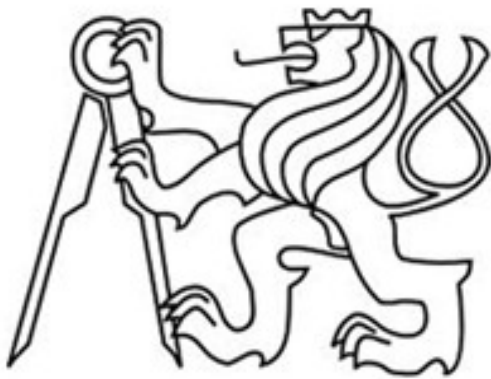


České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Katedra fyziky



**Strukturní funkce nukleonů a jader v termodynamickém
přiblížení**

Výzkumný úkol

Autor: Bc. Lukáš Ferencz

Vedoucí práce: Mgr. Petr Závada, CSc., DSc.

Praha, 2015

Zadání práce

Prehlásenie

Prehlasujem, že som túto prácu vypracoval samostatne a použil som len podklady, uvedené v priloženom zozname.

Nemám závažný dôvod proti použitiu tohto školského diela v zmysle § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov.

V Prahe dňa

.....
podpis

Název práce : Strukturní funkce nukleonů a jader v termodynamickém přiblížení

Autor práce : Bc. Lukáš Ferencz

Obor : Jaderné inženýrství

Zaměření : Experimentální jaderná a částicová fyzika

Druh práce : Výzkumný úkol

Vedoucí práce : Mgr. Petr Závada, CSc., DSc.
Fyzikální ústav AV ČR, v.v.i.

Abstrakt :

Cieľom tejto práce je podrobnejšie analyzovať poznatky, ktoré boli predstavené v bakalárskej práci *Struktúra nukleonu v termodynamickom priblížení*. Distribučné funkcie kvarkov obsahujúce veličiny známe z termodynamiky a štatistickej fyziky sa vyjadria v kludovej sústave nukleónu a zároveň sú východiskom pre overenie termodynamického modelu nukleónu. V práci je taktiež ukázané ako sa spomínané distribučné funkcie líšia pre jednotlivé typy konšituentných kvarkov, prípadne ich antivarkov. Časť výskumnej práce je venovaná vplyvu Fermiho pohybu nukleónov v atómových jadrách na distribučné funkcie kvarkov v jadre.

Kľúčové slová : hlboký nepružný rozptyl, distribučné funkcie kvarkov, štruktúrne funkcie nukleónov, veličiny termodynamiky a štatistickej fyziky, Fermiho pohyb nukleónov v jadre

Abstract :

The aim of this work is to make a more detailed analysis of knowledge introduced in Bachelor Thesis *Nucleon Structure in the Thermodynamic Approach*. Quark distribution functions including variables coming from thermodynamics and statistical physics are expressed in nucleon rest frame and are starting points for checking nucleon thermodynamic model. Differences between these distribution functions for constituent quarks or their antiquarks are also present here. Part of this work is devoted to influence of Fermi motion of nucleons in atomic nuclei on the quark distribution functions in nucleus.

Keywords: deep inelastic scattering, quark distribution functions, nucleon structure functions, thermodynamics and statistical physics variables, Fermi motion of nucleons in nucleus

Pod'akovanie

Rád by som poďakoval pánovi Mgr. Petrovi Závadovi, CSc., DSc. za jeho podporu, cenné rady a konzultácie, ktoré boli veľkým prínosom pre túto prácu.

Lukáš Ferencz

Obsah

1	Úvod	7
2	Kinematika hlbokého nepružného rozptylu	8
3	Distribučné funkcie kvarkov a štruktúrne funkcie nukleónov	14
3.1	Distribučné funkcie kvarkov	14
3.2	Nepolarizované štruktúrne funkcie nukleónov	18
3.3	Polarizované štruktúrne funkcie nukleónov	23
3.4	Distribučné funkcie kvarkov v <i>LAB</i>	28
4	Štruktúrne funkcie nukleónov v reči veličín termodynamiky a štatistickej fyziky	35
5	Fermiho pohyb nukleónov	43
6	Záver	45

Kapitola 1

Úvod

Pri skúmaní vnútornej štruktúry nukleónu zohráva dôležitú úlohu hlboký nepružný rozptyl. Tento fenomén nám dáva na základe rozptylových experimentov vhodné teoretické pozadie pre štúdium konšituentných kvarkov v protóne. Pomocou metód štatistickej fyziky a termodynamiky navyiac môžeme poukázať na význam a užitočnosť termodynamického modelu nukleónu, ktorého filozofia je postavená na distribučných funkciách závislých okrem iného aj na termodynamických veličinách, ako sú napríklad chemické potenciály partónov a teplota.

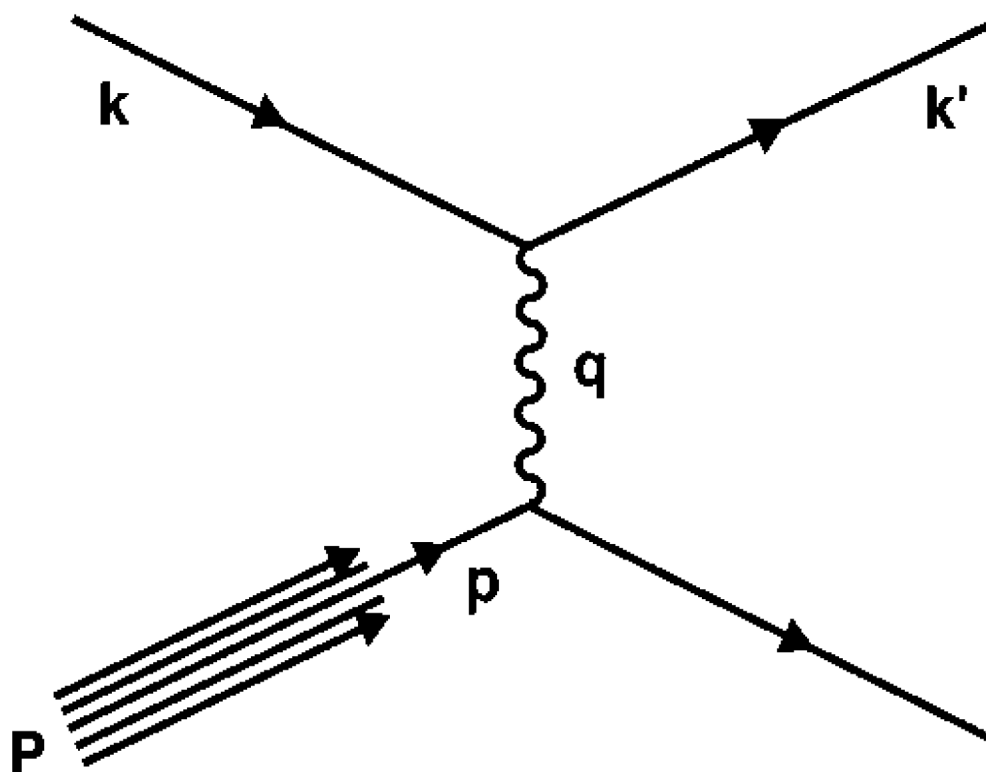
V úvodnej kapitole (Kapitola 2) je podrobne rozobratá teoretická analýza hlbokého nepružného rozptylu. Veličiny, vystupujúce v tomto jave, sú navyiac rozlišované jednak v laboratórnej sústave nukleónu, v ktorej je tento nukleón v pokoji (*LAB*) a taktiež v sústave, v ktorej disponuje nekonečnou hybnosťou (*IMF*, z angl. Infinite Momentum Frame). Zároveň táto stať poukazuje na rovnosť medzi Bjorkenovou premennou a frakciou hybnosti nesenou kvarkom v IMF v poruchovom režime, t.j. pri dostatočne vysokých kvadrátoch prenesenej hybnosti. Nasledujúca kapitola (Kapitola 3) začína popisom distribučných funkcií kvarkov vhodných pre získanie veličín vyjadrujúcich počet kvarkov v závislosti na energii kvarku v LAB. Vzápätí sú predstavené štruktúrne funkcie nukleónov v nepolarizovanej a polarizovanej podobe. Tieto veličiny následne vedú k odvodeniu známej Callanovej-Grossovej relácie. Kapitola taktiež rozširuje platnosť štruktúrnych funkcií na manifestne kovariantnú podobu, t.j. tú úplne najvšeobecnejšiu, z ktorej je možné za istých predpokladov prejsť do nami zvolených sústav, ako sú napr. LAB a IMF. Následne v stati 3.3 môžeme nájsť distribučné funkcie vyjadrené špeciálne v LAB a z nich plynúce veličiny, určujúce počet kvarkov v závislosti na ich energii. Niektoré vybrané z týchto funkcií sú aj pre porovnanie zobrazené. V úplnom závere tretej kapitoly je ešte pre prehľadnosť uvedená tabuľka, dávajúca do súvislosti veličiny vystupujúce v oboch uvažovaných sústavách (LAB a IMF). Jadrom Kapitoly 4 je v podstate termodynamický model a s ním súvisiace veličiny, vrátane grafov, zobrazujúcich priebehy dôležitých funkcií už obsahujúcich fyzikálne parametry z termodynamiky a štatistickej fyziky. Na tomto mieste je teda overená funkčnosť a pravdivosť tohto netradičného modelu. Kapitola 5 ide do hĺbky problematiky ešte ďalej a poukazuje, ako má chaotický pohyb nukleónov v jadre, tzv. Fermiho pohyb, vplyv na výsledné distribučné funkcie kvarkov. Preto sa v konečnom dôsledku rozlišujú pojmy distribučných funkcií kvarkov v nukleóne a v jadre.

Na záver môžeme konštatovať, že model protónu postavený na termodynamickom pozadí môže byť veľmi užitočným intuitívnym nástrojom pre jeho analýzu na partónovej úrovni. Získané výsledky majú taktiež priamu náväznosť na ďalší fenomén a síce tzv. EMC efekt, popisujúci vplyv atómového jadra na štruktúrne funkcie jeho konšituentných nukleónov.

Kapitola 2

Kinematika hlbokého nepružného rozptylu

Zrážky vysokoenergetických leptónov (uvažujme elektróny o energii aspoň 20 GeV) s protónmi sú dostatočne vhodným nástrojom pre popis vnútornej štruktúry nukleónu. Dôvod natoľko vysokej hodnoty energie leptónov je daný tým, že platí $E \sim 1/\lambda$, kde λ je vlnová dĺžka elektrónu. Inými slovami, čím menšiu vlnovú dĺžku máme k dispozícii, tak podľa De Broglieho hypotézy odpovedá tejto vlně väčšia hodnota energie. Pri nedostatočne vysokých energiách by teda nebolo možné skúmať kvark-partónovú štruktúru nukleónu a zrážka by potom vypadala len ako interakcia letiaceho elektrónu s protónom a nie s jeho konštituentným kvarkom. Tento proces je znázornený Feynmanovým diagramom na Obr. 2.1.



Obr. 2.1 : Feynmanov diagram zrážky elektrónu a konštituentného kvarku protónu [1].

Uvažujme ďalej dve sústavy a síce laboratórnú sústavu, v ktorej je nukleón v pokoji (LAB) a systém s nekonečnou hybnosťou tohto nukleónu (IMF). Nekonečná hybnosť indikuje fakt, že v tejto sústave sa redukuje pohyb kvarku do jedného smeru a síce do smeru pohybu protónu; teda je možné zanedbať priečne (trasverzálne) zložky hybnosti kvarku $\vec{p}_T := (p_2, p_3)$. Označme štvorhybnosť kvarku v LAB ako $p^{(L)} = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (p_0, p_1, \vec{p}_T)$, štvorhybnosť výmenného fotónu v LAB ako $q^{(L)} = (q_0, q_1, q_2, q_3) = (v, q_L, \vec{q}_T)$, kde v predstavuje frekvenciu fotónu a indexy L a T odpovedajú pozdĺžnym (longitudálnym) a priečnym (transverzálnym) frakciám jeho

hybnosti. Pre jednoduchosť uvažujeme jednofotónovú výmenu. Analogicky platí pre štvorhybnosť protónu o hmotnosti M značenie $P^{(L)}=(P_0, P_1, P_2, P_3)=(P_0, \vec{P})=(M, 0, 0, 0)$.

Tvar posledného štvorvektora je dôsledkom toho, že v laboratórnej sústave je nukleón v pokoji, kde máme $\vec{P}=\vec{0}$ a navyše z definície štvorhybnosti $P^2=P_0^2-\vec{P}^2=M^2$ prídeme k rovnosti $P_0=M$.

Vektor štvorhybnosti nalietajúceho elektrónu označíme ako $k^{(L)}=(k_0, k_1, k_2, k_3)=(k_0, -k_0, 0, 0)$, kde znamienko mínus v druhej zložke indikuje fakt, že elektrón letí v zápornom smere osi x . Pre frekvenciu výmenného fotónu môžeme teda podľa zákona zachovania hybnosti napísať rovnosť:

$$v=k_0-k_0' \quad (2.1)$$

Analogickým spôsobom dostaneme sériu rovníc $q_1=q_L=k_1-k_1'=-k_0-k_1'$, z ktorej plynie nerovnosť $q_L < 0$.

Pre vektory štvorhybností v *IMF* zavedieme nasledovné značenie: $p^{(I)}=(p_0', p_1', p_2', p_3')$ pre prípad kvarku, $q^{(I)}=(q_0', q_1', q_2', q_3')$ pre prípad fotónu a $P^{(I)}=(P_0', P_1', P_2', P_3')$ pre protón.

Pokiaľ predpokladáme, že prechod od *LAB* do *IMF* sa deje v smere osi x , tak môžeme uvedené štvorvektory prepísať ako: $p^{(I)}=(p_0', p_1', p_2, p_3)$; $q^{(I)}=(q_0', q_1', q_2, q_3)$; $P^{(I)}=(P_0', P_1', 0, 0)$. Priečne zložky hybností teda zostávajú nezmenené.

Pre Lorentzovskú transformáciu zložiek hybností kvarku z *LAB* do *IMF* platí (v smere osi x):

$$\begin{pmatrix} p_0' c \\ p_1' c \\ p_2' c \\ p_3' c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma p_0 c - \beta \gamma p_1 c \\ -\beta \gamma p_0 c + \gamma p_1 c \\ p_2 c \\ p_3 c \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

kde $\beta=v/c$; $\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$ sú relativistické faktory (v je rýchlosť nukleónu v *IMF* a keďže v tejto sústave je jeho hybnosť nekonečná a navyše je jej smer orientovaný proti pohybu elektrónu, tak máme $-v \rightarrow c$, z čoho plynie $\beta \rightarrow -1$). V sústave prirodzených jednotiek, kde $\hbar=c=1$, nakoniec prechádza vzťah (2.2) do podoby:

$$\begin{pmatrix} p_0' \\ p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(p_0 + p_1) \\ \gamma(p_0 - p_1) \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Analogicky platí pre zložky hybnosti nukleónu v *IMF*:

$$\begin{pmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma M \\ \gamma M \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Frakciu hybnosti nesenú kvarkom v *IMF* zadefinujeme ako:

$$x := \frac{p_0'}{P_0'} \quad (2.5)$$

a použitím transformačných vzťahov (2.3) môžeme reláciu (2.5) prepísať na tvar :

$$x = \frac{p_1'}{P_1'} = \frac{p_0 + p_1}{M} \quad (2.6)$$

Invariantné premenné (Bjorkenova premenná x_B a kvadrát prenesenej hybnosti Q^2) používaných v teórii hlbokého nepružného rozptylu definujeme ako :

$$x_B = \frac{Q^2}{2Pq} \quad Q^2 = -q^2 \quad (2.7)$$

Zároveň predpokladáme, že:

$$q^2 + 2pq = 0 \quad (2.8)$$

a vieme, že platí:

$$q^2 = (k - k')^2 = k^2 - 2kk' + k'^2 \quad (2.9)$$

pričom $k^2 = k'^2 = m_e^2$, kde člen na pravej strane značí hmotnosť rozptyľovaného elektrónu. Jeho hmotnosť sa však v ďalších výpočtoch zanedbáva a preto ju kladieme rovnú nule. Použitím definičných vzťahov (2.7) a hore uvedených štvorvektorov hybností je možné z rovnice (2.8) odvodiť :

$$x_B = \frac{pq}{Pq} = \frac{p_0v + p_1|q_L|}{Mv} - \frac{\vec{p}_T \vec{q}_T}{Mv} \quad (2.10)$$

Séria rovností (2.9) nám dáva:

$$2k_0(|q_L| - v) = -q^2 \quad (2.11)$$

odkiaľ plynie použitím vzťahov (2.7) :

$$\frac{|q_L|}{v} = 1 - \frac{q^2}{2k_0v} = 1 + \frac{Mx_B}{k_0} \quad (2.12)$$

Kombináciou vzťahov (2.12) a (2.10) následne máme vzorec :

$$x_B = \frac{p_0 + p_1}{M} + \frac{p_1 x_B}{k_0} - \frac{\vec{p}_T \vec{q}_T}{Mv} \quad (2.13)$$

ktorý je možné pri dostatočne vysokých hodnotách energii elektrónu prepísať do tvaru:

$$x_B = x - \frac{\vec{p}_T \vec{q}_T}{Mv} \quad (2.14)$$

Predchádzajúca rovnosť nás oprávňuje tvrdiť, že v *IMF* je možné Bjorkenovu premennú x_B stotožniť s frakciou hybnosti x nesenú konštituentným kvarkom, keďže v tejto sústave sa pohyb kvarku redukuje do jednej dimenzie a teda jeho priečne zložky hybnosti \vec{p}_T môžeme považovať za nulové.

