

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Jaderné inženýrství
Zaměření: Experimentální jaderná fyzika



**Spektra v příčné hybnosti a
korelace z modelu blast wave s
rezonancemi**
**Transverse momentum spectra
and correlations in the blast wave
model with resonances**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Václav Košar
Vedoucí práce: Dr. Boris Tomášik, Katedra fyziky
Rok: 2010

Před svázáním místo téhle stránky

vložíte zadání práce

 s podpisem děkana (bude to jediný oboustranný list ve Vaší práci) !!!!

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití toho školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb. , o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

.....
Václav Košář

Poděkování

Děkuji Dr. Borisovi Tomášikovi za skvělé vedení mé bakalářské práce, za jeho trpělivost a za všechny čas strávený vysvětlováním problematiky, čtením mé práce a upozorňováním na omyly a chyby, kterých jsem se dopustil.

Václav Košář

Název práce:

Spektra v příčné hybnosti a korelace z modelu blast wave s rezonancemi

Autor: Václav Košář

Obor: Jaderné inženýrství

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Dr. Boris Tomášik, Katedra fyziky

Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Konzultant: —

Abstrakt: Práce je rešerší základů teorie týkající se chování stavů hmoty s vysokou hustotou energie, která vzniká srážkou těžkých iontů při energiích řádově GeV na nulkeon. Práce obsahuje základní informace k extrémnímu stavu hmoty zvaném kvark-gluonové plazma, úvod do kvantové statistické mechaniky a úvod do teorie podélně boost-invariantně expandujícího fireballu hadronové hmoty.

Konkrétním předmětem zájmu je model Blastwave se zahrnutými rezonancemi, jehož základními předpoklady jsou podélně boost-invariantní expanze, příčná expanze a existence konkrétní nadplochy v časoprostoru, na které dochází ke skokovému uvolnění hadronové hmoty z fireballu.

V poslední části práce autor fituje dva nejdůležitější parametry modelu Blastwave užitím autorem úpraveného programu DRAGON [B. Tomasik, Comp.Phys.Comm. 180 (2009) 1642-1653] na spektra v příčné hybnosti získané z experimentu STAR.

Klíčová slova: ultrarelativistické srážky, podélně boost-invariantně expandující fireball, model Blastwave, spektra v příčné hybnosti, DRAGON

Title:

Transverse momentum spectra and correlations in the blast wave model with resonances

Author: Václav Kořář

Abstract: This thesis provides a review about the basics of theories of properties of matter with high energy density, which originates in heavy ion high energy collisions (GeV/nucleus). Basic information about the extreme state of matter called quark-gluon plasma, introduction to quantum statistical mechanics and introduction to theory of longitudinally boost-invariantly expanding fireball of hot matter are mentioned.

Particular intention is given to the blast-wave model with resonances, whose basic assumptions are longitudinally boost-invariant expansion, transverse expansion, and the existence of a particular hypersurface in space-time, on which hadronic matter abruptly decouples from fireball.

In the final part two most important parameters of the blast-wave model are extracted from fits to the transverse momentum spectra obtained from STAR experiment, using a modification of the program DRAGON [B. Tomasik, Comp.Phys.Comm. 180 (2009) 1642-1653].

Key words: ultrarelativistic nuclear collisions, longitudinally boost-invariant expanding fireball, Blastwave model, transverse momentum spectra, DRAGON

Obsah

Úvod	9
1 Současný pohled na strukturu hmoty	10
1.1 Elementární částice	10
1.2 Standardní model	10
1.3 Kvar-k-gluonové plasma	11
1.4 QGP a Velký třesk	12
2 Kvantová statistická mechanika	13
2.1 Kvantová statistická mechanika	13
2.2 Nejpravděpodobnější rozdělení a Grandkanonický soubor	13
2.2.1 Bosony a fermiony	15
2.2.2 Hustota stavů	16
2.2.3 Fermi a Bose plyny částic a antičástic jednoho typu	17
2.2.4 Fotonový plyn	18
2.2.5 Bag model	19
3 Podélně boost-invariantně expandující fireball	21
3.1 Poznámky	21
3.2 Souřadnice	21
3.2.1 Prostorčasové souřadnice	21
3.2.2 Souřadnice částice	22
3.3 Hydrodynamický popis relativistické srážky	23
3.3.1 Rozdělení částic	24
3.4 Bjorkenova boost invariantní expanze	24
3.5 Rozdělení v hybnostech při vymrznutí	24

3.6	Symetrizace produkční funkce, parametrizace	26
3.6.1	Nástin odvození vlivu symetrizace	26
3.6.2	Parametrizace	29
3.7	Model Blastwave	30
3.7.1	Oblasti homogenity	32
3.7.2	Sklon spektra příčné hybnosti, teplota vymrznutí	32
4	Simulace v programu DRAGON	34
4.1	Program DRAGON a jeho parametry	34
4.2	Úpravy programu	35
4.3	Výsledky výpočtů	36
4.3.1	Experimentální data, normalizace dat	36
4.3.2	Výpočet χ^2 pro fit parametrů T_{fo} a η_f	36
	Závěr	42
	Seznam použitých zdrojů	44
	Přílohy	45
A.1	Script pro MATLAB pro numerickou integraci vztahu pro spektrum přímo produkovaných částic	46
A.2	Srovnání spekter numericky počítaných pro přímo produkované částice, z experimentu a z DRAGON	47
A.3	Tabulky výsledků $\chi^2(E, \eta_f, T_{fo})$	49

Úvod

Jádro těžkého iontu se zhruba chová jako kapka kapaliny s přibližně homogenní hustotou, v klidové soustavě přibližně sféricky symetricky rozmístěnou kolem těžiště. Pozorujeme-li vysokoenergetické srážky (od 1 GeV na nukleon) dvou těžkých iontů, dochází vždy i při přesně centrální vstříčné srážce k podélné expanzi způsobené kvantovými jevy - jádra jsou částečně „průhledná“. V oblasti průniku drah v čase srážky vznikají díky silné interakci extrémní podmínky - jaderná kapalina je silně podélně stlačena. Dosáhne-li hustota energie potřebných hodnot, může dojít k tvorbě hypotetického kvark-gluonového plazmatu. Kvantové jevy způsobí přeměnu části energie této velmi husté kapky jaderné hmoty na vznik párů částice - antičástice a značný tlak způsobí jejich příčnou expanzi.

Vzniká tedy fireball mnoha částic částečně příčně a podstatně podélně expandující do prostoru. Jak fireball expanduje, klesá jeho hustota energie a to způsobuje dva podstatné zpětné přechody. Nejprve od kvark-gluonového plazmatu k hadronovému plynu. Tento přechod nazýváme hadronizace. Hadronový plyn je stále dostatečně hustý, vázán silnou interakcí, takže ho můžeme považovat za přibližně termalizovaný.

Následně dochází k přechodu od hustého hadronového plynu k volným hadronům. Tento přechod nazýváme vymrznutí. Jak fireball dále expanduje, hustota energie dále klesá a nestabilní částice se rozpadají. Detekujeme pak pouze stabilnější částice a z nich se pokoušíme rekonstruovat fyziku původní jaderné srážky – stavové rovnice na krátkou dobu vzniklých stavů hmoty (tj. povahu kolektivního chování husté jaderné hmoty), zákony elementárních interakcí při vysokých energiích, chování značně excitovaného vakua.

Otázkou je, jaký zvolit model pro popis vysokoenergetické srážky dvou těžkých iontů a jak zvolit jeho parametry. Jedním z mnoha modelů je model Blastwave, jehož základními předpoklady jsou podélně boost-invariantní expanze, příčná expanze a existence konkrétní nadplochy v časoprostoru na které dojde ke skokovému uvolnění hadronové hmoty z fireballu. Autor práce se pokouší najít nejvhodnější volbu dvou hlavních parametrů tohoto modelu pomocí programu DRAGON [9], který zahrnuje i vliv rezonancí, fitováním spekter v příčné hybnosti.

Kapitola 1

Současný pohled na strukturu hmoty

1.1 Elementární částice

Elementární stavební jednotkou hmoty je elementární částice, což je nedělitelný objekt s určitými fyzikálními vlastnostmi. Za určitých okolností vznikají po nějaký čas stabilní struktury, které můžeme rozdělit podle stupně elementarity na: látka, molekula, atom, obal a jádro.

Atom je tvořen obalem a jádrem. Obal atomu tvoří elektrony v uspořádání určeným elektromagnetickou interakcí s opačně nabitým jádrem. Jádro je tvořeno nukleony – protony a neutrony, jejichž konstituenty jsou trojice kvarků.

V posledním století se ukázalo, že příroda se neomezuje pouze na protony, neutrony a elektrony, ale je tvořena mnohem širší skupinou částic, které jsou však tvořeny poměrně malou skupinou kvarků a leptonů. Tato představa se nazývá standardní model, který spolu s kvantovou chromodynamikou, kvantovou elektrodynamikou, kde jsou interakce zprostředkovány výměnou intermediálních částic, představuje základ moderní částicové fyziky.

1.2 Standardní model

Elementární částice standardního modelu dělíme do tří skupin – na kvarky, leptony a intermediální bosony. Ke každé částici ještě přísluší antičástice, přičemž v některých případech je částice a antičástice nerozlišitelná. Kvarky a leptony dělíme na tři generace, přičemž první je stabilní a další dvě jsou nestabilními excitacemi rozpadajícími se slabou interakcí na elementární částice první generace.

Kvarky jsou nositeli barevného náboje silné interakce. Existují vždy ve vázaném stavu na jiné kvarky, tak aby „součet“ barev byl neutrální. Proto kvarky tvoří vždy hadron: buď baryon, ve kterém mají všechny tři kvarky jinou barvu a nebo mezon, ve kterém je kvark a antikvark, tj. barva a její antibarva. Teoreticky byli předpovězeni

i složitější struktury jako je pentakvark, který je složen ze čtyřkvarků a jednoho antikvarku.

Kvarky se nikdy nevyskytují individuálně, ale jsou vázány v hadronu společně s ostatními kvarky. Kdybychom se pokoušeli dva kvarky od sebe odtrhnout, rostla by lineárně s jejich vzdáleností jejich potenciální energie. Důležitou roli zde sehrávají vlastnosti gluonu – bosonu zprostředkujícího silnou interakci. Gluon je nehmotný a má náboj silné interakce, díky tomu snadno vzniká a interaguje i s jiným gluonem. Při odtahování kvarků nakonec vzroste energie vazby natolik, že postačí na vznik kvark-antikvarkového páru. Ten rekombinuje s původními odtahovanými kvarky a tudíž máme oba kvarky opět ve vázaném stavu.

Interakce mezi částicemi je zprostředkována intermediálními bosony. To znamená, že energie a hybnost jsou předávány po kvantech intermediálními bosony, které existují často velmi krátce, a tak díky principu neurčitosti má jejich hmotnost jistou neurčitost.

Three Generations of Matter (Fermions)				
	I	II	III	
mass→	2.4 MeV	1.27 GeV	171.2 GeV	0
charge→	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
spin→	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
name→	u up	c charm	t top	γ photon
Quarks	4.8 MeV	104 MeV	4.2 GeV	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	d down	s strange	b bottom	g gluon
Leptons	<2.2 eV	<0.17 MeV	<15.5 MeV	91.2 GeV
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	Z weak force
	0.511 MeV	105.7 MeV	1.777 GeV	80.4 GeV
	-1	-1	-1	± 1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	e electron	μ muon	τ tau	W[±] weak force
				Bosons (Forces)

Obrázek 1.1: Elementární částice Standardního modelu. [11]

1.3 Kvark-gluonové plazma

Kvark-gluonové plazma, zkráceně QGP, je stav hmoty předpovězený teorií kvantové chromodynamiky (QCD). Původní práce týkající se kvark-gluonového plazmatu je [14]. Jeli hmota – hadronový plyn stačen do objemu o dostatečné hustotě energie [1GeVfm^{-3}], tak se kvarky různých hadronů ocitnou dostatečně blízko sobe, přestanou být výlučně vázány ke své hadronové trojici resp. dvojici a mohou se volně pohybovat. Tedy můžeme-li říci, že se společně „sdílí“ navzájem čili přiřazení k jednotlivým hadronům ztrácí smysl, pak tento stav nazýváme kvark-gluonovým plazmatem.

Žádná teorie se však neobejde bez experimentálních faktů a proto potřebujeme zařízení na výrobu QGP. Očekáváme, že při dostatečně energetické srážce dvou iontů těžkého prvku, dosáhneme potřebné hustoty energie pro existenci QGP fáze na dobu řádově 10^{-23} s. Takovou srážku nazýváme *Malý třesk*. Z podstaty QGP je nemožné jeho přímé zkoumání, ale pozorováním vzniknuvších hadronů bychom se mohli o tomto stavu mnoho dozvědět. K tomu slouží urychlovače a detektory částic, které jsou v schopné přesáhnout hraniční energii potřebnou pro tvorbu QGP a lze v nich efektivně pozorovat vzniklé částice.

1.4 QGP a Velký třesk

V teorii velkého třesku uvažujeme rozpínání velkého množství hmoty ze stavu s velkou hustotou. Pokud je teorie v souladu se skutečností musela hmota projít stavem QGP do $10\mu s$ po začátku Velkého třesku. Podaří-li se nám tudíž dostatečně prozkoumat tento stav hmoty, získáme zároveň další poznatky o počátcích vesmíru. Problém je v některých rozdílech mezi *Velkým třeskem*, z něhož vznikl vesmír, a *Malým třeskem*, který můžeme vytvořit na urychlovači:

1. *Mnohem rychlejší hadronizace fireballu Malého třesku.*

Zatímco u Velkého třesku předpokládáme rozpínání QGP fireballu zpomalované gravitačním působením obrovského množství nahromaděné hmoty, tak u Malého třesku uvažujeme rozpínání do vakua. Můžeme odvodit charakteristické časy hadronizace QGP Velkého třesku $\tau_{bb} = 10\mu s$ a Malého třesku na $\tau_{mb} = 10^{-17}\mu s$.

