České vysoké učení technické
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Katedra fyziky

# Tomografie měkkého rentgenového záření na tokamaku JET

Diplomová práce

Autor páce: **Bc. Martin Imríšek**
Školitel: **RNDr. Jan Mlynář, PhD.**
Školní rok: **2010/2011**

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb. , o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a p změně některých zákonů.

V Praze dne .........................                                        ..................................

Martin Imríšek

Rád bych poděkoval RNDr. Janu Mlynáři, Ph.D za trpělivé vedení mé práce, vstřícné zodpovězení mých otázek a za čas věnovaný při konzultacích.

Martin Imríšek

Název práce: Tomografie měkkého rentgenového záření na tokamaku JET

*Autor:* Bc. Martin Imríšek

*Obor:* Fyzikální inženýrství

*Druh práce:* Diplomová práce

*Vedoucí práce:* RNDr. Jan Mlynář, Ph.D., odd. tokamak ÚFP AV ČR, v.v.i.

*Abstrakt:* Přestože měkké rentgenové záření zaujímá jen úzkou část spektra vyzařovaného fúzním plazmatem, má zásadní význam proto, že je charakteristickým zářením při teplotách vyžadovaných pro termojadernou fúzi (okolo 10 keV). Tomografická rekonstrukce měkkého rentgenového záření proto představuje cenný nástroj, který lze využít ke studiu mnoha jevů zejména v centrální oblasti fúzního plazmatu. Soustava kamer měkkého rentgenového záření byla na tokamaku JET po značném radiační poškození v roce 2010 částečně zrekonstruována. V současnosti lze prostorové rozložení měkkého rentgenového záření měřit prostřednictvím horizontálního pole 17 detektorů (označovaného jako S4) a dvěma vertikálními kamerami (V a T), z nichž každá se skládá z pole 35 detektorů. Bylo demonstrováno, že data uvedených kamer lze kombinovat pro tomografii měkkého rentgenového záření na tokamaku JET. Použitou metodou tomografické rekonstrukce v této práci je Tichonovova regularizace vymezená minimem Fisherovy infrormace. Práce se zabývá výpočtem matice geometrie potřebné pro tomografickou rekonstrukci, chybami tomografické rekonstrukce a analýzou rekonstruovaných obrazů emisivity měkkého rentgenového záření. Byly pozorovány projevy rozdílné spektrální citlivosti kamery S4 v důsledku tlustšího beryliového filtru. Práce také obsahuje úvod do oblasti řízené termojaderné fúze, kapitolu věnující se teorii tomografické rekonstrukce a popis kamer S4, V a T.

*Klíčová slova:* JET, tomografie, měkké rentgenové záření, Tichonovova regularizace

*Title:* Soft X-ray tomography on the JET tokamak

*Author:* Bc. Martin Imríšek

*Abstract:* Although soft X-rays range only over a narrow part of spectrum emitted by fusion plasmas, its diagnostics is instrumental for fusion reactors as it presents characteristic radiation of thermonuclear plasmas at T~10 keV. Therefore, tomographic reconstruction of soft X-ray plasma emissivity is a valuable tool that can be used to study many phenomena in fusion plasmas. On the JET tokamak, the system of soft X-ray cameras was after considerable radiation damage partially reconstructed in 2010. At present, it is possible to measure spatial characteristics of SXR radiation by one horizontal array of SXR detectors (denoted S4) with 17 detectors and two vertical SXR cameras (V and T), each of them consisting of a linear array of 35 detectors. It is demonstrated that their data can be combined in soft X-ray tomography system on the JET tokamak. In the thesis, the used method of tomographic reconstruction is Tikhonov regularisation constrained by minimum Fisher information. The thesis deals with the calculation of geometric matrix used in tomographic reconstruction, the errors of the chosen tomographic method and the analysis of reconstructed soft X-ray emissivity images. The consequences of different spectral sensitivity of the camera S4 with respect to T and V – which is due to different beryllium filter thickness - were clearly identified. The thesis also includes an introduction to the field of controlled thermonuclear fusion, the chapter devoted to the theory of tomographic reconstruction and the description of cameras S4, V and T.

*key words*: JET, tomography, soft X ray, Tikhonov regularization

# 1. Úvod

*Práce navazuje na bakalářskou práci [1], ze které byly použity některé části textu v první kapitole, úvodní části druhé kapitoly, úvodu do kapitoly 2.2 a v kapitole 2.2.3.*

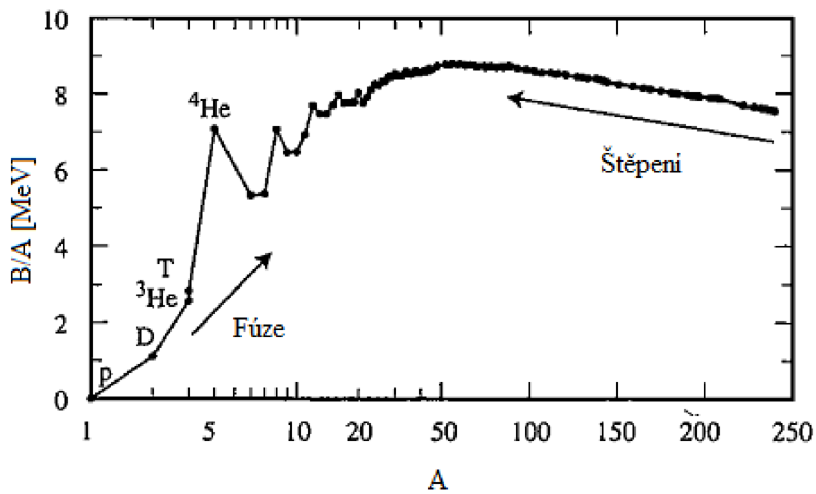
Lidská společnost v současné době čelí nárůstu celosvětové energetické spotřeby na jedné straně a omezeným zásobám neobnovitelných energetických zdrojů jako jsou fosilní paliva a uran, jejiž těžba bývá stále náročnější. Použitelnost obnovitelných zdrojů (např. vodní, větrná, solární) bývá omezena např. přírodními podmínkami a požadavky na stabilitu sítě a proto zastávají většinou spíše doplňující úlohu. Pokrýt energetické potřeby lidstva v budoucnosti mohou pomoci jaderné reaktory čtvrté generace využívající štěpení nejen uranu 235 ale i hojnějšího uranu 238 nebo thoria, dobře zvládnutá technologie ukládání energie pro obnovitelné zdroje a v neposlední řadě také energie z termojaderné fúze lehkých atomových jader.

Termojaderná fúze neboli syntéza atomových jader za vysokých teplot je zdrojem energie hvězd a mohla by být také zdrojem energie pro lidstvo, který je bezpečný, šetrný k životnímu prostředí a disponuje široce dostupnými zásobami paliv. Bezpečnost fúzních elektráren vychází především z nemožnosti masivní nekontrolovatelné řetězové reakce, neboť uvnitř reaktoru bude vždy jen malé množství paliva (kolem jednoho gramu) k okamžité spotřebě a podmínky k udržení fúzních reakcí jsou obtížně dosažitelné a životně závislé na správném chodu reaktoru. Nejvhodnějším palivem jsou izotopy vodíku deuterium a tritium, z jejichž syntézy jader lze nejsnadněji dosáhnout energetického zisku. Deuterium (neutron a proton v jádře) jakožto stabilní izotop vodíku lze získat například z těžké vody elektrolýzou a tritium (proton a dva neutrony v jádře), které je nestabilní s poločasem rozpadu 12,3 let, bude možné vyrábět z reakce lithia s neutronem v reaktoru. Odhaduje se, že zásoby lithia na zemském povrchu by dokázaly pokrýt energetické požadavky lidstva na tisíce let a zásoby deuteria jsou téměř nevyčerpatelné. Ve vzdálenější budoucnosti může být lidstvo schopné získavat energii z dalších fúzních reakcí. Produkty fúzní reakce mezi deuteriem a tritiem jsou jádro helia a neutron, které nesou uvolněnou vazebnou energii nukleonů ve fromě kinetické energie (kterou lze přeměnit na tepelnou, mechanickou a nakonec elektrickou energii prostřednictvím parogenerátoru). Vstup ani výstup palivového cyklu fúzní elektrárny nejsou radioaktivní, což je další výhoda oproti štěpným jaderným elektrárnám co se týče bezpečnosti, šetrnosti k životnímu prostředí a společenské přijatelnosti. Radioaktivními se ovšem stanou stěny reaktoru, neboť budou vystaveny neutronům z fúzních reakcí. Dopad neutronového záření na stěny reaktoru lze zmírnit vhodnou volbou nízkoaktivovatelných materiálů natolik, že použitý materiál bude třeba stínit jen několik desítek let.

Tématem práce je tomografie měkkého rentgenového záření, která je cenným nástrojem ke studiu řady jevů ve fúzním plazmatu, neboť měkké rentgenové záření je charakteristickým zářením při teplotách vyžadovaných pro termojadernou fúzi (okolo 10keV). První kapitola je věnována širšímu úvodu do oblasti řízené termojaderné fúze a tokamaku JET. Ve druhé kapitole je obsažena teorie tomografické rekonstrukce pro analytické i pixelové metody. Třetí kapitola popisuje měření měkkého rentgenového záření na tokamaku JET. Ve čtvrté kapitole jsou stanoveny matice geometrie pro tomografickou rekonstrukci na čtvercových pixelech a pro abelizaci. Chybám tomografické rekonstrukce se věnuje pátá kapitola a analýze rekonstruovaných obrazů emisivity měkkého rentgenového záření šestá kapitola.

## 1.1. Fúzní reakce

Atomové jádro je vázaný systém, k jehož rozbití na jednotlivé nukleony je potřeba energie, jež je přinejmenším rovna vazebné energii jádra. Průměrná vazebná energie připadající na jeden nukleon se pro různá jádra liší a proto ji lze při syntéze nebo štěpení atomových jader uvolnit ve formě kinetické energie produktů reakce nebo energie elektromagnetického záření. Velikost uvolněné energie odpovídá rozdílu mezi celkovou hmotností produktů a reaktantů podle Einsteinovy ekvivalence mezi hmotností a energií. Až na několik výjimek roste průměrná vazebná energie na jeden nukleon s počtem nukleonů až po jádro atomu železa, jehož nukleony jsou uspořádány energeticky nejvýhodněji, a dále pak pozvolněji klesá. Energii z jaderných reakcí lze tedy získávat štěpením těžkých jader nebo slučováním lehkých.




Obrázek 1.1: Vazebná energie připadající na jeden nukleon v závislosti na počtu nukleonů (A). Převzato z [6].

Nutnou podmínkou k fúzi atomových jader je přiblížení jader na tak krátkou vzdálenost, při které nad elektromagnetickým odpuzováním převládnou silné jaderné síly, které drží nukleony v jádře pohromadě. Dodat jádrům energii potřebnou k uskutečnění fúzní reakce není např. v urychlovačích příliš obtížné, ale v terči dochází převážně k termalizaci svazku Coulombickým rozptylem, než k fúzním reakcím. Možnost energetického zisku ze slučování lehkých jader nabízí termojaderná fúze neboli syntéza atomových jader za tak vysokých teplot (desítky milionů stupňů), při kterých se atomy ionizují a jejich jádra mají dostatek kinetické energie k překonání odpudivé elektromagnetické síly. Látka pak bývá ve formě plazmatu a fúzní reakce probíhají díky opakovaným srážkam s dostatečnou četností na to, aby mohly vést k energetickému zisku.

V praxi užívaná definice fúzní reakce říká: fúzní reakce jsou jaderné reakce mezi lehkými jádry (lehčími než železo), při kterých se uvolňuje energie. Tím se částečně podtrhuje využitelnost termojaderných fúzních reakcí k získávání energie, protože aby mohla termojaderná fúze posloužit jako zdroj energie, tak musí určitě platit:

a) Reakce musí být exotermická.

b) Protonové číslo reaktantů musí být malé. Energii lze uvolnit jen z fúzní reakce mezi lehkými jádry, jak plyne z obr. 1.1, ale v praxi je to také proto, aby bylo možné atomy bez velkých energetických výdajů ionizovat a tím jejich jádrům dovolit, aby se mohla přiblížit dost blízko k navození fúzní reakce. Dalším důvodem jsou velké energetické ztráty vyzařováním pro velká protonová čísla (těžká jádra).

c) Reakce musí mít navíc dostatečně velký účinný průřez (dostatečně velkou pravděpodobnost) při dosažitelných teplotách.

Z těchto kritérií vyplývají pro tokamaky hlavně fúzní reakce mezi izotopy vodíku:

**DT reakce**

Při současných technologických možnostech se jako nejvýhodnější reakce k získávání energie jeví reakce mezi deuteriem a tritiem:

$$D + T \rightarrow {}^{4}He\ (3.5MeV) + n\ (14.1MeV),$$

která má největší účinný průřez srážek při nejnižších teplotách.

Nevýhodou je potřeba tritia, které je radioaktivní s poločasem rozpadu 12,3 roku a v přírodě se téměř nevyskytuje (jen vzácně vzniká v horních vrstvách atmosféry působením kosmického záření).

Tritium se proto musí vyrábět z lithia pomocí reakcí:

$${}^{6}Li + n \rightarrow {}^{4}He + T + 4.8MeV$$

$${}^{7}Li + n \rightarrow {}^{4}He + T + n - 2.5MeV$$

**DD reakce**

DD reakce probíhá se zhruba 100x menší pravděpodobností než DT reakce (v rozsahu teplot 10keV až 100keV). Přesto se většinou právě DD reakce využívá k experimentům, protože deuterium lze relativně snadno získat z vody elektrolýzou a je stabilní:

$$D + D \rightarrow {}^{3}He\ (0.82MeV) + n\ (2.45MeV) \qquad (50\%)$$

$$D + D \rightarrow T\ (1.01MeV) + p\ (3.02MeV) \qquad (50\%)$$

Vzniklé tritium pak ještě může shořet v DT reakci a jádro $^{3}He$ v reakci:

$$D + {}^{3}He \rightarrow {}^{4}He\ (3.6MeV) + p\ (14.7MeV)$$

Pro úplnost je třeba uvést i třetí DD reakci, která ale oproti ostatním DD reakcím probíhá s mnohem menší pravděpodobností (asi $10^4$x menší): $D + D \rightarrow {}^{4}He + \gamma + 23{,}85MeV$.

**TT reakce**

Tritium může shořet i samo se sebou v TT reakci, která ale oproti DT reakci probíhá zhruba 100x méně častěji (v rozsahu teplot 10keV až 100keV):

$$T + T \rightarrow {}^{4}He + 2n + 11.33MeV \text{ (spojité rozdělení energií produktů)}$$

Nevýhodou všech těchto reakcí je vznik samostatných neutronů, které poškozují konstrukci tokamaku a způsobují jeho radioaktivitu. Na druhou stranu, výhodou neutronů je disipace uvolněné fúzní energie v objemu stěny, nikoli jen na povrchu. Druhým produktem těchto reakcí je neškodné hélium.

**"Advanced" reakce**

Zajímavou skupinou fúzních reakcí jsou tzv. "advanced" reakce, které neprodukují neutrony:

$$D + {}^{3}He \rightarrow \alpha + p$$

$$p + {}^{6}Li \rightarrow \alpha + {}^{3}He$$

$$p + {}^{7}Li \rightarrow 2\alpha$$

$$p + {}^{11}B \rightarrow 3\alpha$$

Velkou nevýhodou "advanced" reakcí oproti reakcím s izotopy vodíku je menší účinný průřez, potřeba vyšších teplot a vyšší ztráty vyzařováním.

Tabulka 1.1.: Hlavní reakce v řízené termojaderné fúzi.

| reakce | σ (10keV) [barn] | σ (100keV) [barn] | $\sigma_{MAX}$ [barn] | $\varepsilon_{MAX}$ [keV] | Q [MeV] | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D + D \rightarrow {}^{3}He + n$ | $2{,}78 \times 10^{-4}$ | $3{,}7 \times 10^{-2}$ | 0,11 | 1750 | 3,27 | reakce mezi izotopy vodíku |
| $D + D \rightarrow T + p$ | $2{,}81 \times 10^{-4}$ | $3{,}3 \times 10^{-2}$ | 0,096 | 1250 | 4,04 | |
| $D + D \rightarrow \alpha + \gamma$ | | | | | 23,85 | |
| $D + T \rightarrow \alpha + n$ | $2{,}72 \times 10^{-2}$ | 3,43 | 5 | 64 | 17,59 | |
| $T + T \rightarrow \alpha + 2n$ | $7{,}90 \times 10^{-4}$ | $3{,}4 \times 10^{-2}$ | 0,16 | 1000 | 11,33 | |
| $D + {}^{3}He \rightarrow \alpha + p$ | $2{,}2 \times 10^{-7}$ | 0,1 | 0,9 | 250 | 18,35 | "advanced" reakce |
| $p + {}^{6}Li \rightarrow \alpha + {}^{3}He$ | $6 \times 10^{-10}$ | $7 \times 10^{-3}$ | 0,22 | 1500 | 4,02 | |
| $p + {}^{7}Li \rightarrow 2\alpha$ | | | | | 17,35 | |
| $p + {}^{11}B \rightarrow 3\alpha$ | $(4{,}6 \times 10^{-17})$ | $3 \times 10^{-4}$ | 1,2 | 550 | 8,68 | |

vysvětlivky:

σ (10keV) - účinný průřez při teplotě 10keV

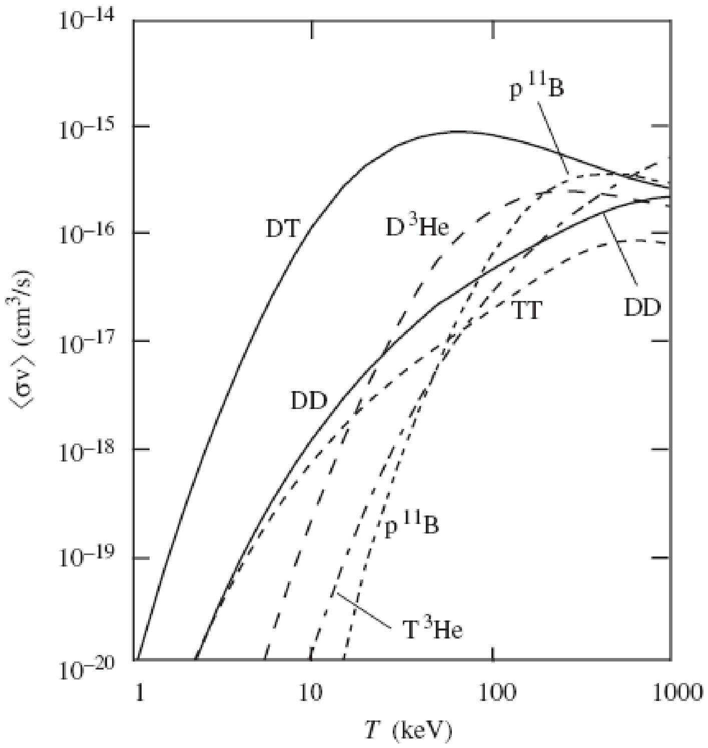
σ (100keV) - účinný průřez při teplotě 100keV

$\sigma_{MAX}$ - maximální účinný průřez

ε – srážková energie v těžišťové soustavě pro maximální účinný průřez

Q - energetický výtěžek reakce

Pozn.: účinné průřezy jsou, jak je v jaderné fyzice obvyklé, vyjádřeny v jednotce barn=$10^{-28}$m$^2$.




Obrázek 1.2: Závislost reaktivity (účinného průřezu zprůměrňovaného přes rychlosti při Maxwellovském rozdělení rychlostí, viz vztah 1.7) na teplotě pro různé fúzní reakce. Křivka DD reakce představuje celkový účinný průřez daný součtem všech tří možných DD reakcí. Převzato z [6].

## 1.2. Udržení

Jsou známy tři způsoby udržení plazmatu za termojaderných teplot: : gravitační, magnetické a inerciální udržení. Gravitační udržení, při kterém se látka drží svou vlastní gravitací, využívají hvězdy díky své velké hmotnosti, což je ovšem v lidských měřítkách neproveditelné, a proto bude následující popis věnován inerciálnímu a magnetickému udržení.

**Inerciální udržení**

V případě inerciálního udržení není palivo nijak drženo a spoléhá se jen na jeho vlastní setrvačnost (inerci). Krátký čas udržení (kolem desitiny nanosekundy) paliva má za následek potřebu vysokých hustot, aby fúzní reakce proběhly s vysokou četností. Palivo (deuterium a tritium) ve formě malého terčíku (několik mm) bývá ozařováno výkonnými lasery nebo výhledově iontovými svazky. V následné reakci na rychlé odpařování povrchu (tzv. ablace) se palivo uvnitř terčíku stlačí a zahřeje natolik, že mohou proběhnout fúzní reakce a uvolněná energie má za následek malou explozi. K hlavním obtížím inerciálního udržení patří potřeba rovnoměrného ozáření terčíku, rychlého opakování miniexplozí a vyšší účinnosti laserů (vyšší účinnost mají iontové svazky, které je ale obtížné zaostřit na terčík, a nebo lasery buzené sestavou LED diod, které jsou ale velmi drahé). V současné době je jedním z vedoucích zařízení v oblasti výzkumu inerciálního udržení např. NIF (National Ignition Facility), jež dokáže prostřednictvím 192 laserových svazků předat několikamilimetrovému terčíku energii až 2MJ (přitom laser spotřebuje 330MJ) a bude pravděpodobně schopen vyprodukovat více fúzní energie než lasery předají terčíku s palivem.