Platnosť rovnice (2.14) je možné dokázať aj určením jej závislosti na invariantnej veličine Q^2 . Výchádzame zo základných vzťahov platných pre zložky štvorhybnosti q :

$$\begin{aligned} q^2 &= q_L^2 + q_T^2 \\ q^2 &= v^2 - |\vec{q}|^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

kde $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Aplikovaním definícií (2.7) do druhej rovnice (2.15) získame:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vec{q}}{v}\right)^2 &= 1 - \frac{q^2}{v^2} = 1 + \left(\frac{2Mx_B}{Q}\right)^2 \\ \frac{q_T}{v} &= \sqrt{\left(\frac{|\vec{q}|}{v}\right)^2 - \left(\frac{q_L}{v}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4M^2}{Q^2} - \frac{M^2}{k_0^2}\right)x_B^2 - \frac{2Mx_B}{k_0}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Druhý vzťah zo série (2.16) odhadneme ako :

$$\frac{q_T}{v} < \frac{2Mx_B}{\sqrt{Q^2}} \quad (2.17)$$

čo nám umožní upraviť vzťah (2.17) do nasledujúcej podoby :

$$x_B = x - \frac{2p_T x_B \cos(\alpha)}{\sqrt{Q^2}} \quad (2.18)$$

kde α určuje uhol medzi transverzálnymi vektormi p_T, q_T . Z (2.18) taktiež vidíme, že pri dostatočne vysokých hodnotách prenesenej hybnosti (poruchový režim QCD) dostávame rovnosť :

$$x_B = x \quad (2.19)$$

V nasledujúcich riadkoch ukážeme akým spôsobom je ohraničená hybnosť partónu o hmotnosti m , čo vlastne využijeme pre obmedzenie parametru x . Predpokladajme, že fázový priestor kvarku je sférický a teda platí :

$$m^2 = p^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \quad (2.20)$$

Uvažujme ďalej relácie:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{M}\right)^2 &\leq x \leq 1 \quad ; \quad \sqrt{|\vec{p}|^2} \leq \frac{M^2 - m^2}{2M} := p_{max} \\ p_T^2 &\leq M^2(1-x) \left(x - \frac{m^2}{M^2}\right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dokážeme platnosť druhej rovnosti v (2.21). Pokiaľ skombinujeme sústavu rovníc (2.20) a (2.6), tak máme:

$$x = \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2} + p_1}{M} \quad (2.22)$$

Veličina x a teda aj prvá zložka hybnosti v (2.22) nadobúdajú maximálnu hodnotu, pokiaľ ostatné dve zložky hybnosti sú nulové. Vieme, že $\max(x) = 1$ a teda $p_1 \rightarrow p_{1max}$, z čoho plynie :

$$p_{1max} = \frac{M^2 - m^2}{2M} = p_{max} \quad (2.23)$$

Naopak, minimum parametru x je dosiahnuté v prípade, že $p_1 = -p_{max}$ a nulových hodnôt priečných zložiek hybnosti, t.j. :

$$x = \frac{\sqrt{p_{max}^2 + m^2} - p_{max}}{M} \leq 1 \quad (2.24)$$

Algebraickými úpravami nerovnice (2.24) dospejeme k výslednej nerovnosti :

$$x := \left(\frac{m}{M} \right)^2 \leq 1 \quad (2.25)$$

čím sme preukázali pravdivosť prvej relácie v sústave (2.21). Pre dôkaz posledného tvrdenia série (2.21) výjdeme z druhej nerovnosti v (2.21), ktorú môžeme prepísať do podoby :

$$p_1^2 + p_T^2 \leq \left(\frac{M^2 - m^2}{2M} \right)^2 \quad (2.26)$$

Vyjadrením parametru p_1 z rovnice (2.22) a jeho dosadením do nerovnice (2.26) nakoniec máme :

$$p_T^2 \leq M^2(1-x) \left(x - \frac{m^2}{M^2} \right) \quad (2.27)$$

Týmito nerovnosťami sme vlastne stanovili možné medze veličín $x, |\vec{p}|$.

Nakoniec sa ešte pokúsime nájsť hranice Bjorkenovej premennej a ako uvidíme v závere, zistíme, že pre vysoké hodnoty prenesenej hybnosti môžeme opäť predpokladať platnosť rovnice (2.19). Vzťahy (2.10) a (2.16) spolu implikujú, že :

$$x_B = \frac{p_0 v - \vec{p} \vec{q}}{M v} = \frac{1}{M} \left[\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} - \frac{\vec{p} \vec{q}}{v} \right] = \frac{1}{M} \left[\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} - \vec{p} \sqrt{1 + \left(\frac{2M x_B}{Q} \right)^2} \right] \quad (2.28)$$

Triviálne platí:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{2M x_B}{Q}\right)^2} \leq 1 + 2 \left(\frac{M x_B}{Q}\right)^2 \quad (2.29)$$

čo využijeme v aproximácii pravej strany (2.28).

Dostaneme totiž :

$$x_B \geq \frac{1}{M} \left[\sqrt{m^2 + p_{max}^2} - p_{max} \left(1 + \frac{2M^2 x_B^2}{Q^2} \right) \right] \quad (2.30)$$

Využijeme rovnosť :

$$\left(\frac{m}{M}\right)^2 = \frac{\sqrt{m^2 + p_{max}^2} - p_{max}}{M} \quad (2.31)$$

a po dosadení do vzťahu (2.30) a niekoľkých algebraických úpravách dostávame :

$$x_B \geq \left(\frac{m}{M}\right)^2 \left(1 - \frac{2 p_{max} m^2}{M Q^2} \right) \quad (2.32)$$

Je zrejmé, že pravá strana tejto nerovnosti v limite veľkých prenesených hybností konverguje k frakcii x .

V nasledujúcej stati si bližšie popíšeme distribučné funkcie kvarkov, ktoré vhodne využijeme pre výpočet počtu partónov a ich energií. V závere kapitoly poukážeme na vzájomný súlad medzi veličinami vystupujúcimi v sústavách *IMF* a *LAB*.

Kapitola 3

Distribučné funkcie kvarkov a štruktúrne funkcie nukleónov

3.1 : Distribučné funkcie kvarkov

Pracujeme teda s predpokladom, že nukleón predstavuje systém kvázivol'ných partónov (kvarkov a gluónov). Kým v *IMF* je vďaka nekonečnej hybnosti nukleónu hmotnosť konšituentných kvarkov zanedbateľná, tak v prípade popisu v *LAB* ich hmotnosť berieme do úvahy. Označme teda distribučnú funkciu popisujúcu rozdelenie kvarkov v závislosti na parametre x ako $F(x)$. Súčasne zavedieme veličinu, udávajúcu počet partónov v elemente fázového priestoru v kludovej sústave nukleónu $G(p_0)$, kde p_0 označuje energiu partónu v tejto sústave. Pripomíname, že toto rozdelenie hybností je v kludovej sústave protónu sféricky symetrické a závisí teda len na absolútnej hodnote (veľkosti) p_0 . Distribučnú funkciu kvarkov $F(x)$ vyjadríme ako [1] :

$$F(x) = \int \delta\left(\frac{p_0 + p_1}{M} - x\right) G(p_0) d^3 p \quad (3.1.1)$$

a vyintegrujeme v cylindrických súradniciach $(p_1, p_2, p_3) \rightarrow (h, p_0, \varphi)$ pomocou vzťahov :

$$\begin{aligned} p_1 &= h \\ p_2 &= \sqrt{p_0^2 - m^2 - h^2} \sin(\varphi) \\ p_3 &= \sqrt{p_0^2 - m^2 - h^2} \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Prechodom do zvolených súradníc teda dostávame :

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \int_m^{E_{max}} \int_{-H}^H \delta\left(\frac{p_0 + p_1}{M} - x\right) G(p_0) p_0 dh dp_0 d\varphi \quad (3.1.3)$$

kde symbolom E_{max} značíme maximálnu hodnotu energie partónu v kludovom systéme protónu.

Integračné medze $-H$ resp. H určíme sčítaním druhej a tretej rovnice sústavy (3.1.2). Odtiaľ totiž triviálne plynie:

$$H = \pm \sqrt{p_0^2 - m^2} \quad (3.1.4)$$

Z vlastností delta funkcie vieme, že k danému integrálu bude prispievať práve vtedy, keď jej argument bude nulový a teda:

$$p_0 + p_1 = M x \quad (3.1.5)$$

Pokiaľ si napíšeme vzťah (3.1.4) v podobe nerovností ako :

$$-\sqrt{p_0^2 - m^2} \leq h \leq \sqrt{p_0^2 - m^2} \quad (3.1.6)$$

tak využitím podmienky (3.1.5) zistíme, že integrál (3.1.3) nadobúda nenulové hodnoty, ak je splnená nerovnica :

$$p_0 > \frac{M x}{2} + \frac{m^2}{2 M x} \quad (3.1.7)$$

Ak označíme ďalej pravú stranu v (3.1.7) ako ξ , tak výraz (3.1.3) prechádza na tvar :

$$F(x) = 2 \pi M \int_{\xi}^{E_{max}} G(p_0) p_0 dp_0 \quad (3.1.8)$$

Z definície ξ môžeme vyjadriť premennú x a jej aplikovaním do argumentu funkcie $F(x)$ v (3.1.8) obdržíme rovnicu :

$$F\left(\frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - m^2}}{M}\right) = 2 \pi M \int_{\xi}^{E_{max}} G(p_0) p_0 dp_0 \quad (3.1.9)$$

z ktorej pomocou vety o derivácii určitého integrálu vyjadríme parameter $G = G(\xi)$. Využijeme vetu známu z matematickej analýzy:

$$\frac{d}{dy} \left[\int_y^a f(z) dz \right] = -\frac{d}{dy} \left[\int_a^y f(z) dz \right] = -f(y) \quad (3.1.10)$$

V prípade $x_1 = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - m^2}}{M}$ z (3.1.9) plynie :

$$G(\xi) = \frac{-1}{2 \pi M^2} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - m^2}} \right) F' \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - m^2}}{M} \right) \quad (3.1.11)$$

a úplne analogicky pre prípad $x_2 = \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - m^2}}{M}$ máme :

$$G(\xi) = \frac{-1}{2 \pi M^2} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - m^2}} \right) F' \left(\frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - m^2}}{M} \right) \quad (3.1.12)$$

Pripomíname, že funkcia G vyjadruje počet kvarkov v elemente $d^3 p$. Pokiaľ by sme túto funkciu vyintegrovali vo valcových súradniciach, dospeli by sme k parametru P , ktorý by popisoval počet týchto partónov v elemente dp/M . Matematicky tento poznatok formulujeme nasledovne :

$$P(p_0) dp_0 = dp_0 \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{p_0^2 - m^2}}^{\sqrt{p_0^2 - m^2}} G(p_0) p_0 dh d\varphi = 4 \pi G(p_0) p_0 \sqrt{p_0^2 - m^2} dp_0 \quad (3.1.13)$$

Dosadením vzťahov (3.1.11) a (3.1.12) do formuly (3.1.13) získame predpis pre funkciu $P(p_0)$ pre obidve možnosti parametru x :

$$P(p_0)dp_0 = \mp 2F' \left(\frac{p_0 \pm \sqrt{p_0^2 - m^2}}{M} \right) \left(\frac{p_0 \pm \sqrt{p_0^2 - m^2}}{M} \right) \frac{dp_0}{M} \quad (3.1.14)$$

alebo ekvivalentne:

$$P(p_0) = \frac{\mp 2}{M} F'(x_{1,2}) x_{1,2} \quad (3.1.15)$$

kde sme využili substitúciu $x_{1,2} = \frac{p_0 \pm \sqrt{p_0^2 - m^2}}{M}$.

Vzorec (3.1.15) kompaktným spôsobom popisuje vzťah medzi funkciami P a F (presnejšie jej prvou deriváciou). Zo vzťahu (3.1.14) navyše plynie jednoduchá relácia:

$$F'(x_1)x_1 = -F'(x_2)x_2 \quad (3.1.16)$$

Aby sme však získali vzájomnú závislosť funkcií $F(x_1)$, $F(x_2)$, výjdeme z diferenciálnej rovnice:

$$dx_{1,2} = \frac{dp_0}{M} \left(1 \pm \frac{p_0}{\sqrt{p_0^2 - m^2}} \right) \quad (3.1.17)$$

z ktorej je možné po niekoľkých úpravách dôjsť k tvaru:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{-dx_2}{x_2} \quad (3.1.18)$$

