j,$$

$$(j-1,j)Y^{l,k}_{j,j+1} = Y^{l,k}_{1,j+1}(j-1,j)$$

plynoucích z definice $Y^{l,k}_{j,j+1}$ a dostávám :

$$\begin{aligned} C|(PC)^{-1}\rangle &= CY^{P(1),P(5)}_{N-1,N}\dots Y^{P(1),P(3)}_{2,3}Y^{P(1),P(2)}_{1,2}|P^{-1}\rangle = \\ &= (1,N)Y^{P(1),P(5)}_{1,N}\dots(1,3)Y^{P(1),P(3)}_{1,3}(1,2)Y^{P(1),P(2)}_{1,2}|P^{-1}\rangle \end{aligned} \tag{64}$$

Dosadím do (63) a vynásobím zleva P:

$$\begin{aligned} P|P^{-1}\rangle e^{-ik_{P(1)}L} &= P(1,N)Y^{P(1),P(5)}_{1,N}\dots(1,3)Y^{P(1),P(3)}_{1,3}(1,2)Y^{P(1),P(2)}_{1,2}|P^{-1}\rangle \\ &= (P(1),P(N))Y^{P(1),P(N)}_{P(1),P(N)}\dots(P(1),P(2))Y^{P(1),P(2)}_{P(1),P(2)}P|P^{-1}\rangle, \end{aligned} \tag{65}$$

kde jsem využil rovnost $(P(j),P(j+1))P = P(j,j+1)$. Nyní mohu definovat vektory $X_{j,l}$ z grupového okruhu permutační grupy S_N

$$X_{j,l} = (j,l) * Y^{j,l}_{j,l} = \frac{1-(j,l)x_{j,l}}{1+x_{j,l}} \tag{66}$$

a (65) přepsat do tvaru

$$P|P^{-1}\rangle e^{-ik_{P(1)}L} = X_{P(1),P(N)} \dots X_{P(1),P(3)} X_{P(1),P(2)} P|P^{-1}\rangle. \tag{67}$$

O vektorech $X_{j,l}$ je možné ukázat, že splňují obdobné vztahy jako $Y^{i,k}_{j,j+1}$:

$$X_{j,l}X_{l,j} = I, \tag{68}$$

$$X_{j,k}X_{i,k}X_{i,j} = X_{i,j}X_{i,k}X_{j,k} \tag{69}$$

$$X_{i,j}X_{k,l} = X_{k,l}X_{i,j}, \forall i,j,k,l \text{ navzájem různá} \tag{70}$$

Rovnice (69) je opět je jedním z možných tvarů Yang-Baxterovy rovnice. Dále lze definovat Z_P

$$Z_P = X_{P(2),P(1)} X_{P(3),P(1)} \dots X_{P(N),P(1)} \tag{71}$$

a přepsat (67) ve tvaru

$$Z_P P|P^{-1}\rangle = e^{ik_{P(1)}L} P|P^{-1}\rangle \tag{72}$$

Pomocí (69),(70) lze ukázat rovnost

$$Z_{P(i,i+1)} = X_{P(i),P(i+1)} Z_P X^{-1}_{P(i),P(i+1)}, \ \forall i > 1 \tag{73}$$

Odsud plyne: Jestliže $|P^{-1}\rangle$ vyhovuje rovnici (72), pak

$$\begin{aligned} & Z_{P(i,i+1)} P(i,i+1)|(P(i,i+1))^{-1}\rangle = \\ & X_{P(i),P(i+1)} Z_P X^{-1}_{P(i)P(i+1)} P(i,i+1)|(P(i,i+1))^{-1}\rangle \\ & = X_{P(i),P(i+1)} Z_P P|P^{-1}\rangle = e^{ik_{P(1)}L} X_{P(i),P(i+1)} P|P^{-1}\rangle \\ & = e^{ik_{P(1)}L}|(P(i,i+1))^{-1}\rangle. \end{aligned} \tag{74}$$

Což znamená, že je-li (72) splněna pro $|P^{-1}\rangle$, pak je splněna i pro $|(P(j,j+1))^{-1}\rangle$, kde $j > 1$. Rovnice (72) je tedy vlastně systémem N (nikoliv tedy $N!$) rovnic. Řešení těchto rovnic, které je mimo téma této práce, lze najít například v [3].

5 Závěr

Nakonec bych rád stručně shrnul výhody, které Betheho ansatz poskytuje. V případě původní úlohy umožňuje zapsat obecný tvar hledaných vlastních vektorů jako funkci počtu částic n, i když ne vždy je možné provést výpočet koeficientů těchto vektorů až do konce (viz například hledání řešení ϕ rovnice (11) pro daná λ_1, λ_2). Ovšem při klasickém přístupu z lineární algebry by se podobný zápis explicitně závisející na n získával jen obtížně, pokud by se to vůbec podařilo. Zvláštní význam má tento zápis pro zkoumání energetických hladin daného systému, tj. možných vlastních čísel, speciálně základní energetické hladiny (nejmenšího vlastního čísla), neboť umožňuje provést fyzikálně důležitou limitu pro $n \to \infty$. Tuto limitu provedli C.N. Yang a C.P. Yang v letech 1966-1967 a postup a výsledky publikovali postupně v několika článcich, například v [2].

V jiných úlohách umožnil Betheho ansatz výrazné zjednodušení hledání jejich řešení. V některých případech byl dále zobecněn (například exponenciální funkci součtu více proměnných v jeho definici lze nahradit součinem zpočátku neurčených funkcí jednotlivých proměnných), a dnes se lze setkat s Betheho ansatzem ve formulacích jen velmi vzdáleně připomínajících původní tvar (7).

Odkazy

[1] H. Bethe: Zur Theorie der Metalle, Zeitschrift für Physik 71,205 (1931)

[2] C.N. Yang, C.P. Yang: One-Dimensional Chain of Anisotropic Spin-Spin Interactions, Physical Review 150,321 (1966)

[3] C.N. Yang: Some Exact Results for Many-Body Problem in One Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction, Physical Review Letters 19,No.23,1312 (1967)

[4] M. Gaudin: La fonction d'onde de Bethe, Masson,Paris,1983 (ruskě pýeklad, Mir, Moskva 1987)

Obsah