**Magnetické udržení**

U magnetického udržení se využívá základního rysu plazmatu jako ionizovaného plynu. Z Lorentzovy síly plyne pro nabitou částici v magnetickém poli trajektorie ve tvaru šroubovice podél magnetického pole s Larmorovým poloměrem

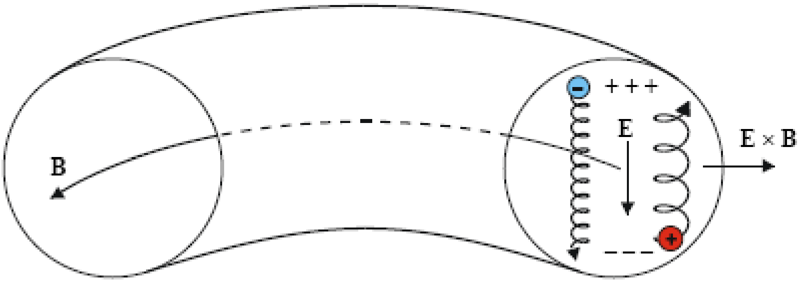
$$R_L = \frac{mv_\perp}{qB}, \qquad (1.1)$$

kde $v_\perp$ je rychlost kolmá na magnetické pole $B$. Pohyb nabitých částic napříč magnetickým polem je tak potlačen. Nabízí se tedy možnost úplně uzavřít pohyb nabitých částic v plazmatu v kruhovém magnetickém poli - vytvořením silného toroidálního (prstencového) magnetického pole. Taková částice by pak měla obíhat po šroubovici stočené do kruhu. Jenomže plazma má podobně jako plyn tendenci se rozpínat a částice vlivem srážek a také driftů unikají pryč.

Drift je pohyb nabité částice v kolmém směru na magnetické pole způsobený přítomností nějaké další síly kolmé na magnetické pole. Rychlost driftu je dána vztahem

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F}\times\mathbf{B}}{q\mathbf{B}^2}. \tag{1.2}$$

Necháme-li tedy částice obíhat po takto zakřivené dráze, bude na ně působit odstředivá síla, která se bude podílet na driftu nabitých částic (jedná se o tzv. drift zakřivení). Směr rychlosti závisí na znaménku náboje a proto dojde k separaci nábojů a tím ke vzniku elektrického pole $\mathbf{E}$. Ve vztahu (1.2) se tak objeví síla $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, která vyvolá tzv. E×B drift (viz obr. 1.4).



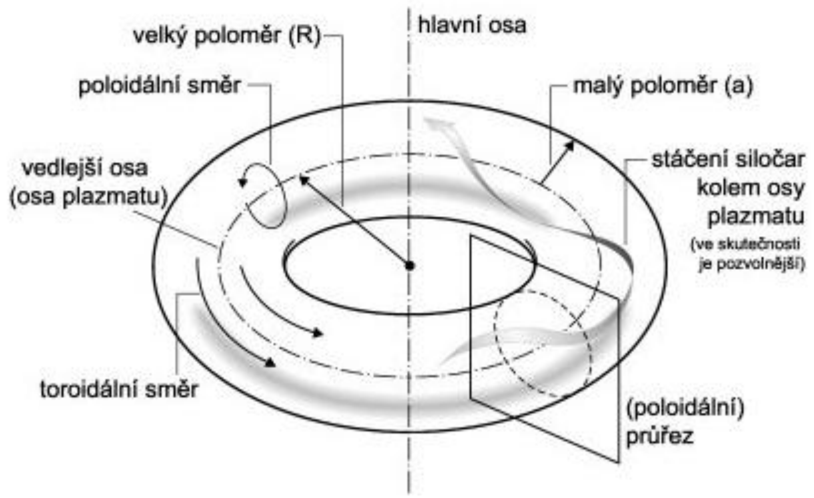

Obrázek 1.3: Separace náboje v důsledku driftu zakřivení a následný vznik elektrického pole tím i E×B driftu. Převzato z [9].

Toroidální magnetické pole je navíc nerovnoměrné. Vytvoříme-li totiž takové pole například stočenou cívkou, bude magnetické pole silnější směrem ke středu křivosti jak plyne z Ampérova zákona. Gradient magnetického pole pak vyvolá sílu ve směru klesajícího magnetického pole:

$$\mathbf{F} = -\mu\nabla|\mathbf{B}|, \tag{1.3}$$

kde $\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B}$ je magnetický moment proudové smyčky vytvořené Larmorovou rotací nabité částice. Výsledkem je znovu drift nabitých částic (lze ukázat, že se sčítá s driftem zakřivení) a separace náboje.

Přidáme-li ale další magnetické pole se siločárami v poloidálním směru (tj. kolem siločar toroidálního pole - viz obr. 1.4), získají nabité částice další rotaci (v poloidálním směru), která tyto drifty potlačí. Výsledné magnetické pole si pak lze představit jako šroubovici stočenou do kruhu. Z hlediska stability plazmatu se ukazuje, že poloidální stáčení by mělo být pomalejší než toroidální.



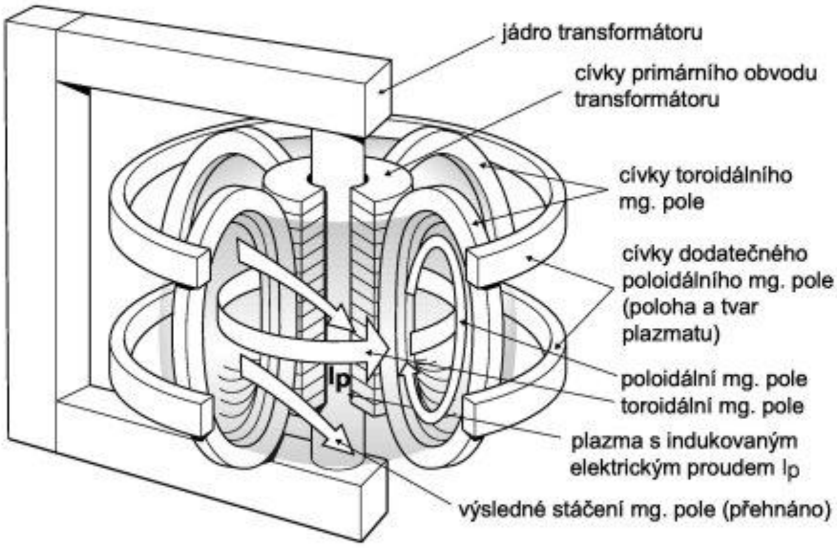

Obrázek 1.4: Základní pojmy toroidální geometrie. Převzato z [16].

V současné době je zřejmě nejvyvinutějším zařízením v oblasti výzkumu využití fúze jako zdroj energie tokamak, který k udržení plazmatu využívá právě takovéto magnetické pole tvořené jak toroidální tak poloidální složkou.

## 1.3. Tokamak

Tokamak byl navržen v padesátých letech sovětskými fyziky I. Tammem a A. Sacharovem a vyvinut pod vedením L. Arcimoviče. Název tokamak pochází z ruských slov "**то**роидальная **ка**мера в **ма**гнитных **к**атушках" (**to**roidal'naya **ka**mera v **ma**gnitnych **k**atushkach), které znamenají "toroidální komora v magnetických cívkách" a napovídají tak, že v tokamaku je horké plazma drženo v nádobě ve tvaru toru (pneumatiky) s pomocí magnetického pole cívek.

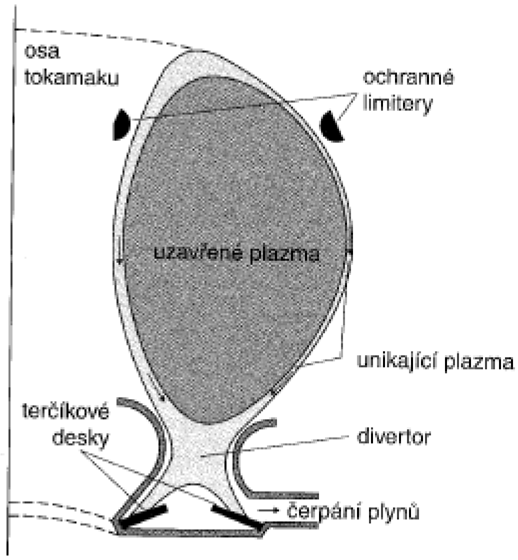
Tokamak si lze představit jako velký transformátor. Nejprve narůstající proud v primárním transformátorovém vinutí (viz obr. 1.6) vyvolá sílící magnetický tok jádrem transformátoru (jak plyne z Ampérova zákona). Změna magnetického toku pak (podle Faradayova zákona) indukuje ve vakuové komoře tokamaku napětí v toroidálním směru. Dojde k výboji a plyn (nejčastěji deuterium) ve vakuové komoře se ionizuje a mění v plazma, kterým začíná protékat proud (ve velkém horkém plazmatu až několik miliónů ampérů). Ten pomáhá plazma zahřívat a udržovat poloidálním magnetickým polem, které vytváří (tím se tokamak liší například od stelarátoru, ve kterém je celkové magnetické pole vytvářeno jen vnějšími cívkami). Silné toroidální magnetické pole (jednotky Tesla) je vytvářeno cívkami umístěnými po obvodu toru. Další pomocné poloidální pole je vytvářeno vnějšími cívkami a slouží k řízení polohy a tvaru plazmatu.




Obrázek 1.5: Horké plazma je drženo v nádobě ve tvaru toru (pneumatiky) pomocí silného toroidálního magnetického pole doprovázeného navíc poloidální složkou vyvolanou elektrickým proudem v samotném plazmatu. Převzato z [16].

Proud v primárním transformátorovém vinutí ale nemůže růst (resp. klesat) donekonečna a tokamak je proto zatím omezen na impulsní režim. Tento nedostatek bude ale pravděpodobně možné překonat vlečením elektrického proudu mikrovlnami pouštěnými ve směru proudu v plazmatu (tj. nabité částice budou hnány elektromagnetickými vlnami podobně jako surfař na mořské vlně) a také díky samoindukovanému proudu (Bootstrap current), který je důsledkem difúze plazmatu v toroidálním magnetickém poli.

Magnetické udržení není dokonalé a nabité částice difúzí a vlivem magnetických poruch unikají a následně narážejí do stěn nádoby. Tím dochází k poškozování nádoby a uvolňování nečistot do plazmatu. Nečistoty pak plazma ochlazují. Proto se do tokamaku zavádí divertor (viz obr. 1.7). Pomocnými cívkami je poloidální magnetické pole na okraji plazmatu vyvedeno do divertoru, kde nabité částice unikající z plazmatu narážejí do terčíkových desek a jsou odčerpávány pryč. Odčerpané částice paliva pak lze separovat od částic nečistot (tedy od všeho, co neslouží jako palivo v tokamaku - tj. vše kromě deuteria a tritia) a znovu je vrátit do plazmatu. Divertor tak bude moci v budoucích fúzních reaktorech sloužit i k odvodu spalin (tj. helia) z tokamaku. Nevýhodou divertoru ovšem je, že značně komplikuje schéma tokamaku a zmenšuje objem plazmatu.




Obrázek 1.7: Schématický průřez vakuové nádoby v tokamaku s divertorem. Převzato z [7].

### 1.3.1. Energetická bilance plazmatu v tokamaku

K nastartování a udržení fúzních reakcí v tokamaku je třeba zahřát plazma na desítky milionů stupňů a kompenzovat energetické ztráty způsobené vyzařováním a únikem částic z magnetického udržení. Plazma je v tokamaku ohříváno ohmickým ohřevem (způsobeným proudem indukovaným v plazmatu primárním vinutím), dodatečným vnějším ohřevem (např. elektromagnetickými vlnami nebo svazky neutrálních částic) a fúzními reakcemi (především termalizací alfa částic vzešlých z fúzních reakcí). Energetické ztráty jsou způsobeny vyzařováním a únikem částic z magnetického udržení.

Se zjednodušujícím předpokladem, že teploty iontů a elektronů jsou stejné, lze ze zákona zachování energie pro objemový element plazmatu v tokamaku napsat:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{3}{2}\left(n_e + \sum_{\lambda} n_{\lambda}\right)kT + divJ = P_{\Omega} + P_{\alpha} + P_{EXT} - P_R, \qquad (1.4)$$

kde prvni člen vyjadřuje časovou změnu hustoty energie plazmatu, $n_e$ hustota elektronů, $n_{\lambda}$ hustota příslušného typu iontů, $J$ tepelný tok vedením a prouděním, $P_{\Omega}$ hustota výkonu ohmického ohřevu, $P_{\alpha}$ ohřev objemového elementu alfa částicemi z fúzních reakcí, $P_{EXT}$ hustota výkonu vnějšího dodatečného ohřevu a $P_R$ ztráty vyzařováním. Práce plazmatu $v_e \cdot \nabla p_e + \sum_{\lambda} v_{\lambda} \cdot \nabla p_{\lambda}$ byla ve srovnání s ostatními členy rovnice (1.4) zanedbána.

**Ohmický ohřev**

Proud tekoucí plazmatem má kromě vytváření poloidální složky magnetického pole ještě další funkci: zahřívá plazma ohmickým ohřevem. Hustota výkonu ohmického ohřevu je dána vztahem $P_\Omega = \eta \cdot j^2$, přičemž rezistivita plazmatu $\eta$ výrazně klesá s teplotou, neboť platí $\eta \propto T^{-3/2}$, a tak je ohmický ohřev účinný "jen" do několika málo desítek milionů stupňů. Vyšší teploty by vyžadovaly mnohem vyšší proud, a tedy příliš silné poloidální pole v poměru k technicky proveditelnému toroidálnímu poli. K dosažení dostatečné četnosti fúzních reakcí je ale zapotřebí teploty okolo sta miliónů stupňů a je tedy třeba dodatečného vnějšího ohřevu. Ohmický ohřev tak lze pro vysokoteplotní plazma v tokamaku ve srovnání s $P_{EXT}$ příp. $P_\alpha$ zanedbat (u tokamaků s extrémě silným magnetickým polem bude přípustný vyšší proud plazmatem a proto bude třeba brát ohmický ohřev v úvahu).

**Vnější ohřev**

Ohřev elektromagnetickými vlnami využívá rotačního pohybu nabitých částic kolem magnetického pole. Elektromagnetické vlny odpovídající elektronové nebo iontové cyklotronové frekvenci ($\omega = qB/m$) pak v rezonanci předávají iontům nebo elektronům svou energii. (podobně jako v mikrovlnné troubě, kde molekuly vody díky svému dipólovému momentu rezonují s frekvencí 2,45GHz). Elektronová cyklotronová rezonance (ECRH) se provádí vlnami o frekvenci 28GHz/T a iontová (ICRH) 15,2 Z/A MHz/T (kde T jsou jednotky Tesla, Z je počet protonů a A počet nukleonů urychlovaných iontů). Využívají se také vyšší harmonické frekvence (tj. celočíselné násobky těchto frekvencí - zejména druhý a třetí). Výhodou této metody je, že díky závislosti cyklotronové frekvence na magnetickém poli je možné zahřívat plazma v tokamaku na různých místech s různou magnetickou intenzitou (toroidální magnetické pole v tokamaku klesá nepřímo úměrně se vzdáleností od hlavní osy).

Používá se také tzv. dolní hybridní rezonance (LHR), která má frekvenci mezi iontovou a elektronovou cyklotronovou frekvencí (1-8GHz). Spíše než k ohřevu plazmatu se ale používá k vlečení elektrického proudu.

Další možností jak plazma zahřát je vstřelením částic urychlených na velké rychlosti. Vlivem srážek je pak jejich kinetická energie předávána částicím v plazmatu a tím se plazma zahřívá. Nabité částice (nejčastěji deuterony) lze snadno urychlit elektrickým polem vytvořeným řadou vysokonapěťových mřížek. Ionty však nelze do tokamaku vstřelit přímo, protože by je jeho silné magnetické pole odklonilo. Proto jsou neutralizovány průletem deuteriovým plynem. Po jejich vstřelení do plazmatu jsou částice srážkami znovu ionizovány a zachyceny magnetickým polem. Energie neboli rychlost částic vstřelovaných do plazmatu nesmí být přitom příliš velká, aby plazmatem neproletěly na druhou stěnu nádoby.

Svazky neutrálních částic lze využít také v diagnostice plazmatu, kdy se sleduje buď záření nečistot plazmatu díky nábojové výměně se svazkem, nebo záření samotného svazku v důsledku srážkové excitace.

Z hlediska reaktorů bývá užitečné vyjádřit vnější ohřev ve tvaru:

$$P_{EXT} = P_{FUS}/Q = 5P_\alpha/Q, \qquad (1.5)$$

kde $Q = P_{FUS}/P_{EXT}$ je faktor zesílení fúzního výkonu.

**Ohřev fúzními reakcemi**

Nabité produkty fúzních reakcí (především částice α) jsou zachyceny magnetickým polem v plazmatu a srážkami pak předávají energii z fúzní reakce ostatním částicím ve formě kinetické energie a tím plazma zahřívají. Od určité četnosti fúzních reakcí plazma nepotřebuje vnější ohřev a dojde k "zapálení". Předpokládá se ale, že v budoucích tokamacích bude plazma ponecháno závislé na vnějším ohřevu, aby byla zajištěna lepší ovladatelnost výkonu a také proto, aby bylo možné optimalizovat profil proudu a vytvářet tak transportní bariéry, které zlepšují udržení energie plazmatu.

Pro četnost fúzních reakcí v jednotce objemu platí:

$$R = \frac{n_i n_j \langle \sigma v \rangle}{1 + \delta_{ij}} \qquad (1.6)$$

kde $n_i$ a $n_j$ jsou hustoty jader paliva, $\delta_{ij}$ Kroneckerovo delta (pro reakce mezi stejnými jádry, které se započítávají dvakrát), $\sigma$ účinný průřez reakce, $v$ velikost vzájemné rychlosti částic a závorky $\langle\ \rangle$ značí středování přes možné vzájemné rychlosti:

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \sigma(v) v f(v) dv, \qquad (1.7)$$

kde f(v) představuje rozdělovací funkci rychlostí $v$.

Pro plazma složeného směsí deuteria a tritia lze pro ohřev α částicemi za předpokladu, že vyprodukované α částice srážkami předají celou energii $E_\alpha$, kterou získaly z fúzní reakce, napsat:

$$P_\alpha = n_D n_T \langle \sigma v \rangle E_\alpha = n_D n_T \langle \sigma v \rangle E_{FUS}/5, \quad (1.8)$$

kde $E_{FUS}$ je celková energie uvolněná při fúzní reakci, neboť čtyři pětiny uvolněné energie odnášejí neutrony. DD a TT reakce mají při teplotách v rozmezí 10keV až 100keV zhruba stokrát menší účinný průřez a lze je proto ve srovnání s DT reakcemi zanedbat.

**Radiační ztráty**

Plazma vyzařuje elektromagnetické záření v rozsahu od milimetrových vln po záření gamma. Elektromagnetické vyzařování představuje podstatnou část energetických ztrát plazmatu a je také cenným zdrojem informací pro diagnostiku plazmatu. Plazma v tokamaku ztrácí energii brzdným zářením, cyklotronním zářením a zářením v důsledku dexcitačních a rekombinačních procesů.

Brzdné záření pochází především ze srážek elektronů s ionty, neboť při srážce stejných částic se v nerelativistickém případě radiační pole částic vyruší. Ztráty způsobené brzdným zářením lze pro plně ionizované plazma vyjádřit vztahem (odvození bez kvantových efektů lze najít např. v [18]):

$$P_B = \frac{e^6}{24\pi\varepsilon_0^3 c^3 m_e h} n^2 Z^2 \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} g_{ff}\left(\frac{Z^2}{T_e}\right), \quad (1.9)$$

kde $g_{ff}$ je Gauntův faktor představující korekci na kvantové efekty. Vzhledem k tomu, že výsledek klasické teorie je dobrou aproximací, bývá Gauntův faktor blízký jedné. V případě více druhů iontů s rozdílnými protovými čísly je třeba $Z$ nahradit efektivním nábojem

$$Z_{eff} = \frac{\sum_i n_i Z_i^2}{n_e}. \qquad (1.10)$$

Vlnové délky brzdného záření plazmatu v tokamaku leží především v oblasti měkkého rentgenového záření (tedy 0,1nm až 10nm, což odpovídá energiím od 12keV do 0,12keV).

Cyklotronní záření způsobené pohybem nabitých částic ve spirálách podél magnetických siločar podléhá obvykle v plazmatu uvnitř tokamaku silné reabsorbci a lze jej ve srovnání s brzdným zářením zanedbat. S přihlédnutím k absorbci, opětovné emisi a odrazu cyklotronního záření od stěn tokamaku lze pro ztráty způsobené cyklotroním zářením vzít aproximační vztah (viz [18]):

$$P_C = 6{,}2\cdot 10^{-17} B^2 n_e T_e \left(1 + T_e/204 + \ldots\right) \qquad \left(W/m^3\right). \qquad (1.11)$$

Energetické ztráty způsobené deexcitačními a rekombinačním procesy by byly v čistém plazmatu složeném jen z deuteria a tritia zanedbatelné s výjimkou okrajové chladnější části plazmatu. Přítomnost nečistot je ovšem v plazmatu nevyhnutelná. Kromě alfa částic vzešlých z fúzních reakcí se do plazmatu dostávají nečistoty v důsledku interakce plazmatu se stěnami vakuové nádoby. Nečistoty v plazmatu mají jak pozitivní, tak negativní následky pro fúzní plazma. Přítomnost nečistot s vyšším protonovým číslem, které je obtížnější plně ionizovat má za následek nárůst vyzařování v důsledku deexcitačních a rekombinačních procesů a tím ochlazení plazmatu. Nečistoty také výrazně ředí palivo.