2. *Nenulovost baryonového čísla v fireballu Malého třesku.*

V počátečním vesmíru bylo baryonové číslo prakticky nulové narozdíl od experimentu. Asymetrii mezi hmotou a antihmotou při srážce na urychlovači popisujeme čistým baryonovým číslem $B = N_B - N_{\bar{B}}$. V ideálním případě $B = 0$. Při srážce produkujeme páry částice-antičástice a tedy při zachování B roste počet detekovaných částic N , čili alespoň $B/N \rightarrow 0$. Problém asymetrie můžeme teoreticky překonat extrapolací baryonového chemického potenciálu. Navíc zvyšováním energie srážky zvyšujeme počet vzniklých částic.

3. *Mnohem vyšší hustota energie.*

Podle teorie Velkého třesku se vesmír vyvíjí z počáteční singularity charakterizované mimo jiné nekonečnou hustotou a teplotou. Při studiu na urychlovači můžeme dosáhnout jen konečných hodnot.

Kapitola 2

Kvantová statistická mechanika

2.1 Kvantová statistická mechanika

Matici hustoty definujeme jako samosdružený, pozitivní operátor s jednotkovou stopou.

$$\hat{\rho}^* = \hat{\rho} \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \langle \psi | \hat{\rho} \psi \rangle \geq 0 \quad \text{Tr } \hat{\rho} = 1$$

Matici hustoty můžeme definovat pomocí kladných čísel w_j a vektorů $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}$ následovně:

$$\hat{W} = \sum_j w_j \frac{|\psi_j\rangle \langle \psi_j|}{\langle \psi_j | \psi_j \rangle} \quad \hat{\rho} = \frac{\hat{W}}{\text{Tr } \hat{W}}. \quad (2.1)$$

Proto pomocí matice hustoty můžeme také počítat *střední hodnotu pozorovatelné* $\hat{O} = \hat{O}^*$:

$$\bar{O} = \sum_j w_j \frac{\langle \psi_j | \hat{O} \psi_j \rangle}{\langle \psi_j | \psi_j \rangle} = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{O}].$$

V práci budeme používat přirozené jednotky $\hbar = c = k_B = 1$.

2.2 Nejpravděpodobnější rozdělení a Grandkanonický soubor

Nechť máme kvantový systém, který popisujeme dvěma komutujícími operátory \hat{H}, \hat{B} tj. hamiltoniánem a baryonovým číslem. Protože budeme pracovat s obecnými stavy a ne jen s vlastními k operátoru baryonového čísla, budeme vlastně budovat grandkanonický statistický soubor, kde není baryonové číslo pevně fixováno.

Nechť dále má hamiltonián diskretní spektrum $\hat{H}\hat{P}_j = E_j\hat{P}_j$, kde \hat{P}_j je ortogonální projektor na příslušný vlastní podprostor. Definujme společnou množinu ortogonálních projektorů na vlastní podprostory $\{\hat{P}_l \mid \hat{H}\hat{P}_l = E_l\hat{P}_l \wedge \hat{B}\hat{P}_l = b_l\hat{P}_l\}$.

Mějme nyní statistický soubor stavu s různými hodnotami baryonového čísla a energie, který popíšeme pomocí matice hustoty:

$$\hat{\rho} = \sum_l w_l \frac{\hat{P}_l}{\text{Tr } \hat{P}_l},$$

kde předpokládáme, že $\dim \hat{P}_l = \text{Tr } \hat{P}_l < +\infty$.

Známe střední hodnoty energie \bar{E} a baryonového čísla \bar{b} :

$$\bar{E} = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{H}] = \sum_l w_l E_l \quad \wedge \quad \bar{b} = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{B}] = \sum_l w_l b_l.$$

Položme si nyní otázku jaká je nejpravděpodobnější matice hustoty, či ekvivalentně jaké je nejpravděpodobnější rozdělení nalezení různých hodnot energie a baryonového čísla. Zavedeme entropii:

$$S = -\text{Tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}] = -\sum_l w_l \ln w_l$$

a budeme jí maximalizovat vázaně na dané podmínky, pro \bar{E}, \bar{b} .

$$\Lambda(w_1, w_2, \dots) = -\sum_l w_l \ln(w_l) + \alpha \sum_l w_l - \beta \sum_l w_l E_l + \ln \lambda \sum_l w_l b_l, \quad (2.2)$$

kde $\beta, -\ln \lambda$ jsou Lagrangerovy multiplikátory. Někdy označujeme $e^{\beta\mu} = \lambda$ jako fugacita, kde μ je baryonový chemický potenciál.

Hledejme volbu w_j aby v ní měla funkce $\Lambda(w_1, w_2, \dots)$ maximum. Protože

$$\nabla^2 \Lambda(w_1, w_2, \dots) = -\sum_l \frac{1}{w_l} < 0 \text{ na } w_l \in (0, 1)$$

leží maximum ve stacionárním bodě funkce – tj. v bodě, kde je w_l splňují:

$$\forall l \quad \partial_{w_l} \Lambda = 0.$$

Z toho dostáváme:

$$w_l = Z_G^{-1} e^{-\beta(E_l - \mu b_l)} = \langle l | Z_G^{-1} e^{-\beta(\hat{E} - \mu \hat{B})} | l \rangle,$$

kde $Z_G = e^{\alpha - 1} = \sum_l e^{-\beta(E_l - \mu b_l)}$ se nazývá partiční funkce.

A tedy dostáváme:

$$\bar{E} = -\partial_\beta \ln Z_G \quad \bar{B} = -\frac{1}{\beta} \partial_\mu \ln Z_G. \quad (2.3)$$

Pro matici hustoty v tomto stavu máme:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{B})}}{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{B})}}.$$

Pro partiční funkci máme:

$$Z_G = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{B})} = \sum_n \langle n | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{B})} | n \rangle. \quad (2.4)$$

Díky tomu, že je Tr je reprezentančně invariantní, můžeme užít libovolnou orto-normální bázi. To nám dovoluje užívat bázi obsazovacích čísel pro neinteragující částice. Interakce se pak někdy zavádí přiblížením pomocí poruchového rozvoje.

2.2.1 Bosony a fermiony

Mějme systém nerozlišitelných a neinteragujících částic popsany dvěma komutujícími operátory hamiltonianem \hat{H} a baryonovým číslem \hat{B} . Nechť jednočásticový hamiltonian $\hat{H}_{(1)}$ nabývá jen diskrétních hodnot $\hat{H}_{(1)}|j\rangle = \epsilon_j|j\rangle$, kde $|j\rangle$ je vlastní vektor. Na Fockově prostoru zavedeme symetrizovanou nebo antisymetrizovanou bázi obsazovacích čísel:

$$\begin{aligned} & \{|(S/A), n_1^{(b_1)}, n_2^{(b_2)}, n_3^{(b_3)} \dots \rangle, \\ & \text{kde } n_i^{(b_i)} \text{ jsou obsazovací čísla jednočásticových stavů } |i\rangle, \\ & \text{pro které } \hat{H}_{(1)}|i\rangle = \epsilon_j|i\rangle \wedge \hat{B}|i\rangle = b_i|i\rangle\}. \end{aligned}$$

Pro celkový hamiltonián(Fockův prostor) a baryonové číslo dostáváme:

$$\begin{aligned} \hat{H}|(S/A), n_1^{(b_1)}, n_2^{(b_2)}, n_3^{(b_3)} \dots \rangle &= \sum_i n_i^{(b_i)} \epsilon_i |(S/A), n_1^{(b_1)}, n_2^{(b_2)}, n_3^{(b_3)} \dots \rangle, \\ \hat{B}|(S/A), n_1^{(b_1)}, n_2^{(b_2)}, n_3^{(b_3)} \dots \rangle &= \sum_i n_i^{(b_i)} b_i |(S/A), n_1^{(b_1)}, n_2^{(b_2)}, n_3^{(b_3)} \dots \rangle. \end{aligned}$$

Pro konstrukci grandkanonického souboru užijeme vzorec (2.4), který má v naší zvolené bázi tvar:

$$Z_G = \sum_n e^{-\sum_{i=1}^{\infty} n_i \beta(\epsilon_i - \mu b_i)} = \sum_n \prod_i e^{-n_i \beta(\epsilon_i - \mu b_i)}.$$

Protože všechny kombinace obsazovacích čísel zůstanou (poněkud formálně) obsaženy, můžeme zaměnit pořadí sumy a produktu. Sčítáme přes všechny stavy s volným N celkovým počtem částic.

$$Z_G = \begin{cases} \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-n_i \beta(\epsilon_i - \mu b_i)} & \text{pro bosony.} \\ \prod_i \sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i \beta(\epsilon_i - \mu b_i)} & \text{pro fermiony.} \end{cases}$$

Sečteme sumy (pro bosony za podmínky $e^{-n_i \beta(\epsilon_i - \mu b_i)} < 1$)

$$\ln Z_{F^+, B^-}^{(G)} = \pm \sum_i \ln(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_i - \mu b_i)}), \quad (2.5)$$

kde suma probíhá přes všechny jednočásticové stavy, horní znaménko platí pro fermiony a dolní pro bosony.

Pro střední hodnotu baryonového čísla z (2.3) máme:

$$\bar{B} = -\frac{1}{\beta} \partial_\mu \ln Z_{F^+, B^-}^{(G)} = \sum_i \frac{b_i}{1 \mp e^{\beta(\epsilon_i - \mu b_i)}}. \quad (2.6)$$

Odsud máme také Bose-Einsteinovo a Fermi-Diracovo rozdělení $\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu b_i)} \mp 1}$. Rozdělíme-li sumu v (2.5) na stavy s $b_i > 0$ (částice) a stavy s $b_i < 0$ (antičástice) a předpokládáme-li, že jsou možné stavy pro částice a antičástice stejné, dostáváme:

$$\ln Z_{F^+, B^-}^{(G)} = \pm \sum_i \left[\ln(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_i - \mu b_i)}) + \ln(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_i + \mu b_i)}) \right], \quad (2.7)$$

kde suma \sum_i bude od teď značit sčítání přes všechny stavy s $b_i > 0$. Pomocí $\lambda^{b_i} = e^{\beta \mu b_i} = e^{\frac{\mu}{T} b_i}$ můžeme předcházející vztah upravit na:

$$\ln Z_{F^+, B^-}^{(G)} = \pm \sum_i \left[\ln(1 \pm \lambda^{b_i} e^{-\beta \epsilon_i}) + \ln(1 \pm \lambda^{-b_i} e^{-\beta \epsilon_i}) \right]. \quad (2.8)$$

Nahrazením baryonového čísla leptonovým, bychom mohli stejným postupem odvodit vztahy pro leptony. Povolením pouze stavů $b_i = \pm 1$ dostaneme systém částic a antičástic jednoho typu.

2.2.2 Hustota stavů

Uvažujeme kvantově mechanickou úlohu s částicí v nekonečně hluboké potenciálové jámě – krabici $< 0, L > \times < 0, L > \times < 0, L >$. Zavedeme periodické okrajové podmínky (částice na kružnici), které umožňují transparentní řešení a v pozdější limitě $V \rightarrow \infty$ nebudou konkrétní okrajové podmínky podstatné.

$$\psi(x_i = 0) = \psi(x_i = L)$$

Získáme periodická řešení tvaru podobného jako u de Broglie vlny, avšak hybnost máme nyní kvantovanu. „Jemnost“ kvantování udává právě velikost krabice. Máme tedy:

$$\psi(x) = e^{i\vec{p}\vec{x}}$$

$$\vec{p} = \frac{2\pi}{L}(k_1, k_2, k_3) \quad \text{kde } k_i \in \mathbb{Z}.$$

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné, ϵ_n jsou reálná čísla. Mějme sumu

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\epsilon_n) = \int_0^{\infty} d\mu_D(\epsilon) f(\epsilon),$$

kde v integrálu generujeme míru následovně:

$$d\mu_D(\epsilon) = d\left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta(\epsilon - \epsilon_n)\right).$$

Míra tedy určuje „kolik přibývá“ členů v daném bodě ϵ . Existuje-li funkce g prostá, se spojitou nenulovou první derivací g' na $< 0, +\infty >$ taková, že vhodně aproximuje trend ϵ_n . Tedy například platí:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad |g(n) - \epsilon_n| < \delta_1 \quad \wedge \quad \forall x \in \langle n-1, n \rangle: |g'(x) - (g(n) - g(n-1))| < \delta_2,$$

kde $\delta_{1,2} > 0$ jsou dostatečně malá čísla. Funkci můžeme na $< 0, +\infty >$ invertovat a míru v předchozím integrálu aproximovat:

$$d\mu_D(\epsilon) \approx d(g^{-1}(\epsilon))$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\epsilon_n) \approx \int_0^{\infty} d(g^{-1}(\epsilon)) f(\epsilon) = \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{dg^{-1}(\epsilon)}{d\epsilon} f(\epsilon).$$

Předcházející postup snadno zobecníme na následující vícerozměrnou variantu:

$$\sum_{k_1, k_2, k_3 = -\infty}^{+\infty} f(\epsilon(\vec{p}(k_1, k_2, k_3))) \approx \int_{\mathbb{R}^3} dk_1 dk_2 dk_3 f(\epsilon(\vec{p}(k_1, k_2, k_3))) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p |J| f(\epsilon(\vec{p})),$$

kde J vhodný jakobián. V případě částice v krabici $|J| = V/(2\pi)^3$. Pro usnadnění práce pracujeme místo sumy s integrálem, k čemuž nás motivuje také skutečnost, že v limitě $L \rightarrow \infty$ je spektrum operátoru impulsu spojitě. Sumu z výše načrtnutého postupu nahradíme integrálem následovně:

$$\sum_i [\dots] = g \int \frac{V d^3p}{(2\pi)^3} [\dots], \quad (2.9)$$

kde navíc obecně násobíme degeneračním faktorem g , který značí další stupně volnosti rozšiřující fázový prostor do dalších dimezí. To jsme odvodili pro periodické okrajové podmínky nebo libovolně veliký objem.

