

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

REŠERŠNÍ PRÁCE

VLASTNOSTI KVARKŮ

Daniel Gazda

Vedoucí práce: Doc. Vladislav Šimák, DrSc.

Obsah

1	Existence kvarků	5
2	Základní vlastnosti kvarků	11
3	Interakce kvarků	13
3.1	Kalibrační teorie	15
3.2	Rozptyl kvarku na kvarku	22
4	Narušení CP invariance	24
4.1	Slabá interakce	24
5	Dodatky	31
5.1	A. Diracovy γ -matice	31
5.2	B. Základní definice z teorie grup	31
5.2.1	Lieovy grupy a algebry (v \mathbb{R}^n)	32
5.3	C. Lagrangeova polní teorie	36

1 Existence kvarků

Období od roku 1950 do poloviny šedesátých let bylo bohaté na experimentální objevy nových částic. Některé byly objeveny v kosmickém záření, ale od roku 1953 stále více v experimentech na urychlovačích v USA a později i v Evropském středisku jaderného výzkumu CERN v Ženevě.

Na konci roku 1963 byla na urychlovači v americké národní laboratoři v Brookhaven objevena částice, jež byla nazvána hyperon Ω^- . Ta byla předpovězena v létě roku 1962 dvěma teoretickými fyziky, Murrayem Gell-Mannem a Yuvaem Ne'emanem na základě schématu, jehož cílem bylo najít řád ve stále rostoucím počtu nových „elementárních“ částic. Určité pravidelnosti, které oba ve změní dat rozpoznali, nazval Gell-Mann „Osmérou cestou“ (angl. Eightfold Way), neboť velkou část tehdy známých částic bylo možné uspořádat do osmic, které byly v jistém smyslu příbuzné (viz obr. 1). Bylo to podobné tomu, když Dmitri Mendělejev vytvořil svou periodickou tabulku prvků. Objev hyperonu Ω^- potvrdil správnost Gell-Mannova a Ne'emanova klasifikačního schématu. Avšak stále chyběl nějaký princip, který by tyto pravidelnosti vysvětloval. Tímto principem se stal *kvarkový model*.

Počátkem roku 1964, prakticky současně s objevem hyperonu Ω^- , navrhli George Zweig a Murray Gell-Mann hypotézu, že pozorovaná symetrie baryonů a mezonů je projevem skutečnosti, že tyto částice jsou složeny z ještě elementárnějších objektů, které Zweig nazval „esa“ a Gell-Mann „kvarky“. Ujal se název kvarky, zřejmě proto, že Gell-Mann byl známější.

Podle kvarkového modelu se všechny tehdy známé mezony a baryony skládaly ze tří druhů (nazývaných „vůně“ a označovaných u,d,s) kvarků a antikvarků. Kvarky přitom měly spin 1/2 a nesly elektrické náboje, jež byly neceločíselnými násobky elementárního náboje. Baryony byly tvořeny trojicemi kvarků, zatímco mezony páry kvark-antikvark.

Od počátku kvarkového modelu existovaly dva rozdílné přístupy k obsahu pojmu kvark a k interpretaci výrazu „složený“, zosobněné samotnými zakladateli. Zweig považoval kvarky za fyzikální objekty a pracoval s nimi podobně jako s nukleony v jádře. Na druhé straně pro Gell-Manna byly kvarky primárně matematické objekty, které sice usnadňovaly některé úvahy, ale které neměly přímý fyzikální význam.

Gell-Mannova úvaha byla následující:

Je přirozené seskupit osm nejlehčích mezonů do čtyř ireducibilních¹ reprezentací „isospinové“ grupy $SU(2)$:

¹následující pojmy týkající se teorie grup jsou shrnuty v dodatku B

<i>mezony</i>	I_3	Y	Q
piony			
(komplexně sdružená rep.)			
π^+	+1	0	+1
π^0	0	0	0
π^-	-1	0	-1
kaony			
(definující rep.)			
K^+	+1/2	1	+1
K^0	-1/2	1	+1
antikaony			
(duální k definující rep.)			
\bar{K}^0	+1/2	-1	0
K^-	-1/2	-1	-1
eta			
(triviální rep.)			
η	0	0	0

Tab. 1: Seskupení nejlehčích mezonů do 4 ireducibilních reprezentací $SU(2)$.

V této teorii Gell-Mann ukázal, že těchto osm mezonů může být chápáno jako báze pro komplexně sdruženou reprezentaci grupy $SU(3)$, tj. její reprezentaci 8-dimenzionálním komplexním Hilbertovým prostorem.

$$\mathfrak{su}(3) \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \quad (1)$$

Gell-Mann uvážil fakt, že:

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{3,3} \cong \mathbb{C}^3 \otimes (\mathbb{C}^3)^* \quad (2)$$

kde \mathbb{C}^3 je definující reprezentace $SU(3)$ a $(\mathbb{C}^3)^*$ je její duál. Proto Gell-Mann postuloval částice zvané *kvarky* tvořící standartní bázi \mathbb{C}^3 :

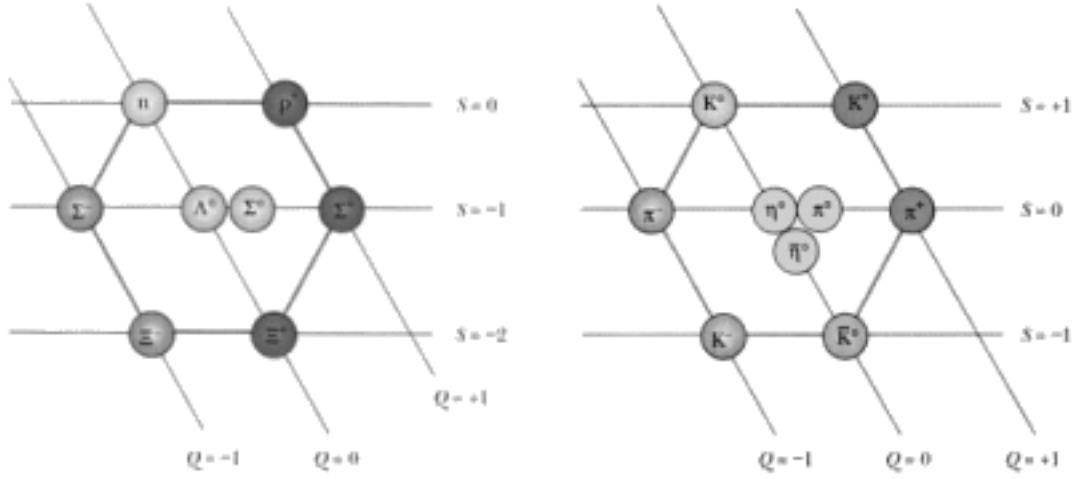
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

a *antikvarky* tvořící duální bázi \mathbb{C}^3 :

$$\bar{u} = (1, 0, 0), \quad \bar{d} = (0, 1, 0), \quad \bar{s} = (0, 0, 1). \quad (4)$$

To mu dovolilo nahlížet na těchto osm mezonů jako na částice složené z kvarků a antikvarků. Například kladný pion odpovídal matici:

$$\pi^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}), \quad (5)$$



Obr. 1: Mezonový a baryonový oktet.

ale jako element $\mathbb{C}^3 \otimes (\mathbb{C}^3)^*$ ho lze zapsat jako:

$$\pi^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (0, 1, 0) = u \otimes \bar{d} \quad (6)$$

to ho vedlo k tvrzení, že je kladný pion složen z kvarků u a \bar{d} .

Podobným postupem lze postupovat i pro případ baryonů jakožto qqq stavů a sice: S ohledem na Pauliho princip, který požaduje totální antisymetrii fermionové vlnové funkce vůči záměně dvou kvarků stejné hmotnosti (tj. kvarků u a d v limitě isospinové symetrie), musí být stavy tvaru:

$$|qqq\rangle_A = |barva\rangle_A \times |prostor, spin, vůně\rangle_S, \quad (7)$$

kde A , resp. S značí antisymetrii, resp. symetrii vůči záměně dvou kvarků stejné hmotnosti. „Obyčejné“ baryony jsou složeny z kvarků u , d a s . Tři vůně implikují přibližnou symetrii $SU(3)$, která požaduje, aby baryony složeny z těchto kvarků patřily do multipletů pravé strany výrazu:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{1}_A \quad (8)$$

Zde indexy znamenají symetrické, smíšeně-symetrické a antisymetrické stavy vůči záměně dvou libovolných kvarků.

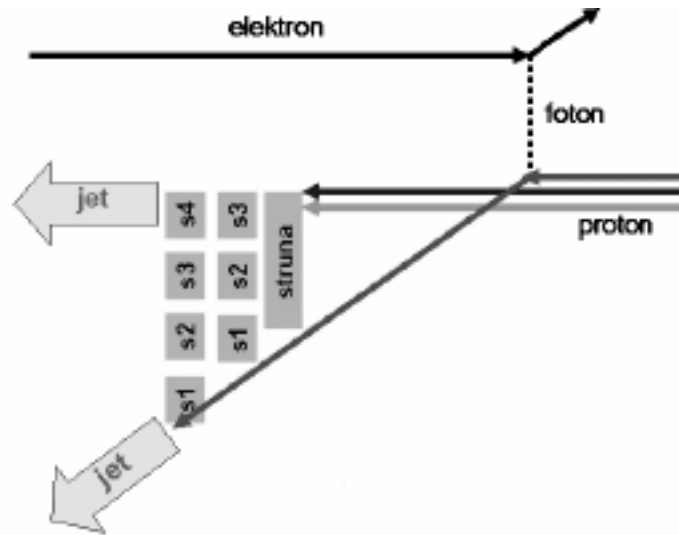
Přidáním dalšího kvarku, kvarku c , ke třem lehkým kvarkům můžeme zkonstruovat, velkou hmotností kvarku c silně narušenou, symetrii $SU(4)$ (viz Obr.2). Kvarkový model na současné úrovni znalostí je samozřejmě složitější (viz např. [5] nebo [6]).

výměnou 8 vektorových bosonů, jež se dnes nazývají *gluony* a které hrají podobnou roli jako foton pro elektromagnetické síly a bosony W^+ , W^- a Z^0 pro interakci slabou. Gluony jsou přitom samy barevné (přesněji dvoubarevné) a tudíž mohou interagovat samy mezi sebou, na rozdíl od fotonů. Nambuův model poskytoval kvalitativní vysvětlení, proč v přírodě nemohou existovat nejen volné kvarky samotné, ale ani takové kombinace kvarků a antikvarků, které jsou barevné. Dnes víme, že Nambuův model měl všechny rysy kvantové chromodynamiky. Nebyla to ovšem plnokrevná kvantová teorie pole, ale „jen“ model.