Poměr tlaku plazmatu a tlaku magnetického pole:

$$\beta \equiv \frac{\sum_j n_j T_j}{B^2 / 2\mu_0}, \qquad (1.12)$$

kde sumace probíhá přes všechny druhy iontů a elekrony, je magnetohydrodynamickými nestabilitami limitován na několik procent a elektrony uvolněné nečistotami s vyšším protonovým číslem mohou výraznou část tohoto limitu spotřebovat. Výhodou nečistot, nacházejí-li se na okraji plazmatu, je rovnoměrnější rozložení energetického toku na stěny nádoby a tím méně ostrý energetický tok na terčíkové desky divertoru (proto bývají nečistoty do blízkosti divertoru vstřikovány záměrně, což má navíc za následek snadnější čerpání helia z tokamaku díky následnému ustanovení většího tlaku a hustoty neutrálních částic v blízkosti pump u divertoru ) a lze je také využít pro diagnostiku plazmatu.

### Transportní ztráty

Celkové energetické ztráty v důsledku tepelného toku vedením a prouděním lze vyjádřit prostřednictvím doby udržení energie, která představuje dobu, za kterou by plazma tepelným tokem ztratilo stejné množství energie, jaké obsahuje:

$$\tau_E = \frac{\int_V \frac{3}{2}\left(n_e + \sum_\lambda n_\lambda\right) kT dV}{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}, \qquad (1.13)$$

kde integrál v čitateli probíhá přes celý objem plazmatu a integrál ve jmenovateli přes povrch plazmatu.

V praxi bývá používána také globální doba udržení energie zahrnující ztráty vyzařováním:

$$\tau_E^* = \frac{\int_V \frac{3}{2}\left(n_e + \sum_\lambda n_\lambda\right) kT dV}{\int_V P_R dV + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}. \qquad (1.14)$$

### Zprůměrovaná rovnice energetické bilance

Integrací rovnice (1.2) přes celý objem plazmatu, vydělením objemem plazmatu a s použitím aproximací $\overline{n_i n_j \langle \sigma v \rangle} \approx \overline{n_i}\,\overline{n_j}\,\overline{\langle \sigma v \rangle}$ a $\overline{\langle \sigma v \rangle (T)} \approx \langle \sigma v \rangle (\overline{T})$ vznikne rovnice:

$$\frac{d}{dt} e = P_\alpha \left(1 + \frac{5}{Q}\right) - \frac{e}{\tau_E} - P_R = P_\alpha \left(1 + \frac{5}{Q}\right) - \frac{e}{\tau_E^*}, \qquad (1.15)$$

kde $e = \frac{3}{2}\left(\overline{n_e} + \sum_{\lambda}\overline{n_\lambda}\right)kT$ je hustota energie vztažená k celému objemu plazmatu a ve všech členech rovnice vystupuje průměrná teplota a průměrná hustota $\overline{n_i} = \int_V n_i dV/V$ .

### 1.3.2. Diagnostika plazmatu v tokamaku

K řízení činnosti tokamaku je nutné znát stav plazmatu ve vakuové nádobě. Měření vlastností plazmatu v tokamaku ale není snadné, protože do tak horkého plazmatu není možné vložit žádný přístroj nebo pevnou sondu. Nejenže by takovou sondu horké plazma zničilo, ale hlavně by došlo k ochlazení a znečištění plazmatu. Proto jsou vlastnosti plazmatu získávány z měření záření vyzařovaného plazmatem, z vylétávajících částic nebo také vysláním laserového paprsku, mikrovlnného záření nebo neutrálních částic do plazmatu a následného měření jejich útlumu nebo rozptylu. I tak jsou ale sondy zářením, částicemi a vysokou teplotou silně namáhány. Diagnostik plazmatu je velké množství[1] (v moderních tokamacích i více než 50). Měří se energie plazmatu, teplota elektronů, teplota iontů, tlak plazmatu, ztráty vyzařováním, proud plazmatem, magnetické pole, hustota plazmatu a další. K určení jedné fyzikální veličiny se často využívá i více diagnostických metod a také hodnoty dalších veličin. Většina měření se provádí jen pro radiální profil, protože z axisymetrie tokamaku plyne, že plazma v tokamaku své vlastnosti v toroidálním směru ani poloidálním směru příliš nemění.

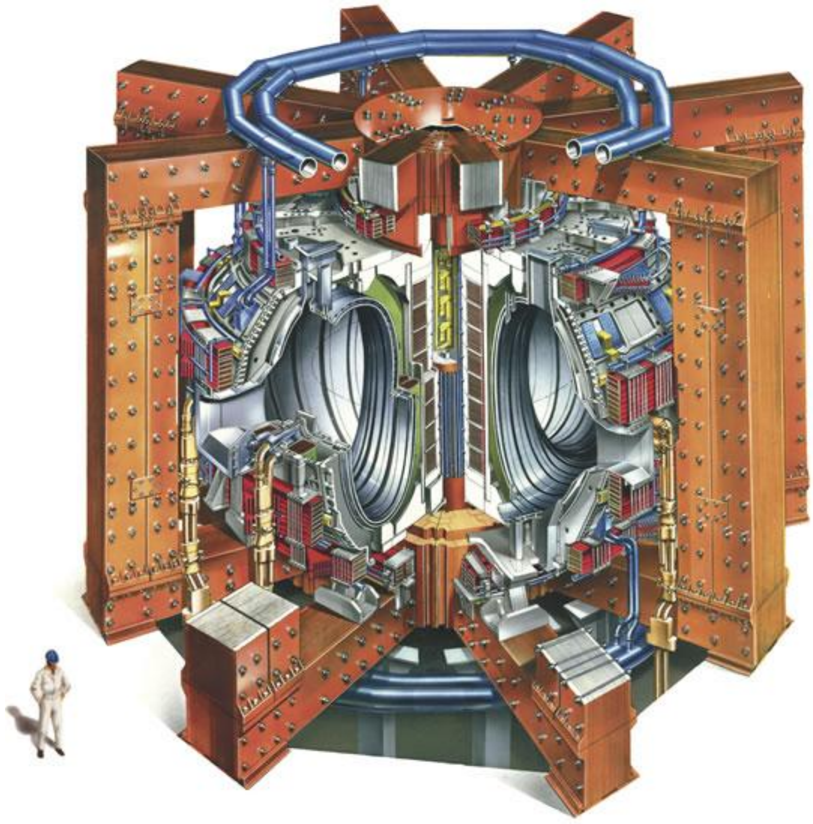
Diagnostiky plazmatu můžeme rozdělit na aktivní a pasivní. Aktivní diagnostika využívá interakci částic nebo záření z plazmatem a tím plazma ovlivňuje. Pasivní diagnostika jen měří záření nebo částice vycházející z plazmatu.

### 1.3.3. Tokamak JET

Tokamak JET (Joint European Torus) byl uveden do provozu v roce 1983 nedaleko anglického Culhamu a je zatím největším zařízením s magnetickým udržením plazmatu a také jediným tokamakem v provozu uzpůsobeným k experimentům s reakcemi mezi deuteriem a tritiem. Byl navržen především pro studium plazmatu za podmínek blízkým podmínkám, které by mohly panovat v budoucích fúzních reaktorech. V roce 1997 se podařilo uvolnit rekordních 16MW fúzní energie při příkonu 24MW do plazmatu a velmi tak podpořit fyzikální oprávněnost termojaderné fúze pro získávání energie. V současnosti je primárním

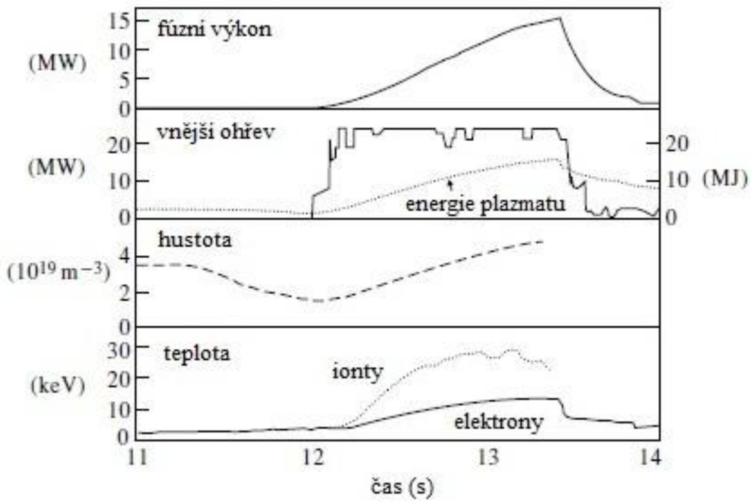
[1] U tokamaku JET činní hrubá data (tj. nezpracovaná data ze senzorů) desítky GB na puls, u tokamaku ITER se předpokládá několik TB na puls.

úkolem tokamaku JET příprava pro konstrukci a řízení tokamaku ITER, který má prověřit především technickou proveditelnost fúzní elektrárny na principu tokamaku.



Obrázek 1.6: Pohled do anglického tokamaku JET

Vakuová nádoba tokamaku JET s hlavním poloměrem 2,96m a poloidálním průřezem ve tvaru písmene D o rozměrech 2,5m na 4,2m umožňuje pojmout plazma o objemu kolem $80m^3$. Primární vinutí indukující v plazmatu proud až 5MA je umístěno uprostřed toru na jeho hlavní ose. Silné toroidální pole o velikosti 3,45T na vedlejší ose plazmatu je vytvářeno 32 měděnými cívkami ve tvaru písmene D rovnoměrně rozloženými po obvodu toru. Tvar písmene D byl zvolen díky výhodnějšímu rozložení sil působících na cívky. Zároveň se v experimentu ukázalo, že je optimální i z hlediska udržení plazmatu. Šest cívek poloidálního pole slouží k tvarování, stabilizování a upravování polohy plazmatu. Systém pomocného zahřívání plazmatu se skládá ze vstřikování neutrálních svazků (o výkonu 34MW), zahřívání iontovou cyklotronovou rezonancí (10MW) a dolně hybridní rezonance (7MW), která se dá použít spíše k vytváření proudu plazmatem. Plazmový výboj v tokamaku JET trvá několik sekund přičemž plazma dosahuje hustot až $10^{20}$ částic krychlovém metru a teplot řadu $10^4$eV.




Obrázek 1.7. Průběh výboje, ve kterém byl dosažen fúzní výkon 16MW.
Převzato a přeloženo z [1].

Mezi diagnostiky na tokamaku JET patří např. diagnostika pomocí neutrálních svazků (díky Dopplerovu efektu lze z vyzařování nečistot zjistit teplotu iontů a ze Starkova jevu směr magnetického pole v plazmatu), LIDAR (Light Detection And Ranging) využívající Thomsonova rozptylu k určení elektronové teploty z Dopplerovského rozšíření spekrální čáry laserového záření namířeného do plazmatu a elektronové hustoty z intenzity odraženého laserového záření, systém bolometrů měřící celkovou energii vyzařovanou plazmatem, diagnostiku měkkého rentgenového záření, systém pro měření profilu neutronové emisivity a mnoho dalších.

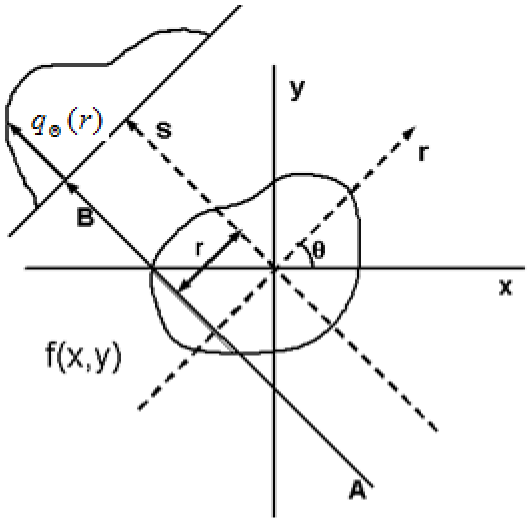
V rámci podpory projektu ITER bylo v tokamaku JET zavedeno několik inovací. Tokamak JET stejně jako většina ostatních tokamaků používal destičky vyrobené s uhlíkových kompositů k ochraně vnitřní stěny vakuové nádoby před vlivy plazmatu. Uhlíkové komposity nejsou vhodné pro provoz s tritiem, neboť jej absorbují, a proto byly na vnitřních stěnách vakuové nádoby nahrazeny berylliem (výhodou je nízké protonové číslo, nevýhodou nízká teplota tání) a na terčíkových deskách divertoru wolframem (dobře snáší vysoké teploty ale nevýhodou je vysoké protonové číslo a tedy vysoké ztráty vyzařováním je-li plazma znečištěno wolframem), Za účelem studia plazmatu za podmínek bližším podmínkám v tokamaku ITER byl zvýšen výkon ohřevu neutrálnimi svazky byl z 25MW na 35MW a prodloužena délka impulzu svazku neutrálních atomů na 20s (nebo na 40s při polovičním výkonu). Plazma tak bude možné dovést k vyšším tlakům, což umožní lepší studium nestabilit a technik pro jejich potlačení.

Další klíčovou součástí podpory projektu ITER je vysokofrekvenční vstřikovač tablet s deuteriem umožňující vstřelit až 60 tablet za vteřinu. Vstřelování tablet do plazmatu bude sloužit hlavně za účelem doplnění paliva a potlačení okrajových nestabilit.

# 2. Tomografie

Tomografie[2] je metoda, která umožňuje zobrazit průřez měřeného objektu (resp. průřez měřené fyzikální veličiny objektem) aniž by bylo nutné měřený objekt porušit. Tomografických metod je velké množství a využívá se v řadě vědních oborů (např. v medicíně, defektoskopii, archeologii, biologii a geofyzice). Obvykle se průřez měřeného objektu (tomografický obraz neboli tomogram) sestavuje z projekcí (např. z projekcí útlumu záření) v různých úhlech matematickou metodou zvanou tomografická rekonstrukce[3].

Různé tomografické metody využívají k sestavení obrazu objektu odlišná měření. Většina je ale založena na stejném principu. Například v počítačové tomografii, která je často využívána v lékařství, je objekt ozařován z různých úhlů rentgenovým zářením. Z projekcí útlumu záření v různých směrech pak lze sestavit obraz objektu.




Obrázek 2.1: Projekce objektu pod úhlem θ. Převzato z http://www.wikipedia.org.

Počáteční intenzita $I_0$ paprsku procházejícího zkoumaným objektem pod úhlem θ ve vzdálenosti r od zvolené středové osy (viz obr. 2.1) bude potom zeslabena podle rovnice $I = I_0 e^{-q}$, kde q je celkový útlum paprsku. Každému bodu (x,y) ve zkoumaném objektu lze přiřadit koeficient útlumu μ(x,y) a celkový útlum paprsku q pak lze brát jako integrál koeficientu útlumu podél přímky, kterou paprsek prochází:

$$q(r,\theta) = \int \mu(x,y)ds\,. \qquad (2.1)$$

[2] Slovo tomografie pochází z řeckých slov *τόμος (tomos),* které se dá přeložit jako „řez, výřez“ a *γράφειν* (gráphein) , které znamená „malovat, psát“.
[3] Matematické základy tomografické rekonstrukce položil rakouský matematik Johann Radon (1887-1956), který se narodil v Děčíně.

Rovnici pro celkový útlum paprsku (2.1) pak lze s uvážením vztahu $r = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$ přetransformovat do tvaru:

$$q(x\cos(\theta) + y\sin(\theta), \theta) = \int \mu(x, y)\delta(x\cos(\theta) + y\sin(\theta) - r)dxdy, \qquad (2.2)$$

kde δ je Diracova funkce[4]. Vztah (2.2) je také znám pod názvem Radonova transformace (obecně může mít více rozměrů).

Z centrálního řezového teorému (viz kap. 2.1.1) plyne, že k nalezení přesného obrazu objektu (resp. obrazu koeficientů útlumu) je potřeba provést projekce pro nekonečně mnoho úhlů a nekonečně mnoho vzdáleností od středové osy (a také tak, aby projekce zabíraly celý objekt). Nalezením inverzní Radonovy transformace je pak teoreticky možné přesný obraz objektu sestavit.

## 2.1. Analytický přístup

### 2.1.1. Inverzní Radonova transformace a centrální řezový teorém

Vztah (2.2) lze zobecnit na Radonovu transformaci v N-rozměrném prostoru přepsáním do tvaru (viz [2]):

$$\hat{R}\{g(\mathbf{x})\} = f(\mathbf{p}) = \int g(\mathbf{x})\delta(p - \mathbf{x}\cdot\mathbf{n})d\mathbf{x}, \qquad (2.3)$$

kde $g(\mathbf{x})$ je hledaná funkce kartézských souřadnic reprezentovaných vektorem $\mathbf{x}$ (nulová za určitou hranicí B), $f(\mathbf{x})$ projekce funkce $g(\mathbf{x})$ ve směru vektoru $\mathbf{p}$, $p = |\mathbf{p}|$ a $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$. Cílem k vyřešení rovnice (2.3) vzhledem k $g(\mathbf{x})$ je nalezení inverzní Radonovy transformace:

$$g(\mathbf{x}) = \hat{R}^{-1}\{f(\mathbf{p})\}, \qquad (2.4)$$

čehož lze dosáhnout prostřednictvím Fourierovy transformace, která je obvykle v N-rozměrném prostoru definována vztahem:

$$\tilde{g}(\boldsymbol{\rho}) = \hat{F}\{g(\mathbf{x})\} = \int g(\mathbf{x})\exp(-2\pi i\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{x})d\mathbf{x} \qquad (2.5)$$

a pro inverzní Fourierovu transformaci pak platí:

$$g(\mathbf{x}) = \hat{F}^{-1}\{\tilde{g}(\boldsymbol{\rho})\} = \int \tilde{g}(\boldsymbol{\rho})\exp(2\pi i\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{x})d\boldsymbol{\rho}. \qquad (2.6)$$

Rozšířením Fourierovy transformace (2.3) o Diracovu δ-funkci lze získat vztah:

$$\tilde{g}(\boldsymbol{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int g(\mathbf{x})\exp(-2\pi it)\delta(t - \boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{x})d\mathbf{x}d\mathbf{t}, \qquad (2.7)$$

---

[4]Diracova delta funkce je "funkce" (přesněji distribuce) s vlastnostmi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx = 1,\ \delta(0) = \infty \text{ a } \delta(x) = 0 \text{ pro } x \neq 0.$$

kde exponenciela závisí jen na $t$ (vztah je pro $t \neq \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{x}$ nulován δ funkcí) a lze ji proto přesunout před první integrál. Spolu se zavedním $\boldsymbol{\rho} = \rho \cdot \mathbf{n}$ a nového parametru $p$ prostřednictvím substituce $t = p\rho$ lze vztah (2.7) upravit na tvar:

$$\tilde{g}(\rho\mathbf{n}) = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi i p\rho) \int g(\mathbf{x})\delta(p\rho - \rho\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} dp, \qquad (2.8)$$

ve kterém lze ve vnitřním integrálu spatřit Radonovu transformaci a ve vnějším integrálu jednorozměrnou Fourierovu transformaci. S využitím vlastnosti δ-funkce

$$\rho \int f(\mathbf{x})\delta(\rho x) = f(0)$$

lze vztah (2.8) upravit do tvaru:

$$\tilde{g}(\rho\mathbf{n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi i p\rho) f(p\mathbf{n}) dp = \hat{F}_1 \hat{R}\{g(\mathbf{x})\}, \qquad (2.9)$$

N-rozměrnou Fourierovu transformaci lze tedy vyjádřit jako jednorozměrnou Fourierovu transformaci aplikovanou na N-rozměrnou Radonovu transformaci:

$$\hat{F} = \hat{F}_1 \hat{R}, \qquad (2.10)$$

což je tvrzení centrálního řezového teorému (nebo také projekčního teorému). Z aplikace inverzni Fourierovy transformace na vztah (2.10) pak vyplyne vzorec pro inverzní Radonovu transformaci:

$$\hat{R}^{-1} = \hat{F}^{-1} \hat{F}_1, \qquad (2.11)$$

kterou lze tak nalézt prostřednictvím algoritmů řešících Fourierovu transformaci. V praxi se ale k sestavení obrazu objektu využívají jiné metody, protože projekce lze naměřit jen pro omezený počet diskrétních hodnot a inverzní Radonova transformace je pak příliš ovlivňována šumem.

### 2.1.2. Cormackova metoda

Při Cormackově metodě se jak hledaná funkce $g(\mathbf{x})$, tak její projekce $f(\mathbf{p})$ rozloží na nekonečný počet polynomických funkcí a místo řešení integrálních rovnic v Radonově transformaci se řeší nekonečný počet lineárních rovnic, což je výhodnější pro numerické výpočty a navíc lze omezený počet projekcí promítnout do řešení omezením polynomických řad na vhodný počet členů. Pro plazma s kruhovým profilem je Cormackova metoda výhodná také z fyzikálního hlediska, neboť funkce $g(\mathbf{x})$ je rozložena do polárních souřadnic, ve kterých lze dobře odrazit tendeci plazmatu k poloidální symetrii v důsledku symetrického magnetického pole a periodické chování plazmatu (magnetické ostrovy).