2.2.3 Fermi a Bose plyny částic a antičástic jednoho typu

Povolením stavů s baryonovým číslem pouze $b_i = \pm 1$ v (2.8) odvodí vztah pro $\ln Z_{F^+, B^-}^{(G)}$ pro plyn částic a antičástic jednoho typu. Užijeme-li navíc (2.9) dostaneme:

$$\ln Z_{F/B}(V, \beta, \lambda) = \pm gV \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\ln(1 \pm \lambda e^{-\beta\sqrt{p^2+m^2}}) + \ln(1 \pm \lambda^{-1} e^{-\beta\sqrt{p^2+m^2}}) \right], \quad (2.10)$$

kde horní znaménko platí pro fermiony, dolní pro bosony a část u λ^{-1} odpovídá antičásticím.

Užitím vztahu pro grandkanonický potenciál:

$$\Omega(T, V, \mu) = -PV = -\beta^{-1} \ln Z_G,$$

kde P značí tlak, získáváme:

$$P(\beta, \lambda) = \mp g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\ln(1 \pm \lambda e^{-\beta\sqrt{p^2+m^2}}) + \ln(1 \pm \lambda^{-1} e^{-\beta\sqrt{p^2+m^2}})], \quad (2.11)$$

kde g je degenerační faktor viz. závěr podkapitoly 2.9 a kde horní znaménko platí pro fermiony, dolní pro bosony a část u λ^{-1} odpovídá antičásticím.

2.2.4 Fotonový plyn

Pro fotonový plyn můžeme z (2.11) získat jednoduchou stavovou rovnici, která koresponduje s teorií záření černého tělesa. Pro fotonový plyn platí: $m = 0$, $\epsilon_i = p$, v integrálu vynecháme část násobenou λ^{-1} příslušející antičásticím a dosadíme $\lambda^{b_i} = 1$. Poslední dva předpoklady zdůvodníme tím, že foton a antifoton jsou nerozlišitelné částice. Proto přidání fotonu můžeme zároveň interpretovat jako přidání antifotonu, tudíž chemický potenciál můžeme považovat za nulový. Část za antičásticové stavy vymizí rovněž díky nerozlišitelnosti. Proto dosazením výše zmíněných předpokladů do (2.11), přechodem ke sférickým souřadnicím, zavedením substituce $x = p/T$ získáme stavovou rovnici fotonového plynu:

$$P = -\frac{4\pi g T^4}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dx x^2 \ln(1 - e^{-x}).$$

Protože je integrál roven $-\pi^4/45$ získáváme:

$$P = g \frac{\pi^2}{90} T^4, \quad (2.12)$$

kde pro fotony $g = 2$ (polarizace). Díky vztahu vyplývajícího z definic:

$$\bar{E}(T) = -\partial_\beta \ln Z_G = -\partial_\beta - \beta PV = 3PV$$

Získáváme tedy vztah pro tlak záření (ultrarelativistická limita pro libolnou částici tj. pro $p \gg m$):

$$P = \epsilon(T)/3,$$

kde $\epsilon(T)$ je hustota energie elektromagnetického pole. Odsud snadno určíme známou Stefan-Boltzmannovu konstantu.

2.2.5 Bag model

Původní práci k tomuto modelu je [12]. Bag model je primitivní model procesu hadronizace QGP. Protože pracujeme s vysokými energiemi, můžeme v nultém přiblížení zanedbat hmoty všech částic QGP a HG (Hadronový plyn) vůči jejich hybnosti. Dále za degenerační faktor dosadíme příslušnou hodnotu, která nám multiplikuje dimenzi fázového prostoru. Do úvahy vezmeme, že fázový prostor fermionů je díky Pauliho vylučovacího principu o něco menší než bosonů. Přesněji 7/8 krát menší. To je dokázáno v [5] odkud je tento příklad přejat.

$$g_{QGP} = g_G + \frac{7}{8} \times 2(\text{antičástice}) \times g_q + g_{EW} \approx 56,5,$$

kde pro gluny, kvarky:

$$g_G = 2(\text{spin}) \times (N_c^2 - 1)(\text{barva}) = 16,$$

$$g_q = 2(\text{spin}) \times N_c(\text{barva}) \times n_f \approx 15,$$

$$g_{EW} = 2(\gamma) + \frac{7}{8} \times 2(\text{antičástice}) \times (2(\text{spin}) \times 2(e + \mu) + 3(\nu_{eL} \nu_{\mu L} \nu_{\tau L})) = 14,25.$$

Dosazujeme: $N_c = 3$ (počet barev), $n_f \approx 2,5$ (efektivní počet vůní). Pro ν započítáváme jen levotočivá neutrina a pravotočivá antineutrina a nepředpokládáme tvorbu taonu.

Hadronový plyn v nultém přiblížení odhadneme pionovým plynem a přidáme opět elektroslabé částice:

$$g_{HG} = 3(\pi^+ \pi^- \pi^0) + g_{EW} \approx 17,25.$$

Při hadronizaci jsou oba tlaky HG i QGP právě stejné, proto:

$$P_H = g_{QGP} \frac{\pi^2}{90} T_H^4 - \mathfrak{B} = g_{HG} \frac{\pi^2}{90} T_H^4. \quad (2.13)$$

Od tlaku pro fotonový plyn modelující QGP odečítáme takzvanou bag konstantu $\mathfrak{B}^{\frac{1}{4}} \approx 190\text{MeV}$ získanou fitem experimentálních dat, Tato konstanta zároveň reprezentuje latentní teplo QGP. Kdybychom tuto konstantu nezavedli, pak by vždy platilo $P_{QGP} > P_{HG}$ a hmota by byla neustále ve stavu kvark-gluonového plazmatu. Konstantu \mathfrak{B} si můžeme také představit jako tlak, který tlačí fyzikální vákuum na proton a „drží ho pohromadě“. Odhadneme tak teplotu hadronizace:

$$T_H = \mathfrak{B}^{\frac{1}{4}} \left(\frac{90}{\pi^2 \Delta g} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 130\text{MeV}.$$

Další možností určení T_H je užitím vzorce pro tlak záření (ultra-relativistická limita) a hustotu energie:

$$P = \frac{\epsilon}{3}.$$

Protože proton je nejobyčejnější kvarkový systém, můžeme hustotu energie při hadronizaci odhadnout jako:

$$\epsilon_H = \frac{m_p}{(1\text{fm})^3} = 1\text{GeVfm}^{-3}.$$

Pak dosazením za hustotu energie do Boltzmanova vztahu získáme tlak pomocí kterého můžeme provést odhad teploty hadronizace:

$$T_H = 160\text{MeV}.$$

Kapitola 3

Podélně boost-invariantně expandující fireball

3.1 Poznámky

1. V textu užívám vzorce:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \text{ kde suma běží přes body, kde je } f(x) \text{ nulová} \quad (3.1)$$

a značení:

$$\delta^+(f(x)) = \theta(x)\delta(f(x)) \quad (3.2)$$

2. Pro čtyřvektor často značím $a^\mu = a$ bez zdůraznění, že jde o čtyřvektor. Dále užívám značení $a_\mu a^\mu = a^2$. Trojrozměrné vektory značím důsledně \vec{a} .
3. Často užitým vzorečkem pro čtyřhybnost částice je:

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (3.3)$$

proto pro následovně definované Dp platí

$$Dp = 2\delta^+(p_\mu p^\mu - m^2)d^4p = \frac{d^3p}{E} \quad (3.4)$$

3.2 Souřadnice

3.2.1 Prostorčasové souřadnice

Pro popis podélně boost invariantní expanze jsou vhodné následující souřadnice:

Definujme nadplochu na které očekáváme vymrznutí. Zatím ji ponecháme jako obecnou nadplochu ve čtyřrozměrném prostoru. V modelu Blastwave pak zavedeme konkrétnější definici.

Nadplocha vymrznutí:

$$\sigma = \{x^\mu \mid \text{nadplocha ve 4 rozměrném prostoru}\} \quad (3.5)$$

Dále zavádíme veličiny, které budeme užívat pro popis jednotlivých částí expandujícího fireballu v laboratorní soustavě.

Prostorový čtyřvektor části expadujícího fireballu v laboratorní soustavě:

$$x^\mu = (t, x, y, z) = (t, \vec{x}) \quad (3.6)$$

Čtyřvektor rychlosti části expadujícího fireballu s polohovým čtyřvektorem x^μ :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{(V_0, \vec{V})}{\sqrt{1 - V_0^2 - \vec{V}^2}}. \quad (3.7)$$

3.2.2 Souřadnice částice

Pro popis částice v laboratorní soustavě definujeme následující značení:

Čtyřhybnost částice:

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) \quad (3.8)$$

Podélná rapidita částice:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{p^0 + p_z}{p^0 - p_z} \quad (3.9)$$

Rychlost částice v laboratorní soustavě

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{p^0} \quad (3.10)$$

Vektor příčné hybnosti částice:

$$\vec{p}_t = (p_x, p_y) = p_t (\cos \phi, \sin \phi) \quad (3.11)$$

Příčná hmotnost částice:

$$m_t = \sqrt{m^2 + p_t^2} \quad (3.12)$$

Energie částice v laboratorní soustavě:

$$E = p^0 = \sqrt{m_t^2 + p_z^2} = \sqrt{m^2 + p_t^2 + p_z^2} \quad (3.13)$$

Energie částice v lokální soustavě x^μ :

$$E^* = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} (p^0 - \vec{V} \vec{p}) \quad (3.14)$$

Snadno ukážeme, že platí:

$$p^\mu = (m_t \cosh y, p_t \cos \phi, p_t \sin \phi, m_t \sinh y), \quad (3.15)$$

$$E^* = p_\mu u^\mu. \quad (3.16)$$

3.3 Hydrodynamický popis relativistické srážky

Při hydrodynamickém popisu relativistické srážky zavádíme následující značení:

Hustota počtu částic:

$$n(\vec{x}, t)d^3x = n(x^\mu)d^3x = \text{počet částic v objemu } d^3x \text{ v čase } t. \quad (3.17)$$

Celkový počet částic v čase t:

$$N^{(t=kost)} = \int d^3x n(x^\mu) \quad (3.18)$$

Obecně se nemusíme omezovat na nadrovinu v časoprostoru definovanou nějakou hodnotou času, ale můžeme určovat počet světočar procházejících obecnou nadplochou v časoprostoru. Výpočet je nutné provést složitějším způsobem. To právě užíváme v některých modelech relativistických srážek, kde definujeme vymrzávací nadplochu, přes kterou poté integrujeme. K tomuto tématu viz. dále v podkapitole 3.5.

Proud částic:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \vec{j}(x^\mu) \quad (3.19)$$

je vektor takový, že pro libovolný infinitesimální element plochy $d\vec{S}$ v bodě \vec{x} udává skalární součin $d\vec{x}\vec{j}(\vec{x}, t)$ počet částic procházející daným elementem za čas dt .

Čtyřproud:

$$j^\mu = (n(\vec{x}, t), \vec{j}(\vec{x}, t)) \quad (3.20)$$

Časoprostorová distribuce částic:

$$f(x^\mu, p^\mu)d^3x d^3p = \text{počet částic ve fázovém objemu } d^3x d^3p \text{ v bodě } (x^\mu, p^\mu) \quad (3.21)$$

odsud plyne:

$$n(x^\mu) = \int d^3p f(x^\mu, p^\mu), \quad (3.22)$$

$$\vec{j}(x^\mu) = \int d^3p \vec{v} f(x^\mu, p^\mu). \quad (3.23)$$

Protože se částice nacházejí na hmotové slupce – tj. $p^0(\vec{p}) = \sqrt{p^2 + m^2} = E$, plyne odsud užitím (3.4):

$$j^\nu(x^\mu) = \int_{p^0=E} d^3p \frac{p^\nu}{p^0} f(x^\mu, p^\mu) = \int Dp p^\nu f(x^\mu, p^\mu). \quad (3.24)$$

Odsud dále pro $p^0 = E$:

$$E \frac{d^3 j^\nu}{d^3 p}(x^\mu, \vec{p}) = p^\nu f(x^\mu, p^\mu), \quad (3.25)$$

$$E \frac{d^3 N^{(t=kost)}}{d^3 p}(t, \vec{p}) = \int d^3x E f(x^\mu, p^\mu). \quad (3.26)$$

Předchozí vzorec platí však pouze pro integraci přes časoprostorovou rovinu odpovídající konstantnímu času. Obecněji se počítají světočary a postup je složitější. Více v kapitole 3.5.

3.3.1 Rozdělení částic

Pro popis rozdělení částic v časoprostoru užíváme lorentzovsky invariantní rozdělení, které je zobecněním nerelativistického rozdělení, které je invariantní vůči galieovské transformaci. To vyhovuje požadavku, že příslušné transformované hybnosti spektra odpovídá ve všech soustavách číselný invariant představující četnost výskytu krát energie částice v dané soustavě tj. $\sqrt{p^2 + m^2}$. Invarianci dokážeme snadno transformací diferenciálů složek čtyřhybnosti p a užitím zmíněného vzorce pro energii. Celkový počet částic na zvolené časoprostorové nadploše značíme N .

Lorentzovsky invariantní distribuce:

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = p^0 \frac{d^3 N}{d^3 p} = \sqrt{p^2 + m^2} \frac{d^3 N}{d^3 p}(p) \quad (3.27)$$

Produkční funkce:

$$S(x, p) \quad \text{taková že} \quad E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \int d^4 x S(x, p) \quad (3.28)$$

Lokální Boltzmanovo rozdělení:

$$f(x^\mu, \vec{p}) = \frac{d^3 j^0}{d^3 p} \propto n(x^\mu) \exp(-E^*/T), \quad (3.29)$$

kde za E^* dosazujeme z (3.14).