Ani model barevných kvarků však nebyl v druhé polovině 60. let minulého století všeobecně přijat, neboť teoretické předsudky na jedné straně a neúspěch při hledání kvarků na straně druhé byly pro mnohé fyziky vážnými argumenty pro jejich odmítnutí. K tomu pak ještě přistupovala celková atmosféra nedůvěry ke kvantové teorii pole. Řada fyziků proto odmítala samotnou představu, že nějaké částice by měly být elementárnější než jiné. Hlavním obhájcem této „jaderné demokracie“ byl mladý teoretik Geoffrey Chew, který hlásal, že všechny mezony a baryony jsou stejně dobré a nemá proto smysl snažit se je chápat jako objekty složené z nějakých menších, fundamentálnějších částic. Dnes víme, že tato domněnka nebyla správná, ale až do roku 1973 se zdálo, že právě tudy vede cesta k teorii sil mezi mezony a baryony. Mnoho významných fyziků považovala kvarkový model dokonce za šarlatánství nehodné skutečných vědců. Lidé jako Zweig, Lipkin a pár dalších příznivců kvarkového modelu měli velké problémy své práce vůbec publikovat.

Na přelomu 60. a 70. let se zdálo, že kvarkový model je v posledním tažení, neboť se objevily nové experimentální údaje, které naznačovaly vnitřní rozporuplnost jeho samotných základů. Tato data byla získána ve Stanfordském urychlovačovém centru SLAC, kde byl v roce 1967 uveden do provozu nový, 5 kilometrů dlouhý lineární urychlovač elektronů. Těmito elektrony byly ostřelovány protony a ze srovnání naměřeného úhlového rozdělení rozptýlených elektronů s teoretickými představami činili fyzikové závěry o struktuře protonu.

Překvapení, které přinesly nové experimenty, spočívalo v tom, že tvrdé nepružné srážky elektronů s protony, vypadaly tak, jako by se elektron rozptyloval na *téměř volných bodových částicích se spinem 1/2*, jež Feynman nazval „*partony*“. Tento jev, jenž se nazývá *škálování*, by sám o sobě nebyl nic divného pokud by byly ony hypotetické partony uvnitř protonu slabě vázány a bylo je tedy možno z protonu vyrazit. Přirozená snaha ztotožnit partony s kvarky narážela proto na problém, že nikdo žádný volný kvark nepozoroval. Právě tento na první pohled nepřekonatelný rozpor mezi dvěma různými experimentálními svědectvími o vlastnostech a chování kvarků byl skutečný problém. Koncem 60. let krize důvěry v kvarkový model i kvantovou teorii pole vyvrcholila a beznaději propadali i jejich nejskalnější příznivci. Jeden z mála, kdo skepsi nepropadal byl Richard Feynman. Právě on formuloval základní představu o tom, jak tvrdé srážky elektronů s protony probíhají. Tato představa měla několik slabých míst, ale jak ukázal další vývoj, byla v zásadě správná. Feynmana především neodradila skutečnost, že kvarky v přírodě neexistují jako volné částice. Proces tvrdé srážky elektronu s protonem rozdělil do dvou etap, zachycených na Obr.3. Během první etapy se elektron pružně rozptýlí na jednom z kvarků, který se po rozptýlu po určité době pohybuje, jako by nevěděl, že volný existovat nemůže. Podobně i zbytek protonu, tvořený dvěma zbývajících kvarky. V této etapě tedy Feynman pracoval s kvarky jako



Obr. 3: Feynmanova představa o tvrdé srážce elektronu s protonem, jejíž výsledkem jsou 2 jety.

s elektrony a používal i stejný matematický aparát. Tato etapa srážky trvá do té doby, dokud vzdálenost mezi oběma fragmenty nepřekročí zhruba 1 fm . Jakmile vzdálenost mezi vyráženým barevným kvarkem a také barevným zbytkem protonu přesáhne zhruba 1 fm , charakter sil, které mezi nimi působí, se změní. Místo, aby s rostoucí vzdáleností klesaly až na nulu, síly mezi kvarkem a zbytkem protonu zůstávají zhruba konstantní, podobně jako je tomu u natahované pružiny nebo struny. V této analogii budeme nadále pokračovat, abychom odpověděli na otázku, co se stane se strunou natáhnutou mezi kvarkem snažícím se uletět a zbytkem protonu. Každá reálná struna může při natahování prasknout, přičemž vzniknou dvě kratší struny, které se mohou dále trhat na ještě menší. Podobně při přetržení naší kvarkové struny vznikají kratší a kratší struny (označené s_1, s_2, \dots) až se jejich délky zmenší na cca 1 fm , což jsou délky odpovídající baryonům a mezonům. Výsledkem procesu trhání barevné struny mezi vyráženým kvarkem a zbytkem protonu, jenž se nazývá „hadronizace“, jsou pak dvě úhlově kolimované spršky částic, které letí zhruba v původních směrech. Tyto spršky, jimž se říká „jety“, jsou tedy **stopami po kvarcích**. Skutečnost, že směry a energie jetů dobře odpovídají směřům a energiím původních kvarků je netriviální vlastnost procesu hadronizace.

Výše popsáný model průběhu tvrdých srážek se velmi dobře osvědčil při popisu řady procesů, ale v době, kdy ho Feynman koncem 60. let formuloval, se zdál neslučitelný s jakoukoliv kvantovou teorií pole. Vše naopak naznačovalo, že kvantová teorie pole je pro popis sil mezi kvarky zcela nevhodná a je třeba ji nahradit něčím jiným. Řešení (a vyřešení) tohoto problému v podobě *asymptotické volnosti* bude podrobněji probráno později, ve 3. kapitole věnované interakcím kvarků.

Zkoumání produkce a vlastností jetů tvoří dnes nedílnou součást většiny experimentů a je také předmětem zájmu teoretiků. Z měření jejich vlastností pak usuzujeme na dynamiku samotných kvarků a gluonů. Jety dnes hrají při hledání zákonů mikrosvěta stejnou roli, kterou v minulosti hrály částice samotné.

2 Základní vlastnosti kvarků

Kvarky jsou silně interagující fermiony se spinem $1/2$ a, dle konvence, kladnou paritou. Antikvarky mají potom paritu zápornou. Kvarky mají aditivní baryonové číslo $1/3$, antikvarky $-1/3$. V tabulce Tab. 2 jsou uvedena další aditivní kvantová čísla pro tři generace kvarků. Jejich souvislost s nábojem Q (v jednotkách elementárního náboje e) je dána zobecněnou Gell-Mann-Nishijima formulí:

$$Q = I_z + \frac{\mathcal{B} + S + C + B + T}{2}, \quad (9)$$

kde \mathcal{B} je baryonové číslo.

Vlastnost \ Kvark	d	u	s	c	b	t
Q - elektrický náboj	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
I - isospin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
I_z - isospin z -ová komponenta	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0
S - podivnost	0	0	-1	0	0	0
C - šarm	0	0	0	+1	0	0
B - krása	0	0	0	0	-1	0
T - pravdivost	0	0	0	0	0	+1

Tab. 2: Aditivní kvantová čísla kvarků.

Další důležitou vlastností kvarků jsou jejich hmotnosti, které jsou fundamentálními parametry standartního modelu. Na rozdíl od leptonů jsou však kvarky principiálně uvězněny uvnitř hadronů a nemohou být pozorovány jako volné částice. Hmotnosti kvarků proto nemohou být určovány přímo, ale přes jejich vliv na vlastnosti hadronů. Proto, chceme-li učinit jakýkoliv kvantitativní výrok o hmotnostech kvarků, musíme dát velký pozor na konkrétní teoretický rámec, který byl použit pro jejich definování. Tuto *schematickou závislost* musíme mít při používání tabelovaných hodnot vždy na paměti.

Historicky bylo první určování hmotností kvarků prováděno na základě kvarkových modelů. Výsledné hodnoty proto měly smysl pouze v omezeném rozsahu konkrétního kvarkového modelu a nemohly se vztahovat k hmotnostním parametrům standartního modelu. K diskuzi hmotností kvarků na fundamentální úrovni musí být použity definice založené na kvantové teorii pole.

Hmotnostní parametry a Lagrangián QCD:

QCD Lagrangián pro N_F vůní kvarků je (viz (35)):

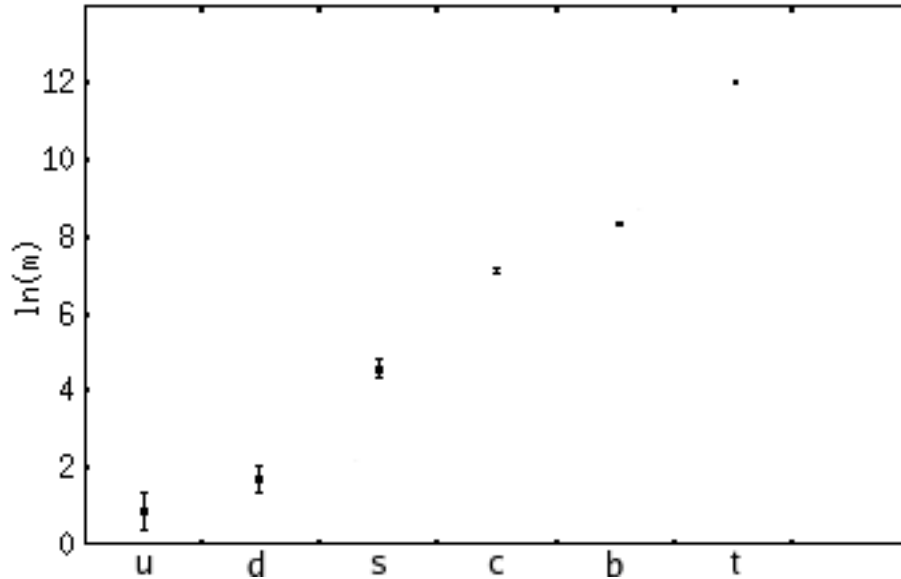
$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{N_F} \bar{\psi}_k (i\not{D} - m_k) \psi_k - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}, \quad (10)$$

kde $\mathcal{D} = (\partial_\mu - igA_\mu)\gamma^\mu$ je kalibračně kovariantní derivace, A_μ gluonové pole, $G_{\mu\nu}$ tenzor gluonového pole, m_k hmotnostní parametr k -tého kvarku a ψ_k kvarkové Diracovo pole. Po renormalizaci dává QCD Lagrangián (10) konečné předpovědi fyzikálních veličin. Důležité je, že hmotnostní parametry v Lagrangiánu (10) jsou závislé na renormalizačním schematu použitému k definování teorie. Nejběžněji používaným renormalizačním schematem pro QCD poruchovou teorii je schema \overline{MS} . Následující tabulka shrnuje hmotnosti kvarků převzaté z [6]. Hmotnosti kvarků u, d, s, c, b přísluší do rámce schematu \overline{MS} , hmotnost kvarku t je určena z přímého pozorování top -událostí.

vůně	hmotnost
u	$1,5 \div 4 \text{ MeV}$
d	$4 \div 8 \text{ MeV}$
s	$80 \div 130 \text{ MeV}$
c	$1,15 \div 1,35 \text{ GeV}$
b	$4,1 \div 4,4 \text{ GeV}$
t	$174 \pm 5,1 \text{ GeV}$

Tab. 3: Hmotnosti kvarků.

Na závěr ještě ukážeme jednu zajímavou skutečnost týkající se hmotností kvarků. A sice jejich exponenciální růst. Na Obr. 4 jsou vyneseny přirozené logaritmy hmotností a je na něm zřejmá jejich přibližná linearita, tj. exponenciální růst hmotností.



Obr. 4: Exponenciální závislost hmotností kvarků.