Potom totiž rovnica (3.1.16) prechádza do podoby:

$$\frac{dF(x_1)}{dx_2}(-x_2) = \frac{-dF(x_2)}{dx_2}(x_2) \quad ; \quad (3.1.19)$$

odkiaľ už je zrejmá rovnosť:

$$F(x_1) = F(x_2) \quad (3.1.20)$$

Použitím vzťahov (3.1.15) až (3.1.19) môžeme zistiť celkový počet partónov:

$$N = \int_m^{E_{\max}} P(p_0) dp_0 = - \int_{\frac{m}{M}}^1 F'(x_1) \left(x_1 - \frac{m^2}{M^2 x_1} \right) dx_1 \quad (3.1.21)$$

kde využijeme platnosť vzťahov:

$$x_1 x_2 = \left(\frac{m}{M} \right)^2 \quad ; \quad \frac{m}{M} \leq x_1 \leq 1 \quad (3.1.22)$$

$$\left(\frac{m}{M} \right)^2 \leq x_2 \leq \frac{m}{M} \quad ; \quad m \leq \xi \leq \frac{M^2 + m^2}{2M} := E_{\max}$$

a aplikovaním metódy per partes obdržíme výsledný vzorec v podobe (podrobnejšie odvodenie je možné nájsť v práci [1]) :

$$N = \int_{\left(\frac{m}{M}\right)^2}^1 F(x) dx \quad (3.1.23)$$

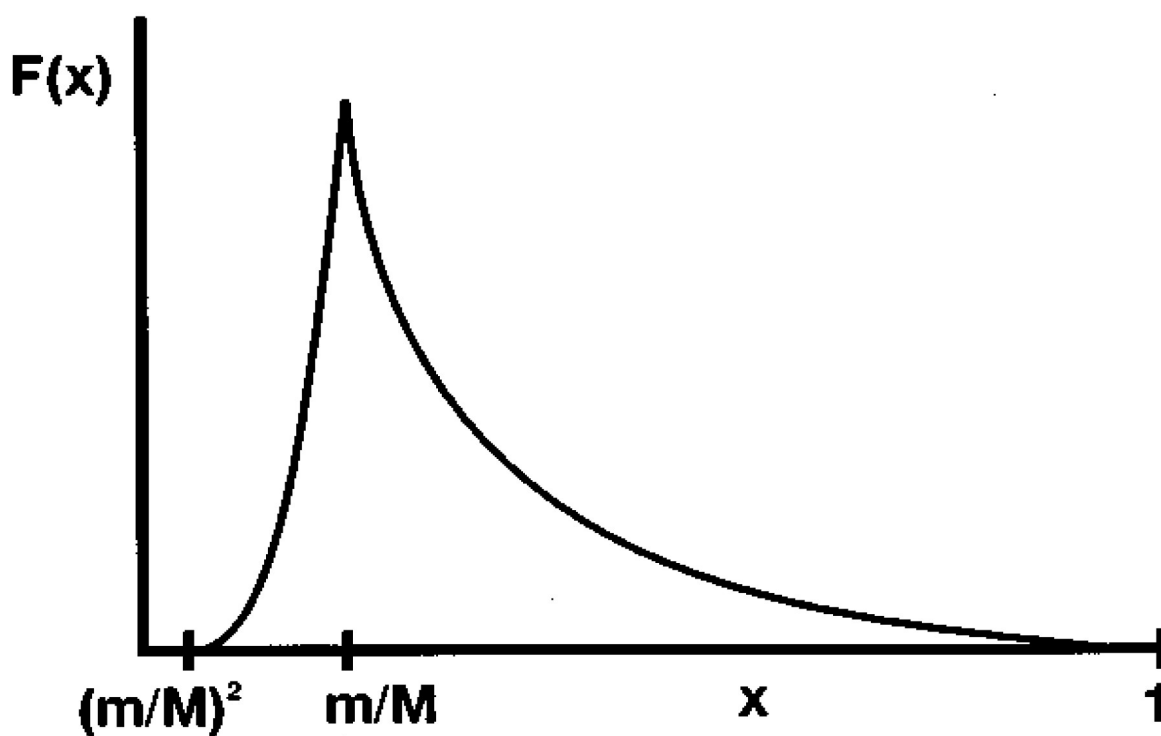
Podobnou cestou sa dopracujeme aj k celkovej energii partónov :

$$E = \int_m^{E_{max}} P(p_0) dp_0 = - \int_{\frac{m}{M}}^1 F'(x_1) \frac{M(x_1+x_2)}{2} \left(x_1 - \frac{m^2}{M^2 x_1} \right) dx_1 = M \int_{\left(\frac{m}{M}\right)^2}^1 F(x) x dx \quad (3.1.24)$$

V tomto prípade bol v úpravách použitý vzorec :

$$x_1 + x_2 = \frac{2p_0}{M} \quad (3.1.25)$$

Pre úplnosť ešte môžeme uviesť príklad funkcie $F(x)$ (Obr. 2), splňujúcej rovnosti (3.1.16) a (3.1.20) :



Obr. 3.1 : Príklad funkcie $F(x)$, ktorá splňuje podmienky (3.1.16) a (3.1.20) [1].

3.2 : Nepolarizované štruktúrne funkcie nukleónov

V predchádzajúcej kapitole sme sa oboznámili s distribučnými funkciami kvarkov. Tak ako sme uviedli napr. v práci [2], pre popis internej štruktúry nukleónov zavádzame tzv. štruktúrne funkcie (zatiaľ sa obmedzíme len na nepolarizované prípady týchto funkcií , nezohľadňujúce polarizáciu projektilu a terča) a ako uvidíme v závere, nám tieto veličiny budú užitočným nástrojom pre odvodenie známej Callanovej-Grossovej relácie, platnej pre tento typ funkcií. Kým distribučné funkcie majú svoj pôvod v Kvar-k-partónovom modeli a teda sú pevne naviazané na teoretické pozadie, tak štruktúrne funkcie pochádzajú priamo z rozptylových experimentov, ktoré získame extrakciou z tzv. kovariantného hadrónového tenzoru :

$$W_{\alpha\beta} = \frac{P_\alpha P_\beta}{M^2} W_2 - g_{\alpha\beta} W_1 \quad (3.2.1)$$

kde indexy α a β označujú sčítacie indexy, g metrický tenzor, P štvorhybnosť nukleónu o hmotnosti M a W pomocné štruktúrne funkcie (neskôr uvidíme ich priamu náväznosť na štruktúrne funkcie) uvažovaného nukleónu. V ďalších úvahách budeme využívať kovariantný kvarkový tenzor :

$$L_{\alpha\beta} = 4 p_\alpha p_\beta - 2 g_{\alpha\beta} p q \quad (3.2.2)$$

kde p predstavuje štvorhybnosť kvarku a q štvorhybnosť fotónu a taktiež elektrónový tenzor v kontravariantnom tvare (k resp. k' sú štvorhybnosti elektrónu pred resp. po zrážke s kvarkom) :

$$K^{\alpha\beta} = 2 (k^\alpha k'^\beta + k'^\alpha k^\beta + g^{\alpha\beta} \frac{q^2}{2}) \quad (3.2.3)$$

Všetky tri uvedené tenzory vstupujú do integrálov určujúcich diferencially účinné prierezy interakcie medzi elektrónom a protónom (3.2.4) a elektrónom a kvarkom (3.2.5) :

$$d\sigma_1 = \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{4\sqrt{(kP)^2 - m_e^2 M^2}} K^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} 4\pi M \frac{d^3 k'}{2(2\pi)^3 k_0} \quad (3.2.4)$$

$$d\sigma_2 = \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{4\sqrt{(kp)^2 - m_e^2 m^2}} K^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} 2\pi \delta((p+q)^2 - m^2) \frac{d^3 k'}{2(2\pi)^3 k_0} \quad (3.2.5)$$

Pre dve posledné rovnice navyiac platí:

$$d\sigma_1 = \int F(\zeta) d\sigma_2 d\zeta \quad (3.2.6)$$

kde symbol ζ predstavuje určité parametre, na ktorých závisí kvarkové rozdelenie vo vnútri protónu; $F(\zeta)$ značí potom túto funkčnú závislosť. Vzťah (3.2.6) zároveň vyjadruje všeobecný fakt, že rozptyl elektrónu na protóne sa vlastne skladá z rozptylu elektrónu na konštituentných kvarkoch a po vyintegrovaní cez všetky tieto rozptyly popísané veličinou $d\sigma_2$ a všetky parametre ζ dostávame rozptyl na protóne ako celku.

V *IMF*, kde zanedbávame hmotnosť a *3D* pohyb kvarkov (a teda ich pohyb je redukovaný do *ID*) máme:

$$\xi \approx \frac{P_\alpha}{P_\alpha} \quad (3.2.7)$$

Po dosadení (3.2.4) a (3.2.5) do integrálnej rovnice (3.2.6) za podmienky (3.2.7) získame :

$$\begin{aligned} & \frac{P_\alpha P_\beta}{M^2} W_2 - g_{\alpha\beta} W_1 = \\ & = \frac{1}{M} \int F(\xi) \frac{\sqrt{(kP)^2 - m_e^2 M^2}}{\sqrt{(k\xi P)^2 - m_e^2 m^2}} (2\xi^2 P_\alpha P_\beta - g_{\alpha\beta} \xi P q) \delta((p+q)^2 - m^2) d\xi \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

kde vo výrazoch pod odmocninami zanedbáme hmotnosti kvarku a elektrónu, čím sa nám rovnica (3.2.8) zredukuje na tvar :

$$\frac{P_\alpha P_\beta}{M^2} W_2 - g_{\alpha\beta} W_1 = \frac{1}{M} \int \left(\frac{F(\xi)}{\xi} \right) (2\xi^2 P_\alpha P_\beta - g_{\alpha\beta} \xi P q) \delta((p+q)^2 - m^2) d\xi \quad (3.2.9)$$

Pokiaľ by sme však chceli prejsť k *LAB*, kde je nukleón kľudovým objektom, museli by sme do úvahy vziať vlastný *3D* pohyb kvarkov vo vnútri nukleónu. Táto myšlienka je vyjadrená pomocou faktoru toku f (jedná sa vlastne o korekčný faktor) :

$$\begin{aligned} f &= 4\sqrt{(kp)^2 - m_e^2 m^2} = 4\sqrt{(k_0 p_0 - k_1 p_1 - k_2 p_2 - k_3 p_3)^2 - m_e^2 m^2} \approx \\ & \approx 4\sqrt{k_0^2 (p_0 + p_1)^2} = 4k_0 p_0 \left(1 + \frac{p_1}{p_0} \right) \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

V aproximácii veličiny f sme okrem obligátneho zanedbania hmotností partónu a elektrónu využili fakt : $k = (k_0, k_1, k_2, k_3) = (k_0, -k_0, 0, 0)$. V závislosti na polohe partónu vo vnútri protónu je daný aj celkový počet partónov, s ktorými má nalietajúci elektrón možnosť interagovať. Ak označíme

v sérii rovníc (3.2.10) $v_1 = \frac{p_1}{p_0}$, tak podľa orientácie tejto rýchlosti je daný počet možných

interakcií dN . Matematicky môžeme diferenciál týchto interakcií zapísať ako [1] :

$$dN = G(p_0)(1 + v_1) d^3 p \quad (3.2.11)$$

Potom teda prechádza rovnica (3.2.6) platná do podoby, platnej v *LAB* :

$$\begin{aligned} & \frac{P_\alpha P_\beta}{M^2} W_2 - g_{\alpha\beta} W_1 + A(P_\alpha q_\beta + q_\alpha P_\beta) + B q_\alpha q_\beta = \\ & = \frac{P_0}{M} \int \left(\frac{G(p_0)}{p_0} \right) (2 p_\alpha p_\beta - g_{\alpha\beta} p q) \delta((p+q)^2 - m^2) \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Členy A a B plnia rolu kalibračne invariantných funkcií, ktoré ale neprispievajú k účinnému prierezu interakcie, keďže pre ne platí :

$$q_\alpha K^{\alpha\beta} = 0 = q_\beta K^{\alpha\beta} \quad (3.2.13)$$

Predtým, než dôjde ku kontrakcii rovnice (3.2.12) vhodnými tenzormi, si ešte jednoduchými úpravami prepíšme výraz s delta funkciou, prítomný v tejto rovnici :

$$\begin{aligned} \delta((p+q)^2 - m^2) &= \delta(p^2 + 2pq + q^2 - m^2) = \delta\left[2Pq\left(\frac{pq}{Pq} + \frac{q^2}{2Pq}\right)\right] = \\ &= \delta\left[2Mv\left(\frac{pq}{Mv} + \frac{q^2}{2Mv}\right)\right] = \delta\left[2Mv\left(\frac{pq}{Mv} - x\right)\right] = \frac{1}{2Mv} \delta\left(\frac{pq}{Mv} - x\right) \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Prvú kontrakciu tenzorovej rovnice (3.2.12) prevedieme skrátením metrickým tenzorom $g^{\alpha\beta}$. Táto operácia implikuje :

$$W_2 - 4W_1 + 2Mv(A - Bx) = \frac{1}{Mv} \int \left(\frac{G(p_0)}{p_0}\right) (m^2 - 2Mvx) \delta\left(\frac{pq}{Mv} - x\right) d^3p \quad (3.2.15)$$

Pre detailnosť uvedieme aspoň v tomto prípade prehľad jednotlivých kontrakcií metrickým tenzorom :

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}(P_\alpha P_\beta) &= M^2 \\ g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} &= 4 \\ g^{\alpha\beta}(P_\alpha q_\beta) &= g^{\alpha\beta}(P_\beta q_\alpha) = Mv \\ g^{\alpha\beta}(q_\alpha q_\beta) &= -2Mvx \\ g^{\alpha\beta}(p_\alpha p_\beta) &= 2m^2 \\ g^{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta} pq) &= 4Mvx \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Druhá kontrakcia pomocou tenzoru $q^\alpha q^\beta$ implikuje :

$$\frac{v}{2Mx} W_2 + W_1 - 2Mv(A - Bx) = \frac{1}{Mv} \int \left(\frac{G(p_0)}{p_0}\right) Mvx \delta\left(\frac{pq}{Mv} - x\right) d^3p \quad (3.2.17)$$

Tretou kontrakciou tenzorom $P^\alpha P^\beta$ postupne dostaneme :

$$W_2 - W_1 + v(2MA + vB) = \frac{1}{Mv} \int \left(\frac{G(p_0)}{p_0}\right) \left(p_0^2 - \frac{Mxv}{2}\right) \delta\left(\frac{pq}{Mv} - x\right) d^3p \quad (3.2.18)$$

a nakoniec skrátením rovnice (3.2.12) pomocou $P^\alpha q^\beta$ bude mať :

$$W_2 - W_1 + MA(v - 2Mx) - 2Mvx B = \frac{1}{Mv} \int \left(\frac{G(p_0)}{p_0}\right) \left(p_0 Mx - \frac{Mxv}{2}\right) \delta\left(\frac{pq}{Mv} - x\right) d^3p \quad (3.2.19)$$

Sústavu rovníc (3.2.15), (3.2.17), (3.2.18) a (3.2.19) prepíšeme tak, že si zadefinujeme pomocný integrál ako :

$$V_j(x) := \int G(p_0) \left(\frac{p_0}{M} \right)^j \delta \left(\frac{pq}{Mv} - x \right) d^3 p \quad (3.2.20)$$

kde $j = \{-1; 0, 1\}$.

Potom po pomerne časovo náročných úpravách dospejeme k sústave (3.2.21) :

$$\begin{aligned} 2M W_1 &= \frac{v}{2Mx+v} \left\{ V_{-1}(x) \left[x - \frac{M}{v} \left(\frac{m^2}{M^2} - x^2 \right) - 2 \frac{m^2 x}{v} \right] + V_0(x) \frac{2Mx}{v} + V_1(x) \frac{2M^2 x}{v} \right\} \\ v W_2 &= x \left(\frac{v}{2Mx+v} \right)^2 \left\{ V_{-1}(x) \left[x - \frac{M}{v} \left(\frac{m^2}{M^2} + x^2 \right) - 2 \frac{m^2 x}{v} \right] + V_0(x) \frac{6Mx}{v} + V_1(x) \frac{6M^2 x}{v} \right\} \\ v^2 M A &= - \left(\frac{v}{2Mx+v} \right)^2 \left\{ V_{-1}(x) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{M^2} + 3x^2 \right) + \frac{m^2 x}{Mv} \right] - V_0(x) 2x \left(1 - \frac{Mx}{v} \right) - V_1(x) \frac{3Mx}{v} \right\} \\ v^3 B &= \left(\frac{v}{2Mx+v} \right)^2 \left\{ V_{-1}(x) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{M^2} + 3x^2 \right) + \frac{m^2 x}{Mv} \right] - V_0(x) 3x \left(1 - \frac{Mx}{v} \right) + V_1(x) \left(1 - \frac{Mx}{v} \right) \right\} \end{aligned}$$

V limite $v \gg M \gg m$ prechádzajú prvé dve rovnice sústavy (3.2.21) do tvaru :

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} V_{-1}(x) &= M W_1 := F_1(x) \\ x^2 V_{-1}(x) &= v W_2 := F_2(x) \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

kde funkcie F_1, F_2 značia štruktúrne funkcie protónu. Zo vzťahov (3.2.22) je teda zrejma priama závislosť pomocných štruktúrnych funkcií W_1, W_2 na štruktúrnych funkciách F_1, F_2 . Vzájomným delením týchto rovníc získame známy Callanov-Grossov vzťah :

$$\frac{F_2}{F_1} = 2x \quad (3.2.23)$$

V predchádzajúcich riadkoch sme mali možnosť vidieť vzájomnú súhrnu veličín vystupujúcich jednak v *LAB* a taktiež v *IMF*. V ďalšom texte poukážeme na univerzálnejšie vyjadrenie štruktúrnych funkcií, ktoré bude podkladom pre ďalšie štúdium. Zároveň uvidíme, ako je možné od najvšeobecnejšieho (manifestne kovariantného) modelu prejsť k prípadu *LAB* resp. *IMF*.