3.4 Bjorkenova boost invariantní expanze

Při velmi vysokých energiích můžeme užít přiblížení fenomenologického modelu boost invariantní expanze, při které rozdělení produkovaných částic s podélnou rapiditou je v oblasti mezi rapiditami původních částic y_0 přibližně uniformní. [2] tj:

$$\frac{dN_B}{dy} = \begin{cases} N^{-1} & y \in \langle -y_0, y_0 \rangle \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

V důsledku toho se v limitě $y_0 \rightarrow \infty$ expanze (dokonce i příčná) jeví v stejné v každé soustavě z množiny soustav navzájem podélně boostovaných tj. v každé takové soustavě má rozdělení tvar daný výše uvedeným vztahem. Jediným problémem, se kterým se musíme vypořádat, je konečnost y_0 . Můžeme předpokládat, že pro „malé“ boosty v oblasti střední rapidity $y = 0$ přibližně dosahujeme uniformity.

3.5 Rozdělení v hybnostech při vymrznutí

Původní práci týkající se této podkapitoly je [1]. Předpokládáme, že k vymrznutí dojde v každé soustavě ve stejném *podélném vlastním čase* tj. při $\tau = \tau_{fo}$. Tedy zabýváme příspěvek do *vlastního času* způsobený příčnou expanzí, což je v souladu s přiblížením *podélně boost-invariantně expandujícího fireballu*.

Intuitivně bychom předpokládali, že pro získání rozdělení částic postačí integrovat invariantní rozdělení přes *nadplochu vymrznutí* (3.43):

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \int_{\sigma} E^* f(x^\nu, p^\nu) = \int_{\sigma} u_\mu p^\mu f(x^\nu, p^\nu),$$

ale tento předpoklad je mylný. Taková definice by narušovala zákon zachování energie. To je možné dokázat po dosazení integrací $E dN$. [1].

Definujme element nadplochy jako vektor, který má normu rovnou povrchu nadplošky a je k ní čtyřkolmý:

$$d\sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\nu_1\nu_2\nu_3} \partial_\alpha x^{\nu_1} \partial_\beta x^{\nu_2} \partial_\gamma x^{\nu_3} d\alpha d\beta d\gamma,$$

kde α, β, γ jsou souřadnice, kterými parametrizujeme nadplochu. Vezměme nyní počet světočar, které protínají hyperplochu σ v bodě x^μ a mají hybnost blízko p^μ :

$$dN(\sigma, x^\mu, p^\mu) = f(x^\mu, p^\mu) d\sigma_\mu(x^\mu) p^\mu Dp = d\sigma_\mu(x^\mu) \frac{d^3 j^\mu}{d^3 p}(x^\nu, \vec{p}) d^3 p, \quad (3.30)$$

kde Dp pochází z (3.4) a druhá rovnost vyplývá z (3.25). Pro ověření, že daný vzorec splňuje očekávání diskutujme dvě volby hyperplochy:

$$d\sigma_\mu^{(z=kost)} = (0, 0, 0, -dxdydt), \quad d\sigma_\mu^{(t=kost)} = (dxdydz, 0, 0, 0).$$

$$dN = \begin{cases} dxdydz \frac{d^3 n}{d^3 p}(x^\nu, \vec{p}) d^3 p = & \text{počet částic ve fazovém objemu } d^3 x d^3 p \\ dxdydt \frac{d^3 j_3}{d^3 p}(x^\nu, \vec{p}) d^3 p = & \text{počet částic, co vyproudí plochou } dxdy \\ & \text{za čas } dt \text{ a } p' \in (p \pm dp). \end{cases}$$

Odsud již snadno přejdeme k obecnému tvaru užitím rozkladu $d\sigma_\mu = c_\nu d\sigma_\mu^{(x^\nu=kost)}$ kde $c_\nu c^\nu = 1$ určují jednotkovou normálu k hyperploše v bodě \tilde{x}^μ . Ověříme:

$$d\sigma_\mu p^\mu = [c_\mu p^\mu] d\sigma = \sum_\nu c^\nu [n_\mu^{(\nu)} p^\mu] d\sigma = \sum_\nu c_\nu [d\sigma_\mu^{(x^\nu=kost)} p^\mu],$$

kde $n^{(\nu)}$ jsou jednotkové vektory ve směru os ν . Tím jsme ověřili, že (3.30) je počet světočar, které protínají hyperplochu σ v bodě x^μ a mají hybnost blízko p^μ .

Upravme nyní vzorec pro dN do tvaru invariantní distribuce užitím vzorce pro Dp (3.4) a pro druhou rovnost (3.25) a dostáváme:

$$E \frac{d^3 N(\sigma)}{d^3 p} = \int_{\sigma} d\sigma_\mu p^\mu f(x^\nu, p^\nu) = \int_{\sigma} d\sigma_\mu \frac{d^3 j^\mu}{d^3 p}(x^\nu, \vec{p}). \quad (3.31)$$

Pro produkční funkci (3.28) dostáváme:

$$S(x, p) d^4 x = d\sigma_\mu(x) p^\mu f(x, p). \quad (3.32)$$

3.6 Symetrizace produkční funkce, parametrizace

Projdeme si nyní teorii vlivu symetrizace pro nerozlišitelné bosony na jejich produkční funkce, ale data vztahujícím k této partii nebudeme dále zkoumat.

Díky vlastnostem nerozlišitelných částic je amplituda A_N produkce částic symetrická resp. antisymetrická v hybnostech produkovaných částic. Mějme amplitudu produkce N -částicového systému s hybnostmi p_i^μ vznikající v příslušných bodech x_i^μ , kde $i \in \{1, 2 \dots N\}$. Pak díky symetrii resp. antisymetrii bude pravděpodobnost vzniku systému částic s hybnostmi p_i^μ v oblasti G následující:

$$A_N(p_i^\mu, G) = \int_G d^{3N}x \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi \tilde{A} \left((p_{\pi(1)}^\mu, x_1^\mu), (p_{\pi(2)}^\mu, x_2^\mu) \cdots (p_{\pi(N)}^\mu, x_N^\mu) \right),$$

$$P_N(p_i^\mu, G) = \left| A_N(p_i^\mu, G) \right|^2,$$

kde pro bosony pokládáme $\text{sgn } \pi = 1$ a pro ferminony značí $\text{sgn } \pi$ znaménko permutace.

Vliv symetrizace se ukazuje být významný pro malou oblast G a málo rozdílné hybnosti a to v řádech $\Delta p \Delta x \sim \hbar$. Tento vliv můžeme zkoumat pro dvoučásticovou variantu zavedením korelační funkce:

$$c(p_1^\mu, p_2^\mu) = \frac{P_2(p_1^\mu, p_2^\mu)}{P_1(p_1^\mu)P_1(p_2^\mu)} = \frac{E_1 E_2 \frac{d^6 N}{d^3 p_1 d^3 p_2}}{E_1 \frac{d^3 N}{d^3 p} E_2 \frac{d^3 N}{d^3 p}}. \quad (3.33)$$

Vyjádříme-li jednočásticové spektrum pomocí produkční funkce (3.32) lze odvodit [6, 7]

$$c(p_1^\mu, p_2^\mu) = 1 + \frac{|\int d^4x S(x, K) \exp(iqx)|^2}{E_1 \frac{d^3 N}{d^3 p} E_2 \frac{d^3 N}{d^3 p}} = 1 + \frac{|\int d^4x S(x, K) \exp(iqx)|^2}{\int d^4x S(x, p_1) \int d^4y S(y, p_2)}, \quad (3.34)$$

kde $q = p_1 - p_2$ a $K = \frac{p_1 + p_2}{2}$. Užijeme tzv. přiblížení hladkosti: $p_1 \approx p_2 \approx K$ a přejdeme k novým souřadnicím:

$$c(p_1, p_2) - 1 = C(q, K) - 1 \approx \frac{|\int d^4x S(x, K) \exp(iqx)|^2}{(\int d^4x S(x, K))^2},$$

kde $c(p_1, p_2) = C(p_1 - p_2, \frac{p_1 + p_2}{2})$.

3.6.1 Nástin odvození vlivu symetrizace

Inspirací mi byla část práce [8]. Odvození vlivu symetrizace si můžeme naznačit následovně:

Amplitudu produkce si můžeme představit jako prostou vlnovou funkci částice a vznik částice jako provedení měření na této funkci.

Jednočásticová produkční funkce

Mějme bodový zdroj, v němž může vzniknout částice ve vlastním stavu operátoru impulsu s rozdělením $r(p)$ s počáteční fází $\phi(x_1)$ v bodě x_1 nezávislou od jejího impulsu. Počáteční fáze v určitém bodě je podstatným prvkem tohoto modelu, protože zajišťuje jakousi minimální lokalizaci vzniku jinak delokalizované de Broglieho vlny, to později uvidíme – při středování bude mít podstatný následek. V x -representaci máme:

$$\langle x|\psi \rangle = \int dp r(p) e^{ip(x-x_1)} e^{i\phi(x_1)}.$$

To můžeme interpretovat jako amplitudu produkce částice vznikající v bodě x_1 s počáteční fází $\phi(x_1)$ v x -representaci. Mějme nyní obecnější zdroj v impulsu se pomalu měnící rozdělovací funkcí $S = |a(x, p)|^2$, kde $a(x, p)$ je příslušná amplituda:

$$\langle x|\psi \rangle = \int dp \int dx' a(x', p) e^{ip(x-x')} e^{i\phi(x')}.$$

Snadno přejdeme k p -representaci, která je intuitivnější z pohledu naměření-produkce částice s určitou hybností, proto značíme $A(p)$:

$$A(p) = \langle p|\psi \rangle = \int dx' a(x', p) e^{-ipx'} e^{i\phi(x')}.$$

Lokálnost částice zde můžeme samozřejmě splnit např. exponenciálním balíkem okolo distribuované hybnosti a později pak užít přiblížení hladkosti distribuční funkce a tím získat stejný výsledek.

Měříme vždy kvadrát absolutní hodnoty a zpravidla středovaný přes konečný časový interval. Jelikož není důvod, abychom v nějakém bodě preferovali nějakou počáteční fázi, budeme středovat tento kvadrát ještě přes všechny volby funkce počáteční fáze ve všech bodech produkce:

$$|A(p)|^2 = \int dx' \int dx'' a(x', p) \overline{a(x'', p)} e^{-ip(x'-x'')} e^{i(\phi(x')-\phi(x''))}.$$

Středujme formálně přes všechny funkce $\phi(x) : \langle -\infty, +\infty \rangle \rightarrow \langle -\pi, +\pi \rangle$ část předchozího integrálu:

$$\int_{\{\phi(x)\}} d\phi e^{i(\phi(x')-\phi(x''))} = \delta(x' - x'').$$

Platnost tohoto vztahu můžeme formálně ověřit diskretizací problému nebo uvážením podobnosti s Feynmannovým integrálem pro propagátor systému, jehož lagranžian obsahuje pouze funkci, jenž je úplnou časovou derivací funkce času a souřadnic. Výsledek bude tedy stejný, budeme-li počítat Feynmannův integrál pro propagátor se stejným počátečním a koncovým časem. Pro stejný počáteční a koncový čas operátor časového vývoje přechází v identitu a propagátor v delta funkci.

Po dosazení získáme kompletní pravděpodobnost produkce jedné částice s hybností p dostaneme:

$$P_1(p) = \left\langle |A(p)|^2 \right\rangle = \int dx |a(x, p)|^2 = \int dx S(x, p). \quad (3.35)$$

Dvoučásticová produkční funkce

Protože musíme vlnovou funkci symetrizovat dostáváme:

$$\begin{aligned} A(p_1, p_2) &= \langle p_1 | \langle p_2 | \psi_1 \rangle | \psi_2 \rangle + \langle p_2 | \langle p_1 | \psi_1 \rangle | \psi_2 \rangle = \\ &= \int dx_1 dx_2 \left[a(x_1, p_1) a(x_2, p_2) e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} + \right. \\ &\quad \left. + a(x_2, p_1) a(x_1, p_2) e^{-i(p_1 x_2 + p_2 x_1)} \right] e^{i(\phi(x_1) + \phi(x_2))} = \\ &= \int dx_1 dx_2 e^{i(\phi(x_1) + \phi(x_2))} e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} \\ &\quad \left[a(x_1, p_1) a(x_2, p_2) + a(x_2, p_1) a(x_1, p_2) e^{i(p_1 - p_2)(x_1 - x_2)} \right]. \end{aligned}$$

Užitím přiblížení hladkosti funkce $a(x, p)$ v hybnostech pro $p_1 \approx p_2 \approx K = \frac{p_1 + p_2}{2}$ máme:

$$a(x_1, p_1) a(x_2, p_2) \approx a(x_1, \frac{p_1 + p_2}{2}) a(x_2, \frac{p_1 + p_2}{2}).$$

Dále použijeme $|1 + e^{iy}|^2 = 1 + \cos(y)$ a středováním počátečních fází dostáváme:

$$\begin{aligned} P_2(p_1, p_2) &= \left\langle |A(p_1, p_2)|^2 \right\rangle \approx \\ &\approx \int dx_1 dx_2 |a(x_1, K)|^2 |a(x_2, K)|^2 (1 + \cos[(p_1 - p_2)(x_1 - x_2)]). \end{aligned}$$

Zavedením $q = p_1 - p_2$, užitím možnosti záměny souřadnic:

$$\begin{aligned} &\int dx_1 dx_2 S(x_1, K) S(x_2, K) e^{+iq(x_1 - x_2)} \\ &= \int dx_1 dx_2 S(x_1, K) S(x_2, K) e^{-iq(x_1 - x_2)} \\ &= \int dx_1 dx_2 S(x_1, K) S(x_2, K) \frac{e^{iq(x_1 - x_2)} + e^{-iq(x_1 - x_2)}}{2} \\ &= \int dx_1 dx_2 S(x_1, K) S(x_2, K) \cos(q(x_1 - x_2)). \end{aligned}$$