3 Interakce kvarků

V první kapitole jsme se zmínili o existenci *jetů*, které měly pro přijetí kvarkové hypotézy rozhodující význam a dnes hrají velkou roli při zkoumání dynamiky kvarků samotných. Zmínili jsme se také o problému, který představovala zdánlivá neslučitelnost Feynmanova popisu (trhání barevné struny) s jakoukoliv tehdy známou kvantovou teorií pole.

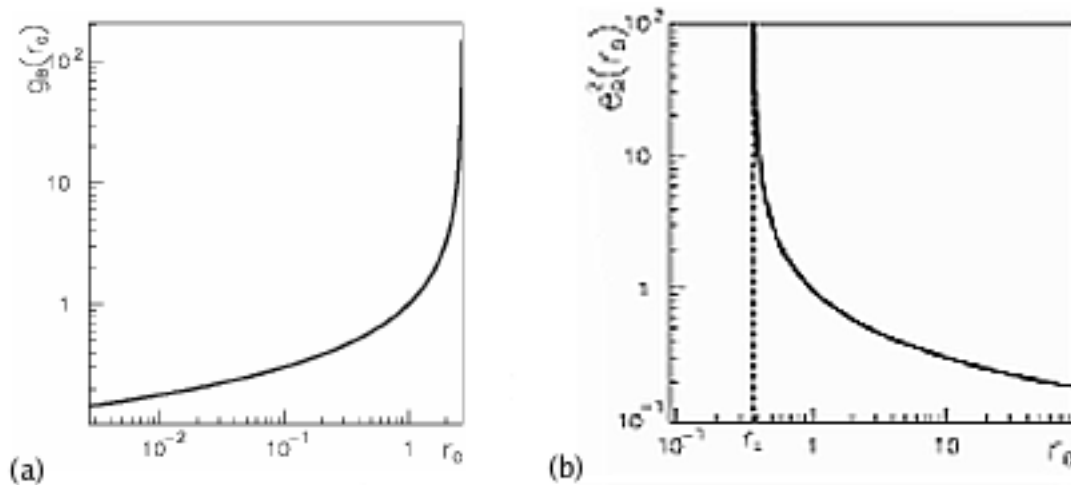
Mezi odpůrce kvantové teorie pole, jakožto základního nástroje pro popis sil působících mezi kvarky patřil i David Gross, jenž spolu s dalším teoretikem, Curtem Callanem, podnikl promyšlený pokus zničit tento popis jednou provždy. Rozhodl se dokázat, že lokální kvantová teorie pole nemůže vysvětlit experimentální fakt škálování a neposkytuje tak vhodný rámec pro popis silné interakce. Výsledky experimentů s hlubokým nepružným rozptylem (již dříve zmíněné tvrdé srážky elektronu s protonem) měly tedy definitivně rozhodnout otázku platnosti kvantové teorie pole. Jeho plán útoku měl dvě části. Za prvé chtěl dokázat, že pro vysvětlení škálování byla nutná ultrafialová stabilita, tj. vymizení efektivní vazbové konstanty silných interakcí (efektivní barevný náboj kvarků) na malých vzdálenostech, později nazvaná asymptotická volnost. A za druhé chtěl ukázat, že asymptoticky volné teorie neexistují.

Asymptotická volnost byla lákavá i proto, že poskytovala základní rámec pro pochopení neexistence volných kvarků. Růst efektivního barevného náboje na vzdálenostech velkých ve srovnání s poloměrem protonu signalizoval (byť samozřejmě nedokazoval), že na těchto vzdálenostech dochází ke změně charakteru sil. Místo toho, aby s rostoucí vzdáleností klesal, jak ke tomu v případě sil elektromagnetických, zdálo se možné, že síly působící mezi kvarky jsou na vzdálenostech větších než 1 fm zhruba konstantní. V takovém případě by nebylo možné od sebe kvarky v baryonech a mezonech od sebe odtrhnout. Problém byl v tom, že žádná do té doby prozkoumaná kvantová teorie vlastnost asymptotické volnosti neměla.

Práce na zničení popisu silné interakce kvantovou teorií pole zdárně postupovaly a první část plánu byla do konce roku 1972 úspěšně provedena. Bylo jasné, že jen asymptoticky volné kvantové teorie pole mají šanci popsat zdánlivě protichůdné aspekty sil působících mezi kvarky.

Zbývalo tedy zasadit poslední úder: dokázat, že žádné asymptoticky volné kvantové teorie neexistují. K tomu bylo potřeba vyšetřit poslední třídu teorií, která do té doby ještě nebyla podrobně prozkoumána. Tou byly neabelovské kalibrační teorie Yanga a Millse. Tento úkol zadal na podzim 1972 Gross Franku Wilczekovi, svému jednadvacetiletému doktorandovi. Shodou okolností prakticky ve stejnou dobu dostal od svého školitele jen o rok starší David Politzer úkol, jenž měl s programem Grosse důležitý styčný bod. Tito dva mladíci pak během půl roku ukázali, že neabelovské kalibrační teorie jsou (za určitých okolností) asymptoticky volné!

Jen pár týdnů po objevu třídy asymptoticky volných kvantových teorií pole Gross s Wilczekem a Politzer s Howardem Georgi publikovali práce, v nichž je podrobně rozpracována jedna z nich - **kvantová chromodynamika**. Tato teorie silných sil mezi barevnými kvarky navázala na základní pojmy kvarkového modelu tak, jak ho formulovali Zweig a Nambu v letech 1964-1965. V něm hrála barva klíčovou dynamickou roli. Asymptotická

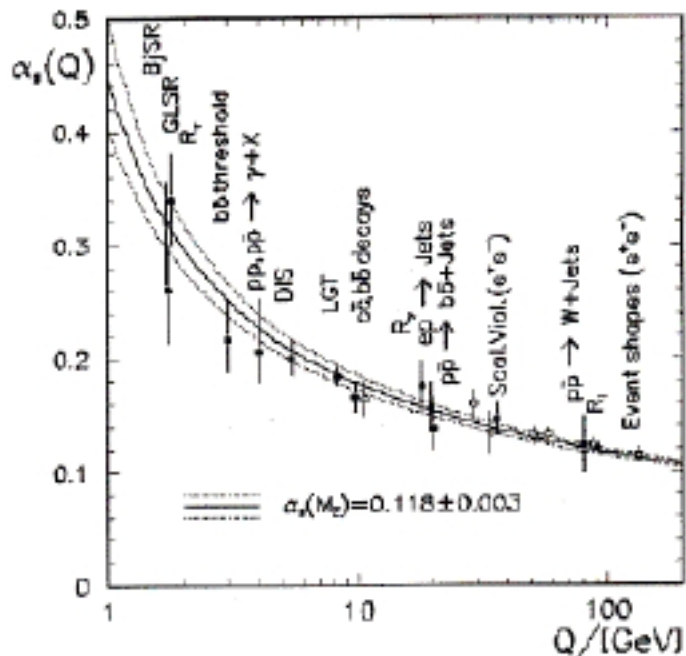


Obr. 5: (a) Závislost holého barevného náboje g_m na jeho poloměru r_0 , zajišťující konečnost efektivního barevného náboje $g(r)$. (b) Závislost holého elektrického náboje na jeho poloměru r_0 .

volnost v tomto případě znamená, že *efektivní barevný náboj při zmenšující se vzdálenosti mezi kvarky neroste, jak je tomu v kvantové elektrodynamice, ale klesá*. Jinými slovy, *v kvantové chromodynamice vakuum neodstiňuje vložený barevný náboj, ale naopak ho zesiluje*. Toto zesílení je dokonce tak silné, že provádíme-li s kvarky stejnou proceduru, jakou prováděl s elektrony Landau v polovině 50. let, docházíme k závěru, že v limitě nekonečně malých vzdáleností se vložený „holý“ barevný náboj blíží k nule. Tento jev, jenž můžeme nazvat „*antistínění*“, byl na základě dřívějších zkušeností v kvantové teorii pole naprosto neočekávaný. Situace, která je zachycena na Obr.5(a), je tedy zcela opačná než v kvantové elektrodynamice Obr.5(b).

Protože pokles efektivního barevného náboje s klesající vzdáleností je základním rysem kvantové chromodynamiky, bylo je ho experimentální potvrzení od poloviny 70. let prvořadým úkolem mnoha experimentů. Na Obr.6 je vynesena závislost druhé mocniny efektivního barevného náboje na veličině Q , jenž je úměrná $1/r$, získaná z dat řady experimentů. I když tento graf nepostihuje nejnovější stav, pokles efektivního náboje na malých vzdálenostech (tj. velkých Q) je jasně patrný.

Měření zachycená na Obr.6 ovšem nepředstavují jediné potvrzení správnosti kvantové chromodynamiky. Těch dnes existuje velmi mnoho. Značná část se přitom týká pojmu jet, o kterém jsme se již zmínili v souvislosti s Feynmanovou představou o průběhu tvrdých srážek elektronů s protony. Nejjednodušší možný proces, v němž se jety produkují je anihilace elektronu a pozitronu, při níž vznikají dva nebo i více jetů. Na Obr.7 jsou ukázány výsledky počítačové rekonstrukce záznamů průchodu mionů i jetů detektorem ALEPH, jenž byl v 90. letech umístěn na urychlovači LEP v CERN. I když jety jsou vždy tvořeny více částicemi (různé mezony a baryony) je z obrázků patrné, že můžeme definovat něco jako „osu jetu“ a s jety pak zacházet podobně jako s normálními částicemi a měřit tak například úhlová rozdělení.



Obr. 6: Experimentální data potvrzující pokles efektivního barevného náboje.

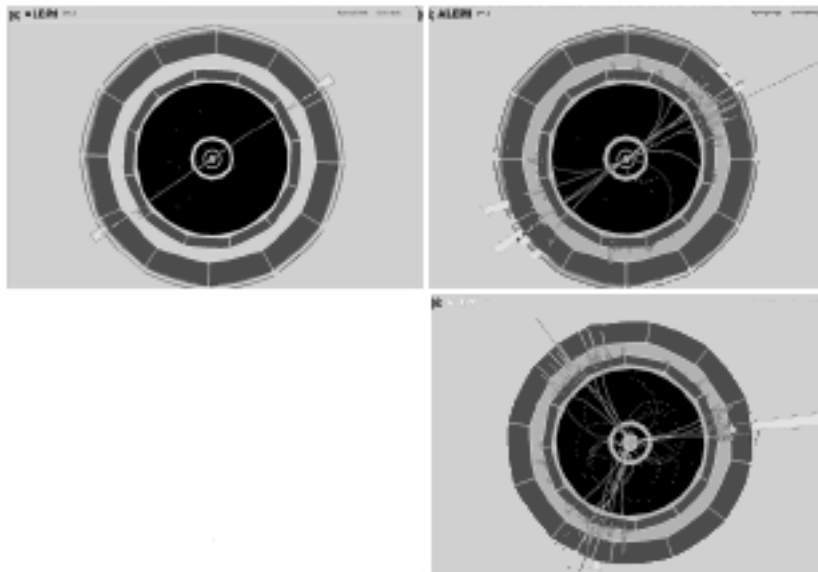
Zkoumání produkce a vlastností jetů tvoří dnes nedílnou součást většiny experimentů a je také předmětem trvajících zájmu teoretiků. Intuitivní představa Feynmana o tom, co jet znamená dostala v kvantové chromodynamice pevný teoretický základ.