Funkci $g(\mathbf{x})$ lze vyjádřit jako součet nekonečné řady prvků ortogonální báze:

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{l=0}^{\infty} A_{lm} h_l(r) Y_{lm}(\mathbf{n}), \qquad (2.12)$$

kde $Y_{lm}(\mathbf{n})$ je již separovaná úhlová a $h_l(r)$ radiální část a $N$ počet dimenzí. Cílem je tedy nalézt $A_{lm} h_l(r)$ ze znalosti $f(p\mathbf{n})$ (sférické funkce $Y_{lm}(\mathbf{n})$ lze v trojrozměrném případě nalézt např. v [19]). Řešení v trojrozměrném prostoru je celkem pracné a proto se následující popis omezí jen na dvourozměrný případ. Báze sférických funkcí je ve dvourozměrném případě poměrně jednoduchá:

$$Y_{l1,2}(\vartheta) = \pm \exp(il\vartheta) \qquad (2.13)$$

Vztah (2.12) tím přejde do zjednodušeného tvaru:

$$g(r, \vartheta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l(r) \exp(il\vartheta), \quad (2.14)$$

kde $g_l(r) = A_{lm} h_l(r)$ a vztah (2.14) je vlastně rozšířením do Fourierovy řady. Stejným způsobem lze vyjádřit projekci:

$$f(p, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(p) \exp(il\vartheta). \qquad (2.15)$$

Cormack ve své práci [20] odvodil vztah mezi $g_l(r)$ a $f_l(p)$:

$$g_l(r) = -\frac{1}{\pi r} \int_r^{\infty} \frac{df_l(p)}{dp} \frac{T_l(p/r)}{\sqrt{p^2/r^2 - 1}} dp, \qquad (2.16)$$

kde $T_l(z)$ je Čebyševův polynom prvního druhu:

$$T_l(z) = \cos(\arccos(z)n). \qquad (2.17)$$

Ze vztahu (2.15) plyne, že $f_l(p)$ lze získat z projekční funkce inverzní Fourierovou transformací:

$$f_l(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p, \varphi) \exp(-il\varphi) d\varphi. \qquad (2.18)$$

Ze znalosti projekce $f(p, \varphi)$ pro $p > r$ tak lze plně určit hledanou funkci (2.14) jak plyne ze vztahu (2.16). Pro omezené objekty, kde je argument v integrálu nulový pro $p$ větší než určité hraniční $r$ lze $f_l(p)$ a $g_l(r)$ rozšířit do řady polynomických funkcí se stejnými koeficienty [21]. V případě, kdy je rovnice (2.16) omezená na interval $0 < p < 1$ lze $f_l(p)$ a $g_l(r)$ rozšířit následujícím způsobem:

$$g_l(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{lk} (l + 2k + 1) Z_{lk}(r) \qquad (2.19)$$

$$f_l(p) = 2\sqrt{1 - p^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{lk} U_{l+2k}(p), \qquad (2.20)$$

kde $Z_{lk}(r)$ představuje Zernikovy polynomy:

$$Z_{lk}(r)=\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^s(l+2k-s)!\,r^{l+2k-2s}}{s!(l+k-s)!(k-s)!} \qquad (2.21)$$

$U_{l+2k}(p)$ Čebyševovy polynomy druhého druhu:

$$U_m(z)=\frac{1}{m+1}\frac{d}{dz}T_{m+1}(z) \qquad (2.22)$$

a $a_{lk}$ koeficienty, které mají $f_l(p)$ a $g_l(r)$ společné. Lze je získat např. metodou nejmenších čtverců z rovnic (2.20) a (2.18) a následně dosadit do vztahů pro hledanou funkci *g*. Při řešení se dají se použít i jiné polynomy. Výběr vhodných polynomů pak záleží především na typu úlohy. Řešení lze také vyjádřit pomocí Hankelovy transformace (viz [2]).

V experimetech bývá konečný počet projekcí a proto je projekční funkce známa jen pro konečný počet *p* a *φ*, což lze při řešení Cormackovou metodou zohlednit následujícím způsobem. Projekční funkci lze s pomocí rovnic (2.15) a (2.20) přepsat do tvaru:

$$f(p,\varphi)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{lk}W(l,k,p,\varphi), \qquad (2.23)$$

kde

$$W(l,k,p,\varphi)=2\sqrt{1-p^2}\,U_{l+2k}(p)\exp(il\varphi). \quad (2.24)$$

Pro *Q* projekcí se výraz (2.23) omezí na

$$f_i=\sum_{K=1}^{Q}W_{iK}a_K\ ,\ \ i,K\in\hat{Q}, \qquad (2.25)$$

kde index *K* je jednoznačně definován indexy *k* a *l*. Matice **W** tvořená prvky $W_{iK}$ je pro dané experimentální uspořádání neměnná, jak plyne z rovnice (2.24). Po nalezení inverzní matice k matici **W** může počítač z naměřených projekcí $f_i$ rychle vypočíst koeficienty $a_K$ a následně i hledanou funkci *g* až do radiálního řádu *k* a úhlového řádu *l* podle vztahů (2.14) a (2.19).

Jak již bylo zmíněno, k přesné rekonstrukci funkce *g* je třeba kompletní znalost projekční funkce *f*, což ale v praxi není možné a konečný počet projekcí má za následek systematickou chybu zvanou aliasing. Obecně je aliasing efektem, který může nastat při převodu spojité informace na diskrétní. Aby k aliasingu nedocházelo, musí být podle Shannonova teorému vzorkovací frekvence aspoň dvakrát větší než nejvyšší frekvence obsažená ve vzorkovaném signálu. Není-li tato podmínka splněna, dochází ke zfalšování (odtud název aliasing) původní frekvence a ztrátě informace (jev lze pozorovat např. u filmového záznamu rychle se otáčející vrtule letadla). V případě tomografické rekonstrukce se místo frekvencí uvažují velikosti fluktuací v rekonstruovaném objektu. Nedostatečná hustota naměřených projekcí pak vede na zdeformovanou rekonstrukci. Zajímavým důsledkem konečného počtu projekcí $f(p,\varphi)$ je také fakt, že s rostoucí hustotou podle *p* se zhoršuje homogenita rekonstruované funkce (zatímco obvykle nižší počet projekcí s různými úhly *φ* udává jen množství informace obsažené v rekonstrukci $g$). V případě nízké hustoty projekcí podle $p$ se preferují pixelové metody popsané v následující kapitole.

## 2.2. Pixelové metody

Dvourozměrný tomografický obraz lze rozdělit na plošné elementy neboli pixely. Konečný počet projekcí odrážejí pixelové metody v rozdělení tomografického obrazu na konečný počet pixelů. Velikost pixelů musí být dostatečně malá, aby bylo oprávněné předpokládat zhruba stejnou velikost měřené veličiny uvnitř pixelu, a zároveň by počet pixelů neměl být příliš velký, protože detektory podávají o obrazu omezenou informaci. Lze použít různé tvary pixelů: čtvercové, soustředné kružnice s úhlovým rozdělením a bez úhlového rozdělení, pixely ve tvaru magnetických povrchů atd. Výhodou čtvercových pixelů oproti ostatním tvarům je kromě jejich jednoduchosti také to, že nevyžadují další předpoklad ohledně uspořádání plazmatu. Následující popis pixelových metod tomografické rekonstrukce se bude týkat právě mřížky čtvercových pixelů (viz obr. 2.2b).

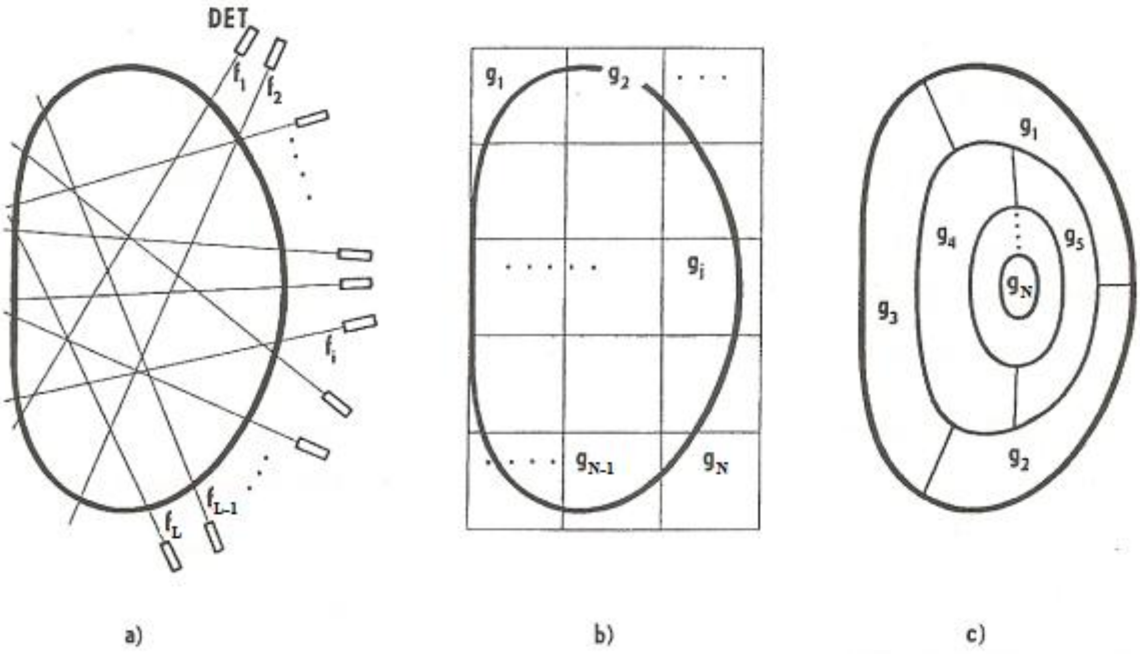
Na signál $f_i$ z určitého směru se lze dívat jako na lineární kombinaci emisivity jednotlivých pixelů:

$$f_i = \sum_j^N T_{ij} g_j + \zeta_i, \quad i \in \hat{L}, \qquad (2.26)$$

kde $g_j$ je řešení pro j-tý pixel (mřížka pixelů je zde tedy brána jako vektor), $N$ počet pixelů, $L$ počet detektorů, $T_{ij}$ vliv j-tého pixelu na signál $f_i$ a $\zeta_i$ statistická a systematická chyba, které se v reálném experimentu nelze vyhnout. Zanedbáním rozbíhavosti zorného pole detektoru lze pro dostatečně úzké zorné pole vzít za hodnotu $T_{ij}$ vzdálenost, s jakou i-tý detektor protne j-tý pixel. Pro získání celkové emisivity pixelů je třeba řešení **g** nebo signály $f_i$ vynásobit geometrickou kalibrační konstantou

$$\frac{4\pi}{\Omega_i},$$

kde $\Omega_i$ je zorný úhel i-tého detektoru.




Obrázek 2.2: Pixelová metoda: možné uspořádání průhledů detektorů (a) a pixelů (b,c). Přezvato z [2]

Řešení určující vektor **g** je možné buď hledat iteračně, nebo je třeba nalézt vhodnou zpětnou transformaci k soustavě rovnic (2.26). Tedy matici **M**, pro kterou bude platit:

$$g_j = \sum_i^L M_{ji} f_i \qquad (2.27)$$

Nabízí se možnost přímo vypočíst inverzní matici k transformační matici **T**, jenže takový výpočet není zpravidla možný, protože matice **T** nebývá čtvercová (počet neznámých $g_j$ je zpravidla větší než počet rovnic, úloha je nedostatečně určená) a navíc přestavuje výpočet inverzní matice špatně podmíněnou úlohu a inverzní matice $\mathbf{T}^{-1}$ by tak byla příliš ovlivňována šumem vzniklým kvůli zanedbání chyb $\zeta_i$.

Iterativní řešení určující vektor **g** spočívá ve hledání takové velikosti výrazu (metodou nejmenších čtverců):

$$\sum_i^L \left( f_i - \sum_j^N T_{ij} g_j \right)^2 , \qquad (2.28)$$

aby odpovídala očekávané chybě detektorů. Z mnoha možných řešení (pro nedostatečně určenou obdélníkovou matici **T** jich může existovat neomezený počet) je třeba vybrat takové, které je co nejblíže předpokládanému stavu. Takové řešení lze nalézt pomoci Tichonovovy regularizace, při které se k výrazu (2.28) se přidá tzv. regularizační funkcionál, který závisí na zvolené metodě řešení **g**, a hledá se pak minimum funkcionálu[5]:

[5] Jedná se vlastně o metodu Lagrangeových multiplikátorů, kdy se hledá minimum funkce na určité přípustné množině.

$$\Lambda = \frac{1}{2}\chi^2 + \lambda_R R, \qquad (2.29)$$

tj. řešení **g** vyplyne ze soustavy rovnic:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial g_j} = 0, \quad \mathrm{j} \in \hat{\mathrm{N}}, \qquad (2.30)$$

kde *R* je regularizační funkcionál,

$$\chi^2 = \frac{1}{L}\sum_i^L \left( \frac{f_i - \sum_j^N T_{ij} g_j}{\sigma_i} \right)^2, \qquad (2.31)$$

$\sigma_i$ předpokládaná chyba dat v i-tém detektoru (dělením $\sigma_i$ se zaručuje, aby na hledání řešení měla menší vliv data s větší předpokládanou chybou) a $\lambda_R$ regularizační parametr, který určuje váhu regularizačního funkcinálu na hledání řešení. Pro $\lambda_R$ blízké nule je minimum $\Lambda$ určeno především hodnotou $\chi^2$ a naopak pro velká $\lambda_R$ má na nalezení řešení velký vliv regularizační funkcionál *R*. Úlohou tedy není jen nalézt řešení **g** ale také správnou hodnotu parametru $\lambda_R$. Hodnota $\chi^2$ se obvykle nehledá menší než 1, protože nemá smysl hledat řešení s odchylkou od naměřených dat menší než je předpokládaná chyba. V nedostatečně určených systémech se zpravidla stanovuje $\lambda_R$ iterací tak, aby $\chi^2$ bylo blízké jedné.

### 2.2.1. Lineární regularizace

Při lineární regularizaci se volí regularizační funkcionál tak, aby byla preferována hladká řešení. Regularizační funkcionál *R* tedy musí nějakým způsobem vyjadřovat hrubost řešení. Nejjednodušším způsobem je lineární regularizace nultého řádu, při které má regularizační funkcionál tvar

$$R = \|\mathbf{g}\|^2 = \mathbf{g}^T \mathbf{g}.$$

Lineární regularizace nultého řádu upřednostňuje co nejplošší funkce, což není vhodné např. pro tomografii měkkého rentgenového záření plazmatu v tokamaku, které vykazuje velký nárůst měkkého rentgenového záření směrem ke středu plazmatu (což plyne zejména z velkého nárůstu teploty ke středu plazmatu a ze vztahu (1.3)).

Lineární regularizace prního řádu minimalizuje gradient hledaného řešení **g:**

$$R = \|\partial_x \mathbf{g}\|^2 + \|\partial_y \mathbf{g}\|^2,$$

kde operátory $\partial_x$ a $\partial_y$ značí derivace ve směru *x* a *y*, které vzhledem k tomu, že **g** není funkce ale vektor mají tvar

$$\partial_x g_i = \frac{g_i - g_{i-1}}{\Delta x} \text{ a } \partial_y g_i = \frac{g_i - g_{i-M}}{\Delta y},$$

kde $\Delta x$ a $\Delta y$ jsou rozměry pixelu a $M$ počet pixelů v jednom řádku. Se zavedením matic $\mathbf{B_x}$ a $\mathbf{B_y}$ odpovídajícím příslušným diferenciálním operátorům lze napsat $R$ ve tvaru

$$R = (\mathbf{B_x g})^T (\mathbf{B_x g}) + (\mathbf{B_y g})^T (\mathbf{B_y g}),$$

S pomocí definice

$$\mathbf{H} = \mathbf{B_x^T B_x} + \mathbf{B}_y^T \mathbf{B}_y$$

lze ze vztahu (2.29) získat vztah

$$\Lambda = \frac{1}{2}\sum_i^L \left( \sum_j^N \tilde{T}_{ij} g_j - \tilde{f}_i \right)^2 + \lambda_R \sum_{k,l} g_k H_{kl} g_l = \frac{1}{2}\left(\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{f}}\right)^T \left(\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{f}}\right) + \lambda_R \mathbf{g}^T \mathbf{H}\mathbf{g}, \qquad (2.31)$$

kde $\tilde{T}_{ij} = T_{ij}/\sigma_i$, $\tilde{f}_i = f_i/\sigma_i$. Srovnáním všech parciálních derivací $\partial\Lambda/\partial g_r$ s nulou (hledáme extrém $\Lambda$) vede na soustavu rovnic:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial g_r} = \sum_i^L \left( \left( \sum_j^N \tilde{T}_{ij} g_j - \tilde{f}_i \right) \cdot \left( \tilde{T}_{ir} \right) \right) + \lambda_R \sum_l H_{rl} g_l + \lambda_R \sum_k g_k H_{rk} = 0, \quad \mathrm{r} \in \hat{\mathrm{N}},$$

což lze zjednodušit do tvaru:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial g_r} = \sum_i^L \tilde{T}_{ir} \sum_j^N \tilde{T}_{ij} g_j - \sum_i^L \tilde{T}_{ir} \tilde{f}_i + 2\lambda_R \sum_l H_{rl} g_l = 0, \quad \mathrm{r} \in \hat{\mathrm{N}},$$

neboť matice **H** je symetrická.

Derivace $\Lambda$ podle složek vektoru **g** tedy vedou k soustavě rovnic:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Lambda}{\partial g_1} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial g_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial g_N} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{f}} + \lambda_R \mathbf{H}\mathbf{g} = 0 \qquad (2.32)$$

kterou je třeba vyřešit vzhledem k **g**, čehož lze dosáhnout pomocí standardních metod jakou je např. LU dekompozice. Minimalizací gradientu se při lineární regularizaci prvního řádu upřednostňují funkce, které nejsou příliš strmé, což také není vhodné pro tomografii měkkého entgenového záření plazmatu.

O něco vhodnější je lineární regularizace minimalizující druhé derivace neboli zakřivení hledaného řešení **g**. Regularizační funkcionál má tvar

$$R = \|\mathbf{B_\Delta g}\| = (\mathbf{B}_\Delta \mathbf{g})^T (\mathbf{B}_\Delta \mathbf{g}),$$

kde $\mathbf{B_\Delta}$ představuje matici reprezentující Laplaceův operátor $\Delta$.

Soustava rovnic (2.32) platí pro všechny řády lineární regularizace a liší se jen v matici **H**, která reprezentuje příslušné numerické derivace (viz Tab. 2.1).

Tabulka 2.1: Tvary regularizačních funkcionálů a maticí **H** pro linearní regularizace nultého až druhého řádu.

| Řád lineární regularizace | *R* | **H** |
|---|---|---|
| 0 | $R = \|\mathbf{g}\|^2 = \mathbf{g}^T\mathbf{g}$ | $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ |
| 1 | $R = \|\partial_x \mathbf{g}\|^2 + \|\partial_y \mathbf{g}\|^2$ | $\mathbf{H} = \mathbf{B}_\mathbf{x}^T\mathbf{B}_\mathbf{x} + \mathbf{B}_y^T\mathbf{B}_y$ |
| 2 | $R = \|\mathbf{B}_\Delta \mathbf{g}\| = (\mathbf{B}_\Delta \mathbf{g})^T(\mathbf{B}_\Delta \mathbf{g})$ | $\mathbf{H} = \mathbf{B}_\Delta^T\mathbf{B}_\Delta$ |

## 2.2.2. Maximální entropie

Z mnoha řešení výrazu (2.28) se lze pokusit vybrat co nepřirozenější řešení tak, že se vybere řešení s maximální informační entropií. Emisivity jednotlivých pixelů $g_j$ jsou přitom považovány jako statisticky nezávislé náhodné veličiny. Pro zjednodušení výpočtu entropie tomografického obrazu lze vyjádřit emisivitu pixelů jako násobky kvant o velikosti ε:

$$g_j = n_j \varepsilon \,,$$

kde $n_j$ je počet kvant v j-tém pixelu. Celkový počet kvant v tomografickém obrazu je dán celkovou emisivitou všech pixelů $I_0$:

$$n = \frac{I_0}{\varepsilon} = \sum_{j=1}^{N} n_j \,,$$

kde $N$ je počet pixelů. Počet možných uspořádání kvant v tomografickém obrazu s danými emisivitami pixelů je

$$W = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{N} n_j!} \,.$$

Nejpravděpodobnější rozložení emisivity v pixelech bude zřejmě takové, které má nejvyšší počet možných uspořádání kvant ε. Pro $N \to \infty$ lze napsat entropii systému jako:

$$S = k \ln W = -k \sum_{j=1}^{N} n_j \ln n_j + const = -\frac{k}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{N} g_j \ln g_j + const \,,$$

přičemž konstanty lze při hledání maxima entropie vynechat a vzít regularizační funkcionál v podobě:

$$\Omega = -\sum_{j=1}^{N} g_j \ln g_j \,.$$

Řešení pak spočívá v hledání maxima funkcionálu:

$$\Lambda_{ME} = \frac{1}{2}\chi^2 + \lambda_R \Omega .$$

Nevýhodou této metody je, že předpokládá nekorelaci sousedních pixelů a neupřednostňuje tak lokálně hladká řešení. Nicméně z povahy fúzního plazmatu plyne, že mezi emisivitami sousedních pixelů je silná korelace. Následkem mohou nakonec být rekonstrukce, které příliš neodpovídají skutečnosti a vykazují velký šum. Existují sice metody, které dovedou požadavek lokální hladkosti do tomografické rekonstrukce zahrnout, ale mají vyšší výpočetní nároky a nebývají vždy spolehlivé [12].