Tudíž máme:

$$P_2(p_1, p_2) = \left\langle |A(p_1, p_2)|^2 \right\rangle \approx \left(\int dx S(x, K) \right)^2 + \left| \int dx S(x, K) e^{iqx} \right|^2. \quad (3.36)$$

3.6.2 Parametrizace

Pokračujme v práci s $c(p_1, p_2)$:

$$c(p_1, p_2) - 1 = C(q, K) - 1 \approx \frac{|\int d^4x S(x, K) \exp(iqx)|^2}{(\int d^4x S(x, K))^2}$$

Ukazuje se, že často bývá pravá strana pro rozumné produkční funkce dobře popsána následujícím gaussianem:

$$C(q, K) - 1 \approx \exp(-q^\mu q^\nu \langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle), \quad (3.37)$$

kde zavádíme značení:

$$\tilde{x}_\mu = x_\mu - \langle x_\mu \rangle, \quad \langle f(x) \rangle_K = \frac{\int d^4x S(x, K) f(x)}{\int d^4x S(x, K)}.$$

Snadno ověříme planost následujících rovnic vycházejících z definice a rovnice (3.3). Druhou z nich pak užijeme k další úpravě přecházejícího výrazu.

$$4K_\mu K^\mu + q_\nu q^\nu = 4m^2 \quad q^\mu K_\mu = 0$$

a tedy

$$q^0 = \vec{q} \cdot \vec{\beta} \quad \text{kde} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{K}}{K^0}$$

a proto

$$C(q, K) - 1 \approx \exp(-q_i q_j \langle (\tilde{x}_i - \beta_i \tilde{t})(\tilde{x}_j - \beta_j \tilde{t}) \rangle).$$

Volbou vhodné soustavy můžeme vztah dále zjednodušit. Problematické je, že soustava, kterou vybereme bude různá v závislosti na hybnosti dvojice částic, které použijeme. Volíme tzv. out-side-long system:

Longitudinal axis: \vec{l} ve směru svazků,

Outward axis: \vec{o} ve směru poříčné komponenty konkrétního K ,

Sideway axis: \vec{s} kolmý na předchozí.

Volbou těchto souřadnic zároveň zaručíme, že $\vec{\beta}\vec{s} = 0$. Protože pro centrální srážky máme symetrii kolem osy \vec{l} , platí pro všechny členy, které jsou lineární v \tilde{x}_{side} , $\langle \tilde{x}_i, \tilde{x}_j \rangle = 0$. Proto zavedeme Bertsch-Pratt parametrizaci korelační funkce:

$$C(q, K) = \exp(-q_{out}^2 R_{out}^2(K) - q_{side}^2 R_{side}^2(K) - q_{long}^2 R_{long}^2(K) - 2q_{out}q_{side} R_{ol}^2(K)), \quad (3.38)$$

kde

$$R_{out}^2 = \langle (\tilde{x} - \beta_\perp \tilde{t})^2 \rangle \quad (3.39)$$

$$R_{side}^2 = \langle \tilde{y}^2 \rangle, \quad (3.40)$$

$$R_{long}^2 = \langle (\tilde{z} - \beta_l \tilde{t})^2 \rangle, \quad (3.41)$$

$$R_{ol}^2 = \langle (\tilde{x} - \beta_\perp \tilde{t})(\tilde{z} - \beta_l \tilde{t}) \rangle. \quad (3.42)$$

Tyto parametry je možné měřit a porovnávat je s teoreticky odvozenými pomocí produkční funkce.

3.7 Model Blastwave

Původními pracemi týkající se modelu Blastwave jsou [4, 13]. V modelu Blastwave předpokládáme, že rychlost částí fireballu ve směru osy z se nemění tj: $V_z = konst$.

Podélný vlastní čas: $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$

Podélná rychlost: $V_z = \frac{z}{t}$,

kde t, z jsou složky (3.6) a V_z je složkou (3.7).

To nám dovoluje mimo jiné propojit podélnou časoprostorovou rapiditu a podélnou rychlost.

Podélná časoprostorová rapidita: $\eta_s = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+V_z}{1-V_z}$

Dále v modelu Blastwave definujeme trojrozměrnou nadplochu v prostoru na které očekáváme vymrznutí pomocí podélného vlastního času. To můžeme interpretovat také tak, že zanedbáváme příspěvek do vlastního času od podélné expanze a o samotném vymrznutí předpokládáme, že nastane po určité přesně definované vlastní době.

Nadplocha vymrznutí:

$$\sigma = \{x^\mu | \tau = \sqrt{t^2 - z^2} = \tau_{fo} = konst\} \quad (3.43)$$

Pro popis podélné expanze definujeme:

Příčná rychlost částí fireballu: $\vec{V}_t = (V_x, V_y) = V_t(\cos \theta, \sin \theta)$

Příčná rapidita částí fireballu: $\eta_t = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{V_t}{\sqrt{1-V_z^2}}}{1 - \frac{V_t}{\sqrt{1-V_z^2}}}$

U této veličiny je třeba dát pozor na to, že nejde o příčnou rapiditu jak se běžně definuje. V tu přechází pouze v oblasti střední rapidity tj. $v_z = 0$.

Radiální souřadnice částí fireballu: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

kde x, y jsou složky (3.6) a $V_{x,y}$ jsou složky (3.7).

Pomocí předchozích předpokladů odvodíme pro čtyřvektory x^μ a u^μ definované v (3.6) a (3.7) popisujících částí expandujícího fireballu následující rovnice:

$$x^\mu = (\tau \cosh \eta_s, r \cos \theta, r \sin \theta, \tau \sinh \eta_s), \quad (3.44)$$

$$dx^\mu = \tau r d\theta d\eta_s d\tau dr, \quad (3.45)$$

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - (V_z^2 + V_t^2)}} (1, V_t \cos \theta, V_t \sin \theta, V_z), \quad (3.46)$$

$$u^\mu = (\cosh(\eta_s) \cosh(\eta_t), \cos(\theta) \sinh(\eta_t), \sin(\theta) \sinh(\eta_t), \sinh(\eta_s) \cosh(\eta_t)), \quad (3.47)$$

$$V_z = \tanh \eta_s. \quad (3.48)$$

$$V_t = \frac{\tanh \eta_t}{\cosh \eta_s}. \quad (3.49)$$

Snadno ověříme, že platí:

$$E^* = p_\mu u^\mu = (m_t \cosh(\eta_s - y) \cosh(\eta_t) - p_t \sinh(\eta_t) \cos(\phi - \theta)). \quad (3.50)$$

Použijme ještě $d\sigma_\mu p^\mu = \tau_{fo} r m_t \cosh(\eta_s - y) d\eta_s dr d\phi$, což vyplývá z vlastností vymrzávací nadplochy. Zavedeme lokální Boltzmannovo rozdělení (3.29):

$$f(x^\mu, p^\mu) \propto n(x^\mu) \exp(-E^*/T),$$

které popisuje lokální rovnováhu. Použijme ještě vzorec (3.50) a předpoklad: $n(x^\mu) = \rho(r)$, což znamená, že profil hustoty je závislý pouze od radiální souřadnice. Jelikož přecházíme k jiným souřadnicím mění se nám příslušně i levá strana. Celkem dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 N^{(fo)}}{m_t dm_t d\phi dy} &= m_t \tau_{fo} \int_0^\infty dr r \rho(r) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_s \cosh(\eta_s - y) \exp\left(-\frac{E^*}{T}\right) = \\ &= m_t \tau_{fo} \int_0^\infty dr r \rho(r) \left[\int_0^{2\pi} d\theta \exp\left(-\frac{p_t \sinh \eta_t(r) \cos(\phi - \theta)}{T}\right) \right] \\ &\quad \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_s \cosh(\eta_s - y) \exp\left(-\frac{m_t \cosh \eta_t(r) \cosh(\eta_s - y)}{T}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

V integrálu můžeme zavést substituce za $(\phi - \theta)$ a $(\eta_s - y)$ a díky příhodným integračním mezím, pak nebude výsledek záviset na ϕ, y . To je charakteristická vlastnost boost-invariantní expanze. Kromě toho můžeme zavést ještě modifikované Besselovy funkce, kterými nahradíme integrály v závorkách.

$$\frac{d^3 N^{(fo)}}{m_t dm_t d\phi dy} = m_t \tau_{fo} \int_0^\infty dr r \rho(r) I_0\left(\frac{p_t \sinh \eta_t(r)}{T}\right) K_1\left(\frac{m_t \cosh \eta_t(r)}{T}\right) \quad (3.52)$$

Vyjdeme-li z (3.32) a (3.52) dosazením získáme explicitně:

$$S(x, K) d^4 x = \delta(\tau - \tau_{fo}) m_t \rho(r) \cosh(\eta_s - y) \exp\left(-\frac{p^\mu u_\mu}{T}\right) \tau d\tau d\eta_s r dr d\theta. \quad (3.53)$$

Připomeňme si, že $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ je radiální souřadnice, abychom zavedli předpoklady:

$$\rho(r) = \Theta(R - r) \quad \eta_t = \sqrt{2} \eta_f \frac{r}{R}. \quad (3.54)$$

To znamená, že předpokládáme v čase vymrznutí homogenní rozdělení hustoty počtu částic ve válci s poloměrem podstavy R a lineární nárůst příčné rapidity fireballu s rostoucím radiální souřadnicí, což zdůvodňujeme působením přibližně konstatního tlaku. Ponecháváme si η_f jako parametr, který koriguje intenzitu příčného toku (transverse flow). Pomocí tohoto modelu můžeme vypočítat (3.39) a porovnat výsledky s experimentem. Navíc můžeme přechodí předpoklady dosadit do (3.52), kde ještě můžeme vyintegrovat přes ϕ a přejít od m_t k p_t a explicitně získat:

$$\frac{d^2 N^{(fo)}}{2\pi p_t dp_t dy} = m_t \tau_{fo} \int_0^R dr r I_0\left(\frac{p_t \sinh(\sqrt{2}\eta_f \frac{r}{R})}{T}\right) K_1\left(\frac{m_t \cosh(\sqrt{2}\eta_f \frac{r}{R})}{T}\right). \quad (3.55)$$

Také můžeme upravit do tvaru:

$$\frac{d^2 N^{(fo)}}{2\pi p_t dp_t dy} = \frac{\tau_{fo} R}{\sqrt{2}\eta_f} m_t \int_0^{\sqrt{2}\eta_f} ds s I_0\left(\frac{p_t \sinh(s)}{T}\right) K_1\left(\frac{m_t \cosh(s)}{T}\right). \quad (3.56)$$

Problémem tohoto odhadu spektra je, že do něho jde jen velmi těžko zahrnout značný vliv rozpadu rezonancí. Z toho důvodu se vznikl program DRAGON, který napravuje tento handicap pomocí metody Monte Carlo. Více v kapitole 4. Postup a výsledky numerické integrace v příloze A.1, A.2.

3.7.1 Oblasti homogenity

Z charakteru lokální termalizace rozpínajícího se fireballu $\frac{d^3 N}{d^3 p} \propto \rho(r) \exp(-p_\mu u^\mu / T)$ je evidentní, že každá pohybující se část fireballu produkuje hybnosti s rozdělením daným teplotou ve své klidové soustavě. Proto pozorováním určitých hybností pozorujeme určité oblasti fireballu, které produkují většinu částic s touto hybností. Tyto oblasti nazýváme oblasti homogenity. Dalšími úvahami lze odvodit následující přibližné závislosti [3]:

$$R_{long} = \tau_{fo} \frac{T}{\sqrt{K_t^2 + m^2}},$$

$$R_s = \frac{R_G^2}{1 + M_t \eta_f / T}.$$

Tyto veličiny měří velikost oblasti homogenity, tedy určité části fireballu.

3.7.2 Sklon spektra příčné hybnosti, teplota vymrznutí

Pro analýzu spektra v příčné hybnosti zavádíme následující veličinu:

$$\text{Sklon spektra příčné hybnosti: } T_{slope} = \left[-\partial_{m_t} \ln \left(\frac{d^3 N}{m_t dm_t d\theta dy} \right) \right]^{-1}.$$

Pro limitní případy máme analytické vyjádření:

$$T_{slope} = \begin{cases} T_{fo} \sqrt{\frac{1+\langle v_t \rangle}{1-\langle v_t \rangle}} & \text{ultrarelativistický } p_t \gg m \\ T_{fo} + m < \langle v_t \rangle^2 & \text{nerelativistický } p_t \ll m, \end{cases}$$

kde T_{fo} je freezout teplota. Rostoucí T_{fo} a η_f vede k nárůstu T_{slope} a tedy k ploššímu spektru. *Spektrum je obecně lépe popsáno druhým vztahem.* Předpokládáme, že sklon spektra bude závislý také od hmotnosti částice, jak je tomu v nerelativistickém případě.

Chceme-li měřením T_{slope} určit T_{fo} , musíme užít spektrum stejné srážky pro dva různé typy částic s různými hmotnostmi m , za předpokladu, že mají stejný T_{fo} , což není triviální předpoklad. Jelikož interakce mezi nukleony probíhá při nižších teplotách především výměnou pionů, je rozumné předpokládat, že nukleon-pionový systém je i přes některé odlišné účinné průřezy dobře termalizován.

Kapitola 4

Simulace v programu DRAGON

4.1 Program DRAGON a jeho parametry

K výpočtům jsem užil program Dragon [9], který užívá model Blastwave, aby pomocí metody Monte Carlo simuloval centrální energetické srážky na základě vstupních parametrů modelu. Program postupuje tak, že náhodně vygeneruje polohu vzniku částice ve fireballu a pomocí (3.47) vypočítá čtyřrychlost u^μ dané části fireballu. Pak náhodně vygeneruje energii podle rozdělení (3.29) a směr izotropně. Výslednou čtyřhybnost boostuje dle u^μ . Program DRAGON také zahrnuje produkci rezonancí a jejich následný rozpad na stabilní částice.