3.1 Kalibrační teorie

Mezi částicemi existují čtyři silové interakce: *silná, elektromagnetická, slabá a gravitační*. Kromě gravitační interakce, která je příliš slabá, aby měla v mikrosvětě nějaké pozorovatelné projevy, jsou ostatní interakce kalibračními interakcemi. Jsou zprostředkovány vektorovými částicemi se spinem 1, které se nazývají **intermediální vektorové bosony**.

Vidíme, že kalibrační teorie hrají pro popis interakcí v mikrosvětě velmi důležitou roli. A proto se s nimi v dalším seznámíme poněkud podrobněji. Avšak než tak učiníme je třeba osvětlit i několik dalších pojmů, se kterými už jsme se setkali.

Základním východiskem kalibračních teorií je teze, že všechny čtyři základní interakce v přírodě jsou důsledkem požadavku invariance teorie vůči příslušným kalibračním transformacím. V rámci kalibrační teorie lze formulovat kvantovou elektrodynamiku (kde elektromagnetické pole se obdrží jako kalibrační pole při požadavku invariance Lagrangiánu volného spinorového pole vůči lokálním transformacím fáze grupy $U(1)$) i Einsteinovu gravitační teorii (gravitační pole zde vzniká z požadavku invariance vůči lokálním transformacím prostoročasu - Poincarého grupa).



Obr. 7: Srovnání produkce mionů a jetů ve srážkách elektronů s pozitrony - záznamy z detektoru ALEPH.

Kalibrační pole v kalibračních teoriích jsou primárně „nehmotná“, což je adekvátní pro pole elektromagnetické a gravitační. Při budování teorie např. slabých interakcí v rámci kalibrační teorie to však způsobuje určité potíže pramenící z toho, že tyto interakce jsou zprostředkovány intermediálními bosony (W^+ , W^- , Z^0), které mají díky krátkému dosahu interakce značně velkou hmotnost (desítky GeV/c^2). Tuto potíž se podařilo překlenout mechanismem tzv. *spontánního narušení symetrie*, což je modifikace Lagrangiánu, při níž sice Lagrangián i pohybové rovnice mají nadále původní danou symetrii, ale vlastní fyzikální stavy tuto symetrii již nemají (není v tom žádný rozpor - např. pohyb v centrálně symetrickém poli nemusí být při nesymetrických počátečních podmínkách vůbec symetrický). Toto spontánní narušení symetrie pak způsobuje, že příslušné kalibrační pole bude efektivně vystupovat jako pole s nenulovou hmotností, aniž by se porušila kalibrační invariance. Toto je základní myšlenka tzv. **Higgsova-Kibbleova mechanismu**. Kromě toho se v teorii objeví navíc tzv. **Higgsovy bosony** - skalární částice s nenulovou klidovou hmotností, pocházející z pomocných skalárních polí. Higgsov boson hraje ve standardním modelu důležitou roli - v obrazném slova smyslu je zodpovědný za velikost hmotností kvarků, leptonů, intermediálních vektorových bosonů a prokázání jeho existence je po dlouhou dobu cílem mnoha experimentů.

Existuje řada příkladů spontánního narušení symetrie. Jeden z nejznámějších se týká magnetismu. Při vysokých teplotách jsou spiny elektronů ve ferromagnetické látce orientovány náhodně - $O(3)$ invariantní. Při poklesu teploty pod kritickou mez se však spiny elektronů společně orientují do určitého směru, protože tato orientace odpovídá nižší hodnotě energie - základní stav. Lagrangián sice dodržuje rotační symetrii, avšak základní

stav (pouze $O(2)$ invariantní) nikoliv.

Ukazuje se tedy, že teorie všech fundamentálních interakcí lze jednotně vytvářet v rámci kalibračních teorií lišících se především *kalibrační grupou*. V případě silné interakce je to grupa $SU(3)$. O tom však později ...

Maxwellovy rovnice v kovariantním tvaru

V klasické elektrodynamice je volné elektromagnetické pole ve vakuu popsáno intenzitami elektrického a magnetického pole $\vec{E}(t, x)$ a $\vec{H}(t, x)$, které splňují Maxwellovy rovnice

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad (11)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{H} = 0 \quad (12)$$

a objevují se ve výrazu pro sílu, kterou pole působí na částici s nábojem e pohybující se rychlostí \vec{v}

$$\vec{F} = e \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H} \right]. \quad (13)$$

Druhá série Maxwellových rovnic (12) nám dovoluje vyjádřit pole $\vec{E}(t, x)$ a $\vec{H}(t, x)$ pomocí skalárního a vektorového potenciálu $A_0(t, x)$ a $\vec{A}_0(t, x)$ jako:

$$\vec{E} = -\text{grad} A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad x^\mu = (t, \vec{x}), \quad x_\mu = (t, -\vec{x}), \quad (14)$$

protože (14) automaticky implikuje (12). Uspořádání A_0 a \vec{A} jako komponent čtyřpotenciálu

$$A^\mu \equiv (A^0, \vec{A}), \quad A^0 = A_0, \quad A_\mu \equiv (A^0, -\vec{A}) \quad (15)$$

a zavedení antisymetrického tenzoru $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial A^\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x_\nu} \Rightarrow F^{0i}(x) = -E_i(x), \quad F^{ij}(x) = \varepsilon_{ijk} H_k(x), \quad (16)$$

nám dovoluje zapsat (12) ve zjevně kovariantní formě

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0. \quad (17)$$

Tyto rovnice v rámci Lagrangeovy polní teorie (viz dodatek C) plynou z Lagrangiánu:

$$\mathcal{L}_{\text{volné}}^{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (18)$$

jak se můžeme přesvědčit dosazením do Eulerových-Lagrangeových rovnic (108).

Lagrangián kvantové elektrodynamiky

Důvodem zařazení tohoto, vlastně i předchozího, paragrafu je analogie struktury kvantové elektrodynamiky (QED) a kvantové chromodynamiky (QCD). I přes některé fundamentální rozdíly mezi QED a QCD je formalismus QCD v zásadě rozšířením formalismu QED. Konečně ukážeme význam principu **lokální kalibrační invariance** při „odvození“ pohybových rovnic o kterém jsme se již několikrát zmínili.

Základním objektem QED je *lokální fermionové pole* $\Psi(x)$, závisící na prostoročasové souřadnici x a popisující jeden typ nabitých částic se spinem 1/2 (leptony nebo kvarky). Na úrovni kvantové mechaniky je řešením odpovídající Diracovy rovnice. V kvantové teorii pole se však $\Psi(x)$ stává lokálním operátorem splňujícím určité *antikomutační relace*. Přeskočíme nyní otázku procesu kvantování pole, která je obecně nastíněna na konci dodatku C a zhruba načrtneme, jak požadavek lokální kalibrační invariance spolu s Lorentzovou invariancí a některými podmínkami na typ částic a jejich interakcí, určuje základní vlastnosti elektromagnetických interakcí nabitých fermionů a fotonů v QED. „Odvození“ Lagrangiánu QED je následující:

1. Začneme s klasickým Lagrangiánem neinteragujícího fermionového pole $\Psi(x)$ s hmotou m

$$\mathcal{L}_{\text{volné}}^{\text{fermion}} = \bar{\Psi}(x) (i\rlap{/}\partial - m) \Psi(x),^2 \quad (19)$$

který generuje, přes Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, Diracovu rovnici pro volný fermion se spinem 1/2

$$(i\rlap{/}\partial - m) \Psi(x) = 0, \quad (20)$$

kde $\rlap{/}\partial \equiv \gamma_\mu \partial^\mu$.³

2. Definujeme **globální kalibrační transformaci** tohoto pole jako fázové rotace:

$$\Psi'(x) := \exp\{i\alpha\} \Psi(x), \quad (21)$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Třída takovýchto transformací tvoří grupu $U(1)$. Tím, že α nezávisí na x zůstává Lagrangián při této transformaci invariantní.

3. Nasadíme požadavek **lokální kalibrační invariance**, tj. invariance vůči transformacím tvaru (21), ale pro $\alpha = \alpha(x)$. V tomto případě už sám Lagrangián (19) není vůči této transformaci invariantní kvůli členu:

$$-\bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x^\mu} \Psi(x), \quad (22)$$

pocházejícího z parciální derivace v (19), a který vymizí pouze pro $\alpha = \text{const}$.

² $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$

³Diracovy γ -matice viz dodatek A

4. K zajištění lokální kalibrační invariance fermionového Lagrangiánu musíme zavést nové pole, které *kompensuje* neinvarianci (19). Toho je dosaženo zavedením tzv. **kalibračního pole** $A_\mu(x)$, které je **vektorovým** polem popisujícím částice se spinem 1 a hmotou M . Jeho Lagrangián, obsahující možný hmotnostní člen, je pouze zobecněním (18):

$$\mathcal{L}_{volné}^{kalibr.} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}M^2 A_\mu(x)A^\mu(x), \quad (23)$$

kde $F^{\mu\nu}$ je dáno v (16). Odpovídající pohybové rovnice jsou:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = -M^2 A^\nu(x) \quad (24)$$

Na zrušení neinvariantního členu (22) je tomuto kalibračnímu poli *přiděleno* interagovat s $\Psi(x)$ prostřednictvím interakčního členu:

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu(x) \quad (25)$$

a transformovat se *současně* s (21) jako:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^\mu}, \quad (26)$$

kde $e \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo určující sílu interakce (25), které bude později interpretováno jako **elektrický náboj** fermionového pole $\Psi(x)$.

5. V tomto kompenzačním mechanismu je však jeden zádrhel týkající se hmoty M kalibračního pole A_μ . Hmotnostní člen $M^2 A_\mu A^\mu$ porušuje invarianci vzhledem ke kombinované fermionové a kalibrační transformaci. Proto s principem lokální kalibrační invariance je kompatibilní pouze *nehmotné* kalibrační pole A_μ . Tento krok dokončuje konstrukci Lagrangiánu QED:

$$\mathcal{L}^{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + \bar{\Psi}(x)(i\partial - m)\Psi(x) + e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu(x), \quad (27)$$

který popisuje systém interagujících Diracových a Maxwellových polí. Pohybové rovnice, získané z Lagrangeových rovnic, zní:

$$[i\gamma_\mu(\partial^\mu - ieA^\mu(x)) - m]\Psi(x) = 0 \quad (28)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = e\bar{\Psi}(x)\gamma^\nu\Psi(x) \quad (29)$$

Poznamenejme ještě, že Lagrangián (27) můžeme obdržet pomocí jisté záměny ze součtu volných Lagrangiánů (19) a (23), zvané *minimální substituce*, záměnou parciální derivace ∂_μ za kalibračně kovariantní derivaci $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu(x)$.