Pre tieto účely uvažujme manifestne kovariantnú tenzorovú rovnicu podobnú rovnici (3.2.12) [3] :

$$\begin{aligned} & \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) W_1 + \left(P_\alpha - \frac{Pq}{q^2} q_\alpha \right) \left(P_\beta - \frac{Pq}{q^2} q_\beta \right) \frac{W_2}{M^2} = \\ & = \int G \left(\frac{pP}{M} \right) (2p_\alpha p_\beta + p_\alpha q_\beta + q_\alpha p_\beta - g_{\alpha\beta} pq) \frac{1}{2Pq} \delta \left(\frac{pq}{Pq} - x \right) \frac{d^3 p}{p_0} \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

V súlade s postupom aplikovanom na rovnosť (3.2.12) dostaneme kontrakciou rovnice (3.2.24) tenzormi $g^{\alpha\beta}$, $P^\alpha P^\beta$ novú sústavu rovníc, ktorej riešením sú nepolarizované štruktúrne funkcie v podobe :

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \frac{M}{2} \left(C + \frac{D}{y} \right) \\
 F_2(x) &= \frac{Pq}{2My} \left(C + \frac{3D}{y} \right) \\
 C &:= \frac{1}{Pq} \int G \left(\frac{Pp}{M} \right) [pq - m^2] \delta \left(\frac{pq}{Pq} - x \right) \frac{d^3 p}{p_0} \\
 D &:= \frac{1}{Pq} \int G \left(\frac{Pp}{M} \right) \left[\left(\frac{Pp}{M} \right)^2 + \frac{(Pp)(Pq)}{M^2} - \frac{pq}{2} \right] \delta \left(\frac{pq}{Pq} - x \right) \frac{d^3 p}{p_0} \\
 y &:= 1 - \left(\frac{Pq}{Mq} \right)^2
 \end{aligned} \tag{ 3.2.25 }$$

kde bola použitá malá modifikácia výrazu v delta funkcii : $Pq = P_0q_0 - P_1q_1 - P_2q_2 - P_3q_3 = Mv$.

V úpravách sme v podstate využili sériu vzťahov (3.2.22) napísanú v univerzálnejšej podobe :

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &:= M W_1 \\
 F_2(x) &:= \left(\frac{Pq}{M} \right) W_2
 \end{aligned} \tag{ 3.2.26 }$$

Na prvý pohľad je vidieť istý nesúlad medzi vzťahmi platnými pre F_2 v rovniciach (3.2.22) a (3.2.26). Je to spôsobené tým, že výrazy v (3.2.22) sú špecifikované pre LAB , kým vzťahy v (3.2.26) platia všeobecne (manifestne) . Pokiaľ si totiž napíšeme výraz Pq/M v LAB , tak zistíme, že :

$$\frac{Pq}{M} = \frac{P_0q_0 - P_1q_1 - P_2q_2 - P_3q_3}{M} = \frac{Mv}{M} = v \tag{ 3.2.27 }$$

prechádza do podoby platnej v kludovej sústave nukleónu. Tým sme teda dokázali platnosť a oprávnenosť druhej relácie v (3.2.26) .

Tak ako sme však spomínali v úvode tejto práce a aj na ďalších miestach tak vieme, že okrem už spomínaných a analyzovaných nepolarizovaných štruktúrnych funkcií existujú aj tzv. polarizované štruktúrne funkcie, zohľadňujúce polarizáciu terčíkovej a projektilovej častice. Polarizáciu vlastne môžeme chápať ako projekciu spinu častice do zvoleného smeru. Hlavný význam majú pozdĺžna a priečna polarizácia : pozdĺžna polarizácia je daná smerom letu elektrónu k protónu a priečna mieri kolmo na tento smer. Z rozdelenia elektrónov rozptýlených na terčovom protóne vyplýva tzv. spinová asymetria, ktorá má fundamentálny význam v určení vzájomnej závislosti spinu protónu a spinu jeho konšituentných kvarkov.

3.3 : Polarizované štruktúrne funkcie nukleónov

Nukleón popisujeme ako systém kvázivoľných partónov so spinom $\frac{1}{2}$ a hmotnosťou m . Z kvantovej teórie poľa plynie pre voľné fermióny tvar spinoru ako :

$$\psi_{p,\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} u(p, \lambda) \exp(-ipx) \quad (3.3.1)$$

kde $\lambda = \{-1/2, +1/2\}$ sú možné projekcie spinu kvarku, p je jeho štvorhybnosť, Ω je normalizovaný objem a :

$$u(p, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \phi_\lambda \\ (\vec{p} \vec{\sigma}) \phi_\lambda \\ p_0 + m \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

N je normalizačná konštanta definovaná ako :

$$N = \frac{2p_0}{p_0 + m} \quad (3.3.3)$$

Zároveň vieme, že :

$$\vec{p} \vec{\sigma} = p_1 \sigma_1 + p_2 \sigma_2 + p_3 \sigma_3 \quad (3.3.4)$$

kde p značia zložky hybnosti kvarku o veľkosti $|\vec{p}|$ a σ sú Pauliho matice :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

Súčasne platia normalizácie daných funkcií :

$$\int_{\Omega} \psi_{p,\lambda}^+ \psi_{p,\lambda} d^3x = 1 \quad (3.3.6)$$

$$\phi_\lambda^+ \phi_\lambda = 1$$

kde znamienko $''+''$ indikuje komplexne združenú funkciu k pôvodnej funkcii ψ resp. Φ .

Fakt, že fermión má vo svojej kľudovej sústave projekciu spinu rovnú $-1/2$ resp. $1/2$ vyjadríme pomocou rovnice :

$$\frac{1}{2} \vec{n} \vec{\sigma} \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda \quad (3.3.7)$$

kde \vec{n} predstavuje jednotkový normálový vektor, určený smerom polarizácie terčového protónu.

Celkový moment hybnosti kvarku j môžeme vyjadriť ako vektorový súčet jeho orbitálneho momentu hybnosti l (popisujúceho jeho pohyb) a jeho spinu s (jeho vnútorného stupňa voľnosti) :

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad (3.3.8)$$

Jeho strednú hodnotu v smere určenom vektorom \vec{n} spočítame ako :

$$\langle \vec{n} \vec{j} \rangle = \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_x} \sum_{\lambda=\{\pm 1/2\}} G_\lambda(p_0) \psi_{p,\lambda}^+(x) \vec{n} \vec{j} \psi_{p,\lambda}(x) d^3 x d^3 p \quad (3.3.9)$$

kde symboly Γ v medziach integrálov označujú integračné priestory hybnosti a polohy.

Symbol $G_\lambda(p_0)$ označuje funkciu určujúcu pravdepodobnosť existencie kvarku v stave popísanom vlnovou funkciou $\psi_{p,-1/2}$ resp. $\psi_{p,+1/2}$. Pre výslednú nepolarizovanú distribučnú funkciu $G(p_0)$ popisujúcu rozdelenie hybností kvarkov potom máme :

$$G(p_0) := \sum_{\lambda=\{\pm 1/2\}} G_\lambda(p_0) = G_{-1/2}(p_0) + G_{+1/2}(p_0) \quad (3.3.10)$$

Využívajúc znalostí z kvantovej mechaniky je možné upraviť integrand v rovnici (3.3.9) a následne obdržime :

$$\begin{aligned} \langle \vec{n} \vec{j} \rangle &= \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_x} \sum_{\lambda=\{\pm 1/2\}} G_\lambda(p_0) \left(\frac{\lambda + \epsilon_{klm} n_k p_l x_m}{\Omega} \right) d^3 x d^3 p = \\ &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_x} \left[\frac{1}{2} (G_{+1/2}(p_0) - G_{-1/2}(p_0)) + G(p_0) \epsilon_{klm} n_k p_l x_m \right] d^3 x d^3 p = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_p} \Delta G(p_0) d^3 p = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

V úpravách sme zároveň použili vzťahy (ΔG označuje polarizovanú distribučnú funkciu rozdelenia hybností kvarkov) [4] :

$$\begin{aligned} \Delta G(p_0) &:= G_{-1/2}(p_0) - G_{+1/2}(p_0) \\ \int \Delta G(p_0) d^3 p &= 1 \\ \int G(p_0) d^3 p &= 3 \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Pokiaľ by sme však ale uvažovali kvark v pokoji a teda bez započítania jeho orbitálneho momentu hybnosti, dostali by sme teda $j=s$ a pre strednú hodnotu spinu by platilo :

$$\langle \vec{n} \vec{s} \rangle = \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_x} \sum_{\lambda=\{\pm 1/2\}} G_\lambda(p_0) \psi_{p,\lambda}^+(x) \vec{n} \vec{s} \psi_{p,\lambda}(x) d^3 x d^3 p \quad (3.3.13)$$

Po dosadení pravých strán rovníc (3.3.1) a (3.3.2) do (3.3.13) a pomocou (3.3.7) obdržime :

$$\begin{aligned} \langle \vec{n} \vec{s} \rangle &= \frac{1}{\Omega N} \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_x} \sum_{\lambda=\{\pm 1/2\}} G_\lambda(p_0) \left[\left(\phi_\lambda^+ ; \frac{(\vec{p} \vec{\sigma}) \phi_\lambda^+}{p_0 + m} \right) \vec{n} \vec{s} \left(\frac{(\vec{p} \vec{\sigma}) \phi_\lambda}{p_0 + m} \right) \right] d^3 x d^3 p = \\ &= \frac{1}{\Omega N} \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_x} \sum_{\lambda=\{\pm 1/2\}} G_\lambda(p_0) \left[\lambda + \phi_\lambda^+ \frac{(\vec{p} \vec{\sigma})(\vec{n} \vec{s})(\vec{p} \vec{\sigma})}{(p_0 + m)^2} \phi_\lambda \right] d^3 x d^3 p = \\ &= \frac{1}{\Omega N} \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_x} \sum_{\lambda=\{\pm 1/2\}} G_\lambda(p_0) \left[\lambda + \phi_\lambda^+ \frac{(\vec{p} \vec{\sigma}) [2(\vec{p} \vec{n}) - (\vec{p} \vec{\sigma})(\vec{n} \vec{\sigma})]}{2(p_0 + m)^2} \phi_\lambda \right] d^3 x d^3 p = \\ &= \frac{1}{\Omega N} \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_x} \sum_{\lambda=\{\pm 1/2\}} G_\lambda(p_0) \left[\lambda - \frac{|\vec{p}|^2}{(p_0 + m)^2} \lambda + \phi_\lambda^+ \frac{(\vec{p} \vec{\sigma})(\vec{p} \vec{n})}{(p_0 + m)^2} \phi_\lambda \right] d^3 x d^3 p \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Teraz si upravíme nasledujúci výraz :

$$(\vec{p} \vec{\sigma})(\vec{p} \vec{n}) = (p_1 \sigma_1 + p_2 \sigma_2 + p_3 \sigma_3)(p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3) = \sum_{i=1}^3 p_i^2 \sigma_i n_i + \sum_{i \neq j} p_i p_j \sigma_i n_j \quad (3.3.15)$$

ktorý sa navyiac v prípade sférickej symetrie rozdelenia hybností redukuje akurát na prvý sčítanec .
Po následnom vložení do posledného tvaru (3.3.14) je jasné, že platí :

$$\begin{aligned} \langle \vec{n} \vec{s} \rangle &= \frac{1}{\Omega N} \int_{r_p} \int_{r_x} \sum_{\lambda=\{\pm 1/2\}} G_{\lambda}(p_0) \left[\lambda - \frac{|\vec{p}|^2}{(p_0+m)^2} \lambda + \phi_{\lambda}^+ \frac{|\vec{p}|^2}{3(p_0+m)^2} (\vec{\sigma} \vec{n}) \phi_{\lambda} \right] d^3 x d^3 p = \\ &= \frac{1}{N} \int_{r_p} \sum_{\lambda=\{\pm 1/2\}} \lambda G_{\lambda}(p_0) \left[1 - \frac{|\vec{p}|^2}{(p_0+m)^2} + \frac{2|\vec{p}|^2}{3(p_0+m)^2} \right] d^3 p \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Finálnu podobu dostaneme po použití vzťahov (3.3.12) :

$$\langle \vec{n} \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \int_{r_p} \left(\frac{1}{3} + \frac{2m}{3p_0} \right) \Delta G(p_0) d^3 p \leq \frac{1}{2} \quad (3.3.17)$$

Rovnosť v nerovnici (3.3.17) nastáva za predpokladu, že $p_0 = m$; inými slovami pokiaľ je uvažovaný kvark v kľude. Ekvivalentne môžeme povedať, že pohybujúci sa kvark (relativistickou rýchlosťou) na jednej strane prispieva k orbitálnemu momentu l , kým na druhej strane znižuje spinový príspevok s . Naopak, kvark s nulovou rýchlosťou anuluje orbitálnu zložku celkového momentu hybnosti j a teda platí $j=s$.

Pre získanie polarizovaných štruktúrnych funkcií budeme ďalej uvažovať základnú rovnicu, ktorej detailné odvodenie môžeme nájsť v práci [4] :

$$S^{\sigma} G_S - P^{\sigma} G_P = \frac{m}{2Pq} \int \Delta G \left(\frac{Pp}{M} \right) (AP^{\sigma} + BS^{\sigma} + Cp^{\sigma}) \delta \left(\frac{pq}{Pq} - x \right) \frac{d^3 p}{p_0} + Dq^{\sigma} \quad (3.3.18)$$

kde G_S, G_P sú pomocné polarizované štruktúrne funkcie významom podobné nepolarizovaným štruktúrnym funkciám W_1, W_2 (vid' (3.2.22)), parametry P, S a p sú po poradí štvorhybnosť protónu o hmotnosti M , kovariantný štvorvektor definovaný ako $S := (0; \vec{n})$ (vektor n naďalej zohráva úlohu jednotkového normálového vektora) a štvorhybnosť kvarku o hmotnosti m ; q je štvorvektor hybnosti fotónu. Parametre A, B a C majú priamu náväznosť na uvedené štvorvektory hybností ako :

$$A = \frac{-pS}{pP+mM} ; B=1 ; C = \frac{AM}{m} \quad (3.3.19)$$

V rovnici (3.3.18) sa na prvý pohľad nachádza istá nezrovnalosť a síce v argumente funkcie ΔG . Tento argument je totiž uvedený vo svojej najvšeobecnejšej (manifestne kovariantnej) podobe analogicky prípadu rovníc (3.2.25) a (3.2.26). Skutočne totiž platí, že :

$$\frac{Pp}{M} = \frac{P_0 p_0 - P_1 p_1 - P_2 p_2 - P_3 p_3}{M} = \frac{M p_0}{M} = p_0 \quad (3.3.20)$$

Týmto dôkazom sme teda ukázali súlad medzi prechodom od manifestne kovariantnej reprezentácie ku klúdovej sústave nukleónu (LAB).

Pomocou sekvencie kontrakcií rovnice (3.3.18) tenzormi $P_\sigma, S_\sigma, q_\sigma$ prídeme k sústave rovníc :

$$\begin{aligned} M^2 G_P &= \frac{-m}{2Pq} \int \Delta G \left(\frac{Pp}{M} \right) (AM^2 + C(Pp)) \delta \left(\frac{pq}{Pq} - x \right) \frac{d^3 p}{p_0} + D(Pq) \\ G_S &= \frac{-m}{2Pq} \int \Delta G \left(\frac{Pp}{M} \right) (-B + C(pS)) \delta \left(\frac{pq}{Pq} - x \right) \frac{d^3 p}{p_0} + D(qS) \\ (qS)G_S - (Pq)G_P &= \frac{m}{2Pq} \int \Delta G \left(\frac{Pp}{M} \right) (A(Pq) + B(qS) + C(pq)) \delta \left(\frac{pq}{Pq} - x \right) \frac{d^3 p}{p_0} + Dq^2 \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Z hore uvedených troch rovníc plynie vzťah pre parameter D :

$$D = \frac{-\frac{m}{2Pq} \int H \left(\frac{Pp}{M} \right) C(pu) \delta \left(\frac{pq}{Pq} - x \right) \frac{d^3 p}{p_0}}{qu} \quad (3.3.22)$$

kde sme využili substitúciu :

$$u := q + (qS)S - \frac{(Pq)P}{M^2} \quad (3.3.23)$$

Nakoniec, pomocou (3.3.19) a relácií (3.3.21) až (3.3.23) môžeme písať, že :

$$\begin{aligned} G_P &= \frac{m}{2Pq} \int \Delta G \left(\frac{pP}{M} \right) \frac{pS}{pP + mM} \left[1 + \frac{1}{mM} \left(pP - \frac{pu}{qu} Pq \right) \right] \delta \left(\frac{pq}{Pq} - x \right) \frac{d^3 p}{p_0} \\ G_S &= \frac{m}{2Pq} \int \Delta G \left(\frac{pP}{M} \right) \left[1 + \frac{M(pS)}{m(pP + mM)} \left(pS - \frac{pu}{qu} qS \right) \right] \delta \left(\frac{pq}{Pq} - x \right) \frac{d^3 p}{p_0} \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

Vzťahy medzi pomocnými štruktúrnymi funkciami G_P, G_S a štruktúrnymi funkciami g_1, g_2 sú podľa [4] :

$$\begin{aligned} g_1 &= (Pq) \left(G_S - \frac{Pq}{qS} G_P \right) \\ g_2 &= \frac{(Pq)^2}{qS} G_P \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Týmto sme vlastne dostali dvojicu polarizovaných štruktúrnych funkcií g_1, g_2 v manifestne kovariantnej reprezentácii.