### 2.2.3. Minimum Fisherovy informace

Jednou z používaných metod řešící soustavu rovnic (2.26) v tomografii měkkého rentgenového záření na tokamacích je Tichonovova regularizace omezená minimem Fisherovy informace (Minimum Fisher Regularization - dále jen MFR), která byla poprvé popsána v [12]. Řešení se hledá minimalizací funkcionálu:

$$\Lambda_{MF} = \frac{1}{2}\chi^2 + \lambda_R I_F .$$

Regularizačním funkcionálem je zde Fisherova informace $I_F$. Na Fisherovu informaci se lze dívat jako na množství informace, které pozorovatelné veličiny nesou o neznámých parametrech, na kterých závisí. Princip minima Fisherovy informace je často používán v teorii odhadu. Jednou z aplikací je určení pravděpodobnostního rozdělení z některých momentů nebo z jiných informacích o *g*. Obecně je Fisherova informace pro pravděpodobnostní rozdělení *g(x)* definována vztahem

$$I_F = \int \frac{1}{g}\left(\frac{dg}{dx}\right)^2 dx \qquad (2.33)$$

a souvisí také s rozptylem rozdělení $\sigma^2$ Cramer-Raovou nerovností

$$\sigma^2 \geq 1/I_F .$$

Minimalizací Fisherovy informace se tedy hledá rozdělení s největším rozptylem. Navíc bylo prokázáno [12], že MFR nalézá nejhladší řešení a překonává metodu maximální entropie v kvalitě rekonstrukce a odolnosti vůči šumu. Z definice Fisherovy informace plyne, že se na MFR lze dívat jako na lineární regularizaci prvního řádu upravenou o váhový faktor 1/g, který způsobuje, že hledané řešení bude více hladké pro malé hodnoty *g(x)* a méně pro velké hodnoty *g(x)*. Prostřednictvím MFR se tak v případě tomografie měkkého rentgenového záření plazmatu v tokamaku docílí většího shlazování v regionech na okraji plazmatu s nižší emisivitou, které bývají při rekonstrukce více zatíženy šumem, a menšího shlazování uprostřed plazmatu, kde je emisivita nejvyšší a kde se detektory často střetávají (a nesou tak o tomto regionu více informace).

Minimum funkcionálu $\Lambda_{MF}$ lze obdobným způsobem jako v kapitole 2.2.1 nalézt řešením soustavy rovnic:

$$\frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_j} = 0, \quad \mathrm{j} \in \hat{\mathrm{N}}.$$

Fisherovu informaci lze pro vektor $g$ přepsat na tvar:

$$I_F = \sum_j \sum_k \sum_l g_k B_{kj} \frac{1}{g_j} B_{jl} g_l = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l g_k B_{kj} W_{ji} B_{il} g_l = \mathbf{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{g} \ ,$$

kde matice **B** reprezentuje operátor prvních numerických derivací vektoru **g** a pro matici **W** platí: $W_{ij} = \delta_{ij} / g_j$ , kde $\delta_{ij}$ je Kroneckerovo delta.

Funkcionál $\Lambda_{MF}$ pak má tvar:

$$\Lambda_{MF} = \frac{1}{2} \sum_i^L \left( \tilde{f}_i - \sum_j^N \tilde{T}_{ij} g_j \right)^2 + \alpha_R \sum_{i,j,k,l} g_k B_{kj} W_{ji} B_{il} g_l = \frac{1}{2} \left( \tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{g} \right)^T \left( \tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{g} \right) + \alpha_R \mathbf{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{g} \ ,$$

kde

$$\tilde{T}_{ij} = T_{ij} / \sigma_i \ , \ \tilde{f}_i = f_i / \sigma_i \ .$$

Derivace takového funkcionálu $\Lambda_{MF}$ podle jednotlivých složek vektoru ***g*** by však vedly k nelineárním rovnicím, a tak se řešení zjednodušuje lineárním přiblížením. Za matici **W** se nejprve zvolí např. jednotková matice, nebo se určí podle předpokládaného tvaru rekonstruované funkce. Výsledkem derivací $\Lambda_{MF}$ podle jednotlivých složek vektoru **g** jsou pak lineární rovnice, které se vyřeší vzhledem k vektoru **g**:

$$\frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_r} = \sum_i^L \left( \left( \tilde{f}_i - \sum_j^N \tilde{T}_{ij} g_j \right) \cdot \left( -\tilde{T}_{ir} \right) \right) + \alpha_R \sum_{i,j,l} B_{rj} W_{ji} B_{il} g_l + \alpha_R \sum_{i,j,k} g_k B_{kj} W_{ji} B_{ir} = 0, \quad \mathrm{r} \in \hat{\mathrm{N}} \ ,$$

což lze zjednodušit do tvaru:

$$\frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_r} = \sum_i^L \tilde{T}_{ir} \sum_j^N \tilde{T}_{ij} g_j - \sum_i^L \tilde{T}_{ir} \tilde{f}_i + 2\alpha_R \sum_{i,j,l} B_{rj} W_{ji} B_{il} g_l = 0, \quad \mathrm{r} \in \hat{\mathrm{N}} \ ,$$

neboť matice $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{B}$ je symetrická.

Derivace $\Lambda_{MF}$ podle složek vektoru **g** tedy vedou k soustavě rovnic:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_1} \\ \dfrac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_N} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{f}} + 2\alpha_R \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{g} = 0$$

a pro vektor **g** pak plyne vztah:

$$\mathbf{g} = \left( \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{f} \text{, kde } \lambda_R = 2\alpha_R \qquad (2.34)$$

V následujících krocích pak v těchto rovnicích obsahuje matice W předchozí řešení vektoru **g** a řešení **g** se tedy hledá iteračně:

$$\mathbf{g}^{(n+1)} = \left( \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{f} \text{, kde } n \text{ je počet vykonaných kroků a } W_{ij} = \delta_{ij} / g_j^{(n)} .$$

Ukazuje se, že takový postup velmi rychle konverguje (stačí 2 nebo 3 cykly) ke stabilnímu řešení.

V dvourozměrném případě může mít pak vztah (2.34) tvar:

$$\mathbf{g} = \left( \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \mathbf{B}_X^T \mathbf{W} \mathbf{B}_X + \lambda_R \mathbf{B}_Y^T \mathbf{W} \mathbf{B}_Y \right)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{f} ,$$

kde $\mathbf{B_x}$ reprezentuje operátor numerických derivací vektoru **g** podle souřadnice x a $\mathbf{B_y}$ podle souřadnice y.

Plazma obvykle příliš nemění své vlastnosti ve směru magnetického pole a proto je výhodné sledovat derivace např. emisivity neutronů podél a napříč magnetických siločar:

$$\mathbf{g} = \left( \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \left( \frac{1}{\eta} \mathbf{B}_{par}^T \mathbf{W} \mathbf{B}_{par} + \eta \mathbf{B}_{perp}^T \mathbf{W} \mathbf{B}_{perp} \right) \right)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{f} , \qquad (2.35)$$

kde $\mathbf{B_{par}}$ reprezentuje operátor numerických derivací ve směru magnetických siločar, $\mathbf{B_{perp}}$ napříč magnetických siločar a parametr $\eta$ určuje jejich vzájemnou váhu. Např. pro $\eta$<1 mají ve Fisherově informaci větší váhu derivace podél magnetických siločar a proto se při minimalizaci Fisherovy informace vyhlazují hodnoty **g** více podél směru magnetického pole než v příčném směru. Obvykle se tvar magnetického pole určí jednou na začátku měření a v dalších časových krocích se předpokládá zanedbatelná změna tvaru magnetického pole vzhledem k přesnosti tomografické rekonstrukce. Všechny tomografické rekonstrukce v této práci jsou řešeny Tichonovovou regularizací omezenou minem Fisherovy informace, přičemž jsou řešení více shlazována podél magnetických siločar pokud nebude řečeno jinak.

**Výpočetní algoritmus**

V počítači probíhá MFR ve dvou cyklech. Vnější cyklus minimalizuje Fisherovu informaci (obvykle stačí 3 cykly) prostřednictvím váhové matice **W**. Ta je ještě normalizována maximální hodnotou hledaného vektoru ***g***:

$$w_k(n=1)=1\,,\;\; w_k(n>1)=\frac{\max\limits_{k\in\{1,2,\dots,N\}}\left(g_k(n-1)\right)}{g_k(n-1)}\,, \tag{2.36}$$

kde $n$ je číslo vnějšího cyklu. Následuje výpočet vektoru ***g*** (podle vztahu (2.34)):

$$A_{ji}=\sum_{l}^{L}T_{il}T_{lj}+\lambda_R\sum_{k}^{N}B_{ik}w_kB_{kj} \tag{2.37}$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T} \tag{2.38}$$

$$g_j=\sum_{i}^{L}M_{ji}f_i \tag{2.39}$$

Vnitřní cyklus obměňuje hodnotu $\lambda_R$ (např. Newtonovou metodou) tak, aby $\chi^2$ bylo blízké jedničce:

$$\chi^2(\lambda_R)=\frac{1}{L}\sum_{i}^{L}\left(\frac{f_i-\sum\limits_{j}^{N}T_{ij}g_j}{\sigma_i}\right)^2\rightarrow 1\,, \tag{2.40}$$

kde vektor **g** je nejdříve znovu vypočítán pomocí vztahů (2.37) až (2.39). Cyklus běží dokud nenalezne $\chi^2$ s dostatečnou přesností nebo nedosáhne určitého maximálního počtu opakování.

Může se stát, že hodnota nějaké složky vektoru $g$ vyjde záporná, což neodpovídá možné fyzikální skutečnosti. V takovém případě se v používané verzi MFR taková hodnota podkládá rovna nule.

Hlavní výhodou MFR je, že skutečně nalézá přímé řešení, tedy matici **M** do výrazu (2.27), což je z uživatelského hlediska velmi praktické. Vedle toho je známo, že Tichonovova regularizace poskytuje velmi robustní řešení (tj. nachází hladké řešení poměrně spolehlivě, ve velmi širokém oboru aplikací). Další výhodou je, že lze algoritmus snadno převést i na případ s časovým průběhem. Vztahy (2.36) až (2.40) potom přejdou do tvarů:

$$w_k(n=1)=1, \qquad (2.41)$$

$$w_k(n)=\frac{\max\limits_{k\in\{1,2,\dots,N\}}\left(\sum_t^S g_{kt}(n-1)\right)}{\sum_t^S g_{kt}}, \qquad (2.42)$$

$$A_{ji}=\sum_l^L T_{il}T_{lj}+\lambda_R\sum_k^N B_{ik}w_k B_{kj}, \qquad (2.43)$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}, \qquad (2.44)$$

$$g_{jt}=\sum_i^L M_{ji}f_{it}, \qquad (2.45)$$

$$\chi^2=\frac{1}{S}\frac{1}{L}\sum_t^S\sum_i^L\left(\frac{f_{it}-\sum_j^N T_{ij}g_{jt}}{\sigma_i}\right)^2, \qquad (2.46)$$

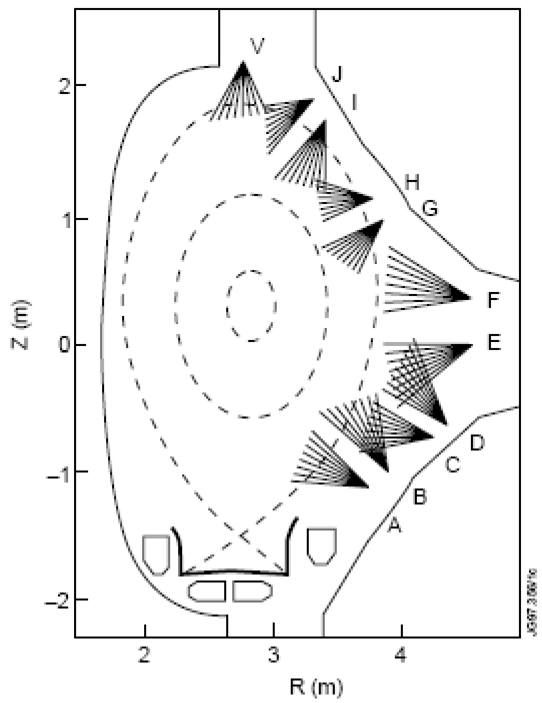
kde *t* je časový index a S počet časů, pro které MFR probíhá.

# 3. Měření pro tomografii měkkého rentgenového záření na tokamaku JET

Měkké rentgenové záření se uvádí jako záření o energiích okolo 0,12keV až 12keV (tj. o vlnových délkách 10nm až 0,1nm). Jak již bylo zmíněno v kapitole 1.3.1., měkké rentgenové záření plazmatu v tokamaku je způsobeno především brzdným zářením, jehož vyzařovací výkon je dán vztahem:

$$P_B = const \cdot n_e^2 Z_{eff}^2 \sqrt{T_e}\ ,$$

jak plyne ze vztahu (1.9), a u chladnějšího nebo znečištěného plazmatu také čárovým a rekombinačním zářením. Přestože měkké rentgenové záření zaujímá jen úzkou část spektra vyzařovaného plazmatem, je jeho měření cennou diagnostikou. Měření měkkého rentgenového záření může posloužit k lokalizaci nečistot, sledování transportu nečistot, určení pozice plazmatu, ke sledování magnetohydrodynamických módů a událostí, k analýze pilových nestabilit a jako podpůrné měření k měření teploty elektronů.




obrázek 3.1: Dřívější rozložení kamer pro tomografii měkkého rentgenového záření na JET. *R* představuje vzdálenost od hlavní osy tokamaku a z výšku. Převzato z [3].

Měkké rentgenové záření je na tokamaku JET měřeno z více různých kamer. Od roku 1995 pracovala na JET pro tomografii měkkého rentgenového záření soustava jedenácti kamer (viz obr. 2.1). Deset kamer (A až J) bylo seskupeno v párech, z nichž každý poskytoval téměř kompletní pohled do plazmatu. Každá z kamer A až J měřila měkké rentgenové záření z osmnácti směrů a horní kamera V z pětatřiceti, což dává dohromady 215 směrů. V roce 2004 byly kamery A, B, C, D, E, F vyjmuty kvůli přípravě nové ICRF (Ion Cyclotron Resonance Frequency) antény. Kamery A, B, C a D byly již značně radiačně poškozeny, takže jejich vyjmutí nepředstavovalo velkou ztrátu. Oproti tomu odstranění kamer E a F už mělo na tomografii měkkého rentgenového záření znatelnější dopad.

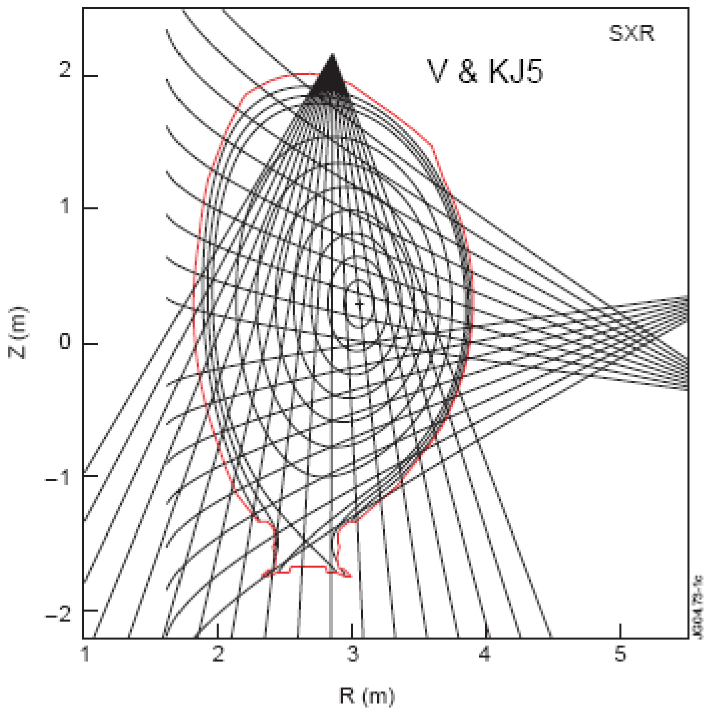
Tomografii měkkého rentgenového záření lze ještě provést např. pomocí kamery V a další kamery S4 (uvádí se také pod označením KJ5), která byla do tokamaku JET nainstalována pro sledování plazmatu při DT reakcích a pro poskytování signálů pro vertikální stabilizaci plazmatu. Kamera S4 měří měkké rentgenové záření pomocí sedmnácti detektorů v různých směrech. Detektory jsou rozděleny do dvou skupin: devět detektorů míří z dolní štěrbiny ve výšce $z_L = -408mm$ a osm detektorů z horní štěrbiny ve výšce $z_U = 414mm$ vzhledem k rovině procházející vedlejší osou tokamaku. Obě štěrbiny jsou ve vzdálenosti $R_{KJ5} = 5917mm$ od hlavní osy tokamaku. Směry jednotlivých detektorů shrnuje následující tabulka:

Tabulka 3.1: Směry detektorů kamery S4

| | detektor | úhel [°] |
|---|---|---|
| Horní štěrbina | 1 | -28,40 |
| | 2 | -25,43 |
| | 3 | -22,46 |
| | 4 | -19,49 |
| | 5 | -16,52 |
| | 6 | -13,55 |
| | 7 | -10,58 |
| | 8 | -7,61 |
| Dolní štěrbina | 9 | 7,82 |
| | 10 | 10,99 |
| | 11 | 14,16 |
| | 12 | 17,33 |
| | 13 | 20,50 |
| | 14 | 23,67 |
| | 15 | 26,84 |
| | 16 | 30,01 |
| | 17 | 33,19 |

Poznámka: Úhly detektorů jsou vzhledem k vodorovné spojnici se středem tokamaku (detektory s kladnými úhly směřují nahoru, detektory se zápornými úhly dolů).

Zvláštností kamery S4 je, že z konstrukčních důvodů nemíří v rovině poloidálního průřezu (na hlavní osu tokamaku) ale mírně šikmo a při pohledu shora svírá se spojnicí se středem tokamaku úhel 15,63° (viz obr 3.6). Díky toroidální symetrii tokamaku se profil plazmatu v poloidálním průřezu v jednotlivých místech téměř nemění a je proto možné průhledy kamery S4 promítnout do požadované roviny poloidálního průřezu, čímž se průhledy detektorů kamery S4 mírně zakřiví, jak ukazuje obrázek 2.2. V roce 2008 byly detektory č.1 a 2 a částečně detektor č. 3 kamery S4 zastíněny instalací nové TAE antény (Toroidal Alfvén Eigenmodes) pro měření vlastních módů Alfvénových vln.



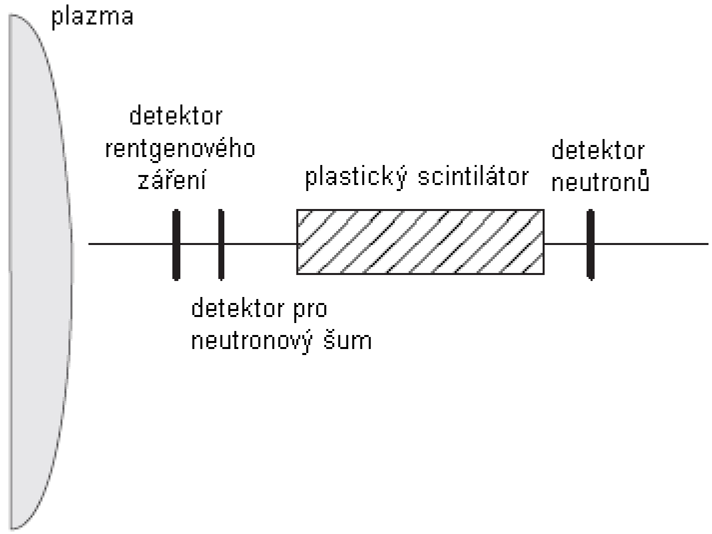

obrázek 3.2: Průhledy detektorů kamer V (nahoře) a S4 (vpravo) do tokamaku. *R* představuje vzdálenost od hlavní osy tokamaku a z výšku nad plochou ležící ve vedlejší ose tokamku (pro kameru V nejsou pro přehlednost vyobrazeny všechny průhledy). Převzato z [13].

Kamera S4 je radiačně chráněna barytovým betonem a její detektory míří do plazmatu dvěma štěrbinami přes beryliové filtry tloušťky 350μm, které tak oddělují kameru od vnitřku tokamaku a nepropoštějí záření s energií pod 2keV, čímž vymezují dolní limit spektrální citlivosti kamery S4. Horní limit spektrální citlivosti je dán konečnou tloušťkou aktivní vrstvy fotodiody, jež závisí na závěrném napětí. Diody kamery S4 i kamery V pracují pod napětím 3V a očekávaná tloušťka aktivni vrstvy je proto 200μm (viz [19]). Každý ze sedmnácti detektorů kamery S4 je složen z následujících prvků (viz obr. 2.3):

1) Křemíkový diodový detektor s plochou 14x14mm a tloušťkou křemíkového substrátu 250μm (typ OSD196-OG(CER)). Detektor má téměř stoprocentní účinnost pro záření s energií pod 10keV a velmi malou účinnost pro neutrony s energií 14MeV (tedy pro neutrony z D-T reakcí). Neutrony jsou původcem šumu v signálu.

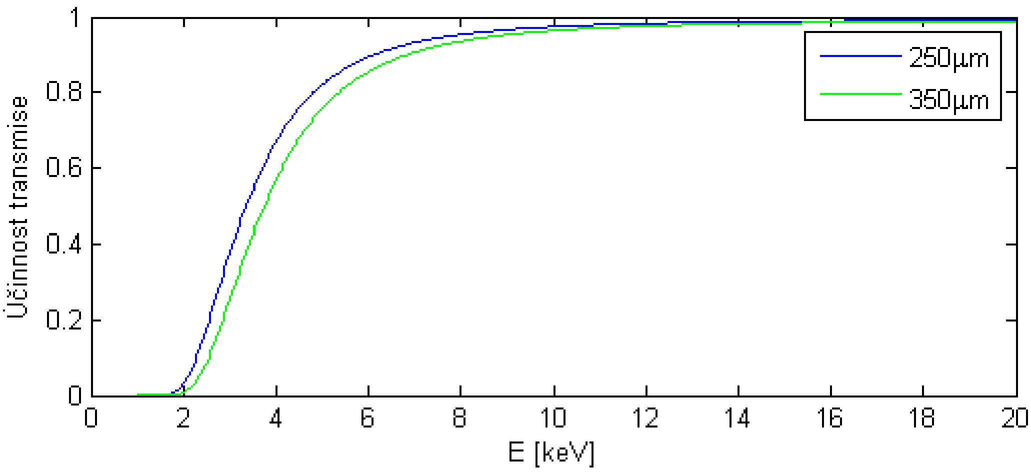
2) Druhý křemíkový detektor stejného typu, který je využíván k měření šumu na pozadí signálu způsobeného neutrony.