Díky podélné boost-invarianci spektra v příčné hybnosti u modelu Blastwave není potřeba, aby interval přijmutí částic do statistiky v rapiditě $|y| < P$, kde P je konstanta určující tento interval, přesně odpovídal intervalu užitému v experimentu. Nicméně je třeba také přihlédnout k šíři simulovaného spektra *double maxrap*. Aby rozdělení dobře odpovídalo boost invariantnímu je třeba zajistit alespoň $P/\text{maxrap} < 1/5$. Této úvahy jsem užil při pozdějším fitování experimentálních dat.

Tento program byl spouštěn s následujícím nastavením parametřů v souboru „params.hpp“:

```
NOEvents= 14000                double DropletPart = 0.;
double fotemp = 0.04 až 0.13;   double etaf = 0.3 až 1.2;
double Tch = 0.1656             double mub = 0.028;
double mus = 0.0069 ;          double huen = 0.7;
double minrap = -5.;           double maxrap = 5.;
double N_ total = 4.5 * 9000 ;  double rapcenter = 0.0;
double rapwidth = 1.4;         double rb = 10.;
double a_ space = 1.0;         double tau = 9.;
double rho2 = 0.0;             double tau = 9.;
int NOSpec = 277;
```

Vysvětlení parametrů je možno najít v literatuře [9]

4.2 Úpravy programu

Aby program efektivně prováděl výpočty požadované v této práci, bylo zapotřebí provést několik úprav.

Původní DRAGON je koncipován tak, že generuje částice na základě modelu Blastwave metodou Monte Carlo s pevnými vstupními parametry. Informace o vzniklých částicích ukládá do souboru. Problémem je značná velikost vznikajících souborů kvůli dostatečné statistice. Také je také potřeba zpracování dat. Jelikož je v tomto procesu obsaženo mnoho operací čtení a ukládání na disk, jde nutně o proces velmi pomalý, přestože konečným výsledkem je soubor o velikosti několika kilobitů obsahující typicky žádané spektrum. Takový koncept je nevhodný pro opakované výpočty stejného typu, které jsou potřebné například při fitování vstupních parametrů modelu. Proto jsem pro účely mé práce provedl na programu některé úpravy:

1. Přidal jsem vlastní knihovnu pro práci s maticemi v C++ založenou na dynamických polích (velikost určena až za běhu) a šablonách (umožňuje psát knihovny nezávislé od typů použitých proměnných).
2. Přidal jsem vlastní knihovnu na tvorbu histogramů za běhu programu užitím výše zmíněných knihoven pro práci s maticemi. Tím jsem se vyhnul celému mezikroku, který zpomaloval proces. Hranice binů v histogramu jsou automaticky vypočítány ze souboru s experimentálními hodnotami, což je vhodné pro pozdější porovnání výsledků.
3. Abych urychlil výpočet, vytvořil jsem jednoduchý bash script, který využívá nezávislosti jednotlivých výpočtů a paralelizuje je. K tomu jsem užil programu Grid Engine na výpočetní stanici Sunrise Cluster.
4. Implementoval jsem program pro analýzu dat pomocí $\chi^2(\eta_f, T_{fo})$ spekter z DRAGON a z experimentu. Hodnoty χ^2 jsou pak uloženy do souboru jako matice. Hledané minimum lze pak snadno izolovat a provést fit experimentálních dat.

Hledání minima χ^2 pro různé parametry η_f a T_{fo} probíhá následovně:

1. Cyklus
 - (a) nastavení parametrů η_f a T_{fo}
 - (b) spuštění DRAGON s danými parametry
 - (c) generace částic programem DRAGON a plnění histogramu pro spektrum v p_T
2. Výpočet $\chi^2(\eta_f, T_{fo})$ normalizovaných hodnot vzhledem k experimentální datům
3. Zápis $\chi^2(\eta_f, T_{fo})$ do tabulky
4. Nalezení minima v tabulce $\chi^2(\eta_f, T_{fo})$.

4.3 Výsledky výpočtů

4.3.1 Experimentální data, normalizace dat

Použil jsem data z experimentu STAR [10], konkrétně invariantní spektra v příčné hybnosti $dN^2/(2\pi p_T dp_T dy)[(\text{GeV}/c)^{-2}]$ versus p_T [GeV/c] Au+Au srážek při rapiditě $|y| < 0,1$ a centralitě 5 – 6% pro 6 typů částic a 3 různé energie: $p, \bar{p}, \pi^\pm, K^\pm$ při 62,4, 130 a 200 GeV na nukleon.

Použil jsem přiblížení nezávislosti spektra od rapidity, což je vhodné přiblížení v oblasti střední rapidity $y = 0$. Tudíž jsem vlastně nahradil $dy = 2 * 0,1$. Protože středem zájmu jsou především parametry η_f a T_{fo} a normalizaci spektra je možno korigovat poloměrem fireballu R , kterým se nezabýval, mohl jsem normalizováním přeskálovat podle potřeby (viz. také (3.56)). Proto jsem data normalizoval, tak aby $N_{norm}(i, j, E, T_{fo}, \eta_f)$ pro jednotlivé biny leželo v intervalu (0, 100). Následujícím způsobem:

1. Vzal jsem jedno nenormalizované spektrum $\frac{dN^2}{2\pi p_T dp_T dy}(i, j, E, T_{fo}, \eta_f)$ z programu DRAGON nebo z experimentálních dat pro jeden i -tý typ částic.
2. Vypočetl normu $A = \sum_j \frac{dN^2}{2\pi p_T dp_T dy}(i, j, E, T_{fo}, \eta_f) * (p_T)_j [\text{GeV}/c]$, kde suma probíhá všechny biny v histogramu a $(p_T)_j$ [GeV/c] je příčná hybnost j -tého binu v GeV/c
3. Pomocí té jsem definoval $N_{norm}(i, j, E, T_{fo}, \eta_f) = \frac{100}{A} * \frac{dN^2}{2\pi p_T dp_T dy}(i, j, E, T_{fo}, \eta_f)$.

4.3.2 Výpočet χ^2 pro fit parametrů T_{fo} a η_f

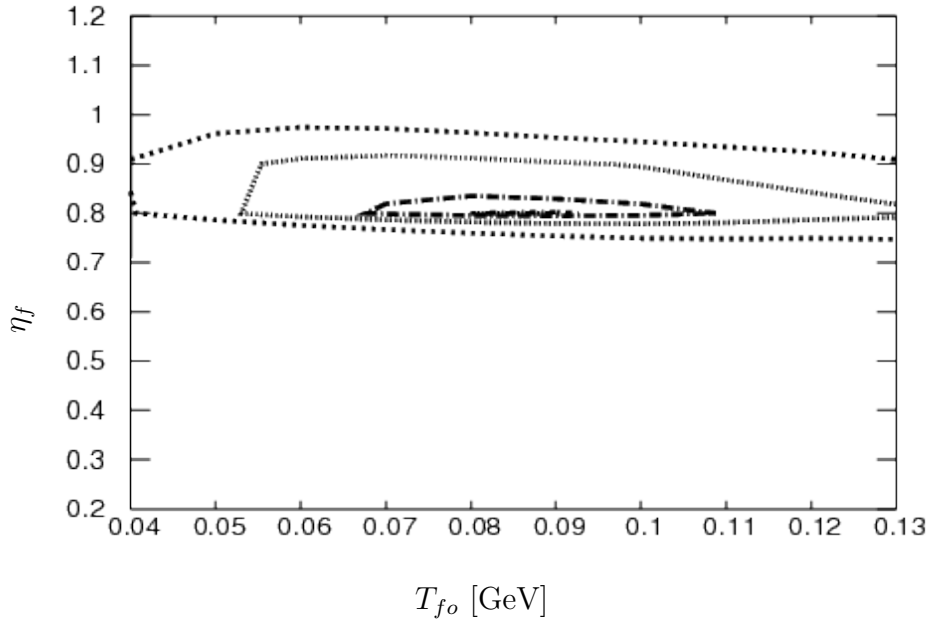
Pro fit parametrů modelu Blastwave jsem počítal χ^2 pro jednotlivá nastavení parametrů T_{fo} a η_f a jednotlivé energie srážky následujícím vztahem:

$$\chi^2(E, T_{fo}, \eta_f) = \sum_{(castice)_i} \sum_{(p_T)_j} \frac{\left[N_{norm.DRAGON}(i, j, E, T_{fo}, \eta_f) - N_{norm.exp.}(i, j, E) \right]^2}{\sigma_{norm.exp.}(i, j, E)^2},$$

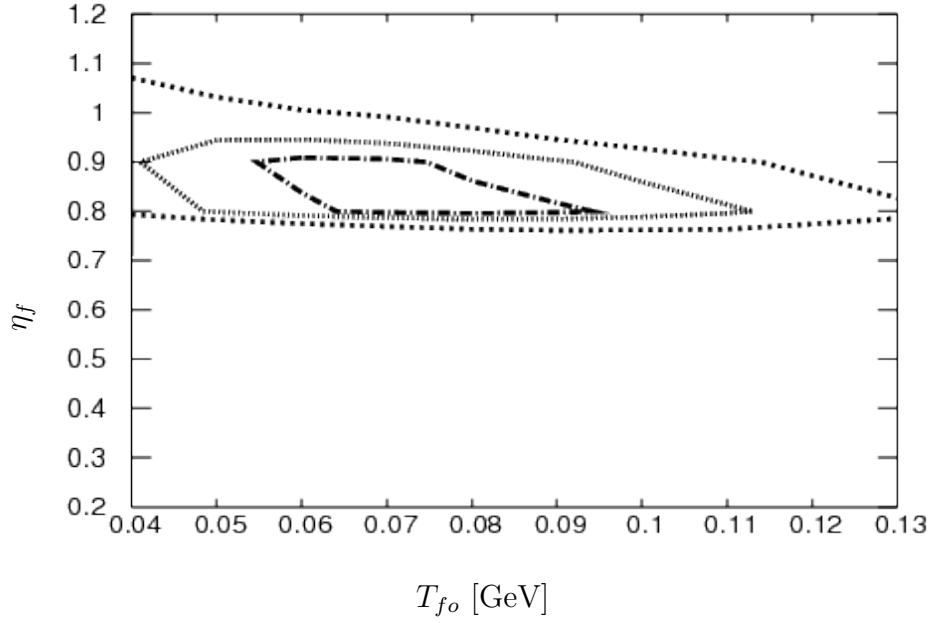
kde první suma prochází přes všechny analyzované typy částic a druhá přes všechny biny v p_T . Obdržená data jsem zanesl do následující tabulky a 2D grafu a našel minima pro všechny 3 energie:

E [GeV]	η_f	T_{fo} [GeV]	$\chi_{min}^2(E)$
62,4	0,8	0,08	2,66
130	0,8	0,08	2,35
200	0,9	0,08	0,81

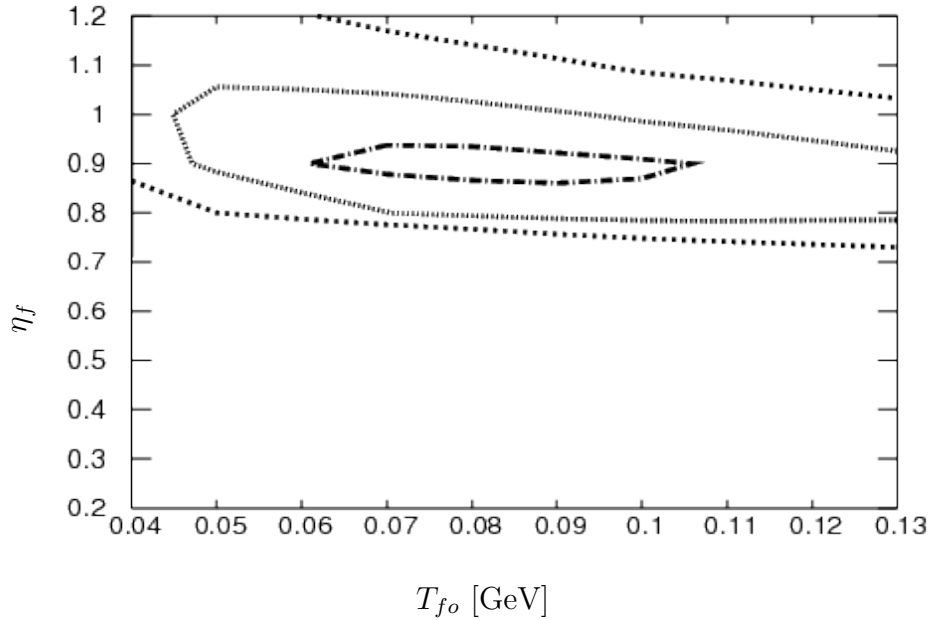
Tabulka 4.1: Hodnoty parametru η_f , T_{fo} [GeV] pro nalezená minima funkce $\chi^2(\eta_f, T_{fo})$ (viz. podkapitola 4.3.2) a pro různé energie viz. také tabulky v příloze A.3