Teraz bude našou úlohou vyjadriť štruktúrne funkcie (3.2.25) a (3.3.25) v LAB . Pre tento účel si prepíšeme výraz s delta funkciou do formy :

$$\delta \left(\frac{pq}{Pq} - x \right) \rightarrow \delta \left(\frac{p_0 + p_1}{M} - x \right) \quad (3.3.26)$$

V limite platnej v LAB $Q^2 \gg (2Mx)^2$ potom budeme mať pre hľadané nepolarizované štruktúrne funkcie zo sústavy rovníc (3.2.25) :

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{1}{2} \int G(p_0)(p_0+p_1) \delta\left(\frac{p_0+p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0} + \\
&+ \frac{M}{2} \frac{(2Mx)^2}{(2Mx)^2+Q^2} \frac{2x}{Q^2} \int G(p_0) \left(p_0^2+p_0 v - \frac{p q}{2}\right) \delta\left(\frac{p_0+p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0} = \\
&= \frac{Mx}{2} \int G(p_0) \delta\left(\frac{p_0+p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0} + 0 = \frac{Mx}{2} \int G(p_0) \delta\left(\frac{p_0+p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0}
\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \frac{Q^2}{4M + \frac{Q^2}{Mx^2}} \int G(p_0) \delta\left(\frac{p_0+p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0} + \\
&+ \frac{3}{2M} \left(1 + \frac{Q^2}{4M^2 x^2}\right)^{-2} \int G(p_0) \delta\left(\frac{p_0+p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0} = \\
&= \frac{Mx^2}{1 + \frac{4M^2 x^2}{Q^2}} \int G(p_0) \delta\left(\frac{p_0+p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0} + 0 = Mx^2 \int G(p_0) \delta\left(\frac{p_0+p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0}
\end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Podobne dospejeme za rovnakých podmienok platných v LAB k polarizovaným štruktúrnym funkciám zo sústavy (3.3,25) (uvedieme už len výsledné tvary) :

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= \frac{1}{2} \int \Delta G(p_0) \left(m + p_1 + \frac{p_1^2}{p_0+m}\right) \delta\left(\frac{p_0+p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0} \\
g_2(x) &= \frac{-1}{2} \int \Delta G(p_0) \left(p_1 + \frac{p_1^2 - \frac{p_T^2}{2}}{p_0+m}\right) \delta\left(\frac{p_0+p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0}
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

kde pripomíname, že index T označuje transversálnu (priečnu) zložku štvorhybnosti kvarku.

V IMF naďalej pracujeme s predpokladom, ktorý hovorí o redukcii pohybu kvarku do jedného rozmeru, t.j. $x=p/P$, čo zároveň implikuje $p_T=0$. Pomocou úprav popísaných v [3] nakoniec obdržíme vzťahy:

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 q(x) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 (q^+(x) + q^-(x)) \\
F_2(x) &= x \sum_q e_q^2 q(x) = x \sum_q e_q^2 (q^+(x) + q^-(x)) \\
g_1(x) &= \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 \Delta q(x) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 (q^+(x) - q^-(x)) \\
g_2(x) &= 0
\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Symbole q a Δq zastupujú nepolarizované a polarizované distribučné funkcie závislé na Bjorkenovej premennej x v *IMF*.

Predstavili sme teda tri rôzne prístupy popisu vnútorného sveta nukleónu a síce najvšeobecnejšie kovariantný popis, jeho verziu v *LAB* a nakoniec i prípad viazaný na *IMF*. V *IMF* navyše je patná istá ekvivalencia medzi distribučnými a štruktúrnymi funkciami. V skutočnosti však tieto funkcie nie sú identické a navyše ako sme už uviedli v predchádzajúcich statiach, aj pôvod obidvoch týchto veličín je úplne rozdielny. V ďalšej kapitole sa budeme snažiť získať zo štruktúrnych funkcií, ktoré je možné zmerať experimentálne, predpis pre distribučné funkcie kvarkov platné v *LAB*.

3.4 : Distribučné funkcie kvarkov v LAB

Po dosadení modifikovanej delta funkcie (3.3.26) do (3.2.20) dostaneme pomocný integrál v podobe :

$$V_j(x) = \int G(p_0) \left(\frac{p_0}{M} \right)^j \delta \left(\frac{p_0 + p_1}{M} - x \right) d^3 p \quad (3.4.1)$$

kde $j = \{-1; 0; 1\}$, pomocou ktorého môžeme za použitia vzťahov (3.1.11) a (3.1.12) odvodiť, že platí :

$$V_j'(x_{1,2})_{x_{1,2} = \mp 2} = \mp 2 \pi M G(\xi) \xi \left(\frac{\xi}{M} \right)^j \sqrt{\xi^2 - m^2} \quad (3.4.2)$$

Tento vzorec je možné v limite nehmotných kvarkov upraviť do jednoduchšieho tvaru :

$$V_j'(x)_{x = \mp 2} = \mp 2 \pi M G(\xi) \xi^2 \left(\frac{\xi}{M} \right)^j \quad (3.4.3)$$

za podmienky : $x_1 := x = \frac{2\xi}{M}$, keďže $x_2 = 0$.

Pre $j = -1$ dostaneme pomocou (3.4.1) a (3.4.3) dôležitý vzťah pre distribučnú funkciu hybností kvarkov $G(p)$ ako :

$$G(p) = \frac{-1}{\pi M^3} \frac{d}{dx} \left[\frac{F_2(x)}{x^2} \right] = \frac{1}{\pi M^3} \left[\frac{2F_2(x)}{x} - \frac{d}{dx} F_2(x) \right] \quad (3.4.4)$$

kde platí sada rovností a implikácia (v prípade nehmotných kvarkov) :

$$\begin{aligned} p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2 = 0 &\Rightarrow p \equiv p_0 = \sqrt{\vec{p}^2} \\ x = \frac{2p}{m} = \frac{2p_0}{m} & \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Pre jeden kvark q potom máme funkciu, charakterizujúcu počet kvarkov typu q v elemente $d^3 p$, ktorá je navyše vždycky kladná :

$$G_q(p) = \frac{-1}{\pi M^3} \frac{d}{dx} \left[\frac{q(x)}{x} \right] = \frac{1}{\pi M^3 x^2} \left[q(x) - x \frac{d}{dx} q(x) \right] \quad (3.4.6)$$

Pre tento element platí v sférických súradniciach :

$$d^3 p = dp \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = 4\pi p^2 dp \quad (3.4.7)$$

kde θ resp. φ sú polárny resp. azimutálny uhol.

Preto pre funkciu $P_q(p)$ popisujúcu počet kvarkov typu q v elemente dp/M bude následne platiť :

$$P_q(p) = 4\pi p^2 M G_q(p) = -x^2 \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{q(x)}{x} \right) \right] = q(x) - x \frac{d}{dx} q(x) \quad (3.4.8)$$

Z pozitivnosti funkcie $G_q(p)$ vidíme, že aby sme zachovali kladnosť funkcie $P_q(p)$, musí byť splnená nerovnosť z predchádzajúcej série rovností :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{q(x)}{x} \right) \leq 0 \quad (3.4.9)$$

Tento fakt je vlastne využitý na Obr. 3.4.1 pre prípady funkcií P valenčných a morských kvarkov v LAB . Dôvod, prečo tieto veličiny konvergujú k nule pre $p/M=1/2$ je daný tým, že z kinematiky kvarku vo vnútri nukleónu v LAB plynie :

$$P_{max} = \frac{M}{2} \quad (3.4.10)$$

Z uvedených poznatkov je možné pomocou vzťahov (3.4.6) a (3.4.7) vypočítať strednú hodnotu hybnosti kvarku typu q v LAB ako (čiarka značí deriváciu podľa premennej x) :

$$\langle p \rangle_q = \frac{\int p G_q(p) d^3 p}{\int G_q(p) d^3 p} \Bigg|_{x=\frac{2p}{M}} ; \quad dx = \frac{2}{M} dp \Bigg| = \frac{M}{2} \frac{\int_0^1 x (q(x) - x q'(x)) dx}{\int_0^1 (q(x) - x q'(x)) dx} \quad (3.4.11)$$

Posledný výraz v (3.4.11) prechádza v prípade valenčných kvarkov (u, d) po úpravách metódou per partes do tvaru podielu dvoch konvergentných integrálov :

$$\langle p \rangle_{q, val} = \frac{3M}{4} \frac{\int_0^1 x q_{val}(x) dx}{\int_0^1 q_{val}(x) dx} \quad (3.4.12)$$

kde sa využíva notácia pre distribučnú funkciu valenčných kvarkov ako (q_{sea} označuje distribučnú funkciu morských kvarkov typu s a jeho antikvarku tak ako aj antikvarky valenčných kvarkov u a d) :

$$q_{val}(x) = q(x) - q_{sea}(x) \quad (3.4.13)$$

Na druhú stranu, pre morské kvarky ($x \rightarrow 0$) budeme mať v dôsledku nulového čitateľa finálneho zlomku :

$$\langle p \rangle_{sea} \rightarrow 0 \quad (3.4.14)$$

Toľko teda k nepolarizovaným štruktúrnym funkciám protónu a ich vzťahu k nepolarizovaným distribučným funkciám kvarkov. V nasledujúcich riadkoch sa totiž budeme zaoberať vzájomnou závislosťou polarizovaných funkcií (štruktúrnych a distribučných). Pre ďalšie úvahy predpokladáme platnosť nasledovnej dvojice vzťahov v limite nehmotných kvarkov (Detailné matematické dôkazy sú uvedené v práci [3].) :

$$\begin{aligned} V_0(x) &= \frac{1}{2} \left(x V_{-1}(x) + \int_0^x V_{-1}(y) dy \right) \\ g_1(x) &= V_0(x) - \int_x^1 \left(\frac{4x^2}{y^3} - \frac{x}{y^2} \right) V_0(y) dy \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Pomocou viet o úpravách integrálov známych z matematickej analýzy nakoniec dospejeme ku vzťahu :

$$g_1(x) = \frac{1}{2} x V_{-1}(x) - x^2 \int_x^1 \left(\frac{V_{-1}(y)}{y^2} \right) dy \quad (3.4.16)$$

ktorý zavedením substitúcie :

$$V(x) := \frac{V_{-1}(x)}{x} \quad (3.4.17)$$

dáva diferenciálnu rovnicu :

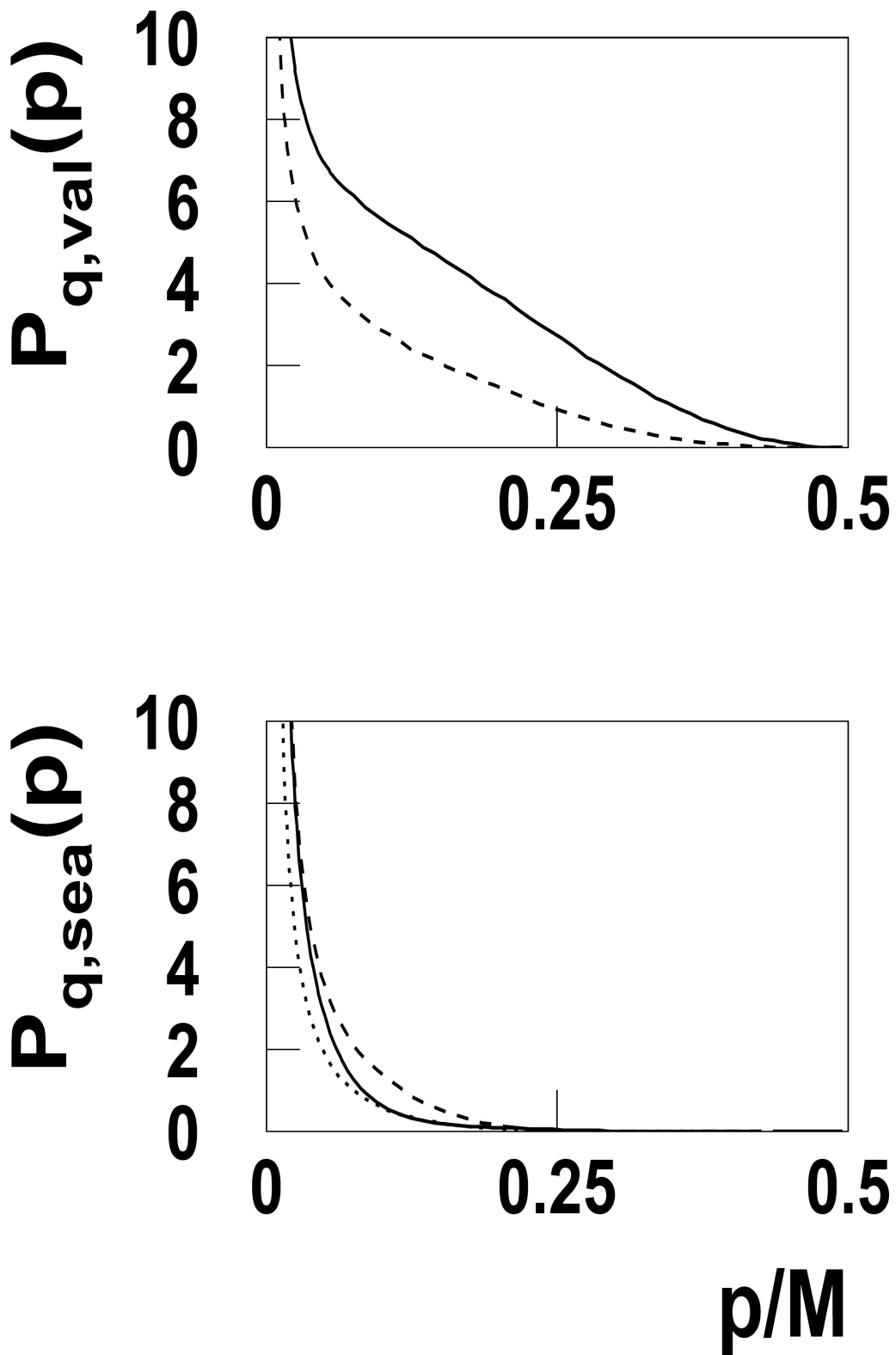
$$\frac{1}{2} V'(x) + \frac{V(x)}{x} = \left(\frac{g_1(x)}{x^2} \right)' \quad (3.4.18)$$

Pomocou riešenia tejto rovnice s nulovou pravou stranou nakoniec zistíme, že platí :

$$V_{-1}(x) = \frac{2}{x} \left[g_1(x) + 2 \int_x^1 \left(\frac{g_1(y)}{y} \right) dy \right] \quad (3.4.19)$$

Zo vzťahu (3.4.3) plynie (pre $j=-1$) :

$$\Delta G(p) = \frac{-V_{-1}'(x)}{\pi M^3} \quad (3.4.20)$$



Obr. 3.4.1 : Priebehy funkcií $P(p)$: $P_{q,val}(p) = P_q(p) - P_{q,sea}(p)$ (hore) a $P_{q,sea}(p)$, pri odovzdanej hodnote kvadrátu hybnosti $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ [3].
 Legenda : plná čiara (kvark u a jeho antikvark), čiarkovaná čiara (kvak d a jeho antikvark), bodkovaná čiara (antikvark kvarku s)