Výše uvedený postup samozřejmě neodpovídá skutečnému odvození interakčního členu QED z fundamentálních principů. Tento postup posloužil pouze jako ukázka významu principu lokální kalibrační invariance. Je však pravdou, že tento princip sám o sobě nepostačuje

k jednoznačnému určení Lagrangiánu QED. Na příklad bychom mohli do (27) přidat jakoukoliv mocninu členu fotonové kinetické energie $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, která je sama lokálně kalibračně invariantní a tak obdržit **samointerakci elektromagnetického pole!** Podobně můžeme spojit tenzor pole $F^{\mu\nu}$ přímo s fermionovým tenzorem $\bar{\psi}F_{\mu\nu}\psi$, což také reprezentuje lokálně kalibračně invariantní interakci. V tomto případě můžeme postrádat kalibrační potenciál $A_\mu(x)$ a fermiony budou interagovat s fotony přes jejich magnetické momenty, avšak tato interakce bude *konečného dosahu*. V obou těchto alternativách je druh interakce, kterou obdržíme výrazně odlišný od *Coulombovy* síly pozorované v přírodě. Fakt, že je foton nehmotný odpovídá zkušenosti, že elektromagnetické interakce jsou *nekonečného* dosahu. Ovšem v klasické teorii nemůže být ani jedna z těchto alternativ zamítnuta na teoretickém podkladu. V kvantové teorii pole existuje mocný princip, který tyto alternativy vyloučí a který v kombinaci s požadavkem lokální kalibrační invariance určuje Lagrangián QED jednoznačně. Tímto principem je **renormalizovatelnost teorie**.

Lagrangián kvantové chromodynamiky

Kroky k nalezení Lagrangiánu QCD kopírují výše uvedený postup nalezení Lagrangiánu QED. Je zde však jeden *fundamentální* rozdíl v **neabelovském** charakteru odpovídající kalibrační grupy. Je to způsobeno tím, že *kvarky existují ve třech barevných stavech* a proto základním matematickým objektem popisujícím kvarky určité vůně (u, d, s, ...) je jedno-sloupcová matice v barevném prostoru

$$\Psi(x) \equiv \begin{pmatrix} \Psi^1(x) \\ \Psi^2(x) \\ \Psi^3(x) \end{pmatrix} \quad (30)$$

a její *lokální* kalibrační transformace jsou násobení 3×3 unitárními unimodulárními maticemi z barevné $SU(3)$ grupy:

$$\Psi'(x) := \underbrace{\exp\{i\alpha_a(x)T_a\}}_{\in SU(3)} \Psi(x), \quad (31)$$

kde suma v exponentu probíhá přes osm generátorů (viz dodatek B) T_a grupy $SU(3)$ a $\alpha_a(x), a = 1, \dots, 8$ jsou funkce x . Postulování invariance vůči výše uvedené kalibrační transformaci kvarkových polí a existence 3 barev kvarků vyžaduje zavedení 8 kalibračních polí A_μ^a popisujících 8 **barevných gluonů** konvenčně reprezentovaných jedno-sloupcovou maticí

$$\vec{A}_\mu(x) \equiv \begin{pmatrix} A_\mu^1(x) \\ \vdots \\ A_\mu^8(x) \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Nebo alternativní reprezentací gluonového oktetu 3×3 maticí definovanou jako:

$$A_\mu(x) \equiv A_\mu^a(x)T^a \quad (33)$$

Pro každý barevný index můžeme definovat tenzor pole:

$$F_a^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial A_a^\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_a^\mu(x)}{\partial x_\nu}. \quad (34)$$

Stejným postupem jako jsme postupovali při konstrukci Lagrangiánu QED dospějeme i k Lagrangiánu QCD:

$$\mathcal{L}^{QCD} = -\frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu}^a \vec{F}^{\mu\nu a} + \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m_q)\Psi + g\bar{\Psi}\gamma_\mu \vec{T}\Psi \vec{A}^\mu, \quad (35)$$

kde skalární součin vektorů je zkratkou pro sumu přes barevné indexy a gluonového pole A_a a generátory T^a . Skalární součin v třetím členu Lagrangiánu (35) je také invariantní vůči současné *globální* kalibrační transformaci (31) kvarkového pole a odpovídajícím *globálním* rotacím gluonového pole vůči **sdrůžené** reprezentaci $SU(3)$:

$$\vec{A}'_\mu = \exp\{i\alpha_a F_a\} \vec{A}_\mu, \quad (F_a)_{bc} \equiv \frac{1}{i} f_{abc}. \quad (36)$$

Abychom odlišili tuto novou $SU(3)$ grupu od „staré“, související s **vůněmi** kvarků, budeme ji značit $SU_c(3)$.

Na rozdíl od QED to Lagrangiánem (35) nekončí. Problém, který v QED nenastal, je ten, že pro infinitesimální lokální kalibrační transformace neabelovského gluonového pole definované v analogii s QED jako:

$$(A_\mu^a)' := A_\mu^a + \alpha_b f_{bac} A_\mu^c + \frac{1}{g} \frac{\partial \alpha^a(x)}{\partial x^\mu} \quad (37)$$

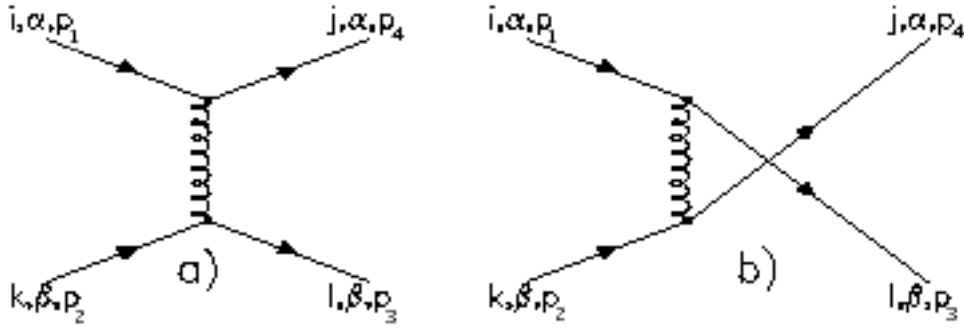
Poslední člen (37) se ruší v definici tenzoru $F_{\mu\nu}^a$ jako v QED, ale barevné rotace *nikoliv*, což činí gluonové kinetické energie $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ $SU_c(3)$ neinvariantní. Důvodem je *nekomutativita* barevných rotací. Tento problém snadno odstraníme přidáme-li k pravé straně (34) člen, který tuto neinvarianci kompenzuje. Zavedeme:

$$G_a^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial A_a^\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_a^\mu(x)}{\partial x_\nu} + g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu \quad (38)$$

a používáme $G_a^{\mu\nu}$ místo $F_a^{\mu\nu}$ v (35). Když zapíšeme $G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a$ explicitně pomocí A_μ^a najdeme kromě očekávaného kinetického členu $\vec{F}_a^{\mu\nu} \vec{F}_{\mu\nu}^a$ další dva členy reprezentující **samointerakci tří a čtyř gluonů**.

$$g \left\{ f_{abc} \left[\left(\frac{\partial A_b^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_b^\mu}{\partial x^\nu} \right) A_c^\mu A_c^\nu + \left(\frac{\partial A_a^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_a^{\nu\mu}}{\partial x_\mu} \right) A_{b\mu} A_{c\nu} \right] \right\} + g^2 f_{abc} f_{ade} A_b^\mu A_c^\nu A_{d\mu} A_{e\nu}. \quad (39)$$

Tato skutečnost má dalekosáhlé důsledky.



Obr. 8: Feynmanův diagram pro pružný rozptyl kvarku na kvarku v nejnižším řádu poruchové teorie.

3.2 Rozptyl kvarku na kvarku

Jako příklad a ilustraci analogie formalismu QCD s formalismem QED uvedeme výpočet invariantní amplitudy (v nejnižší řádu poruchové QCD) pro proces zobrazený na Obr.8 (s Řeckými, resp. Latinskými písmeny označujícími vůni, resp. barvu kvarků). Pracující s Feynmanovou kalibrační podmínkou⁴ určíme pro spin λ a barvu c střední hodnotu kvadrátu odpovídajícího maticového elementu

$$\begin{aligned} \langle |M_{if}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \frac{1}{9} \sum_{\lambda, c} (|M_t| + |M_u|)^2 \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{9} \sum_{\lambda, c} (|M_t|^2 + 2M_t^* M_u + |M_u|^2), \end{aligned} \quad (40)$$

kde suma probíhá přes spiny λ a barvy c všech kvarků. Mandelstamovy proměnné s, t, u jsou definované jako

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_1 + p_2)^2 \\ t &\equiv (p_1 - p_4)^2 \\ u &\equiv (p_1 - p_3)^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Invariantní amplitudy M_t a M_u odpovídající diagramům na Obr.8a a Obr.8b obdržíme použitím Feynmanových pravidel pro QCD⁵, které jsou naprosto analogické Feynmanovým pravidlům pro QED⁶.

$$\begin{aligned} M_t &= \frac{ig^2}{t} (T_{ji}^a T_{lk}^a) [\bar{u}_\alpha(p_4) \gamma^\mu u_\alpha(p_1)] [\bar{u}_\beta(p_3) \gamma_\mu u_\beta(p_2)], \\ M_u &= \frac{ig^2}{u} (T_{li}^a T_{jk}^a) [\bar{u}_\beta(p_3) \gamma^\mu u_\alpha(p_1)] [\bar{u}_\alpha(p_4) \gamma_\mu u_\beta(p_2)]. \end{aligned} \quad (42)$$

⁴viz např. [5] oddíl 6.4

⁵viz např. [1] nebo [5] oddíl 11.3

⁶viz např. [1]

Uvažme nejprve kvadrát M_t

$$M_t^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{9} \frac{g^4}{t^2} A_t B_t, \quad (43)$$

kde zlomky $1/4$ a $1/9$ pocházejí ze středování přes spiny a barvy v počátečním stavu. Konečný tvar faktoru A_t je

$$A_t \equiv T_j i^a T_{lk}^a \underbrace{T_{ji}^{b*}}_{T_{ij}^b} \underbrace{T_{lk}^{b*}}_{T_{kl}^b} = \underbrace{T_{ji}^a T_{ij}^b}_{Tr(T_a T_b)} \underbrace{T_{lk}^a T_{kl}^b}_{Tr(T_a T_b)} = \frac{1}{4} (\delta_{ab})^2 \quad (44)$$

a faktoru B_t

$$B_t \equiv Tr(\not{p}_4 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu) Tr(\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu) = 32 [(p_1 p_2)(p_3 p_4) + (p_1 p_3)(p_2 p_4)] = 8(u^2 + s^2). \quad (45)$$

Složením všech faktorů dostaneme

$$\langle |M_t|^2 \rangle = \frac{2}{9} \frac{g^4}{t^2} 2(u^2 + s^2), \quad (46)$$

kde faktor $2/9$ pochází z barevných faktorů.

Podobným postupem pro další dva členy v (41) obdržíme

$$\langle |M_i f|^2 \rangle = \left(\frac{2}{9}\right)_c \left[\frac{2(u^2 + s^2)}{t^2} + \delta_{\alpha\beta} \frac{2(t^2 + s^2)}{u^2} + \delta_{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{3}\right)_c \frac{4s^2}{tu} \right], \quad (47)$$

kde index c označuje původ z barevných maticových stop.