3) Plastický scintilátor (Bicron BC 400) o délce 20cm a průměru 20mm, který má velkou účinnost pro detekci neutronů. Světlo emitované nabitými částicemi vzniklými při reakci neutronů s plastickým scintilátorem je následně detekováno třetím křemíkovým diodovým detektorem stejného typu.

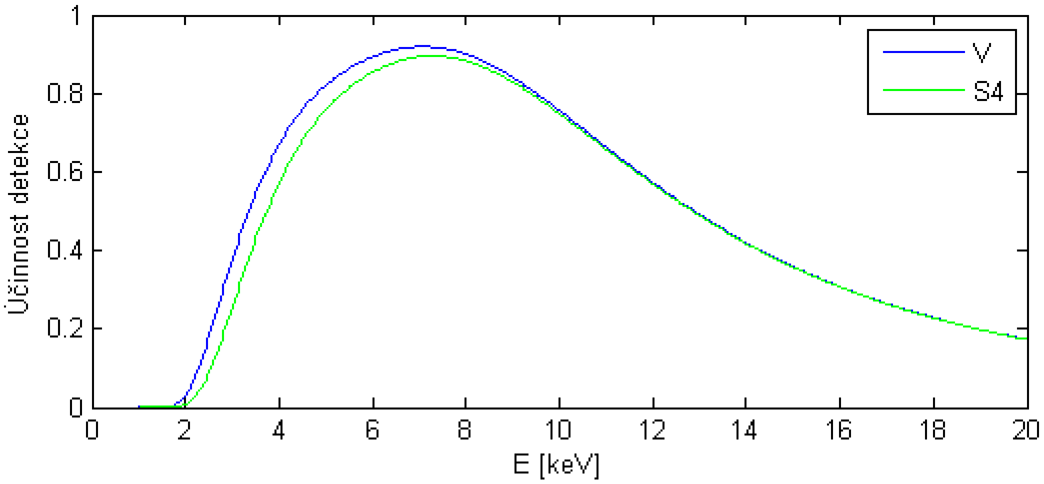



obrázek 3.3: Uspořádání detektorů kamery S4. Převzato z [14].

Kamera V míří do plazmatu 35 detektory. Pole detektorů tvoří pole fotodiod typu LD 35-5T. Fotodiody jsou od sebe vzdáleny 0,03mm, zaujímají plochu 0,96x4,6mm a mají tloušťku křemíkového substrátu 380µm. Beryliové okénko, kterým dektory kamery V míří do plazmatu, má narozdíl od kamery S4 tloušťku 250µm (původní beryliové filtry kamery S4 měly takoé tloušťku 250µm, ale byly nahrazeny filtry tloušťky 350µm, aby byla prodloužena jejich životnost). Oproti tloušťce 350µm je křivka transmise pro tloušťku 250µm posunuta v energiích o zhruba 400eV (viz obr. 3.4). Rozdílné spektrální citlivvosti kamer V a S4 (viz obr 3.5) a jejímu vlivu na tomografickou rekonstrukci se věnuje kapitola 5.4.2.




obrázek 3.4: Účinnost transmise pro beryliový filtr (zeleně pro tloušťku 350µm, modře pro 250µm).



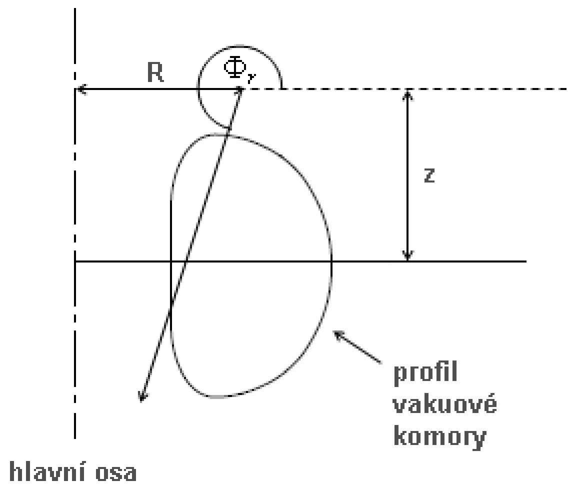

Obrázek 3.5: Účinnost detekce kamery V (modře) a kamery S4 (zeleně) vycházející z rozdílně tloušťky beryliových filtrů a předpokládané tloušťky aktivní vrstvy 200 μm.

Úhly jednotlivých průhledů kamery V (viz obr 3.2.) lze popsat následujícím vztahem:

$$\Phi_r = \alpha + \gamma \cdot \tan^{-1}\left(\frac{(k-n)\cdot 0{,}99}{f}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, 35, \quad (3.1)$$

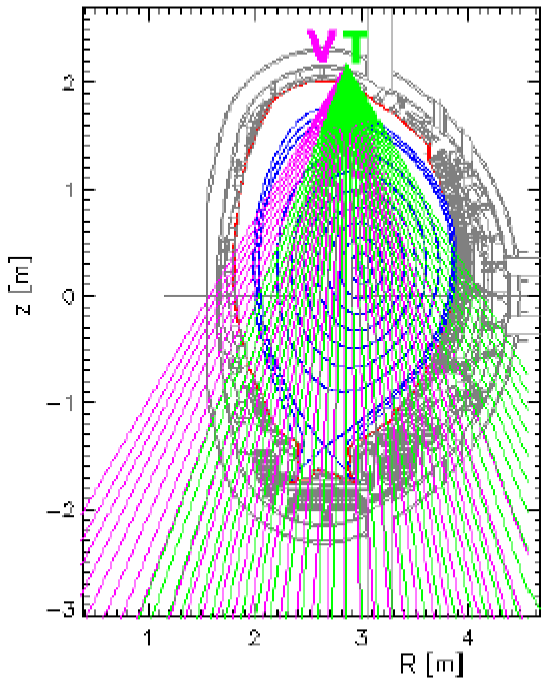
kde parametry α, γ, n a f nabývají hodnot: $\alpha = 265°$, $\gamma = -1$, $n = 18$ a $f = 35{,}31mm$.

Štěrbina kamery V se nachází ve vzdálenosti $R_V = 2848mm$ od hlavní osy a ve výšce $z_V = 2172mm$.




obrázek 3.4: Znázornění úhlu $\Phi_r$ pro jeden detektor kamery V.

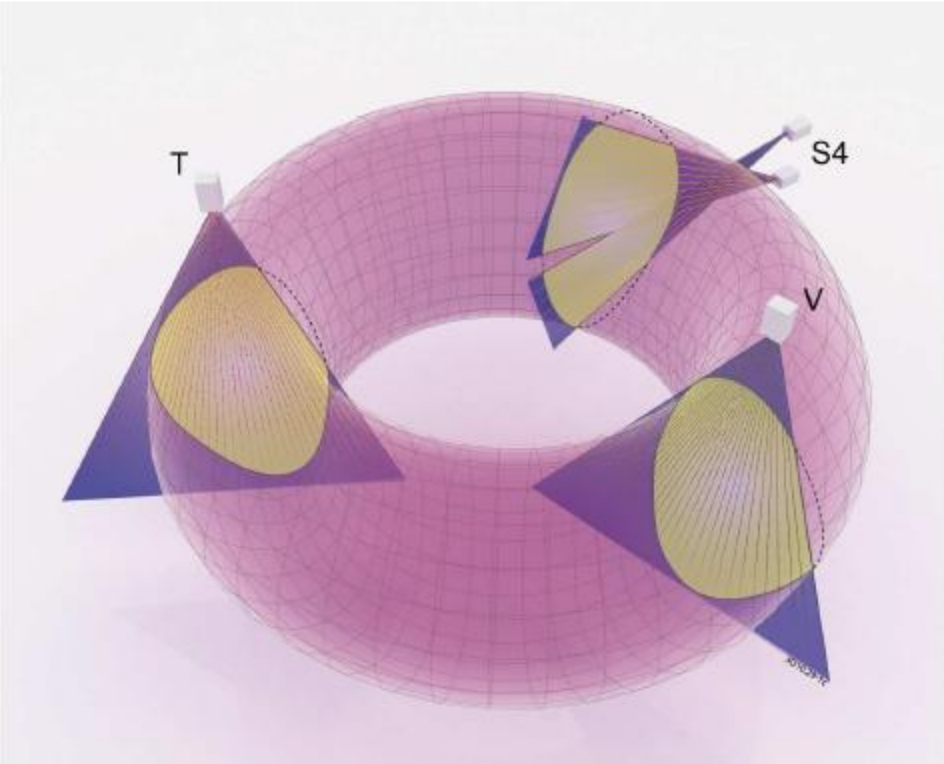
Místo kamery V lze pro tomografii měkkého rentgenového záření spolu s kamerou S4 použít také kameru T, pro kterou kromě pootočení o 10° platí stejné parametry jako pro kameru V (viz obr 3.5). Kamery V a T mohou dát dohromady také celkem dobrý horizontální průřez plazmatem.




obrázek 3.5: Průhledy kamer V a T v poloidálním průřezu tokamaku. Modře jsou vyznačeny také magnetické povrchy magnetického udržení plazmatu. Převzato z [13].

Data z kamery V jsou zaznamenávány se vzorkovací frekvencí až 250kHz (stejně tak pro kameru T) a data z kamery S4 s frekvencí 500kHz. Signály z detektorů je před zpracováním třeba vynásobit kalibračními konstantami (viz dodatek A). V roce 2011 byly kamerám V a T nainstalovány nové diody a dokončuje se nový systém sběru dat.

Kamery S4, V a T se nacházejí každá na jiném troidálním úhlu (viz obr. 3.6) a proto je třeba při tomografické rekonstrukci uplatnit zjednodušující přepoklad toroidální symetrie plazmatu. Při vyšším časovém rozlišení po sobě následujících tomografických rekonstrukcí může být příhodné přidat k naměřeným datům fázový posun podle pozice příslušné kamery.




Obrázek 3.6: Schéma uspořádání kamer V, T a S4 v tokamaku JET. Převzato z [22].

# 4. Matice geometrie

Prvky transformační matice **T** (viz vztah 2.26) pro tomografii měkkého rentgenového záření jsou úměrné vlivu jednotlivých pixelů na příslušný detektor. Rozměr transformační matice je tedy počet detektorů krát počet pixelů (dvourozměrná mřížka pixelů je brána jako vektor). Kamera S4 se 17 detektory a kamera V s 35 detektory dávají dohromady 52 směrů, ze kterých je měkké rentgenové záření vycházející z plazmatu měřeno. Mřížka pixelů byla zvolena o velikosti 20x34 pixelů (celkem tedy 680 pixelů) o rozměrech 10x10cm. Transformační matice **T** má tedy rozměr $52 \times 680$.

Tomografické rekonstrukce v této práci probíhají na základě znalosti geometrické matice, ve které je zanedbána rozbíhavost zorných polí detektorů (tj. na průhledy zorných polí je nahlíženo jako na přímky a každý prvek matice obsahuje vzdálenost, se kterou příslušný detektor protne odpovídající pixel). Oprávněnost takového zjednodušení vychází ze tří faktů:

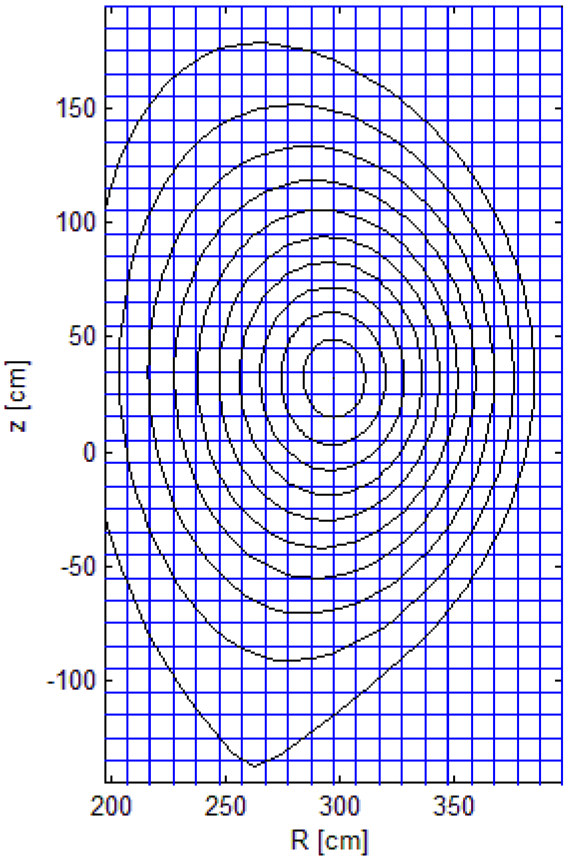
a) Intenzita signálu klesá s kvadrátem vzdálenosti a zároveň s kvadrátem vzdálenosti roste sběrná plocha pro příjem signálu.

b) Při MFR dochází ke shlazování podél magnetických siločar a naměřené hodnoty v detektorech jsou tak v tomografickém obrazu rozprostřeny v souladu s fyzikálními vlastnostmi plazmatu.

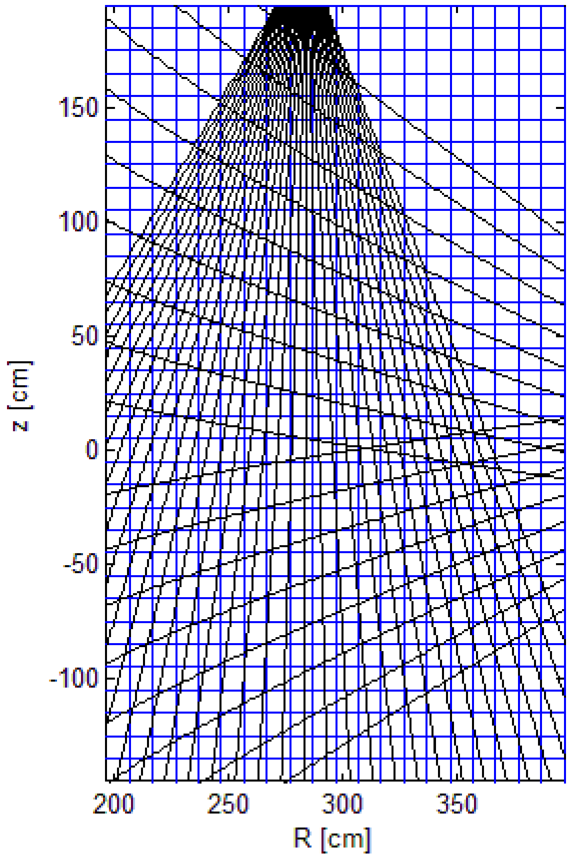
c) Zvolená velikost pixelů 10x10cm je při dané geometrii experimentu dostatečně velká. Např. u kamery S4 je velikost štěrbiny 1,4x1,4cm, plocha detektoru také 1,4x1,4cm a vzdálenost mezi štěrbinou a detektorem téměř 80cm, což dává šířku zorného pole detektoru (včetně oblasti polostínu, viz obr. 4.2) na druhém konci tomografického obrazu o velikosti zhruba 15cm, přičemž oblast vnímaná celým povrchem detektoru má stále šířku jen 1,4x1,4cm (např. u tomografické rekonstrukce emisivity neutronů, kde byla rovněž velikost pixelů 10x10cm a šířka zorného pole detektorů až 40cm se tomografické rekostrukce podle zjednodušené geometrické matice a podle vylepšené matice započítávající konečnou šířku zorného pole detektorů lišily jen o 1-2%, viz [1]).

Numerické řešení geometrické matice zahrnující konečné šířky zorných polí detektorů je velmi složité, ale je možné konečnou šířku zorných polí detektorů ve výpočtu geometrické matice zohlednit rozdělením průhledu detektoru na mnoho ideálních (zanedbatelně tenkých) průhledů. Nicméně výhodou použité geometrické matice může být rychlejší tomografická rekonstrukce díky většímu počtu nulových prvků.

Tomografický obraz emisivity měkkého rentgenového záření zaujímá v tokamaku JET prostor (ve svislé rovině) od 197,2cm až do 397,2cm ve vzdálenosti od hlavní osy a ve výšce (tj. ve vzdálenosti od roviny v níž leží vedlejší osa plazmatu) od -145cm do 195cm (viz obr. 4.1).

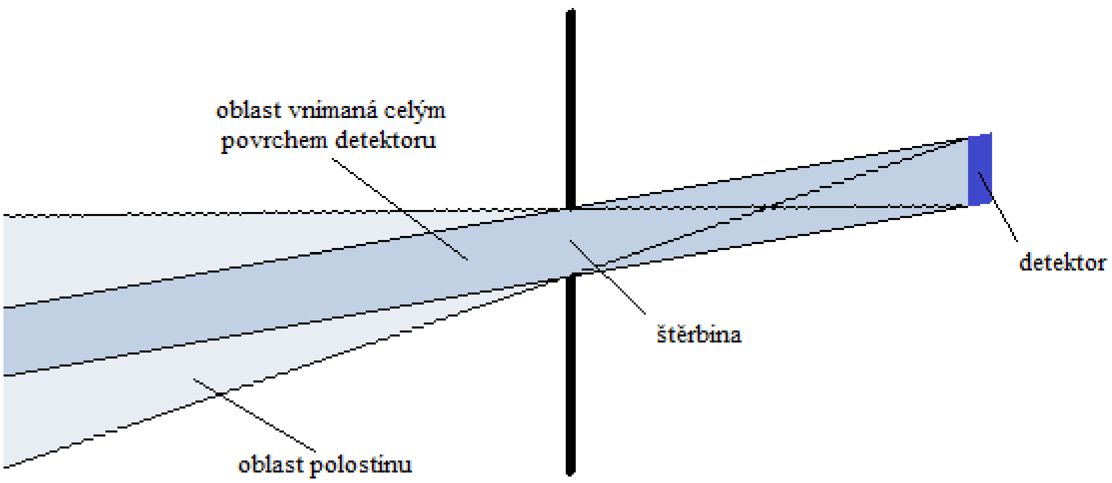



(a)



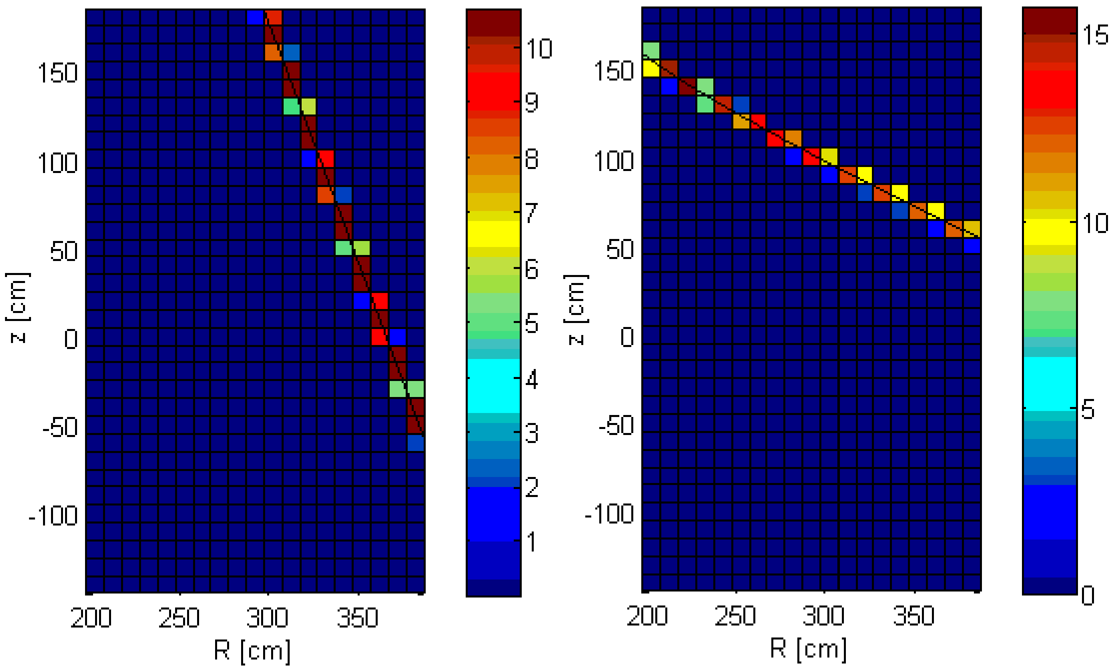

(b)

Obrázek 4.1: Zvolená mřížka pixelů pro provedení tomografické rekonstrukce měkkého rentgenového záření spolu s typickým profilem magnetických povrchů (a) a s průhledy detektorů kamer S4 a V (b).




obrázek 4.2: Zorné pole detektoru procházející štěrbinou

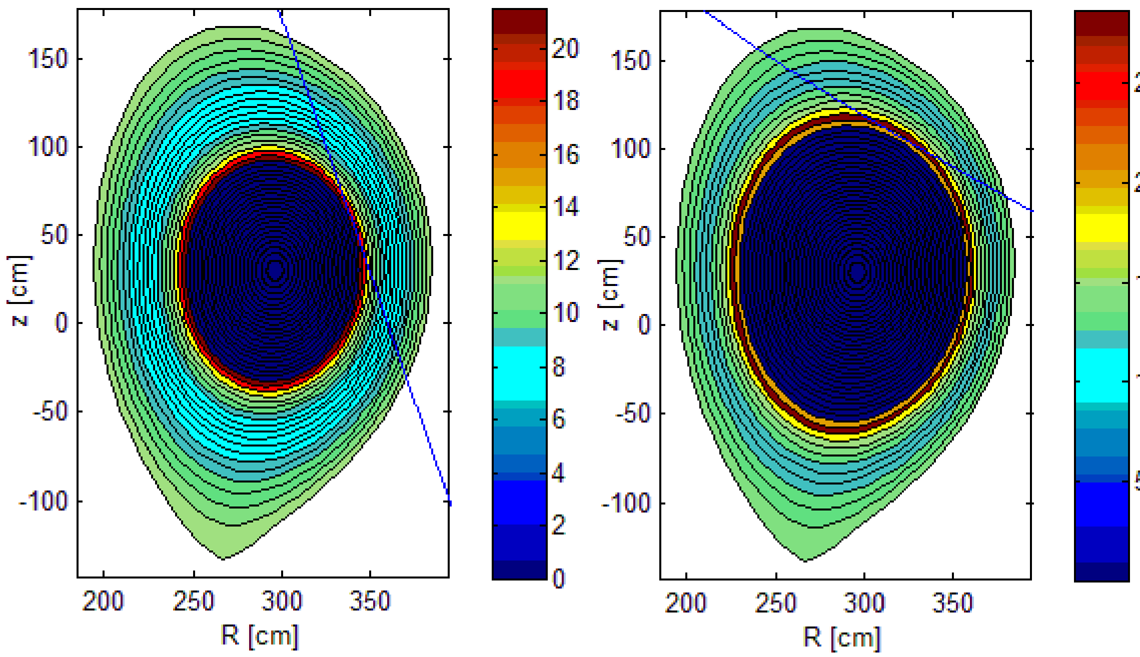
Pro výpočet transformační matice **T** je třeba určit rovnice přímek průhledů jednotlivých detektorů, vypočíst jejich průsečíky s linkami mřížky pixelů (tj. s hranicemi pixelů) a následně každému pixelu přiřadit vzdálenost mezi průsečíky na jeho hranicích. Výpočet je popsán v dodatku B, grafické ověření vypočtené matice **T** nabízí obrázek 4.3.