Zderivovaním rovnice (3.4.19) podľa premennej x a následným vložením do (3.4.20) obdržíme po niekoľkých algebraických úpravách formulu pre polarizovanú distribučnú funkciu :

$$\Delta G(p) = \frac{2}{\pi M^3 x^2} \left[3 g_1(x) + 2 \int_x^1 \left(\frac{g_1(y)}{y} \right) dy - x g_1'(x) \right] \quad (3.4.21)$$

Ďalej na základe substitúcie:

$$\Delta q(x) := 2 g_1(x) \quad (3.4.22)$$

a tzv. Wanzurovej-Wilczekovej relácie [3] :

$$g_1(x) + g_2(x) = \int_x^1 \left(\frac{g_1(y)}{y} \right) dy := \frac{\Delta q_T(x)}{2} \quad (3.4.23)$$

sme schopní napísať tvar polarizovanej distribúcie kvarku typu q ako :

$$\Delta G_q(p) = \frac{-1}{\pi M^3} \frac{d}{dx} \left[\frac{\Delta q(x) + 2 \Delta q_T(x)}{x} \right] \quad (3.4.24)$$

Analogicky, v súlade s rovnosťami platnými v *IMF* :

$$\begin{aligned} q(x) &= q^+(x) + q^-(x) \\ \Delta q(x) &= q^+(x) - q^-(x) \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

máme v prípade *LAB* :

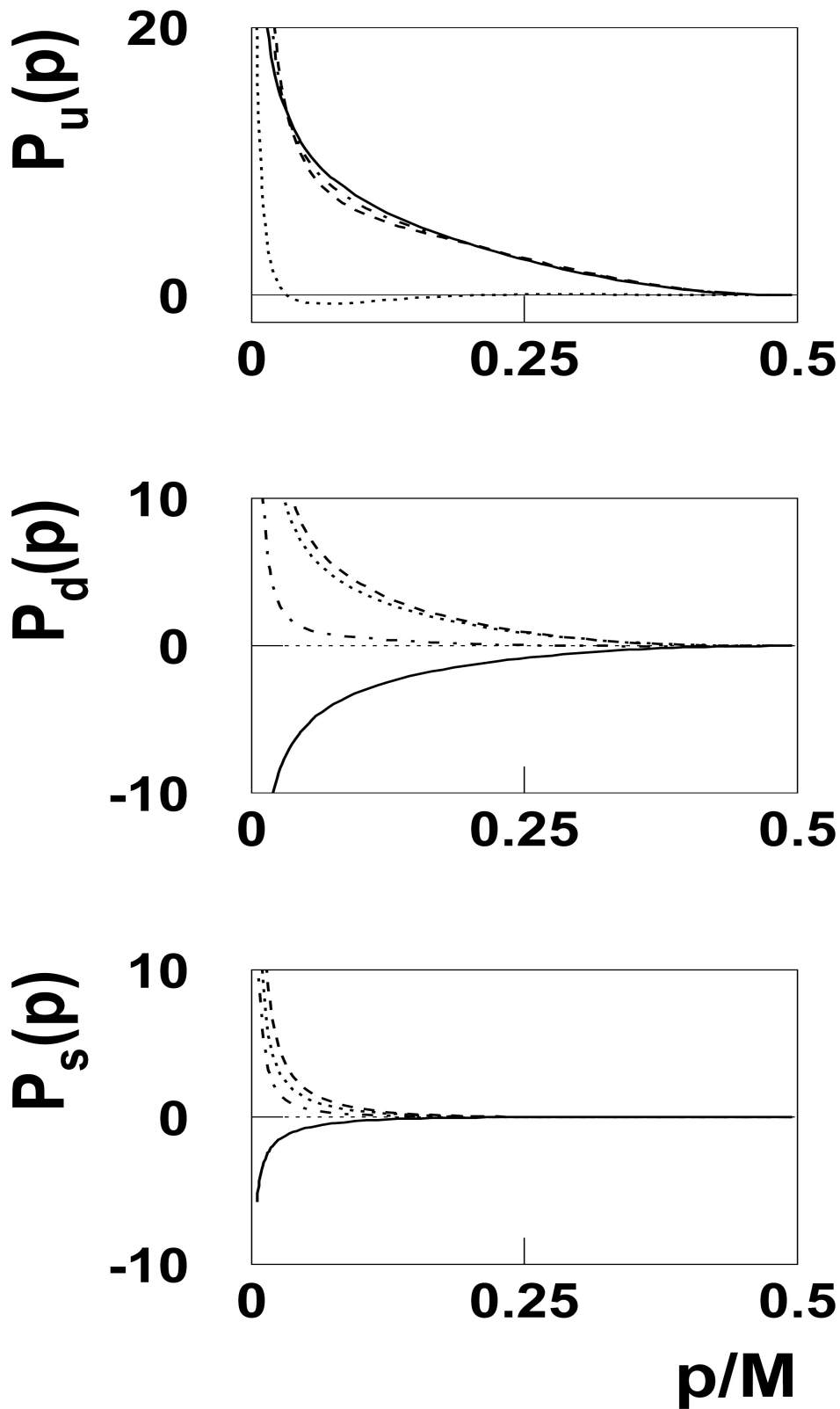
$$\begin{aligned} G_q(p) &= G_q^+(p) + G_q^-(p) \\ \Delta G_q(p) &= G_q^+(p) - G_q^-(p) \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

kde symboly " + " resp. " - " indikujú distribučné funkcie pre kvarky so spinom $\frac{1}{2}$ resp. so spinom $-\frac{1}{2}$; inými slovami nám dávajú informáciu o počte kvarkov daného typu a príslušnej polarizácie v elemente $d^3 p$ Sčítaním a odčítaním týchto dvoch rovníc dostaneme :

$$G_q^\pm(p) = \frac{1}{2} (G_q(p) \pm \Delta G_q(p)) \quad (3.4.27)$$

V súlade s postupom, aplikovanom v rovniciach (3.4.6) a (3.4.8) potom dostaneme výrazy pre funkcie (podobne ako už zmienená veličina $P_q(p)$ daná rovnicou (3.4.8)), ktoré merajú počet kvarkov daného typu (prípadne i polarizácie) v elemente dp/M :

$$\begin{aligned} \Delta P_q(p) &= 3 \Delta q(x) + 2 \int_x^1 \left(\frac{\Delta q(y)}{y} \right) dy - x \Delta q'(x) \\ P_q^\pm(p) &= \frac{1}{2} ((q(x) - x q'(x))) \pm \left[\frac{3}{2} \Delta q(x) + \int_x^1 \left(\frac{\Delta q(y)}{y} \right) dy - \frac{1}{2} x \Delta q'(x) \right] \end{aligned} \quad (3.4.28)$$



Obr. 3.4.2 : Priebehy funkcií $\Delta P_q, P_q, P_q^+, P_q^-$ pre prípady kvarkov $q=\{u,d,s\}$ pri predanej hodnote kvadrátu hybnosti $Q^2=4\text{ GeV}^2$ [3].

Legenda : plná čiara (ΔP_q), čiarkovaná čiara (P_q^+), bodkočiarkovaná čiara (P_q),
bodkovaná čiara (P_q^-)

Obr. 3.4.2 ukazuje grafické reprezentácie pravdepodobnostných funkcií $\Delta P_q, P_q, P_q^+, P_q^-$. Z neho je taktiež možné pozorovať nerovnosti :

$$\begin{aligned} P_u^+ &\geq P_u^- \\ P_d^+ &\leq P_d^- \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

Tieto nerovnosti vlastne dávajú okrem iného odpoveď na kvarkové zloženie protónu z valenčných kvarkov (2 u so spinom $\frac{1}{2}$ a 1 d so spinom $-\frac{1}{2}$).

Na záver sa ešte pokúsime do tabuľky (Tab. 3.4.1) zhrnúť v texte použité distribučné a štruktúrne funkcie (resp. veličiny charakteristické pre konkrétnu vzťahnú sústavu) a poukázať na prípadné rozdiely a ich ekvivalentné tvary v sústavách *IMF* a *LAB* :

Veličina	Tvar veličiny v <i>IMF</i>	Tvar veličiny v <i>LAB</i>
Nepolarizovaná distribučná funkcia kvarku typu q	$q(x) = q^+(x) + q^-(x)$	$G_q(p_0) = G_q^+(p_0) + G_q^-(p_0)$
Polarizovaná distribučná funkcia kvarku typu q	$\Delta q(x) = q^+(x) - q^-(x)$	$\Delta G_q(p_0) = G_q^+(p_0) - G_q^-(p_0)$
Výsledná nepolarizovaná distribučná funkcia kvarkov	$Q(x) = \sum_q e_q^2 q(x)$	$G(p_0) = \sum_q e_q^2 G_q(p_0)$
Výsledná polarizovaná distribučná funkcia kvarkov	$\Delta Q(x) = \sum_q e_q^2 \Delta q(x)$	$\Delta G(p_0) = \sum_q e_q^2 \Delta G_q(p_0)$
Distribučná funkcia kvarku q so spinom $\frac{1}{2}$ (+)	$q^+(x) = \frac{q(x) + \Delta q(x)}{2}$	$G_q^+(p_0) = \frac{G_q(p_0) + \Delta G_q(p_0)}{2}$
Distribučná funkcia kvarku q so spinom $-\frac{1}{2}$ (-)	$q^-(x) = \frac{q(x) - \Delta q(x)}{2}$	$G_q^-(p_0) = \frac{G_q(p_0) - \Delta G_q(p_0)}{2}$
Nepolarizovaná štruktúrna funkcia protónu F_1	$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 q(x)$	$F_1(x) = \frac{Mx}{2} \int G(p_0) \delta\left(\frac{p_0 + p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0}$
Nepolarizovaná štruktúrna funkcia protónu F_2	$F_2(x) = x \sum_q e_q^2 q(x)$	$F_2(x) = Mx^2 \int G(p_0) \delta\left(\frac{p_0 + p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0}$
Polarizovaná štruktúrna funkcia protónu g_1	$g_1(x) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 \Delta q(x)$	$g_1(x) = \frac{1}{2} \int \Delta G(p_0) \left(m + p_1 + \frac{p_1^2}{p_0 + m}\right) \delta\left(\frac{p_0 + p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0}$
Polarizovaná štruktúrna funkcia protónu g_2	$g_2(x) = 0$	$g_2(x) = \frac{-1}{2} \int \Delta G(p_0) \left(p_1 + \frac{p_1^2}{p_0 + m}\right) \delta\left(\frac{p_0 + p_1}{M} - x\right) \frac{d^3 p}{p_0}$
Invariantný výraz	x	p_0
Dimenzia priestoru pohybu kvarku	1	3

Tab. 3.4.1 : Porovnanie veličín a funkcií vyskytujúcich sa v *IMF* a *LAB*

Kapitola 4

Štruktúrne funkcie v reči veličín termodynamiky a štatistickej fyziky

Tak, ako bolo uvedené v práci [2], máme možnosť vyjadriť distribučné funkcie partónov (kvarkov, antikvarkov a gluónov) pomocou veličín známych z oblasti termodynamiky a štatistickej fyziky. Vydáme z distribučných funkcií kvarkov resp. antikvarkov q, \bar{q} , daných predpismi [5] :

$$x q^h(x, Q_0^2) = \frac{A X_{0q}^h x^b}{\exp\left[\frac{x - X_{0q}^h}{\bar{x}}\right] + 1} + \frac{\tilde{A} x^{\tilde{b}}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right] + 1} \quad (4.1)$$

$$x \bar{q}^h(x, Q_0^2) = \frac{\bar{A} (X_{0q}^{-h})^{-1} x^{2b}}{\exp\left[\frac{x + X_{0q}^{-h}}{\bar{x}}\right] + 1} + \frac{\tilde{A} x^{\tilde{b}}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right] + 1} \quad (4.2)$$

kde v súlade s pôvodnou notáciou h značí projekciu spinu $1/2$ (+), resp. $-1/2$ (-), X_{0q}^h určuje chemický potenciál kvarku q o helicity h , x je Bjorkenova invariantná premenná, A, \bar{A}, \tilde{A} sú normalizačné konštanty, \bar{x} termodynamická teplota, b, \tilde{b} fitovacie parametre a zároveň platí vzťah medzi chemickými potenciálmi kvarku q a jeho antikvarku :

$$X_{0q}^h = -X_{0\bar{q}}^{-h} \quad (4.3)$$

V Tab. 4.1 sú stručne zhrnuté hodnoty použitých parametrov :

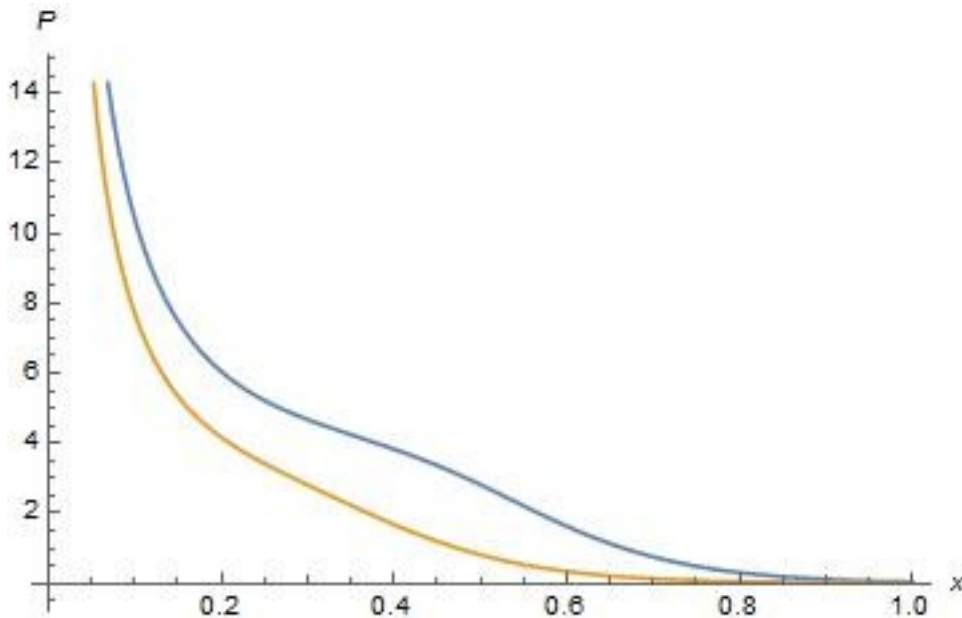
Veličina	Hodnota
A	1,74938
\bar{A}	1,90801
A_G	14,27535
X_{0u}^+	0,46128
X_{0u}^-	0,29766
X_{0d}^+	0,22775
X_{0d}^-	0,30174
\bar{x}	0,09907
b	0,40962
\tilde{b}	- 0,25347
\tilde{A}	0,08318

Tab. 4.1 : Hodnoty parametrov vystupujúcich v termodynamických formulách [5].

Vyjadrením distribučnej funkcie príslušného kvarku resp. antikvarku z rovníc (4.1) a (4.2) a následným dosadením do vzťahu (3.4.8) využijúc sústavu rovníc (3.4.25) budeme mať, napr. pre u kvark :

$$\begin{aligned}
 P_u(x) &= u(x) - x u'(x) = u^+(x) + u^-(x) - x(u^+(x) + u^-(x))' = \\
 &= \frac{A X_{0u}^+ x^{b-1}}{\exp\left[\frac{x - X_{0u}^+}{\bar{x}}\right] + 1} + \frac{\tilde{A} x^{\tilde{b}-1}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right] + 1} + \frac{A X_{0u}^- x^{b-1}}{\exp\left[\frac{x - X_{0u}^-}{\bar{x}}\right] + 1} + \frac{\tilde{A} x^{\tilde{b}-1}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right] + 1} - \\
 &- x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{A X_{0u}^+ x^{b-1}}{\exp\left[\frac{x - X_{0u}^+}{\bar{x}}\right] + 1} + \frac{\tilde{A} x^{\tilde{b}-1}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right] + 1} + \frac{A X_{0u}^- x^{b-1}}{\exp\left[\frac{x - X_{0u}^-}{\bar{x}}\right] + 1} + \frac{\tilde{A} x^{\tilde{b}-1}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right] + 1} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

funkciu určujúcu počet kvarkov v závislosti na parametre x . Jej priebeh je možné pozorovať na Obr. 4.1, kde je pre porovnanie taktiež uvedená funkcia $P_d(x)$, získaná úplne analogicky ako (4.4).