4 Narušení CP invariance

CP transformace kombinuje záměnu náboje C se záměnou parity P . Transformace C zaměňuje částici za antičástici záměnou všech aditivních kvantových čísel, např. $Q \rightarrow -Q$ pro elektromagnetický náboj. Transformace P provádí zrcadlení souřadných os - přechod od levotočivého souřadnicového systému k pravotočivému, tj. provádí záměnu $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$.

Kdyby CP byla skutečnou symetrií, pak by přírodní zákony platily stejně jak pro hmotu tak pro antihmotu. Pozorujeme však, že většina jevů je C - a P -symetrická a proto také CP -symetrická. Konkrétně je symetrie respektována gravitační, elektromagnetickou a silnou interakcí. Naproti tomu slabá interakce porušuje symetrie C a P nejsilnější možnou cestou. Právě narušení této kombinované invariance je přitom podle našich dnešních znalostí klíčem k pochopení, proč je ve vesmíru více hmoty než antihmoty. Zatímco slabá interakce narušuje C a P samostatně je ve většině slabých procesů symetrie CP zachována. CP symetrie je nicméně porušována v několika řídkých procesech. Narušení CP invariance bylo objeveno při rozpadu neutrálního mezonu K v roce 1964 a nedávno pozorováno při rozpadu neutrálního mezonu B . K_L mezon se častěji rozpadá na $\pi^- e^+ \bar{\nu}_e$ nežli na $\pi^+ e^- \nu_e$. Tato asymetrie je však velmi malá, větší je u rozpadu mezonu B .

Vedle parity a spojitě Lorentzovy transformace je zde ještě další prostoročasová transformace, která může být symetrií interakcí: obrácení chodu času T , $t \rightarrow -t$. Narušení této symetrie bylo pozorováno u rozpadu neutrálního mezonu K .

Složení těchto tří transformací, tj. transformace CPT , se zdá býti fundamentální symetrií přírody a její narušení dosud nebylo pozorováno. Jinými slovy, nelze sestavit Lorentz-invariantní kvantovou teorii pole s hermitovským Hamiltoniánem porušujícím symetrii CPT .

4.1 Slabá interakce

Důvodem pro zavedení slabé interakce byla pozorovaná doba života pionů a mionů, která byla značně delší než u částic, jejichž rozpad podléhá silné nebo elektromagnetické interakci. Bylo zjištěno, že:

$$\begin{aligned} \pi^- &\rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu & s \quad \tau = 2,6 \times 10^{-8} \text{sec} \\ \mu^- &\rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu & s \quad \tau = 2,2 \times 10^{-6} \text{sec} \end{aligned} \quad (48)$$

Naproti tomu částice rozpadající se pod vlivem silné, resp. elektromagnetické interakce mají dobu života řádově 10^{-23}sec , resp. 10^{-16}sec . Doby života jsou inverzně vztaheny k vazebné síle interakce. Delší doba života π^0 odráží fakt, že $\alpha \ll \alpha_s$. Pionové a mionové rozpady jsou zřejmým důkazem existence dalšího typu interakce se slabší vazbou než má elektromagnetická.

Narušení parity a $V-A$ tvar slabého proudu

Fermiho vysvětlení rozpadu β (1932) bylo inspirováno strukturou elektromagnetické interakce. Invariantní amplituda pro elektromagnetický rozptyl elektronu na protonu v prvním

řádu poruchové teorie je⁷:

$$M = (e\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p) \left(\frac{-1}{q^2} \right) (-e\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_e), \quad (49)$$

kde q je přenesený impuls a proton považujeme za bezstrukturní Diracovu částici. M je produktem elektronového a protonového elektromagnetického proudu spolu s propagátorem vyměněného fotonu.

Rozpad β je schematicky popsán:

$$p \rightarrow e^+ n \nu_e, \quad (50)$$

což může být přepsáno do tvaru:

$$pe^- \rightarrow n \nu_e. \quad (51)$$

V analogii s proud-proud tvarem (49) Fermi zavedl invariantní amplitudu popisující rozpad β ve tvaru:

$$M = G (\bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p) (\bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\mu \psi_e), \quad (52)$$

kde G je slabá vazbová konstanta, nazvaná Fermiho konstanta, která musela být určena experimentálně. Povšimněme si ještě náboj-zvyšující nebo náboj-snižující struktury slabého proudu. O těchto proudcích mluvíme jako o *nabitých slabých proudcích*. Existence *neutrálních slabých proudů* byla prokázána až mnohem později - v roce 1973. Navíc si také povšimněme absence propagátoru v (52). K tomuto problému se vrátíme později.

Fermiho výběr vektor-vektor tvaru amplitudy M je speciální volbou mezi množstvím možných Lorentz-invariantních amplitud, které mohou být konstruovány použitím bilineárních kovariantů známých z relativistické kvantové mechaniky. Není zde žádný *a priori* důvod používat pouze vektory. Amplituda (52) popisuje některé vlastnosti rozpadu β některé však ne. Následujících 25 let pokusů poznat pravou formu slabé interakce vedlo k řadě geniálních experimentů s rozpadem β , které vedly až k objevu narušení parity. Podivuhodné je, že jediná nezbytná změna ve Fermiho původní koncepci bylo nahrazení $\gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$. Fermi nepřehlédl, že zavedení členu $\gamma^\mu \gamma^5$ okamžitě narušuje zachování parity a ve své době pro jeho použití neměl důvod.

V roce 1956 provedli Lee a Yang kritickou analýzu všech experimentálních dat slabých interakcí. V této době vzbudilo rozruch pozorování bezleptonového rozpadu $K^+ \rightarrow 2\pi$ a 3π , ve kterém se dva koncové stavy lišily svou paritou. Někteří se domnívali, že k vysvětlení jsou zapotřebí 2 různé částice. Lee a Yang učinili rozhodující krok při prohlášení, že se parita při slabých interakcích nezachovává. Experimenty pro potvrzení jejich hypotézy ihned následovaly.

V těchto experimentech bylo potvrzeno, že slabé interakce zahrnují pouze $\bar{\nu}_R$ a ν_L . Absence „zrcadlových obrazů“, tj. stavů $\bar{\nu}_L$ a ν_R je zřejmým důkazem narušení parity. Stejně tak je narušena nábojová záměna C . C transformuje stav ν_L na stav $\bar{\nu}_L$. Nicméně tvar $\gamma^\mu (1 - \gamma^5)$ ponechává slabé interakce invariantní vůči kombinované transformaci CP .

⁷viz např. [1] kap.12

Bylo přirozené doufat, že všechny jevy podléhající slabé interakci jsou popsány $V - A$ (vektor - axiální vektor) proud-proud interakcí s univerzální vazbou G . Například rozpad β a rozpad mionu jsou popsány amplitudami:

$$\begin{aligned} M(p \rightarrow ne^+\nu_e) &= \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_p] [\bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_e] \\ M(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) &= \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\sigma (1 - \gamma^5) \psi_\mu] [\bar{\psi}_e \gamma_\sigma (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}]. \end{aligned} \quad (53)$$

Faktor $1/\sqrt{2}$ je pouhá konvence z důvodu zachování původní definice G , která neobsahovala γ^5 .

Interpretace vazby G

Numerická hodnota G může být získána z experimentálních dat mionových a β rozpadů. Pro teoretickou interpretaci G můžeme pokračovat v naší analogii s tvarem amplitudy pro elektromagnetickou interakci. Vidíme, že G nahrazuje faktor $\frac{e^2}{q^2}$, který představuje propagátor vyměněného fotonu s impulsem q a má dimenzi GeV^{-2} na rozdíl od bezrozměrné vazby e . Postulujeme proto generování slabé interakce emisí a absorpcí nabitých vektorových bosonů W^\pm (Z^0 v případě neutrálních proudů). Slabé bosony jsou analogem fotonů v interakci elektromagnetické a gluonů v interakci silné. Na příklad rozpad μ^- je zprostředkovaným výměnou bosonu W^- a amplituda je tvaru:

$$M = \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\sigma \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_\mu \right] \frac{1}{M_W^2 - q^2} \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_e \gamma_\sigma \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \right], \quad (54)$$

kde $g/\sqrt{2}$ je bezrozměrná slabá vazba a q impuls přenášený bosonem. Faktory $1/\sqrt{2}$ a $1/2$ jsou zavedeny kvůli konvenční definici g . Na rozdíl od fotonů jsou slabé bosony hmotné, jinak by mohly přímo vznikat při slabých rozpadech.

Rozptyl neutrino-kvark

Studium rozptylu neutrin na kvarcích je experimentálně dosažitelné ostřelováním protonů nebo atomových jader vysokoenergetickými svazky neutrin. Je to analogické studiu elektromagnetické interakce lepton-kvark rozptylem vysokoenergetických elektronů nebo mionů na hadronových terčích.

K předpovězení účinného průřezu neutrino-kvark potřebujeme znát tvar kvarkových slabých proudů. Kvarky interagují elektromagneticky jako leptony důsledkem svých elektrických nábojů. Budeme se proto snažit zkonstruovat kvarkové slabé proudy jako v případě leptonů. Na příklad kombinujeme náboj-zvyšující kvarkový proud:

$$J_q^\mu \equiv \bar{\psi}_u \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_d \quad (55)$$

s náboj-snižujícím elektronovým proudem:

$$J_e^\mu \equiv \bar{\psi}_\nu \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_e. \quad (56)$$

Hermitovská sdružení (55), resp. (56) dávají náboj-snižující, resp. náboj-zvyšující slabé proudy.

$V - A$ tvar znamená, že slabé proudy vážou pouze kvarky u_L a d_L (nebo \bar{u}_R a \bar{d}_R). Při vysokých energiích to znamená, že jsou vázány pouze kvarky u a d s negativní helicitou, nebo \bar{u}_R a \bar{d}_R s helicitou pozitivní.

Použitím předchozích proudů můžeme zkonstruovat amplitudu pro proces:

$$d \rightarrow ue^- \bar{\nu}_e, \quad (57)$$

který je zodpovědný za neutronový rozpad β .

Cabibbův úhel

Leptony a kvarky se účastní slabých interakcí v rámci nabitých $V - A$ proudů konstruovaných z následujících párů „left-handed“ fermionových stavů

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Tyto nabité proudy jsou všechny vázány univerzální vazbovou konstantou G . Přirozeným požadavkem je rozšíření tohoto mechanismu na dublet

$$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad (59)$$

tvořený z těžších kvarkových stavů. Nicméně víme, že tato úvaha není zcela korektní. Na příklad pozorujeme rozpad $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. K^+ je tvořen z u a \bar{s} kvarků. Musí proto existovat slabý proud, který váže u spolu s \bar{s} . To odporuje předešlému schématu, které dovoluje pouze přechody $u \leftrightarrow d$ a $c \leftrightarrow s$.

Namísto zavádění nových vazeb pokrývajících pozorování jako $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ ponecháme původní univerzálnost, ale pozměníme kvarkové dublety. Předpokládejme, že nabité proudy vážou „rotované“ kvarkové stavy:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}, \dots, \quad (60)$$

kde

$$\begin{aligned} d' &= d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \\ s' &= -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c. \end{aligned} \quad (61)$$

Tímto zavádíme libovolný parametr θ_c (angl. quark mixing angle), známý jako Cabibbův úhel.