Obrázek 4.3: Grafické znázornění vlivu jednotlivých pixelů (resp. délky s jakou průhled vybraného detektoru protne příslušný pixel v cm) na první detektor kamery V (vlevo) a na čtrnáctý detektor kamery S4 (vpravo).

## 4.1. Pixely podle tvaru magnetických povrchů, tzv. „abelizace“

Za předpokladu symetrie plazmatu v poloidálním směru je možné rozdělit tomografický obraz na pixely podle tvaru magnetických povrchů. Pixely pak vyplňují jednotlivé oblasti mezi sousedními magnetickými povrchy (viz obr 4.1.a). Výpočet matice geometrie proběhl podle stejného principu jako v případě matice pro čtvercové pixely, tj. každému prvku matice geometrie byla přiřazena vzdálenost, s jakou příslušný detektor protnul příslušný pixel (viz obr. 4.4).




Obrázek 4.4: Grafické ověření matice geometrie pro „abelizaci“. Na lévé straně jsou hodnoty (v cm) příslušející druhému detektoru kamery V a na pravé straně hodnoty příslušející patnáctému detektoru kamery S4.

Tomografickou rekonstrukci metodou MFR lze provést obdobně jako v případě čtvercových pixelů, jak byla popsána v kapitole 2.2.3. Výhodou „abelizace“ je, že k rekonstrukci stačí jeden detektor (pokud míří do centra plazmatu).

# 5. Přesnost a chyby tomografické rekonstrukce

Do přesnosti tomografické rekonstrukce se (kromě zmíněného zjednodušení při výpočtu transformační matice **T** a rozdílných tlouškách berylliových filtrů použitých kamer**)** promítá omezený počet směrů, ze kterých je intenzita měkkého rentgenového záření měřena, radiační poškození detektorů, šum, vlastnosti použité metody tomografické rekonstrukce (MFR) a umístění kamer v různých toroidálnách úhlech. Přesnost tomografické rekonstrukce mohou také nepříznivě ovlivnit např. nepřesnosti v polohách detektorů (poloha detektoru se může měnit dlouhodobě i krátkodobě během experimentu vlivem mechanického a tepelného namáhání), chyby v kalibraci detektorů nebo nepřesné určené magnetické povrchy, podle kterých se rekonstruovaná funkce více shlazuje (viz kapitola 2.2.3). Chyby tomografické rekonstrukce nelze analyticky odvodit, protože se jedná o nelineární úlohu a proto je třeba přesnost tomografické rekonstrukce řešit numericky.

## 5.1. Modelová funkce

Určitou představu o přesnosti MFR při daném geometrickém uspořádání lze získat z porovnání předem známé modelové funkce a její tomografické rekonstrukce, tj. po dosazení hodnot modelové funkce $g$ na mřížku pixelů se provede výpočet projekcí ve směrech průhledů detektorů:

$$f_i = \sum_j^N T_{ij} g_j , \quad i \in \hat{L} ,$$

ze kterých je metodou MFR zpětně tomograficky rekonstruována funkce $g$ a porovnána s původní funkcí $g$.

Je vhodné, aby se modelová funkce podobala skutečnému profilu emisivity měkkého rentgenového záření. Dobrý odhad takové modelové funkce lze získat uvážením poloidálního průřezu teploty a hustoty částic v plazmatu. Rychlé nabité částice (které mohou vést na vznik neutronů) obíhající podél magnetických siločar se při pohybu směrem k hlavní ose dostávají do oblasti silnějšího magnetického pole, ze kterého mohou být efektem magnetického zrcadla odraženy zpět (podle svého tvaru získaly takové trajektore název banánové orbity [19]).

Vhodnou modelovou funkcí může být proto např. funkce:

$$g(r,\rho(r),\varphi) = 1 - r^b + a\left(1+\cos\left(\pi\rho^m\right)\right)\left(1+\cos\left(\left|\varphi/\pi\right|^p \pi\right)\right), \qquad (5.1)$$

kde parametr $b$ je exponent základního profilu, $a$ amplituda a $m$, $p$ exponenty té části profilu, která je způsobena banánovými orbitami, $r$ je vzdálenost od vedlejší osy plazmatu (viz obr. 1.4) normovaná na interval $\langle 0,1 \rangle$ , $\rho(r)$ je transformace $r$, která rovnoměrně převede vymezený interval $\langle r_{MIN}, r_{MAX} \rangle$ (tj. interval r, ve kterém jsou simulovány částice s banánovými orbitami) do intervalu $\langle -1,1 \rangle$ a za hodnoty *r* mimo vymezený interval dosadí příslušné krajní hodnoty intervalu $\langle -1,1 \rangle$:

$$\rho = \begin{cases} 2\dfrac{r - r_{MAX}}{r_{MAX} - r_{MIN}} + 1 & ,\text{pro}\, r \in \langle r_{MIN}, r_{MAX} \rangle \\ 1 & ,\text{pro r} > \text{r}_{\text{MAX}} \\ -1 & ,\text{pro r} < \text{r}_{\text{MIN}} \end{cases}$$

(jak se lze přesvědčit dosazením $r_{MAX}$ a $r_{MIN}$ za r) a $\varphi$ je poloidální úhel.

Užitá modelová funkce je modelována s časovým vývojem o deseti krocích s parametry:

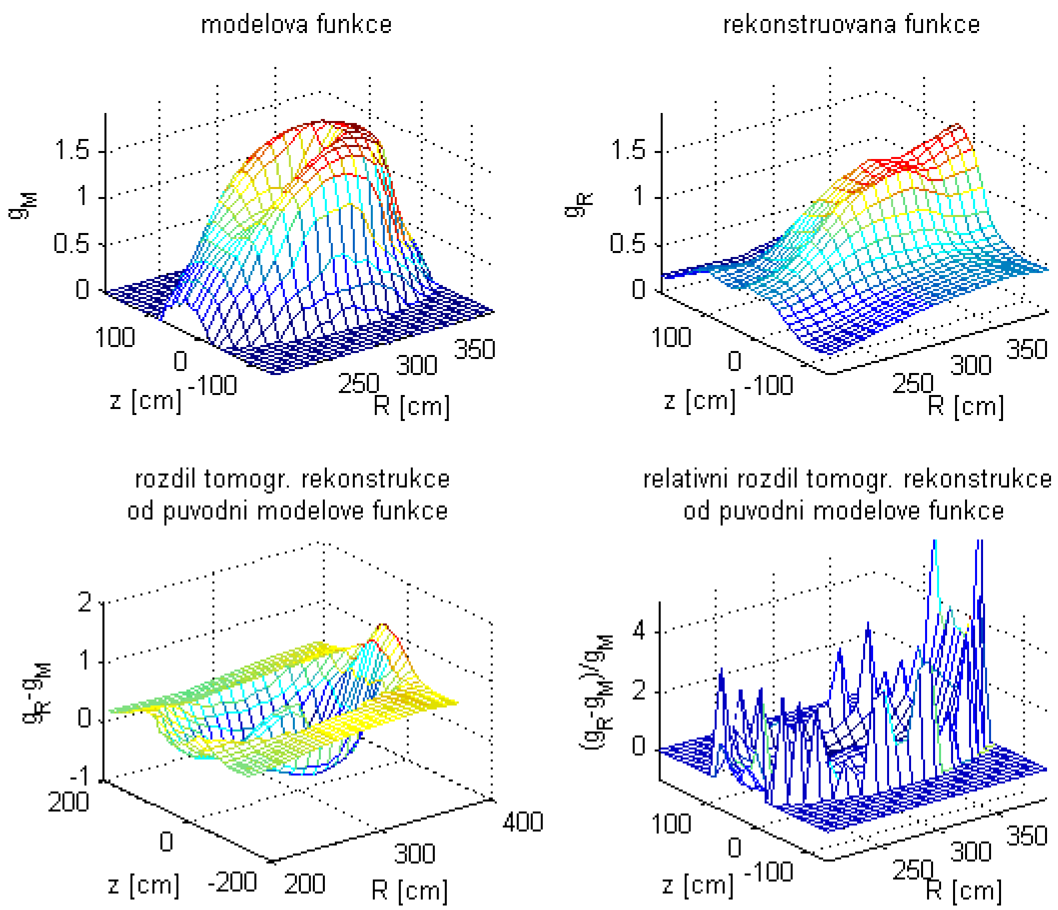
$$b = 3,\ m = 2,\ r_{MIN} = 0{,}1,\ r_{MAX} = 0{,}8,\ p = 2,$$
$$\varphi_{MAX} = \pi,\ \varphi_{MIN} = -\pi,\ a(t) = 0 + 0{,}05(t-1), \qquad (5.2)$$

kde *t* je index času.

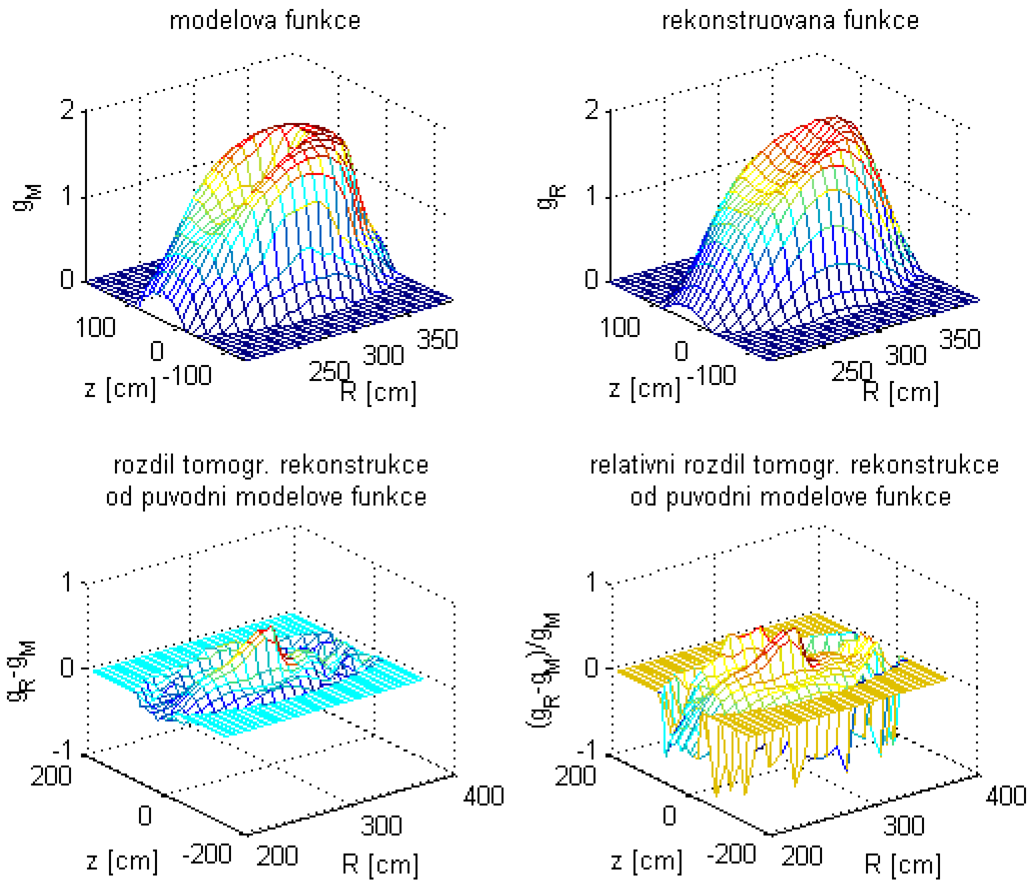
Na obr 5.1 a 5.2 lze porovnat tomgorafické rekonstrukce modelové funkce s a bez shlazování podél magnetických siločar. V případě rekonstrukcí bez shlazování podél magnetických silořar (obr. 5.1) vykazovaly rekonstruované funkce v průběhu deseti časových indexů absolutní odchylku zhruba kolem 18% (±2%) z maxima a 38% (±5%) z průměru zvolené modelové funkce. Relativní odchylka se uprostřed obrazu pohybovala zhruba kolem 25%, přičemž na krajích, kde modelová funkce nabývá nejnižších hodnot, dosahovala 100% i více.

U rekonstrukcí využívajících shlazování podél magnetických silořar (obr. 5.2) byly chyby rekonstrukce mnohem menší. Absolutní odchylka vycházela zhruba kolem 8% (±2%) z maxima a 15% (±2%) z průměru modelové funkce. Relativní odchylka nabývala uprostřed obrazu velikostí kolem 15% a na okrajích byla rovněž podle očekávání větší. Při rekonstrukcích došlo také k vyhlazení „banánové“ složky modelové funkce.

Menší chyby v tomografické rekonstrukci se shlazováním podél magnetických siločar byly do jisté míry očekávány, protože modelová funkce emisivity měkkého rentgenového záření byla navržena s přihlédnutím k fyzikálním vlastnostem plazmatu v magnetickém poli (tj. hladší podél magnetických siločar). Výrazně vyšší přesnost tomografické rekonstrukce se shlazováním podél magnetických siločar ještě více dokazuje, že zahrnutí této vlastnosti plazmatu při hledání řešení profilu emisivity měkkého rentgenového záření, je velmi výhodné. Následující tomografické rekonstrukce budou prováděny vždy se shlazováním podél magnetických siločar.

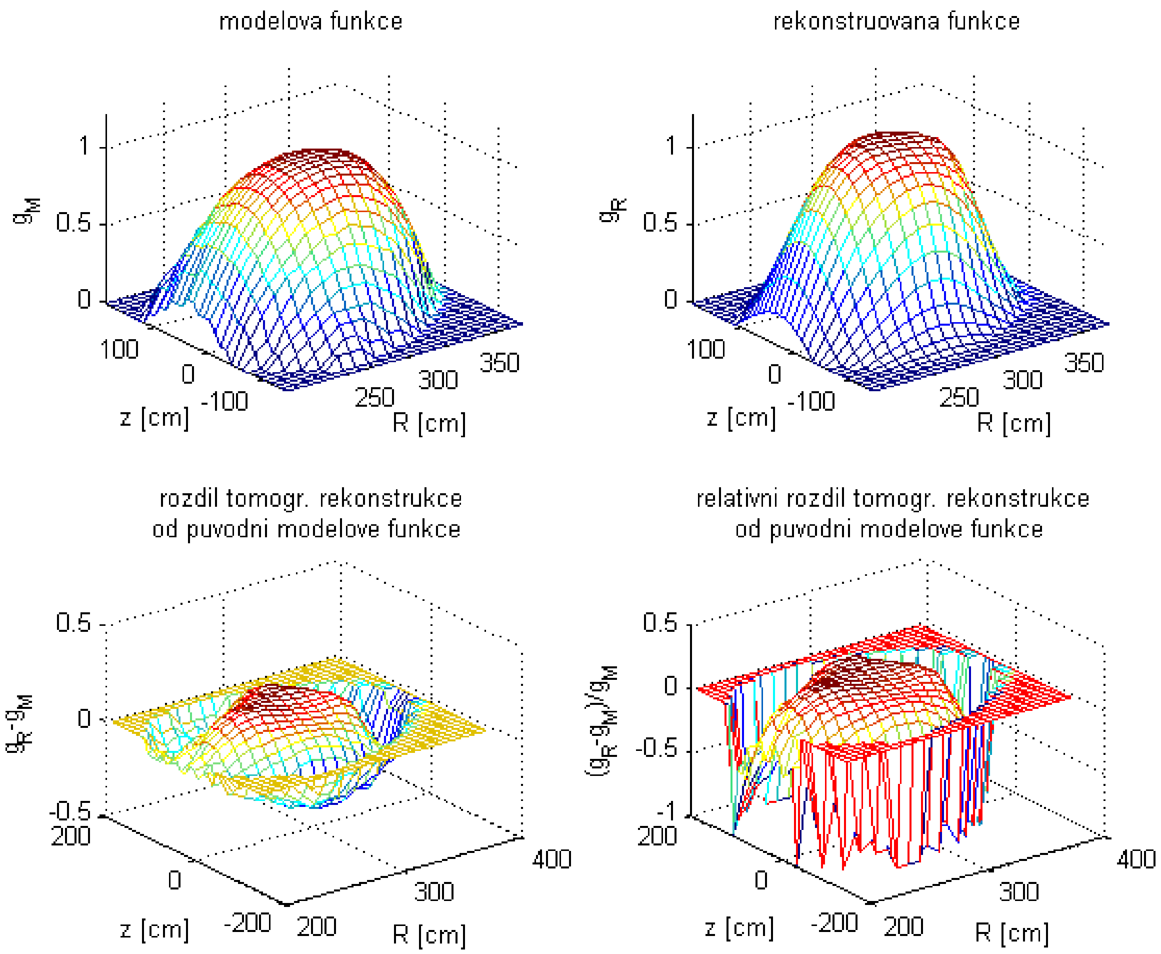



Obrázek 5.1: Třírozměrné znázornění modelové funkce ($g_M$), tomografické rekonstrukce ($g_R$) a absolutní a relativní chyby pro 5. časový index *t*. Tomografická rekonstrukce probíhala bez shlazování podél magnetických siločar.




Obrázek 5.2: Třírozměrné znázornění modelové funkce ($g_M$), tomografické rekonstrukce ($g_R$) a absolutní a relativní chyby pro 5. časový index *t*. V tomto případě byla provedena tomografická rekonstrukce se shlazováním podél magnetických siločar.

Pro symetrickou modelovou funkci bez "banánové" části vyšla rekonstrukce v tomto případě ostřejší (viz obr 5.2.), což je rozdíl oproti lineárním regularizacím, při kterých minimalizace regularizačních funkcionálů vede na hladší rekonstrukci s menším maximem. Jde zřejmě o důsledek přítomnosti *g* ve jmenovateli Fisherovy informace (viz vztah 2.33), který má za následek nižší shlazování pro větší *g*. Rekonstruovaná funkce nemusí mít vždy větší maximum, neboť kvadrát derivace je ve Fisherově informaci vážen faktorem *1/g*. Pokud má modelová funkce pro vyšší *g* dostatečně vysoké derivace, dojde při minimalizaci Fisherovy informace ke snížení těchto derivací.




Obrázek 5.2: Třírozměrné znázornění modelové funkce ($g_M$) bez "banánové" časti (tj. pro první časový index), tomografické rekonstrukce ($g_R$) a absolutní a relativní chyby.

## 5.2. Šum

Při vyhodnocování tomografických rekonstrukcí je užitečné znát vliv šumu. Šum je jak elektronického původu (při detekci a přenosu signálu) tak důsledkem fluktuací v plazmatu. Předpokládá se, že šum v detektorech měkkého rentgenového záření na JET se pohybuje okolo 4% velikosti signálu. Vliv šumu na tomografickou rekonstrukci lze odhadnout ze simulací metodou Monte Carlo, kdy je k signálu uměle přidáván šum a výsledné rekonstrukce jsou statisticky analyzovány. Chyba metody Monte Carlo je úměrná $1/\sqrt{n}$ , kde $n$ je počet generací náhodné veličiny a proto je třeba šum generovat co nejvícekrát.

Vliv umělého šumu lze sledovat jak na datech modelových, tak na skutečných. Nevýhodou skutečných dat může být, že už vlastní šum obsahují a dochází tak ke skládání skutečného a umělého šumu. Přesto je příhodné skutečná data pro sledování vlivu umělého šumu použít, protože realisticky vystihnout chování emisivity měkkého rentgenového záření pomocí modelové funkce je obtížné.