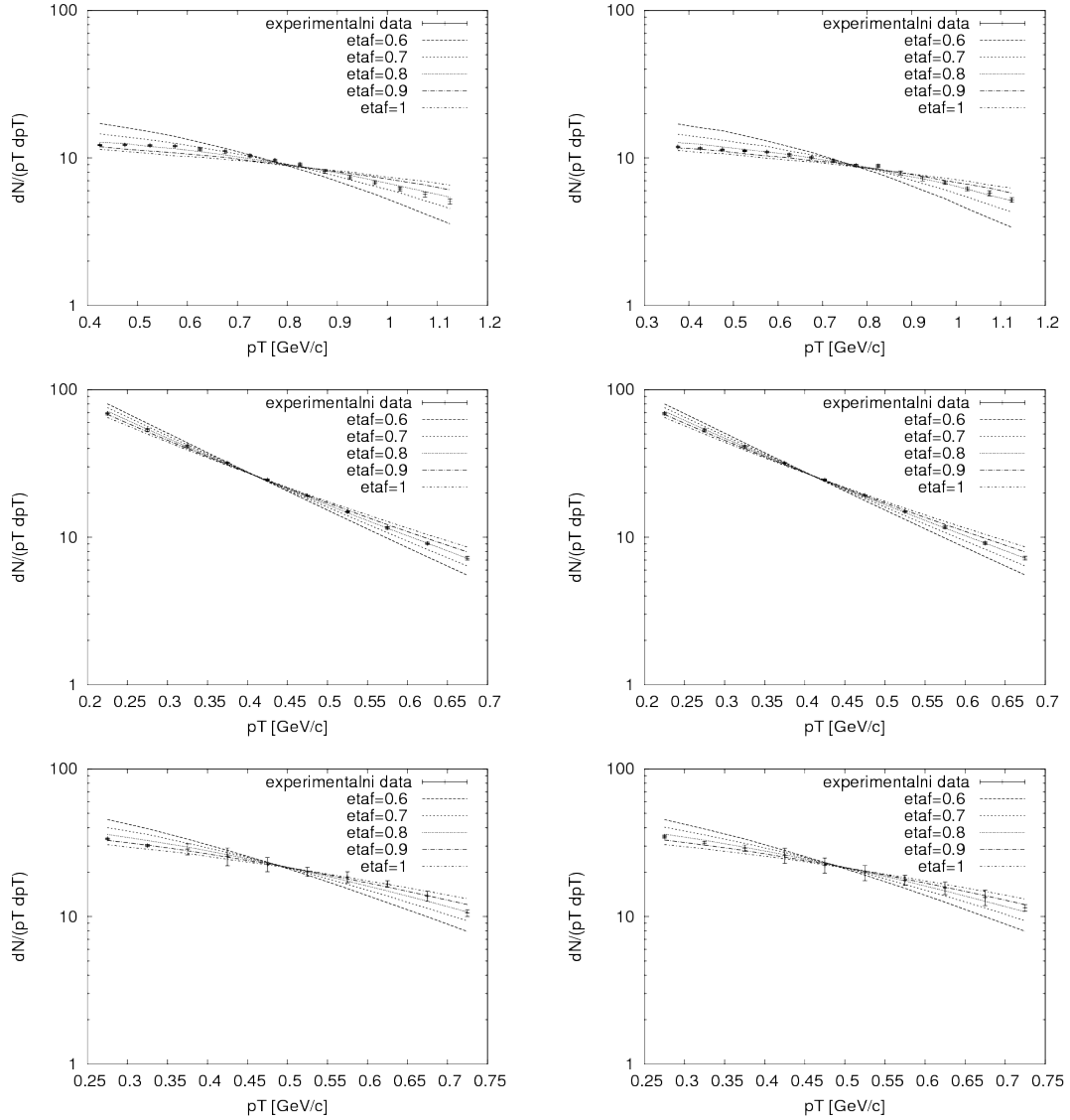
Obrázek 4.1: Příslušné vrstevnice 1σ , 2σ a 3σ kolem nalezeného minima funkce $\chi^2(\eta_f, T_{fo})$ normalizovaných dat z Monte Carlo generátoru DRAGON a experimentu $dN^2/(2\pi p_T dp_T dy)[(\text{GeV}/c)^{-2}]$ versus p_T [GeV/c] Au+Au srážek při střední rapiditě $|y| < 0,1$ a centralitě 5 – 6% pro $p, \bar{p}, \pi^\pm, K^\pm$ při 62,4 GeV na nukleon [10]



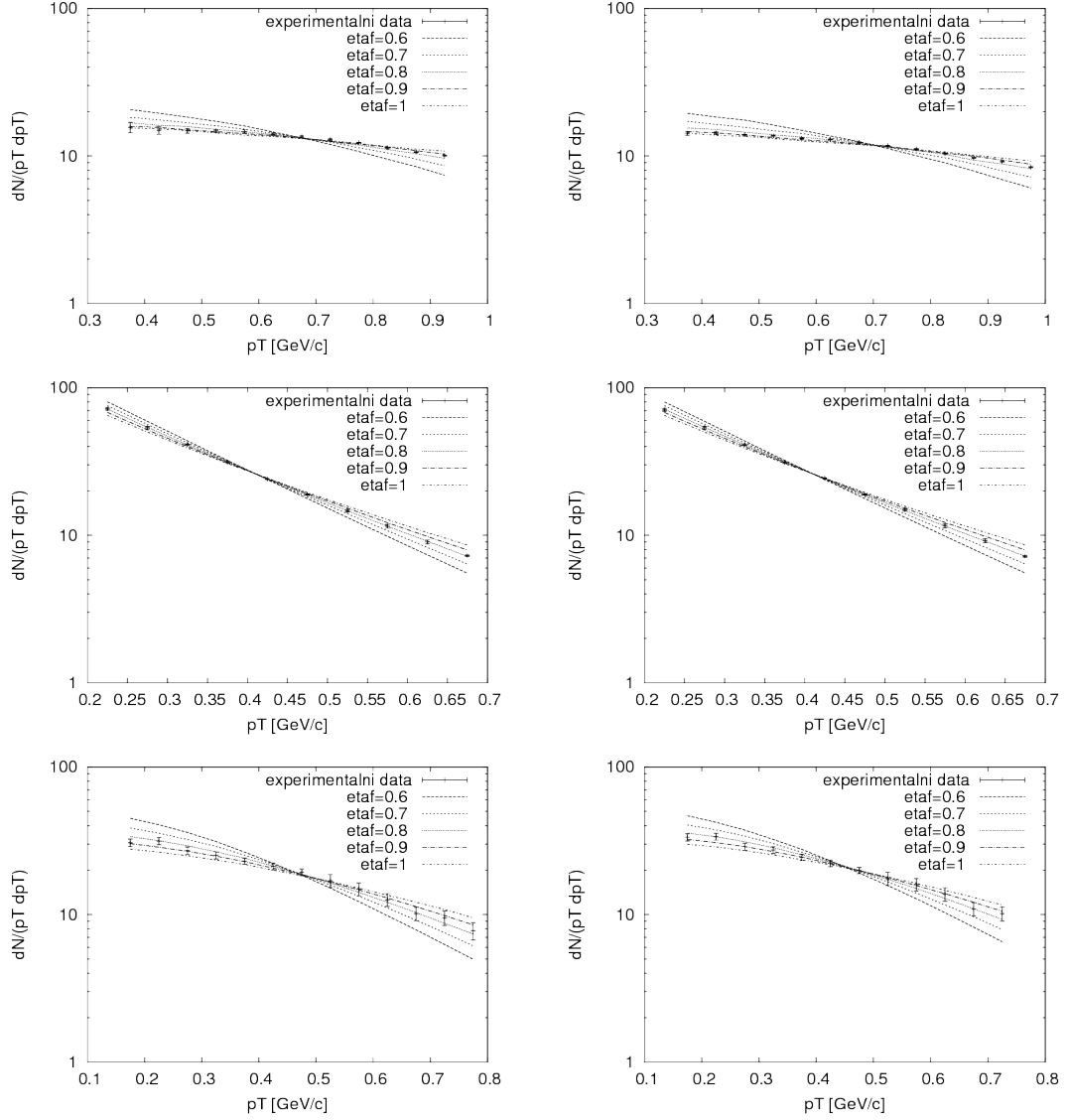
Obrázek 4.2: Příslušné vrstevnice 1σ , 2σ a 3σ kolem nalezeného minima funkce $\chi^2(\eta_f, T_{fo})$ normalizovaných dat z Monte Carlo generátoru DRAGON a experimentu $dN^2/(2\pi p_T dp_T dy)[(\text{GeV}/c)^{-2}]$ versus p_T [GeV/c] Au+Au srážek při střední rapiditě $|y| < 0,1$ a centralitě 5 – 6% pro $p, \bar{p}, \pi^\pm, K^\pm$ při 130 GeV na nukleon [10]



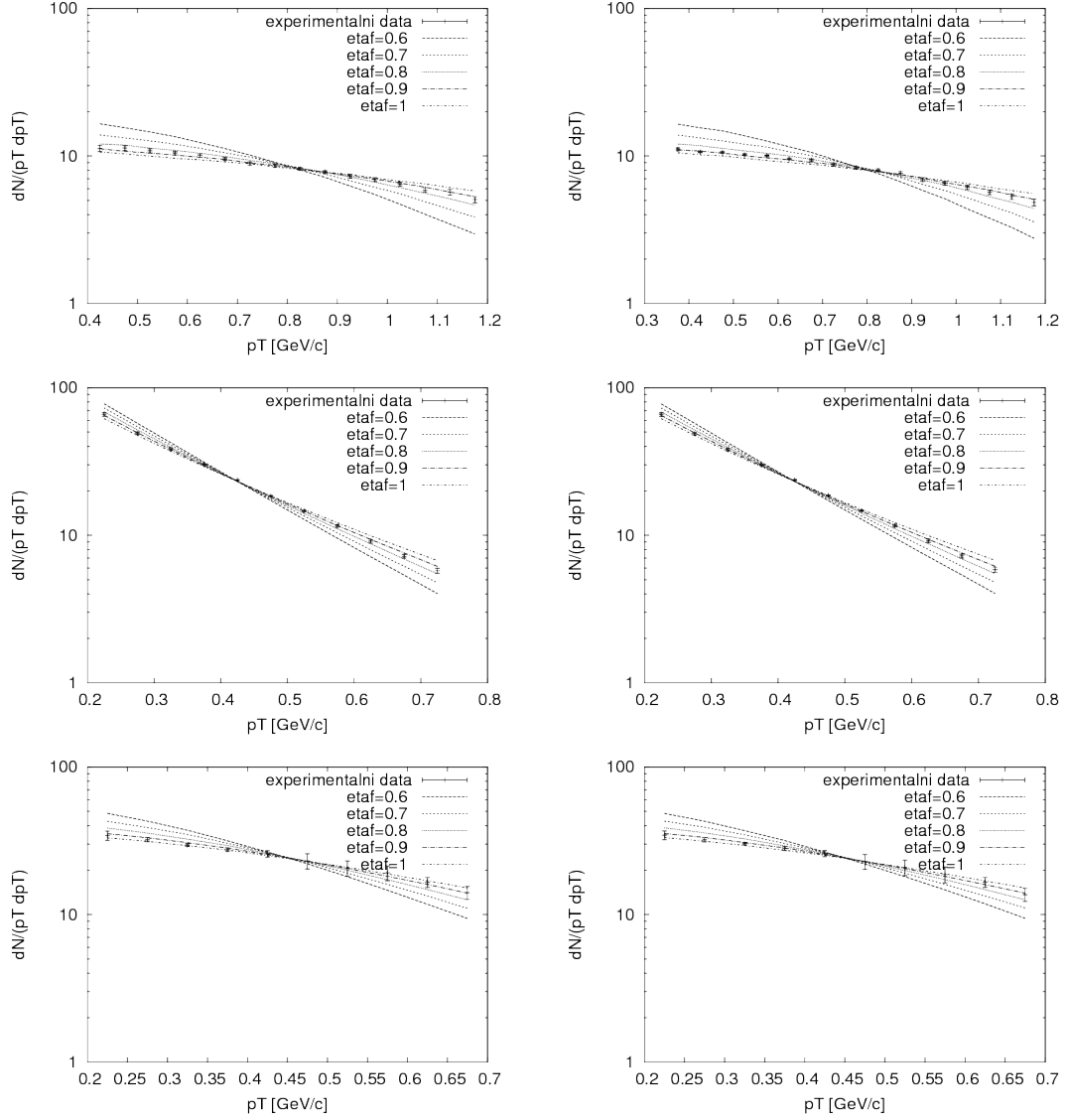
Obrázek 4.3: Příslušné vrstevnice 1σ , 2σ a 3σ kolem nalezeného minima funkce $\chi^2(\eta_f, T_{fo})$ normalizovaných dat z Monte Carlo generátoru DRAGON a experimentu $dN^2/(2\pi p_T dp_T dy)[(\text{GeV}/c)^{-2}]$ versus p_T [GeV/c] Au+Au srážek při střední rapiditě $|y| < 0,1$ a centralitě 5 – 6% pro $p, \bar{p}, \pi^\pm, K^\pm$ při 200 GeV na nukleon [10]



Obrázek 4.4: Spektra v příčné hybnosti normalizovaných dat z DRAGON při $T_{fo} = 0,08$ GeV a experimentu $dN^2/(2\pi p_T dp_T dy)[(\text{GeV}/c)^{-2}]$ versus p_T [GeV/c] Au+Au srážek při střední rapiditě $|y| < 0,1$ a centralitě 5 – 6% pro částice odshora zleva do prava v následujícím pořadí: $p, \bar{p}, \pi^-, \pi^+, K^-, K^+$ při 62,4 GeV na nukleon [10]



Obrázek 4.5: Spektra v příčné hybnosti normalizovaných dat z DRAGON při $T_{fo} = 0,08$ GeV a experimentu $dN^2/(2\pi p_T dp_T dy)[(\text{GeV}/c)^{-2}]$ versus p_T [GeV/c] Au+Au srážek při střední rapiditě $|y| < 0,1$ a centralitě 5 – 6% pro částice odshora zleva do prava v následujícím pořadí: p , \bar{p} , π^- , π^+ , K^- , K^+ při 130 GeV na nukleon [10]



Obrázek 4.6: Spektra v příčné hybnosti normalizovaných dat z DRAGON při $T_{fo} = 0,08$ GeV a experimentu $dN^2/(2\pi p_T dp_T dy)[(\text{GeV}/c)^{-2}]$ versus p_T [GeV/c] Au+Au srážek při střední rapiditě $|y| < 0,1$ a centralitě 5 – 6% pro částice odshora zleva do prava v následujícím pořadí: p , \bar{p} , π^- , π^+ , K^- , K^+ při 200 GeV na nukleon [10]

Závěr

Pomocí programové úpravy některých výstupů programu DRAGON [9] jsem fitoval dva nejdůležitější parametry modelu Blastwave s rezonancemi na normalizovaná (viz. podkapitola 4.3.1) spektra v příčné hybnosti z experimentu STAR [10]:

E [GeV]	η_f	T_{fo} [GeV]	$\chi^2_{min}(E)$
62,4	0,8	0,08	2,66
130	0,8	0,08	2,35
200	0,9	0,08	0,81

Tabulka 4.2: Hodnoty parametru η_f , T_{fo} [GeV] pro nalezená minima funkce $\chi^2(\eta_f, T_{fo})$ (viz. podkapitola 4.3.2) a pro různé energie viz. také tabulky v příloze A.3

Zajímavé je, že přestože si spektra pro fitované hodnoty celkem odpovídají (viz. grafy v podkapitole 4.3.2), jsou hodnoty teploty vymrznutí T_{fo} zhruba poloviční oproti předchozím odhadům [15, 16, 17, 18]. Vysvětlení může být několik:

- Přestože jsou zvolené parametry podstatné, je třeba hýbat i s ostatními.
- Region v příčné hybnosti, který jsem analyzoval, je příliš úzký.
- Je třeba upravit parametr pro chemické složení pro energii 62,4 [GeV].
- Volba vymrzávací nadplochy Blastwave modelu není vhodná.