Obr. 4.1 : Porovnanie priebehov funkcií $P_u(x)$ (u kvark) a $P_d(x)$ (d kvark)

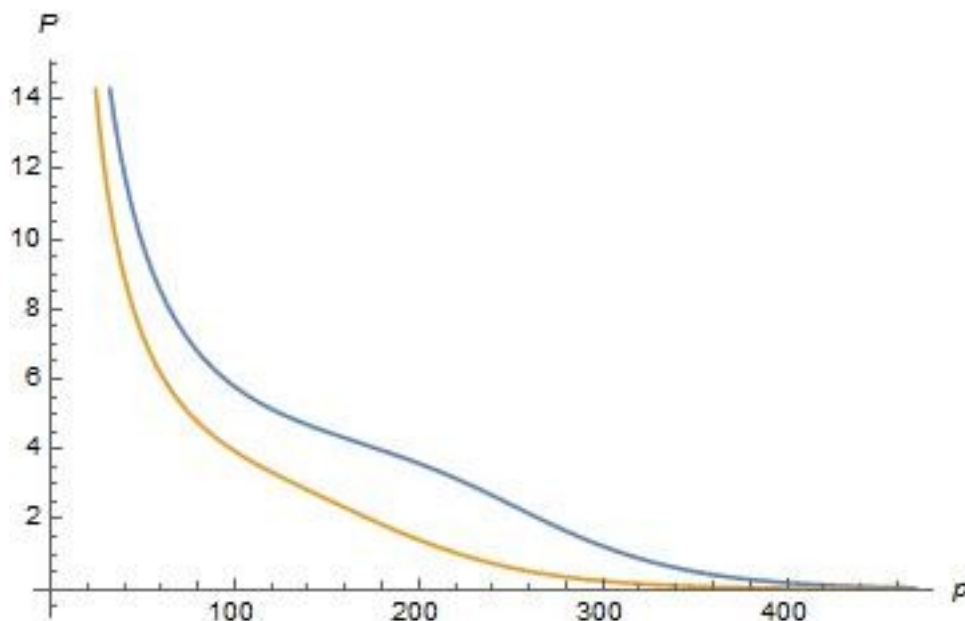
V ďalšom texte však budeme vyjadrovať funkcie $P(x)$ v závislosti na parametre p , teda na energii kvarku v kludovej sústave protónu (LAB), čím dostaneme predpisy pre funkcie $P(p)$ v tejto sústave. Pre túto energiu máme :

$$p = \frac{M x}{2} \tag{4.5}$$

Keď upravíme ďalej funkciu $P_q(x)$ danú rovnicami (3.4.8) :

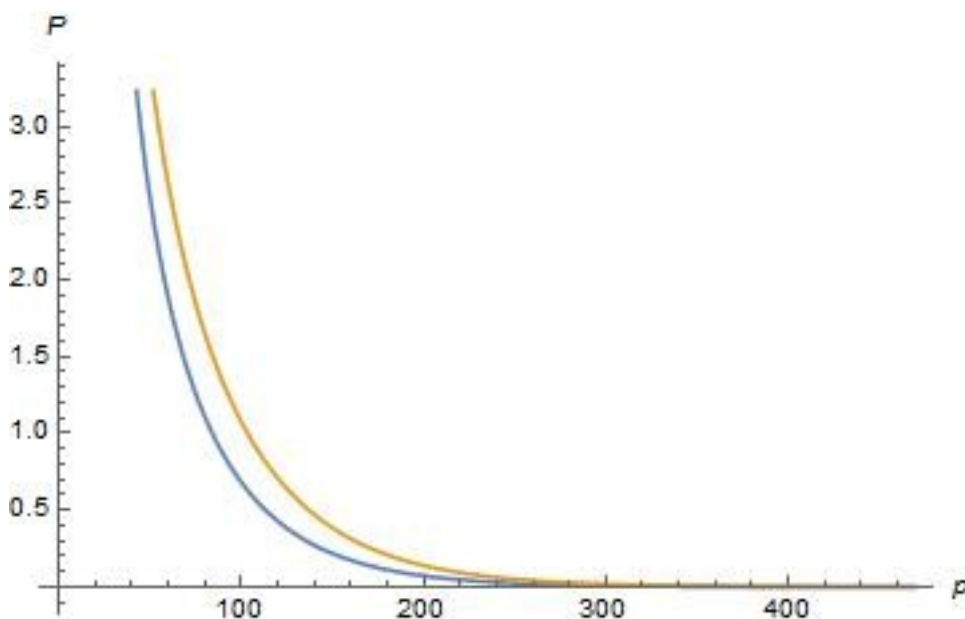
$$P_q(p) = q(p) - \frac{2p}{M} \frac{\partial q(p)}{\partial x} = q(p) - \frac{2p}{M} \frac{\partial q(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = q(p) - p \frac{\partial q(p)}{\partial p} \tag{4.6}$$

tak potom Obr. 4.2 demonštruje funkcie $P(p)$ merajúce počet kvarkov v závislosti na energii tohto kvarku v LAB. Matematicky to znamená, že nahradíme veličinu x v sústave rovníc (4.4) energiou p danou vzťahom (4.5).



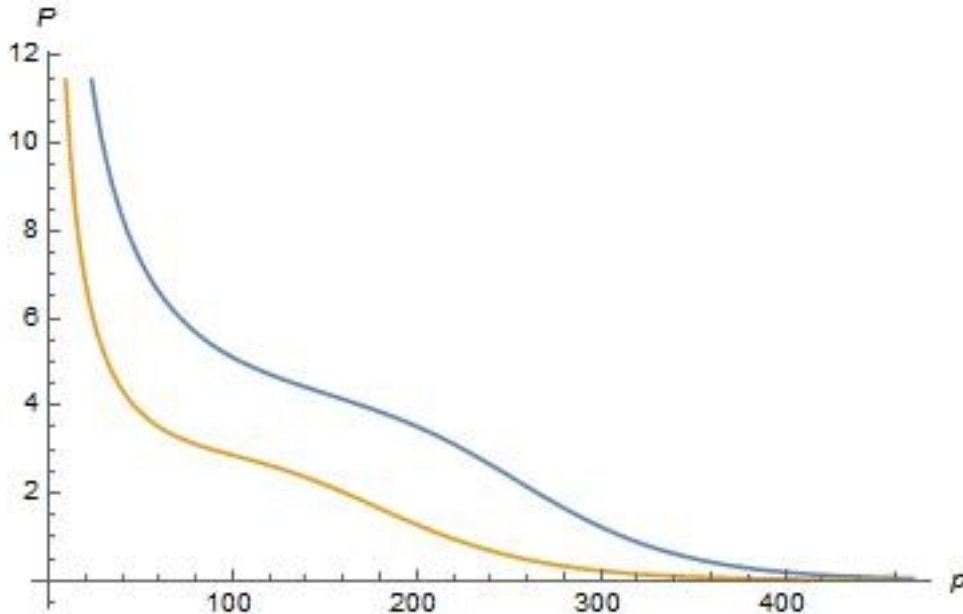
Obr. 4.2 : Porovnanie priebehov funkcií $P_u(p)$ (*u kvark*) a $P_d(p)$ (*d kvark*)

Úplne rovnakú procedúru aplikujeme na rovnicu (4.2) platnú pre antikvarky a po jej vyjadrení v reprezentácii veličiny p môžeme nakresliť grafy zobrazené na Obr. 4.3.



Obr. 4.3 : Porovnanie priebehov funkcií $P_{\bar{u}}(p)$ (*u kvark*) a $P_{\bar{d}}(p)$ (*d kvark*)

Ako porovnanie správnosti našich výsledkov s grafmi na Obr. 3.4.1 uvádzame Obr. 4.4, na ktorom máme zobrazené priebehy funkcií $P_u - P_{\bar{u}}; P_d - P_{\bar{d}}$. Tieto grafy vlastne predstavujú funkcie $P(p)$ vyjadrené pre valenčné kvarky u a d , dané ako rozdiel výslednej funkcie $P_q(p)$ a funkcie popisujúcej počet morských kvarkov typu q $P_q(p)$, kde $q = \{u, d\}$.



Obr. 4.4 : Porovnanie priebehov funkcií $(P_u - P_{\bar{u}})(p)$ (u kvark) a $(P_d - P_{\bar{d}})(p)$ (d kvark)

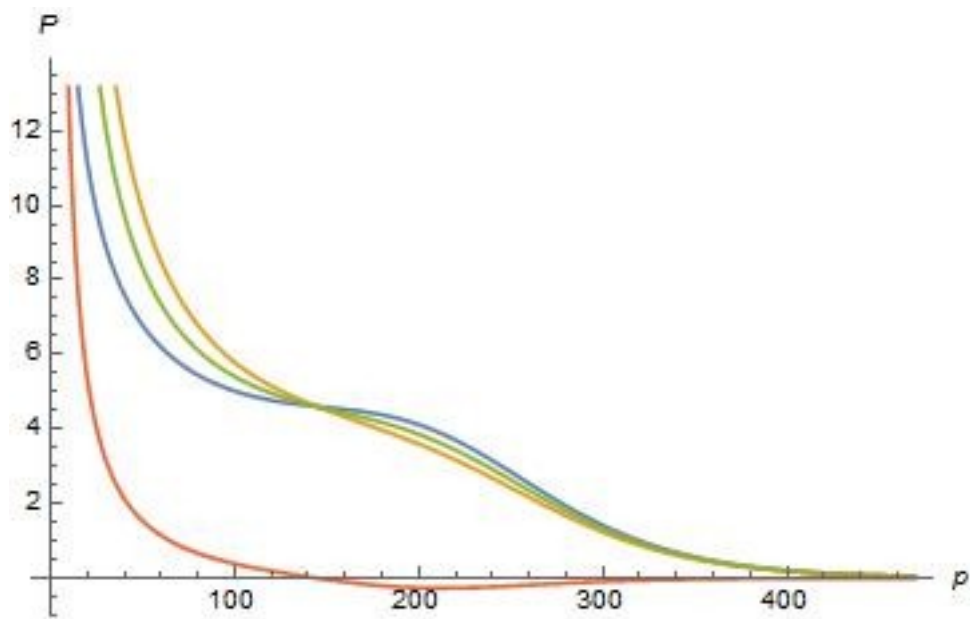
Pre zobrazenie trojici veličín $\Delta P_q(p), P_q^+, P_q^-$ budú pre nás východiskom vzťahy (3.4.28), samozrejme vyjadrené ako funkcie premennej p . Tu je výhodné vychádzať z rovnosti [3]:

$$\int_0^1 \int_x^1 \left(\frac{\Delta q(y)}{y} \right) dy dx = \int_0^1 \Delta q(x) dx \quad (4.7)$$

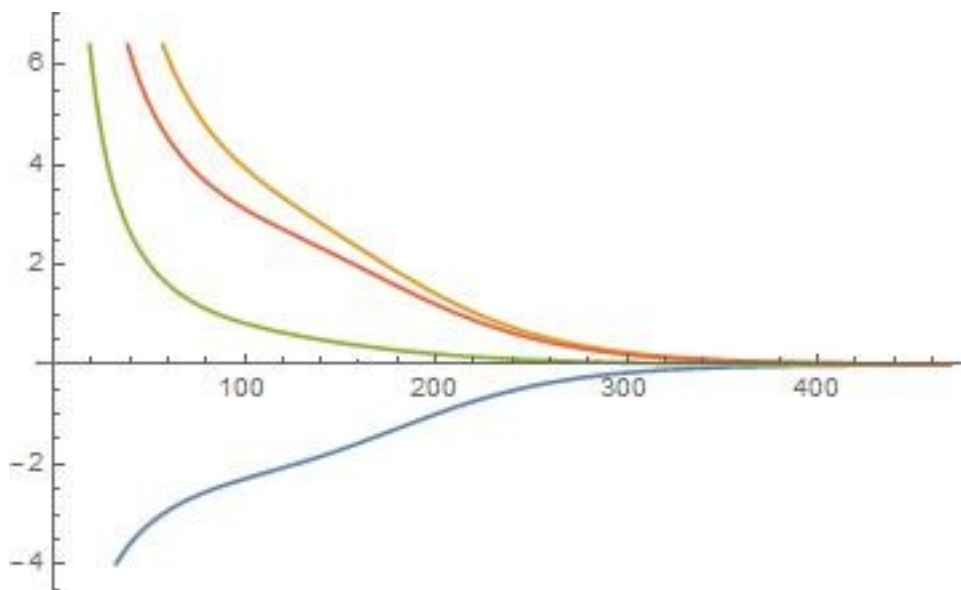
ktorá nám umožní kompaktným spôsobom získať výsledné vzťahy v tvare:

$$\begin{aligned} \Delta P_q(p) &= 5 \Delta q(p) - p \frac{\partial \Delta q(p)}{\partial p} \\ P_q^+(p) &= \frac{1}{2} \left[q(p) - p \frac{\partial q(p)}{\partial p} + 5 \Delta q(p) - p \frac{\partial \Delta q(p)}{\partial p} \right] \\ P_q^-(p) &= \frac{1}{2} \left[q(p) - p \frac{\partial q(p)}{\partial p} - 5 \Delta q(p) + p \frac{\partial \Delta q(p)}{\partial p} \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

ktorých priebehy sú vyobrazené na Obr. 4.5 a Obr. 4.6. (Porovnaj s Obr. 3.4.2 pre prípady u a d kvarkov.)



Obr. 4.5 : Porovnanie priebehov funkcií $\Delta P(p)$, $P(p)$, $P+(p)$ a $P-(p)$ pre u kvark



Obr. 4.6 : Porovnanie priebehov funkcií $\Delta P(p)$, $P(p)$, $P+(p)$ a $P-(p)$ pre d kvark

Na záver tejto kapitoly sa ešte pokúsime vysvetliť, prečo dané funkcie majú daný priebeh a ako je možné niektoré ich vlastnosti objasniť pomocou veličín známych z termodynamiky a štatistickej fyziky.

Sústredíme sa teda najprv na *Obr. 4.2*, na ktorom sú znázornené veličiny P_u, P_d ako funkcie parametru p . Zo vzťahu (4.5) ale vidíme, že $p \sim x$, teda pre jednoduchosť výrazov vo funkciách P budeme uvažovať ich závislosť na parametre x a nie na parametre p . V tom prípade upravíme výraz (4.4) do tvaru :

$$P_u(x) = (2-b) \frac{A X_{0u}^+ x^{b-1}}{\exp\left[\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right]+1} + \frac{A X_{0u}^+ x^b \exp\left[\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right]}{\bar{x} \left[\exp\left[\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right]+1\right]^2} + \frac{2 \tilde{A} x^{\tilde{b}-1}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right]+1} -$$

$$- 2x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\tilde{A} x^{\tilde{b}-1}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right]+1} \right\} + (2-b) \frac{A X_{0u}^- x^{b-1}}{\exp\left[\frac{x-X_{0u}^-}{\bar{x}}\right]+1} + \frac{A X_{0u}^- x^b \exp\left[\frac{x-X_{0u}^-}{\bar{x}}\right]}{\bar{x} \left[\exp\left[\frac{x-X_{0u}^-}{\bar{x}}\right]+1\right]^2}$$
(4.9)

Úplne analogicky dostaneme pre funkciu $P_d(x)$:

$$P_d(x) = (2-b) \frac{A X_{0d}^+ x^{b-1}}{\exp\left[\frac{x-X_{0d}^+}{\bar{x}}\right]+1} + \frac{A X_{0d}^+ x^b \exp\left[\frac{x-X_{0d}^+}{\bar{x}}\right]}{\bar{x} \left[\exp\left[\frac{x-X_{0d}^+}{\bar{x}}\right]+1\right]^2} + \frac{2 \tilde{A} x^{\tilde{b}-1}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right]+1} -$$

$$- 2x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\tilde{A} x^{\tilde{b}-1}}{\exp\left[\frac{x}{\bar{x}}\right]+1} \right\} + (2-b) \frac{A X_{0d}^- x^{b-1}}{\exp\left[\frac{x-X_{0d}^-}{\bar{x}}\right]+1} + \frac{A X_{0d}^- x^b \exp\left[\frac{x-X_{0d}^-}{\bar{x}}\right]}{\bar{x} \left[\exp\left[\frac{x-X_{0d}^-}{\bar{x}}\right]+1\right]^2}$$
(4.10)

Dokážme teda platnosť relácie :

$$P_u(x) \geq P_d(x)$$
(4.11)

V *Tab. 4.1* je vidieť, že $X_{0u}^+ > X_{0d}^-$, čo automaticky implikuje nerovnosť :

$$(2-b) \frac{A X_{0u}^+ x^{b-1}}{\exp\left[\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right]+1} > (2-b) \frac{A X_{0d}^- x^{b-1}}{\exp\left[\frac{x-X_{0d}^-}{\bar{x}}\right]+1}$$
(4.12)

Táto nerovnosť je vlastne dosiahnutá tým, že menovateľ výrazu na ľavej strane je vďaka väčšiemu chemickému potenciálu príslušného kvarku menší než na pravej strane a navyac čitateľ prvého výrazu dominuje nad čitateľom druhého výrazu.