Tímto můžeme shrnout slabou interakci kvarků:

$$M = \frac{4G}{\sqrt{2}} J^\mu J_\mu^\dagger, \quad (62)$$

kde

$$J^\mu = (\bar{u} \quad \bar{c}) \frac{1}{2} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (63)$$

Unitární matice U provádí „rotaci“ d a s kvarkových stavů:

$$U \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \quad (64)$$

Slabé směšovací úhly

Shrňme tedy předchozí Cabibbo-GIM schema. Nabitý (nebo vůni-měnící) proud spojuje $u \leftrightarrow d'$ nebo $c \leftrightarrow s'$ kvarkové stavy, kde d' a s' jsou ortogonální kombinace fyzikálních (tj. hmotnostních) vlastních stavů kvarků určité vůně d , s :

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Kvarkové směšování je popsáno jediným parametrem, Cabibbovým úhlem θ_c .

Nyní přistoupíme ke zobecnění Cabibbo-GIM myšlenky na více než 4 vůně kvarků. Představme si, že slabá interakce působí na N dubletech kvarků

$$\begin{pmatrix} u_i \\ d'_i \end{pmatrix} \quad i = 1 \dots N \quad (66)$$

kde d'_i jsou kombinace hmotnostních vlastních stavů d_i :

$$d'_i = \sum_j U_{ij} d_j. \quad (67)$$

U je unitární $N \times N$ matice jejíž prvky lze stanovit experimentálně. Kolik pozorovatelných parametrů U obsahuje? Můžeme změnit fázi každého z $2N$ kvarků nezávisle beze změny fyziky (fáze vlnových funkcí nejsou pozorovatelné veličiny). Proto U obsahuje

$$N^2 - (2N - 1) \quad (68)$$

reálných parametrů. Jedna fáze je vynechána, protože společná změna fáze ponechá U invariantní. Na druhé straně má ortogonální $N \times N$ matice pouze

$$\frac{1}{2} N(N - 1) \quad (69)$$

reálných parametrů. Proto předefinováním kvarkových fází není možné obecně učinit U reálnou. U musí obsahovat

$$N^2 - (2N - 1) - \frac{1}{2}N(N - 1) = \frac{1}{2}(N - 1)(N - 2) \quad (70)$$

reziduálních fázových faktorů. Takže pro dva dublety ($N = 2$) máme pouze jeden reálný parametr (θ_c). Kdežto pro tři dublety máme tři reálné parametry a jeden fázový faktor $e^{i\delta}$.

Přímočaře tak lze rozšířit slabý proud na:

$$J^\mu = (\bar{u} \quad \bar{c} \quad \bar{t}) \frac{1}{2} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (71)$$

3×3 směšovací matice U obsahuje tři reálné parametry (podobné Cabibbovým úhlům) a fázový faktor $e^{i\delta}$. Původní parametrizace byla provedena Kobayayashim a Maskawou. Existence neodstranitelného fázového faktoru má fundamentální implikace, jako na příklad *narušení CP invariance*, které konečně probereme v následujícím paragrafu.

CP invariance?

Pro vyšetření otázky CP invariance nejdříve porovnáme amplitudy pro reakci kvarků $ab \rightarrow cd$ a příslušnou antičásticovou reakci $\bar{a}\bar{b} \rightarrow \bar{c}\bar{d}$. První případ je popsán amplitudou:

$$\begin{aligned} M &\sim J_{ca}^\mu J_{\mu bd}^\dagger \\ &\sim (\bar{\psi}_c \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U_{ca} \psi_a) (\bar{\psi}_b \gamma_\mu (1 - \gamma^5) U_{bd} \psi_d)^\dagger \\ &\sim U_{ca} U_{db}^* (\bar{\psi}_c \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_a) (\bar{\psi}_d \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_b) \end{aligned} \quad (72)$$

Neboť $U_{bd}^\dagger = U_{db}^*$. M popisuje jak $ab \rightarrow cd$ tak $\bar{c}\bar{d} \rightarrow \bar{a}\bar{b}$.

Na druhé straně amplituda M' popisující reakci $\bar{a}\bar{b} \rightarrow \bar{c}\bar{d}$ (nebo $cd \rightarrow ab$) je:

$$\begin{aligned} M &\sim J_{ca}^{\mu\dagger} J_{\mu bd} \\ &\sim U_{ca}^* U_{db} (\bar{\psi}_a \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_c) (\bar{\psi}_b \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_d), \end{aligned} \quad (73)$$

to jest

$$M' = M^\dagger. \quad (74)$$

Což není až tak překvapující uvědomíme-li si, že M vlastně představuje interakční Hamiltonián tohoto procesu, který musí být hermitovský.

Jak ověříme, že je teorie CP invariantní? Z amplitudy $M(ab \rightarrow cd)$ spočítáme amplitudu M_{CP} popisující CP -transformovanou reakci a uvidíme, zda-li Hamiltonián zůstal hermitovský. Tj. jestliže platí

$$M_{CP} = M^\dagger \quad (75)$$

pak je teorie CP -invariantní. Pokud neplatí, pak je CP narušena.

M_{CP} obdržíme substitucí CP -transformovaných Diracových spinorů v (72):

$$\psi_i \rightarrow P(\psi_i)_C \quad i = a, \dots, d \quad (76)$$

Podle pravidel známých z relativistické kvantové mechaniky nakonec obdržíme:

$$M \sim U_{ca} U_{db}^* (\bar{\psi}_a \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_c) (\bar{\psi}_b \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_d). \quad (77)$$

Nyní můžeme porovnat M_{CP} s M^\dagger .

Okamžitě vidíme, že pro šestici kvarků, tj. případ 3×3 Kobayashi-Maskawa (KM) matice obsahující komplexní fázi $e^{i\delta}$ obecně dostáváme:

$$M_{CP} \neq M^\dagger \quad (78)$$

a tudíž bezprostřední **narušení** CP invariance!

Je nutné podotknout, že výše uvedený model slabých interakcí je postačující pouze na určité úrovni. Můžeme počítat pouze amplitudy v nejnižším řádu poruchové teorie, kde přenesená hybnost splňuje podmínku $q^2 \ll (100 \text{ GeV})^2$. Výsledky nezáleží na tom, zda hmotné intermediální vektorové bosony W^\pm existují, či nikoliv. Existence W^\pm vede pouze k reinterpretaci Fermiho vazby G . Nicméně výpočty čehokoliv jiného než nízko-energetických amplitud v nejnižším řádu poruchové teorie vedou k vážným problémům. Po mnoho let byla proud-proud interakce považována spíše za fenomenologický popis nežli za řádnou teorii. Krokem vpřed k této teorii byla právě existence hmotných bosonů převádějící fenomenologický popis v řádnou (tj. renormalizovatelnou) teorii. Toto se zdálo nemožné až do objevu „spontánně narušených neabelovských kalibračních symetrií“ (viz např. [1] kap. 13 - Elektroslabá interakce).

Na začátku této kapitoly jsme se zmínili o asymetrii mezi hmotou a antihmotou ve vesmíru a jejím vysvětlení pomocí narušení CP invariance. Navzdory fenomenologickému úspěchu právě předvedeného KM-mechanismu se ukazuje, že tento model selhává (o několik řádů) a nemůže pozorovanou asymetrii vysvětlit. Je to silným náznakem toho, že příroda disponuje dalšími zdroji narušení CP invariance za hranicemi KM-mechanismu. (Nedávné zjištění nenulových hmotností neutrin znamená možnost narušení CP invariance také v leptonovém sektoru.)

5 Dodatky

5.1 A. Diracovy γ -matice

$$\begin{aligned}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \\ \gamma^0 &= \gamma^0, \quad \gamma^0 \gamma^0 = I; \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k, \quad \gamma^k \gamma^k = -I \quad k = 1, 2, 3 \\ \gamma^5 &= i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5\end{aligned}$$

Standartní reprezentace pomocí Pauliho σ -matic:

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

kde $\vec{\sigma}$ označuje trojici Pauliho matic

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.2 B. Základní definice z teorie grup

Grupou nazveme každou dvojici (G, \odot) , kde G je libovolná množina a $\odot : G \times G \rightarrow G$, splňující následující podmínky:

1. $\forall x, y \in G : x \odot y \in G$
2. $\exists e \in G : \forall x \in G : e \odot x = x \odot e = x$
3. $\forall x \in G \exists x^{-1} \in G : x \odot x^{-1} = x^{-1} \odot x = e$
4. $\forall x, y, z \in G : x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$

Reprezentací D grupy G nazýváme obor hodnot zobrazení: $D : G \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ grupy G na prostor $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ lineárních operátorů na Hilbertově prostoru \mathcal{H} , které zachovává operaci grupového násobení:

$$\forall x, y, z \in G : x \odot y = z \Rightarrow D(x) \circ D(y) = D(z) \quad (79)$$

Realizace operátorů maticemi: Akce jakéhokoliv lineárního operátoru $\hat{A} \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ na vektory $|j\rangle$ z dané normalizované báze \mathcal{H} může být reprezentována maticí O_{ij} definovanou:

$$O_{ji} \equiv \langle j | \hat{O} | i \rangle \Rightarrow \hat{O} | i \rangle = O_{ji} | j \rangle \quad (80)$$

V dalším, když budeme mluvit o reprezentaci grupy, budeme mít vždy na mysli tuto reprezentaci pomocí matic.

Direktní součet reprezentací: necht' D_i působí na odpovídajícím Hilbertově prostoru \mathcal{H}_i , $\dim \mathcal{H}_i = n_i$, $i = 1, 2$. Direktní součet $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ je Hilbertův prostor, $\dim \mathcal{H} = n_1 + n_2$, jehož bázi tvoří vektory:

$$\underbrace{|e_1^1\rangle, |e_2^1\rangle, \dots, |e_{n_1}^1\rangle}_{\text{báze } \mathcal{H}_1}, \underbrace{|e_1^2\rangle, |e_2^2\rangle, \dots, |e_{n_2}^2\rangle}_{\text{báze } \mathcal{H}_2}. \quad (81)$$

Odpovídající direktní součet reprezentací $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2$ je vytvořen z $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$ blokově diagonálních matic:

$$\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}. \quad (82)$$

Direktní součin reprezentací: Báze direktního součinu $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ je tvořena $n_1 \times n_2$ dvojicemi vektorů tvaru $|e_i^1\rangle, |e_j^2\rangle$, kde $|e_j^2\rangle \in \mathcal{H}_2$, $j = 1, 2$. Direktní suma reprezentací $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_2$ je tvořena maticemi, které působí na bázevé vektory způsobem:

$$\forall g \in G : \underbrace{D_1 \otimes D_2(g)}_{\in \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_2} |e_i^1\rangle, |e_j^2\rangle = \underbrace{(D_1(g) |e_i^1\rangle)}_{\in \mathbf{D}_1} \underbrace{(D_2(g) |e_j^2\rangle)}_{\in \mathbf{D}_2} \quad (83)$$

$(n_1 \times n_2) \times (n_1 \times n_2)$ dimenzionální matice odpovídající (83) mohou být zapsány jako:

$$[D_1 \otimes D_2(g)]_{ij, i'j'} = [D_1(g)]_{i i'} [D_2(g)]_{j j'}. \quad (84)$$

Reducibilita reprezentace: možnost převést všechny elementy dané reprezentace \mathbf{D} , působící na Hilbertově prostoru \mathcal{H} , pomocí unitárního operátoru S na blokově-diagonální tvar:

$$\exists S \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}} : \forall x \in G, S D(x) S^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(x) & 0 \\ 0 & D_2(x) \end{pmatrix}, \quad (85)$$

kde matice $D_1(x)$, $D_2(x)$ působí na Hilbertových prostorech \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 a $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Jestliže takový unitární operátor existuje nazýváme reprezentaci D reducibilní, v opačném případě irreducibilní. Fyzikální význam této skutečnosti je přibližně takový: *systemy popsané irreducibilními reprezentacemi nemohou být rozloženy na jednodušší nezávislé struktury.*

5.2.1 Lieovy grupy a algebry (v \mathbb{R}^n)

Homeomorfismem množin $A \subset \mathbb{R}^n$ a $B \subset \mathbb{R}^n$ nazveme každé zobrazení $f : A \rightarrow B$ splňující:

1. f je bijekce

2. f je spojité
3. f^{-1} je spojité

O množinách $A \subset \mathbb{R}^n$ a $B \subset \mathbb{R}^n$ řekneme, že jsou *homeomorfní*, jestliže mezi nimi existuje homeomorfismus.