Možným pokračováním této práce by bylo přidat jako další data výsledky vlivu symetrizace - HBT interferometrie viz. podkapitola 3.6.

Seznam použitých zdrojů

- [1] F. Cooper and G. Frye, Phys Rev. D 10 (1974) 186.
- [2] J. D. Bjorken, Phys. Rev. D 27 (1983) 140.
- [3] T. Csörgő and B. Lörstad, Phys. Rev. C 54 (1996) [arXiv:nucl-th/9901094].
- [4] E. Schnederman, J. Sollfrank and U. Heinz, Phys. Rev. C 48 (1993) 2462 [arXiv:nucl-th/9307020].
- [5] J. Letessier and J. Rafelski, *Hadrons and Quark-Gluon Plasma*, textbook, Cambridge monographs on particle physics, nuclear physics and cosmology
- [6] U. A. Wiedemann and U. Heinz, Phys. Rept. 319 (1999) 145 [arXiv:nucl-th/9901094].
- [7] C.-Y. Wong, Introduction to High-Energy Heavy-Ion Collisions, World Scientific, 1994.
- [8] Boris Tomášik, Diplomová práce, MFF Univerzita Komenského 1995.
- [9] B. Tomasik, Comp.Phys.Commun. 180 (2009) 1642-1653.
- [10] B. I. Abelev et al [STAR Collab.] Phys. Rev. C 74 (2009) 034909.
- [11] File:Standard Model of Elementary Particles.svg #file In Wikipedia : the free encyclopedia [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, 27.6.2006, 27.6.2009 [cit. 2010-04-06]. Dostupné z WWW: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Standard_Model_of_Elementary_Particles.svg#file .
- [12] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn, V.F.Weisskopf, Phys. Rev. D 9 (1974) 3471
- [13] P.J. Siemens, J.O. Rasmussen, Phys Rev. Lett. 42 (1979) 880
- [14] E. Shuryak, Phys. Lett. B 78 (1978) 150
- [15] W. Broniowski, W. Florkowski, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 272302.
- [16] W. Broniowski , M. Chojnacki, W. Florkowski , A. Kisiel, Phys.Rev.Lett.101 (2008) 022301.

- [17] M. Csanad, T. Csorgo , B. Lorstad , A. Ster, Acta Phys.Polon.B35 (2004) 191, e-Print: nucl-th/0311102.
- [18] M. Csanad, T. Csorgo, B. Lorstad, A. Ster, J.Phys.G 30 (2005) S1079, e-Print: nucl-th/0403074.

Přílohy

A.1 Script pro MATLAB pro numerickou integraci vztahu pro spektrum přímo produkováných částic

```
e=2.71828;%zakladni konstanty
pi=3.141592654;

T=80; %MeV/k - parametry modelu Blastwave
etaf=0.8;

m=493; %MeV - hmotnost castice

k1=@(y,t) cosh(y).* e.^(-cosh(y).*t); % pracovni funkce
i0=@(y,t) e.^(-cos(y).*t); %znich vyrobime spektrum

maxpt=725; %definujeme oblast, kterou budeme pocitat
minpt=275;
n=10;
step=(maxpt-minpt)/(n-1);

Y=1:n; %pracovni promenne
X=1:n;
spc=ones(n,2);
norm=0;

for k = 1:n
    pt=minpt+step*(k-1); %MeV/c
    mt=sqrt(pt^2 + m^2);%MeV/c2

    X(k)=pt;
    %nasleduje trojita numericka integrace
    Y(k)= mt*triplequad(@(r,y,z) r.* i0(z, (pt*sinh(r))/T) .*
k1(y, (mt*cosh(r))/T) ,0,etaf*sqrt(2),-5,5,0,2*pi);

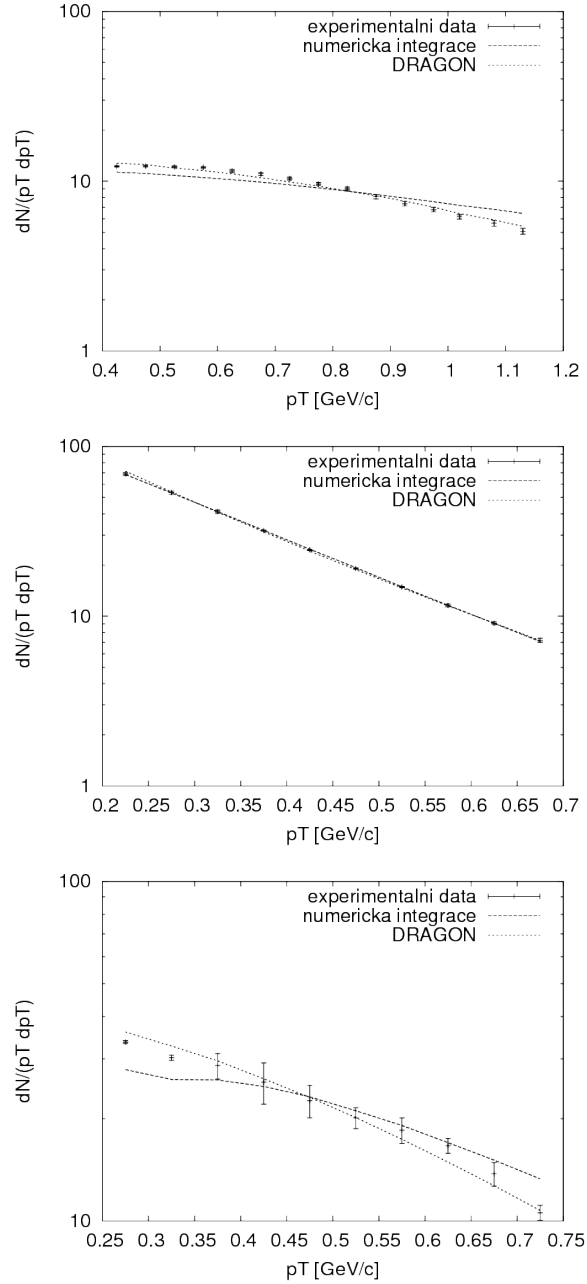
    spc(k,1)= X(k)/1000; %data pro ulozeni do souboru pt[GeV]
    spc(k,2)= Y(k);
    norm=norm+(X(k)/1000)*Y(k); %pracovni promena pro
    %normalizaci( beru pt[GeV])
end

for k = 1:n %normalizace spektra
    Y(k)= Y(k)*100/norm;
    spc(k,2)= Y(k);
end

%vystup vypoctu
plot(X,Y);
save('numspc.xls', 'spc', '-ascii', '-double', '-tabs')
```

A.2 Srovnání spekter numericky počítaných pro přímo produkované částice, z experimentu a z DRAGON

Na níže uvedených grafech porovnávám normalizovaná spektra numericky počítaná z (3.56) pomocí MATLAB pro spektra přímo produkovaných částic, z experimentu STAR a spektra z programu DRAGON užívajícího Monte Carlo k zahrnutí rezonanci do modelu Blastwave.



Obrázek A.7: Srovnání spekter v příčné hybnosti normalizovaných dat z numerické integrace (3.56) pomocí MATLAB, DRAGON pro $\eta_f = 0,8$ a $T_{fo} = 0,08$ [GeV] a experimentu $dN^2/(2\pi p_T dp_T dy)[(\text{GeV}/c)^{-2}]$ versus p_T [GeV/c] Au+Au srážek při midrapiditě $|y| < 0,1$ a centralitě 5 – 6% pro částice odshora v následujícím pořadí: p, π^-, K^- při 62,4 GeV [10]. Odlišnosti ve spektrech (3.56) pomocí MATLAB a DRAGON jsou zapříčiněny chybějícím příspěvkem od rozpadu rezonancí v (3.56)

A.3 Tabulky výsledků $\chi^2(E, \eta_f, T_{fo})$

	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13
0,3	2517,78	2042,87	1681,94	1388,15	1154,58	976,22	822,25	701,68	596,88	513,21
0,4	1303,56	1069,94	890,24	744,72	627,92	539,44	459,14	397,77	342,63	299,39
0,5	549,21	464,72	393,36	337,55	290,43	251,58	218,49	190,59	166,84	146,41
0,6	181,35	158,10	138,74	120,73	105,22	93,21	81,46	73,12	65,25	58,48
0,7	44,85	38,85	32,74	28,53	25,04	22,25	20,26	18,86	18,10	16,94
0,8	11,94	7,48	4,75	3,32	2,66	2,57	2,91	3,76	4,91	5,76
0,9	11,30	7,65	5,80	5,08	5,51	6,26	6,88	8,05	9,05	10,75
1	15,28	14,16	13,68	14,27	15,21	16,38	17,42	18,51	19,84	21,10
1,1	18,87	20,34	21,44	22,95	24,77	26,49	28,58	29,60	31,25	32,25
1,2	22,78	25,99	28,33	30,66	33,11	34,95	37,28	38,63	40,92	41,83

η_f

	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13
0,3	1428,58	1231,94	1068,82	925,34	799,85	697,95	608,45	531,45	464,20	408,56
0,4	879,82	755,39	652,30	564,19	488,33	428,48	374,88	329,98	289,57	257,55
0,5	437,53	380,07	332,15	290,25	252,19	223,28	196,47	173,80	154,67	137,17
0,6	162,42	147,31	130,12	115,63	102,13	91,78	81,85	73,46	67,65	60,73
0,7	40,93	37,95	33,83	30,71	27,17	24,72	23,16	21,25	21,52	21,19
0,8	9,23	5,80	3,79	2,69	2,35	2,82	4,09	5,70	7,82	9,67
0,9	6,62	4,01	2,61	2,80	3,97	5,97	7,89	10,44	12,72	15,77
1	9,19	9,28	10,85	12,16	14,61	17,80	20,61	23,68	26,03	28,77
1,1	12,25	15,87	20,45	22,96	26,69	30,40	34,82	36,70	40,54	43,30
1,2	17,53	23,78	30,05	34,83	38,45	43,00	48,20	50,25	55,03	57,81

η_f

Tabulka A.3: Hodnoty $\chi^2(\eta_f, T_{fo})$ normalizovaných dat z Monte Carlo generátoru DRAGON a experimentu $dN^2/(2\pi p_T dp_T dy)[(\text{GeV}/c)^{-2}]$ versus p_T [GeV/c] Au+Au srážek při midrapiditě $|y| < 0,1$ a centralitě 5 – 6% pro $p, \bar{p}, \pi^\pm, K^\pm$ při 62,4 GeV (první tabulka), 130 GeV (druhá tabulka) [10]

	T_{f_0} [GeV]												
	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11	0.12	0.13			
0.3	1063.80	900.00	765.45	648.54	550.71	472.88	404.27	348.04	299.01	259.56			
0.4	615.40	522.71	446.06	379.86	324.02	279.86	241.13	209.59	181.53	159.11			
0.5	301.38	260.57	223.67	193.13	165.86	144.20	124.98	108.63	95.76	84.27			
0.6	122.54	107.94	93.22	80.98	69.78	61.06	53.20	46.79	41.67	36.80			
0.7	41.89	35.69	30.11	25.44	21.85	18.77	16.50	14.82	13.53	12.53			
0.8	14.34	9.84	6.83	4.89	3.77	2.99	2.64	2.80	3.26	3.51			
0.9	7.33	3.79	1.89	0.97	0.81	1.03	1.44	2.06	2.82	3.70			
1	5.74	3.83	3.28	3.21	3.70	4.49	5.36	6.09	7.02	8.05			
1.1	5.49	5.58	6.27	7.01	7.99	9.16	10.58	11.45	12.54	13.44			
1.2	6.29	7.94	9.53	11.04	12.38	13.88	15.59	16.53	17.83	18.76			

η_f

Tabulka A.4: Hodnoty $\chi^2(\eta_f, T_{f_0})$ normalizovaných dat z Monte Carlo generátoru DRAGON a experimentu $dN^2/(2\pi p_T dp_T dy)[(\text{GeV}/c)^{-2}]$ versus p_T [GeV/c] Au+Au srážek při midrapiditě $|y| < 0.1$ a centralitě 5 – 6% pro $p, \bar{p}, \pi^\pm, K^\pm$ při 200 GeV [10]