Analogicky to platí aj v prípade nerovnice :

$$(2-b) \frac{A X_{0u}^- x^{b-1}}{\exp\left[\frac{x-X_{0u}^-}{\bar{x}}\right]+1} > (2-b) \frac{A X_{0d}^+ x^{b-1}}{\exp\left[\frac{x-X_{0d}^+}{\bar{x}}\right]+1} \quad (4.13)$$

keďže podľa *Tab. 4.1* máme $X_{0u}^- > X_{0d}^+$.

Aby sme však ale korektné dokázali pravdivosť relácie (4.12), tak je nutné overiť, že platí :

$$\frac{A X_{0u}^+ x^b \exp\left[\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right]}{\bar{x} \left[\exp\left[\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right]+1 \right]^2} > \frac{A X_{0d}^- x^b \exp\left[\frac{x-X_{0d}^-}{\bar{x}}\right]}{\bar{x} \left[\exp\left[\frac{x-X_{0d}^-}{\bar{x}}\right]+1 \right]^2} \quad (4.14)$$

Toto je však ale splnené, pretože aj keď exponenciálny výraz v čitateli ľavej strany je kvôli nerovnosti $X_{0u}^+ > X_{0d}^-$ menší ako na pravej strane, tak vďaka dominancie kvadrátu menovateľa zlomku ľavej strany je zabezpečená platnosť (4.14). Túto úvahu je možné taktiež potvrdiť dosadením konkrétnych parametrov z *Tab. 4.1* do danej nerovnosti pri pevne zvolenom x . Takto sme vlastne porovnaním vhodných dvojíc výrazov popisujúcich prítomnosť jednoduchých typov kvarkov s danou polarizáciou overili nerovnicu (4.11).

Podobne je možné dokázať vzťah pre prípad antikvarkov ku kvarkom u a d (*Obr. 4.3*) :

$$P_{\bar{u}}(x) \leq P_{\bar{d}}(x) \quad (4.15)$$

čo vlastne spolu s (4.11) triviálne implikuje (*Obr. 4.4*) :

$$(P_u - P_{\bar{u}})(x) \geq (P_d - P_{\bar{d}})(x) \quad (4.16)$$

Pre dôkaz nerovností (3.4.29) (*Obr. 4.5* a *Obr. 4.6*) výjdeme z posledných dvoch relácií (4.8, resp. posledného vzťahu 3.4.28), opäť pre jednoduchosť vyjadrených v premennej x . Overenie prevedieme pre u kvarky (pre d kvarky je postup analogický). Použitím vzťahu (4.7) dostaneme :

$$P_u^+(x) = \frac{1}{2} [u(x) - x u'(x) + 5 \Delta u(x) - x \Delta u'(x)]$$

$$P_u^-(x) = \frac{1}{2} [u(x) - x u'(x) - 5 \Delta u(x) + x \Delta u'(x)] \quad (4.17)$$

Pokiaľ teda predpokladáme platnosť :

$$P_u^+(x) \geq P_u^-(x) \quad (4.18)$$

tak zo sústavy (4.17) plynie :

$$5 \Delta u(x) \geq x \Delta u'(x) \quad (4.19)$$

A teda :

$$5(u^+(x) - u^-(x)) \geq x(u^+(x) - u^-(x)) \quad (4.20)$$

Ďalej aplikujeme štatistické formule pre kvarky u (pre prípady obidvoch polarizácií) (4.1), čím po niekoľkých algebraických úpravách dostávame :

$$4(b-1) \left[\frac{X_{0u}^+}{\exp\left(\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right)+1} - \frac{X_{0u}^-}{\exp\left(\frac{x-X_{0u}^-}{\bar{x}}\right)+1} \right] \geq \frac{x}{\bar{x}} \left\{ \frac{X_{0u}^- \exp\left(\frac{x-X_{0u}^-}{\bar{x}}\right)}{\left[\exp\left(\frac{x-X_{0u}^-}{\bar{x}}\right)+1\right]^2} - \frac{X_{0u}^+ \exp\left(\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right)}{\left[\exp\left(\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right)+1\right]^2} \right\} \quad (4.21)$$

Ekvivalentne môžeme túto nerovnicu prepísať do podoby :

$$X_{0u}^+ \left\{ \frac{4(b-1)}{\exp\left(\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right)+1} + \frac{\frac{x}{\bar{x}} \exp\left(\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right)}{\left[\exp\left(\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right)+1\right]^2} \right\} \geq X_{0u}^- \left\{ \frac{4(b-1)}{\exp\left(\frac{x-X_{0u}^-}{\bar{x}}\right)+1} + \frac{\frac{x}{\bar{x}} \exp\left(\frac{x-X_{0u}^-}{\bar{x}}\right)}{\left[\exp\left(\frac{x-X_{0u}^-}{\bar{x}}\right)+1\right]^2} \right\} \quad (4.22)$$

Podľa komentu k nerovnici (4.14) je zrejmé, že druhý sčítanec v zloženej zátvorke na ľavej strane (4.22) dominuje nad jeho ekvivalentom na druhej strane tejto nerovnosti (v tomto prípade však porovnáme kvarky u^+ , u^-). Taktiež predfaktor (chemický potenciál) na ľavej strane je podľa *Tab. 4.1* väčší ako v prípade pravej strany. Triviálne je splnená nerovnosť prvých sčítancov :

$$\frac{4(b-1)}{\exp\left(\frac{x-X_{0u}^+}{\bar{x}}\right)+1} \geq \frac{4(b-1)}{\exp\left(\frac{x-X_{0u}^-}{\bar{x}}\right)+1} \quad (4.23)$$

ako dôsledok vzťahu $X_{0u}^+ > X_{0u}^-$.

Kapitola 5

Fermiho pohyb nukleónov

V tejto záverečnej kapitole sa pokúsime naznačiť, aký má vplyv Fermiho pohyb (t.j. chaotický pohyb nukleónov v atómovom jadre) na distribučné funkcie kvarkov (resp. štruktúrne funkcie nukleónov).

Nech $q(x)$ označuje naďalej distribučnú funkciu určitého typu kvarku. Pokiaľ zoberieme do úvahy Fermiho pohyb nukleónov v jadre, tak pre Fermiho energiu nukleónu o hmotnosti M a hybnosti p_f platí :

$$E_f^2 = p_f^2 + M^2 \quad (5.1)$$

Z teórie relativity navyiac plyní vzťah pre rýchlosť odpovedajúcej Fermiho energii :

$$v_f = \frac{p_f}{E_f} \quad (5.2)$$

ktorej zložky môžeme napísať v sférických súradniciach ako :

$$\begin{aligned} v_{f,1} &= v_f \sin(\theta_f) \cos(\varphi_f) \\ v_{f,2} &= v_f \sin(\theta_f) \sin(\varphi_f) \\ v_{f,3} &= v_f \cos(\theta_f) \end{aligned} \quad (5.3)$$

kde θ_f resp. φ_f sú polárny resp. azimutálny uhol.

Nech ďalej platí pre zložky hybnosti kvarku (bez započítania Fermiho pohybu) séria vzťahov :

$$\begin{aligned} p_{q,1} &= p_q \sin(\theta_q) \cos(\varphi_q) \\ p_{q,2} &= p_q \sin(\theta_q) \sin(\varphi_q) \\ p_{q,3} &= p_q \cos(\theta_q) \end{aligned} \quad (5.4)$$

kde θ_q resp. φ_q opäť značia polárny resp. azimutálny uhol. Pomocou transformačnej matice (relativistický faktor γ je vyjadrený ako : $\gamma = 1/\sqrt{1-v_f^2}$) :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -v_{f,1}\gamma & -v_{f,2}\gamma & -v_{f,3}\gamma \\ -v_{f,1}\gamma & 1+(\gamma-1)a & (\gamma-1)d & (\gamma-1)e \\ -v_{f,2}\gamma & (\gamma-1)d & 1+(\gamma-1)b & (\gamma-1)f \\ -v_{f,3}\gamma & (\gamma-1)e & (\gamma-1)f & 1+(\gamma-1)c \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

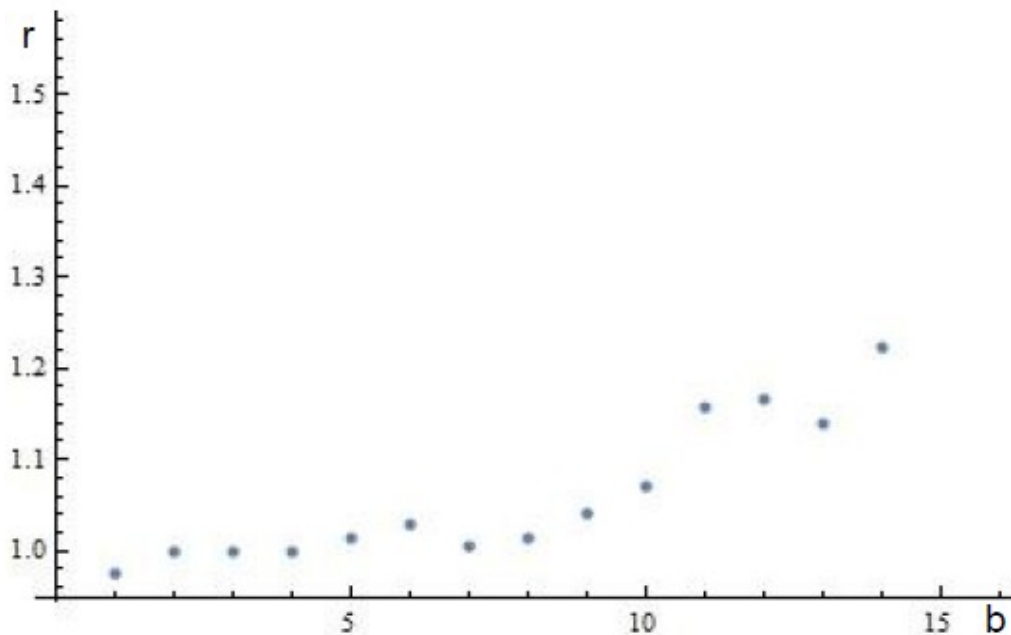
prevádzajúcej energiu a zložky hybnosti kvarku vyjadrené v (5.4) do sústavy pohybujúcej sa rýchlosťou v_f (ľubovoľne orientovanej), kde parametre a, b, c, d, e a f sú :

$$a := \frac{v_{f,1}^2}{v_f^2} ; b := \frac{v_{f,2}^2}{v_f^2} ; c := \frac{v_{f,3}^2}{v_f^2} ; d := \frac{v_{f,1}v_{f,2}}{v_f^2} ; e := \frac{v_{f,1}v_{f,3}}{v_f^2} ; f := \frac{v_{f,2}v_{f,3}}{v_f^2} \quad (5.6)$$

teda budeme mať ($i=\{0,1,2,3\}$) :

$$\tilde{p}_i = \Lambda p_{q,i} \quad (5.7)$$

Prechádzajúci vzťah vlastne vyjadruje výsledné zložky štvorhybnosti kvarku \tilde{p} už so započítaním Fermiho pohybu. Zo vzťahu (5.7) je evidentné, že hybnosť ovplyvnená Fermiho pohybom bude odlišná od pôvodnej hybnosti p_q . Keďže hybnosť resp. parameter x priamo vstupujú do vzťahov pre distribučné funkcie (4.1), je možné, že aj výsledná distribučná funkcia, berúca do úvahy pohyb nukleónov bude modifikovaná. Na *Obr. 5.1* je uvedený pomer pre distribúcie kvarku u so započítaním a bez započítania Fermiho pohybu. Táto grafická reprezentácia bola vygenerovaná metódou Monte Carlo v prostredí Wolfram Mathematica.



Obr 5.1 : Podiel distribučných funkcií kvarku typu u so započítaním a bez započítania Fermiho pohybu

Poznámka k *Obr. 5.1* : Vodorovná os označuje počet binov ($1bin$ predstavuje interval $x=0,05$; teda 5 binov značí hodnotu $x=0,25$; ...), zvislá os reprezentuje pomer distribučnej funkcie kvarku typu u so započítaním a nezapočítaním Fermiho pohybu.

Kapitola 6

Záver

V tejto práci sme sa pokúsili overiť správnosť termodynamického modelu nukleónu postaveného na štatistických formuliach prezentovaných v práci [5] a so započítaním Fermiho pohybu zistiť vplyv tohto pohybu nukleónov na kvarkové distribučné funkcie v jadrovom prostredí.

Funkcie určujúce počet kvarkov na energii kvarkov závislé na termodynamických veličinách vyjadrené v kludovej sústave nukleónu (Obrázky v 4. Kapitole) vykazujú podobný priebeh ako funkcie na *Obr. 3.4.1* a *Obr. 3.4.2*. V prípade *Obr. 4.2* pozorujeme dominantnosť krivky pre prípad u kvarku nad prípadom d kvarku. Toto je dôsledkom kvarkovej štruktúry protónu, ktorý obsahuje dva valenčné u kvarky a jeden valenčný d kvark. V termodynamickom jazyku to vlastne znamená, že kvark s väčším chemickým potenciálom "posúva" príslušnú krivku smerom hore. Navyiac je chemický potenciál kvarku určitého typu konštantný a teda nezávislý na parametroch p a x , čo vlastne oprávňuje tvrdiť nerovnosti (3.4.29) platné pre kvarky u a d s príslušnými polarizáciami. Z daných obrázkov je taktiež možné pozorovať, že počet kvarkov v limite $p \rightarrow p_{max} = M/2$ konverguje k nule, čo je dôsledkom kinematiky kvarkov v kludovom systéme nukleónu.

V prípade vplyvu Fermiho pohybu na distribučné funkcie môžeme povedať, že v prípade veľkých hodnôt x je pomer distribučných funkcií so započítaním a bez započítania Fermiho pohybu nukleónov väčší než jedna, zatiaľčo v oblasti malých hodnôt x tento pohyb nejak výrazne dané kvarkové distribúcie nemení. V prípade malých x náš výpočet nereprodukuje odchýlku od 1, tzv. EMC efekt. Znamená to, že mechanizmus tohto efektu v oblasti malých x je zložitejší a k jeho modelovaniu v rámci navrhnutého Monte-Carlo programu by bolo treba využiť ďalšie predpoklady. Taká úloha by však presiahla rámec zadania.

Referencie

- [1] Závada, P.; Phys. Rev. D **55** (1997) 4290
- [2] Ferencz, L.; Struktura nukleonu v termodynamickém přiblížení, Bakalářská práce, FJFI ČVUT Praha 2013
- [3] Závada, P.; Eur. Phys. J. C **52** (2007) 121
- [4] Závada, P.; Phys. Rev. D **65** (2002) 0054040
- [5] Bourrely, C.; Soffer, J.; Buccella, F. Eur. Phys. J C **23** (2002) 487