Topologickou grupou v \mathbb{R}^n nazveme grupu, kde zobrazení $(a, b) \mapsto a \odot b$ a $a \mapsto a^{-1}$ jsou spojitá.

Topologická grupa v \mathbb{R}^n se nazývá *r-parametrická lokálně euklidovská grupa*, jestliže existuje $\varepsilon < 0$ a otevřená množina $V \subset \mathbb{R}^r$ tak, že $B(e, \varepsilon)$ ⁸ je homeomorfní s V .

Úmluva: Bud' (G, \odot) r-parametrická lokálně eukleidovská grupa v \mathbb{R}^n . Okolí $B(e, \varepsilon)$ jednotky homeomorfní s otevřenou množinou $V \subset \mathbb{R}^r$ budeme v dalším značit U . Příslušný homeomorfismus U a V budeme značit symbolem Ψ .

Tvrzení: Bud' (G, \odot) r-parametrická lokálně eukleidovská grupa v \mathbb{R}^n . Potom existují spojitá zobrazení $M : V \times V \rightarrow V$ a $I : V \rightarrow V$ tak, že platí:

1. Jsou-li $a, b \in U$ tak, že $a \odot b \in U$, potom $\Psi(a \odot b) = M(\Psi(a), \Psi(b))$.
2. Je-li $a \in U$ tak, že $a^{-1} \in U$, potom $\Psi(a^{-1}) = I(\Psi(a))$.

Lokálně eukleidovskou grupu nazýváme *Lieovou grupou*, jsou-li zobrazení M a I z předchozího tvrzení analytická na svých definičních oborech.

Tvrzení: Každý element Lieovy grupy lze zapsat ve tvaru:

$$\forall g \in G, g = g(\alpha_a) = \exp\{i\alpha_a X_a\}, \quad (86)$$

kde operátory X_a , zvané **generátory** Lieovy grupy G tvoří bázi vektorového prostoru X .

Strukturní konstanty: Fakt, že součin elementů Lieovy grupy G :

$$\exp\{i\lambda X_a\} \exp\{i\lambda X_b\} \exp\{-i\lambda X_a\} \exp\{-i\lambda X_b\} \quad (87)$$

je také element této grupy, musí ho jít vyjádřit jako $\exp\{i\beta_c X_c\}$. Užitím Taylorova rozvoje na obou stranách (87) dostaneme:

$$[X_a, X_b] \equiv X_a X_b - X_b X_a = i f_{abc} X_c, \quad \beta_c = -\lambda^2 f_{abc}, \quad (88)$$

kde $f_{abc} \in \mathbb{R}$ jsou **strukturní konstanty** Lieovy grupy G .

⁸ $B(e, \varepsilon) \equiv \{y \in \mathbb{R}^r \mid \|y - e\| < \varepsilon\}$

Tvrzení: *Strukturní konstanty f_{abc} splňují Jacobiho identitu:*

$$f_{ade}f_{bcd} + f_{cde}f_{abd} + f_{bde}f_{cad} = 0. \quad (89)$$

Algebra je vektorový prostor na kterém je navíc definována antisymetrická binární operace, která splňuje Jacobiho identitu (89).

V našem případě tvoří vektorový prostor lineární obal generátorů X_a a binární operace je definována jako komutátor matic, reprezentujících generátory.

Analogicky jako v případě grup můžeme pro algebry definovat reprezentaci jako obor hodnot zobrazení zachovávající operaci „komutátor“ a zavést pojem irreducibility reprezentace a další pojmy.

Generátory direktního součinu $\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_2$ n_1 dimenzionální reprezentace \mathbf{D}_1 a n_2 dimenzionální reprezentace \mathbf{D}_2 jsou $(n_1 \times n_2) \times (n_1 \times n_2)$ matice tvaru:

$$(X^{\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_2})_{ij, i' j'} = (X^{\mathbf{D}_1})_{ii'} \delta_{jj'} + (X^{\mathbf{D}_2})_{jj'} \delta_{ii'}. \quad (90)$$

Sdružená reprezentace: Na základě Jacobiho identity můžeme snadno ověřit, že následující $n \times n$ matice, kde n je dimenze vektorového prostoru X ,

$$(T_a)_{bc} \equiv -i f_{abc} \quad (91)$$

také splňují stejné komutační relace jako X_a samotné:

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (92)$$

a proto také tvoří reprezentaci grupy G . Tato reprezentace se nazývá **sdruženou** reprezentací.

Jako příklady uvedeme grupy použité v předcházejících kapitolách:

- $U(n) \equiv \{A \in \mathbb{C}^{n,n}; \det A \neq 0; (Ax, Ay) = (x, y) \forall x, y \in \mathbb{C}^n\}$
- Grupa $SU(2)$ (angl. special unitary) je tvořena 2×2 unitárním unimodulárními ($\det=1$) maticemi. Příslušná Lieova algebra $\mathfrak{su}(2)$ je tvořena hermitovskými 2×2 maticemi s nulovou stopou.
Jsou zde 3 nezávislé generátory $SU(2)$, jež tvoří bázi Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$ a které splňují známé komutační relace:

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k. \quad (93)$$

Generátory $SU(2)$ mohou být zapsány jako $J_i := \frac{1}{2} \sigma_i$, kde σ_i jsou Pauliho matice⁹.

⁹viz dodatek A

- $SU(3)$ je grupa 3×3 unitárních unimodulárních matic. Osm generátorů, tvořících bázi Lieovy algebry $\mathfrak{su}(3)$, T_a může být vybráno více způsoby. Nejjednodušší a nejpoužívanější je pomocí Gell-Mannových matic:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{94}$$

Potom těchto 8 generátorů zapíšeme jako:

$$T_a \equiv \frac{1}{2} \lambda_a. \tag{95}$$

5.3 C. Lagrangeova polní teorie

Uvažujme nějaké pole, které je popsáno potenciálem $\psi(t, \vec{x})$. Pro jednoduchost budeme předpokládat jedno-komponentní potenciál. Lagrangián tohoto pole, v analogii s klasickou fyzikou závisí na $\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \frac{\partial\psi}{\partial t}$:

$$L = \int \mathcal{L}(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \frac{\partial\psi}{\partial t}) d^3x, \quad (96)$$

kde \mathcal{L} je hustota Lagrangiánu. Akce systému (pole) je definována:

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int \mathcal{L}(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \frac{\partial\psi}{\partial t}) d^3x dt' \quad (97)$$

kde t_1 a t_2 jsou počáteční a koncový bod časového intervalu, ve kterém zkoumáme časový vývoj pole. Počáteční a koncový stav pole je fixován, takže během časového vývoje budeme zkoumat pouze takové variace, které:

$$\delta\psi(t_1, \vec{x}) = \delta\psi(t_2, \vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \quad (98)$$

Trajektorie systému odpovídá minimální akci, kdy je variace akce nulová.

$$\delta S = 0 \quad (99)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} \frac{\partial}{\partial t} (\delta\psi) \right] = 0, \quad (100)$$

kde jsme použili

$$\delta \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta\psi) \quad (101)$$

$$\delta \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\delta\psi) \quad (102)$$

Platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)} \delta\psi \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)} \right) \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta\psi) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} \delta\psi \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} \right) \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} \frac{\partial}{\partial t} (\delta\psi) \end{aligned} \quad (103)$$

Odtud

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta\psi + \\
&+ \sum_i \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)} \delta\psi \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)} \right) \delta\psi \right] + \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)} \delta\psi \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)} \right) \delta\psi \right] \tag{104}
\end{aligned}$$

O objemu V předpokládáme, že je dostatečně velký, aby na jeho povrchu všechna pole (všechny potenciály) vymizely \Rightarrow

$$\sum_i \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)} \delta\psi \right) = {}^{10} \sum_i \int_S \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)} d\mu_S = 0 \tag{105}$$

a dále vzhledem k (98) máme

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)} \delta\psi \right) = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)} \delta\psi \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{106}$$

Tedy (104) přejde na:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)} \right) \right] \delta\psi = 0 \tag{107}$$

Protože $\delta\psi$ je libovolné, z rovnice (107) plyne:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)} \right) = 0 \tag{108}$$

Rovnice (108) reprezentuje Eulerovu-Lagrangeovu rovnici pro dané pole ψ .

V mnoha případech, kdy je pole popsáno mnoha-komponentním potenciálem ψ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$. To je např. případ elektromagnetického pole. Potom:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t}) \tag{109}$$

a příslušné Eulerovy-Lagrangeovy rovnice nabývají tvaru:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} \right)} \right) = 0 \tag{110}$$

¹⁰užitím Gaussovy věty

Kvantování pole

Kvantování pole se rozumí procedura:

1. Pole ψ přejdou v operátory popisující kreaci a anihilaci příslušných částic.
2. V analogii s klasickou fyzikou zavedeme kanonicky sdružený impuls k poli ψ :

$$\pi(t, \vec{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)} \quad (111)$$

3. Postulujeme komutační relace:

$$[\psi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (112)$$

$$[\psi(t, \vec{x}), \psi(t, \vec{x}')] = 0 \quad (113)$$

Literatura

- [1] *Halzen F., Martin A.D.: QUARKS & LEPTONS: An Introductory Course in Modern Particle Physics.*
John Wiley & sons, USA 1984
- [2] *Timothy Paul Smith: HIDDEN WORLDS: Hunting for quarks in ordinary matter.*
Princeton University Press, USA 2003
- [3] *Ellis N., March-Russell J.: 1998 EUROPEAN SCHOOL OF HIGH ENERGY PHYSICS - PROCEEDINGS.*
CERN, Geneve 1999
- [4] *Fries D.C., Zeitnitz B.: QUARKS AND NUCLEAR FORCES.*
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1982
- [5] *Jiří Chýla: Quarks, partons and Quantum Chromodynamics.*
- [6] *www stránky PARTICLE DATA GROUP*
<http://pdg.lbl.gov/>