Šum v detektorech lze podle předpokladů aproximovat normálním (Gaussovým) pravděpodobnostním rozdělením. Výsledná hodnota signálu $\tilde{f}_i$ pro i-tý detektor je pak dána vztahem:

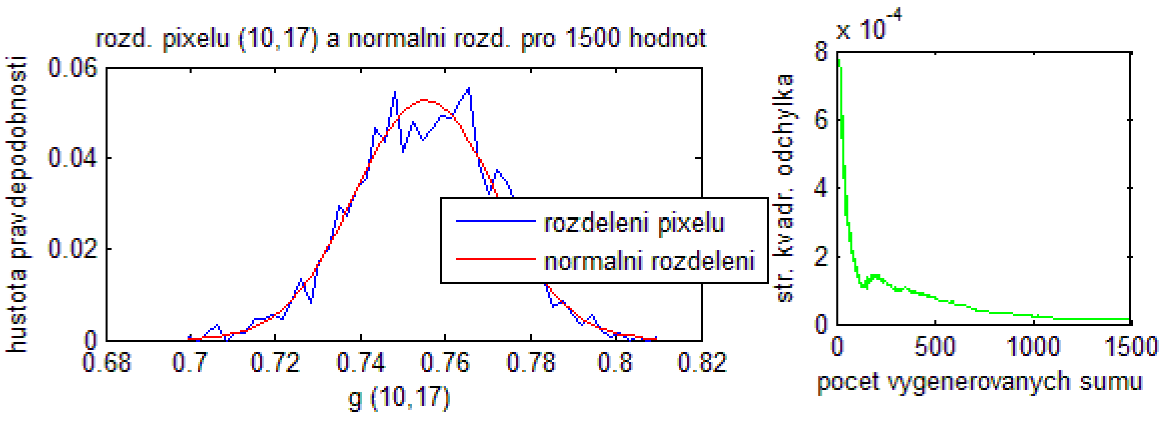
$$\tilde{f}_i = f_i + \xi_i = f_i(1 + x\sigma_D), \qquad (5.3)$$

kde $f_i$ je původní hodnota na i-tém detektoru, $\xi_i$ vygenerovaný šum, $x$ hodnota vygenerovaná se standardním pravděpodobnostním rozdělením s hustotou pravděpodobnosti:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

a $\sigma_D$ představuje podíl směrodatné odchylky generovaného šumu na velikosti signálu detektoru.

Šum s Gaussovým rozdělením v detektorech by měl vést rovněž na Gaussovský šum v pixelech tomografického obrazu. Potvrzení této domněnky je na obr 5.3., kde je vykreslena hustota pravděpodobnosti pro vybraný pixel (se souřadnicemi (10,17) na mřížce 20x34 pixelů) spolu s Gaussovým rozdělením o stejné střední hodnotě a rozptylu. Střední kvadratická odchylka rozdělení hodnot pixelu od Gaussova rozdělení (tj. vzájemná střední kvadratická odchylka křivek na obr. 5.3a) klesá se vzrůstajícím počtem vygenerovaných šumů (viz obr. 5.3b). Stejné chování vykazují i ostatní pixely.




Obrázek 5.3: Rozdělení hodnot vybraného pixelu ve srovnání s normálním rozdělením (a) a odchylka rozdělení pixelu od normálního v závislosti na počtu vygenerovaných šumů (b).

Další dopady šumu v detektorech na tomografickou rekonstrukci lze vysledovat ze základních nástrojů statistické analýzy jako je aritmetický průměr, výběrová směrodatná odchylka a variační koeficient dané známými vztahy:

$$< g_j > = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} g_{jk} \tag{5.4}$$

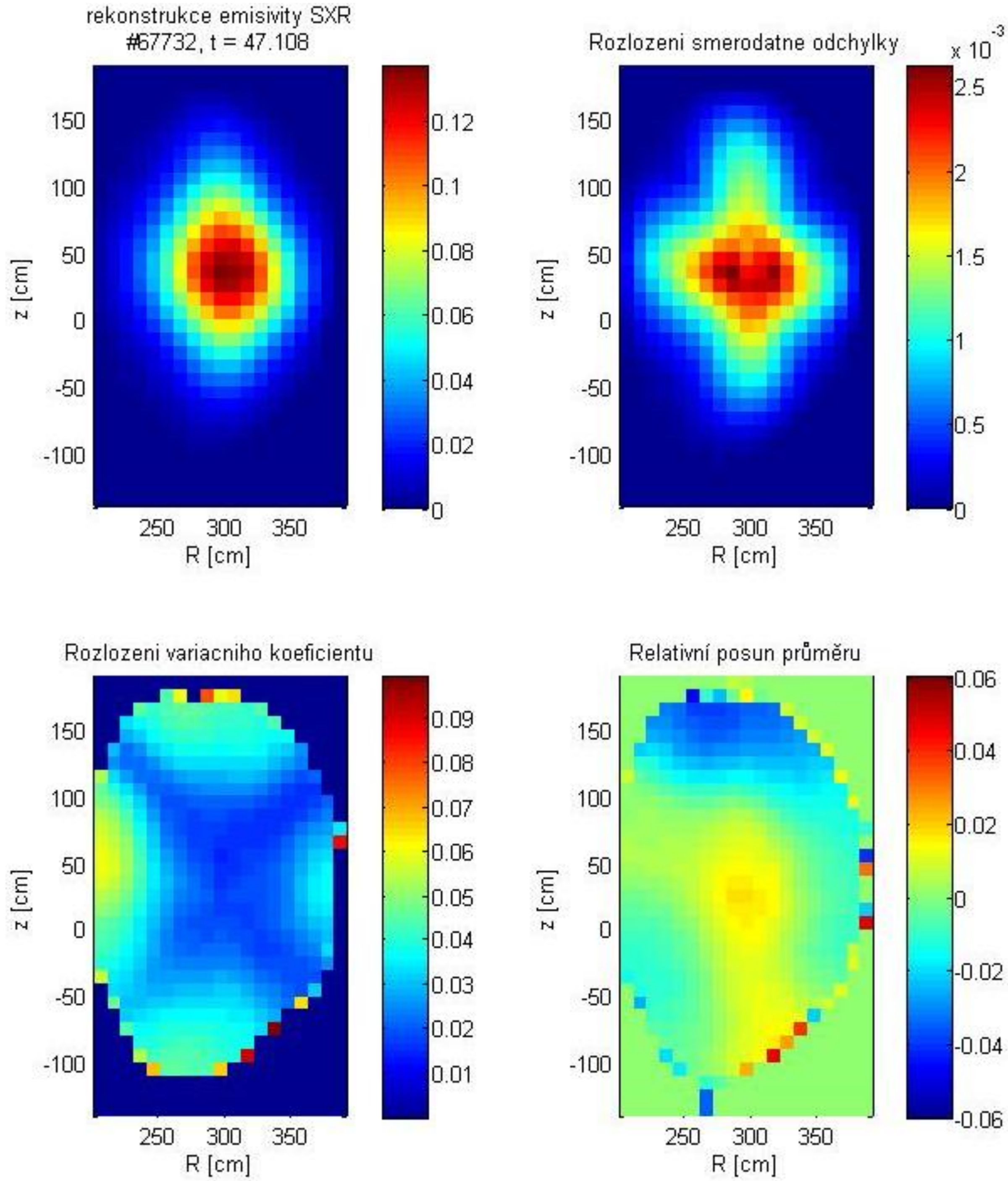
$$s_j = \sqrt{\frac{\sum_k \left(g_{jk} - < g_j >\right)^2}{N-1}} \tag{5.5}$$

$$v_j = \frac{s_j}{< g_j >}, \tag{5.6}$$

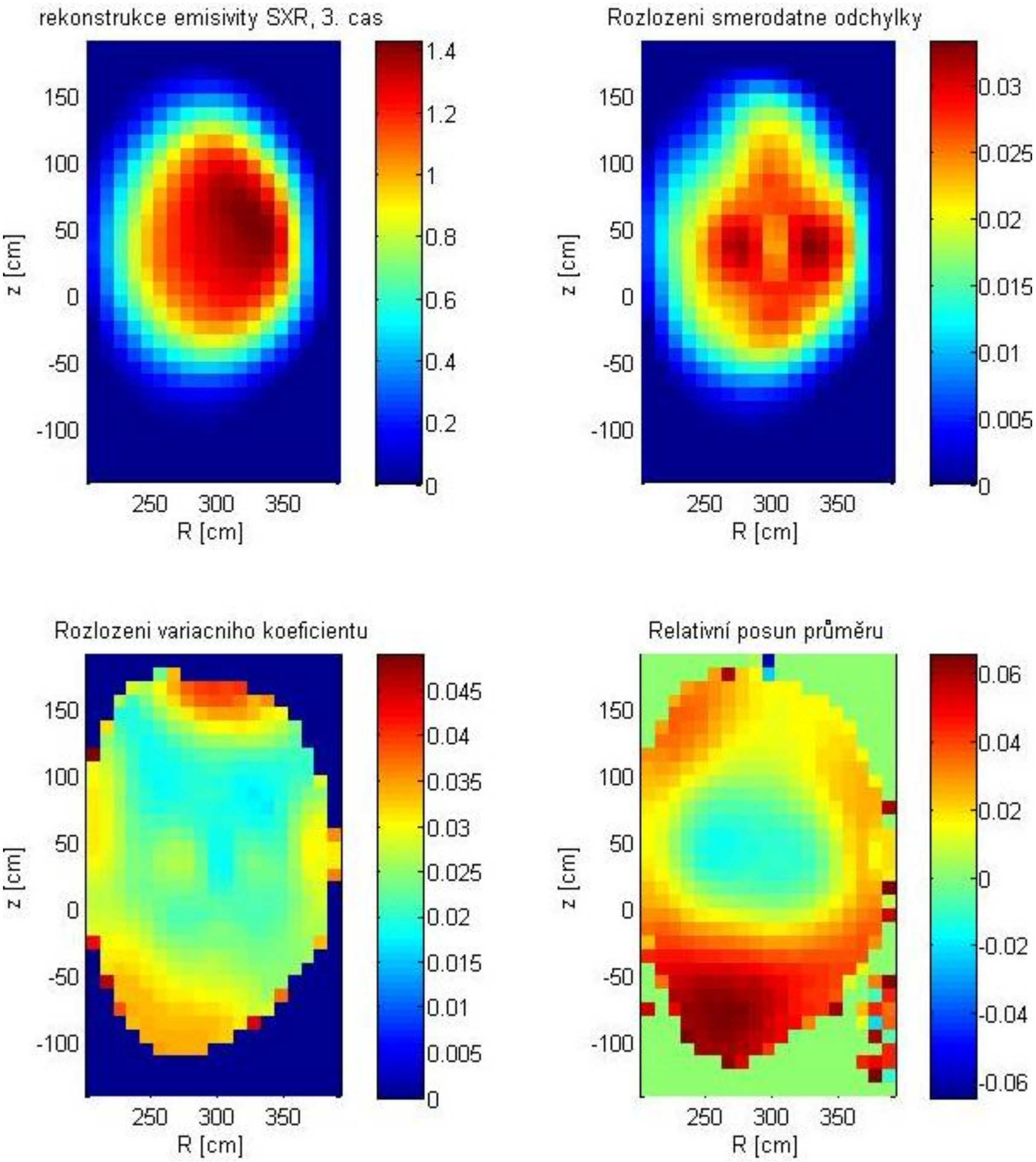
kde $g_{\mathrm{jk}}$ je hodnota $j$-tého pixelu pro $k$-tý vygenerovaný šum a $N$ počet generací šumu.

U výběrové směrodatné odchylky je na první pohled z obr. 5.4. a 5.5. patrné, že zhruba sleduje profil rekonstruované emisivity měkkého rentgenového záření. Takové rozložení směrodatné odchylky se dalo očekávat, neboť vygenerovaný šum v detektorech je uměrný detekovaným signálům. Při tomografické rekonstrukci jsou pak pixely s většími hodnotami zatíženy větším šumem.

Variační koeficient se uprostřed tomografického obrazu pohybuje kolem 2% (viz obr 5.4 a 5.5) při simulovaném šumu v detektorech se směrodatnou odchylkou 4% velikosti signálu. Rozložení variačního koeficientu má zhruba tvar čtyřlístku. Tím, že při rekonstrukci je obraz sestavován tak, aby vyhověl projekcím s přidaným šumem, dochází zřejmě k tomu, že šumem v detektorech jsou více ovlivněny pixely, na které detektory míří, a také ty pixely, které mají nižší hodnoty.

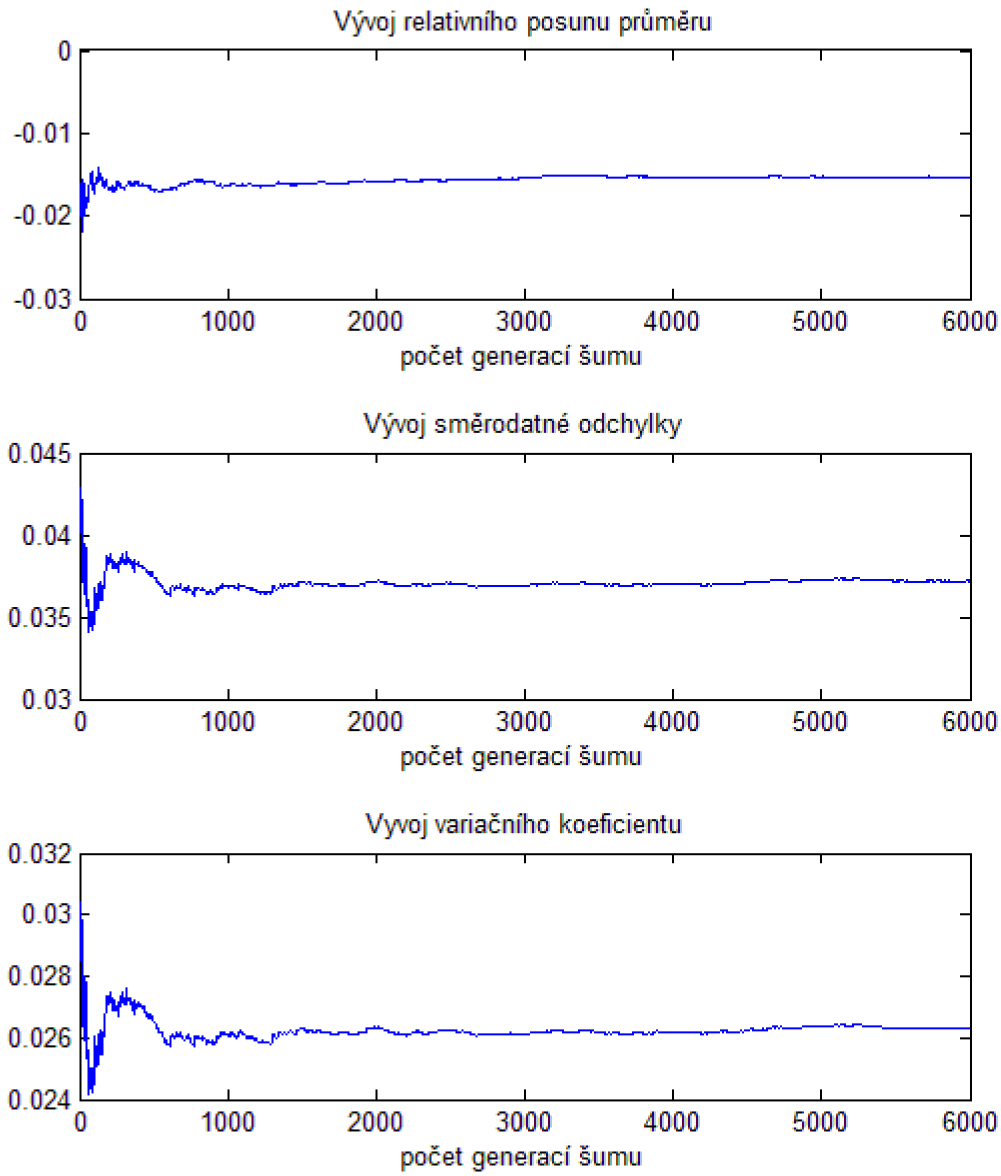



Obrázek 5.4: Rekonstrukce emisivity měkkého rentgenového záření (SXR – Soft X-Ray) bez umělého šumu v čase $t = 47{,}108s$ u pulzu číslo 67732, rozložení směrodatné odchylky, variačního koeficientu a relativního posunu průměrných hodnot pixelů od rekonstrukce bez umělého šumu. Šum byl generován 2000x se směrodatnou odchylkou 4% z velikosti signálů v detektorech, tj. $\tilde{\sigma} = 0{,}04$ (viz vztah (4.3)).



Obrázek 5.5: Rekonstrukce z modelových dat (viz vztah 4.1) pro 3. časový index a rozložení výběrové smerodatné odchlky, variačního posunu a relativního posunu středních hodnot pixelů od rekonstrukce bez šumu. Šum byl generován 2000x.

Průměrné hodnoty pixelů tomografických rekonstrukcí s vygenerovaným šumem jsou oproti tomografické rekonstrukci bez šumu posunuty jen o několik procent. Rozložení relativního posunu středních hodnot pixelů se pro vícekrát generovaný šum již takřka nemění, jak je patrné z obr. 5.6. (to samé platí i pro výběrovou směrodatnou odchylku a variační koeficient). Z toho lze usuzovat, že odlišnosti v rozloženích relativního posunu středních hodnot pixelů od rekonstrukce bez šumu na obrázcích 5.4. a 5.5. mohou být způsobeny odlišným tvarem rekonstruovaných funkcí.




Obrázek 5.6: Vývoj relativního posunu středních hodnot pixelů, směrodatné odchylky a variačního koeficientu vzhledem k počtu generací šumu pro vybraný pixel (se souřadnicemi (10,17) na mřížce 20x34 pixelů, tj uprostřed tomografického obrazu) pro 5. časový index modelové funkce. Více než 2000 generací šumu má na rozložení relativního posunu středních hodnot a výběrové odchylky (a tím i na rozložení variačního koeficientu) již zanedbatelný vliv. Obdobně se chovají i ostatní pixely.

Na obrázcích 5.4. a 5.5. vykazuje směrodatná odchylka zhruba uprostřed obrazu dva píky. Je zajímavé, že podobný rys se objevil i u tomografické rekonstrukce emisivity neutronů na tokamaku JET metodou MFR [1], přestože geometrické uspořádání detektorů neutronů a měkkého rentgenového záření se poněkud liší. Píky se objevovaly jak pro skutečná data, tak pro různé tvary modelových funkcí, a mohou být projevem numerického artefaktu v použité metodě tomografické rekonstrukce.

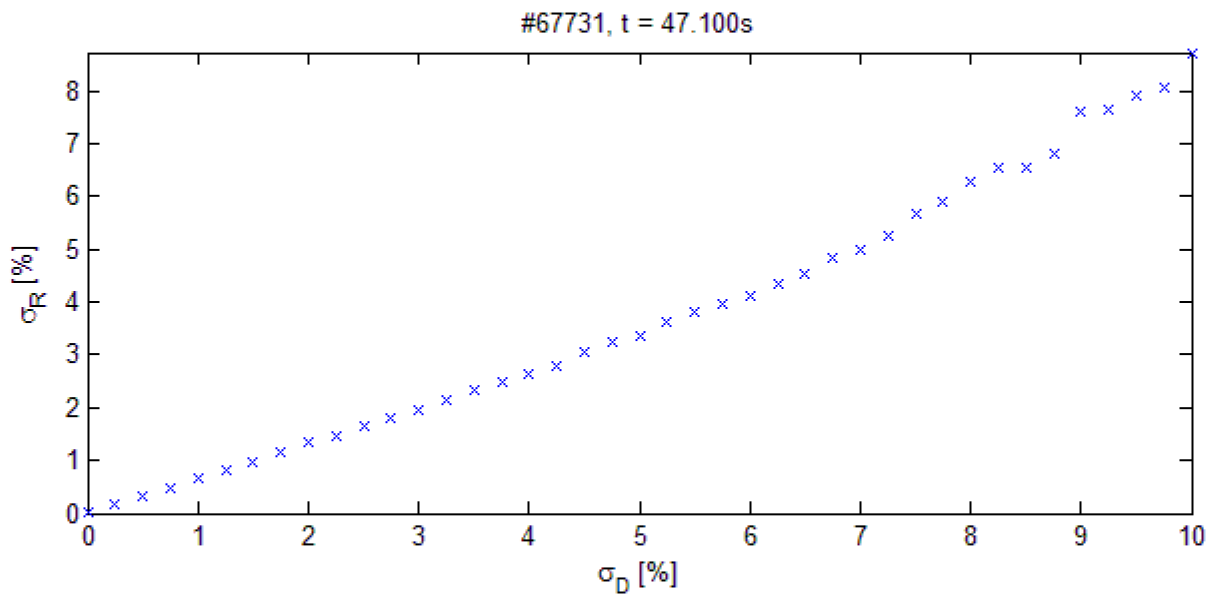
S rostoucí velikosti generovaného šumu v detektorech poroste šum zrekonstruovaných pixelů. Průběh závislosti šumu pixelů na vygenerovaném šumu v detektorech je na obr. 4.7. Šum v tomografické rekonstrukci je tu reprezentován podílem součtu směrodatných odchylek pixelů a součtu hodnot všech pixelů:

$$\sigma_R = \frac{\sum_j s_j}{\sum_j g_j} \cdot 100 \qquad [\%] \qquad (5.7)$$

a šum v detektorech $\sigma_D$ je vyjádřen vztahem 4.2. Zvolené vyjádření šumu $\sigma_R$ v tomografické rekonstrukci je vhodné pro porovnání s šumem v detektorech, který lze vyjádřit obdobně (tj. jako podíl součtu směrodatných odchylek detekovaných signálů a součtu velikostí signálů jak plyne ze vztahu (5.3)). Z obrázku 5.7. plyne, že tomografická rekonstrukce metodou MFR odolává dobře šumu v detektorech, je robustní.

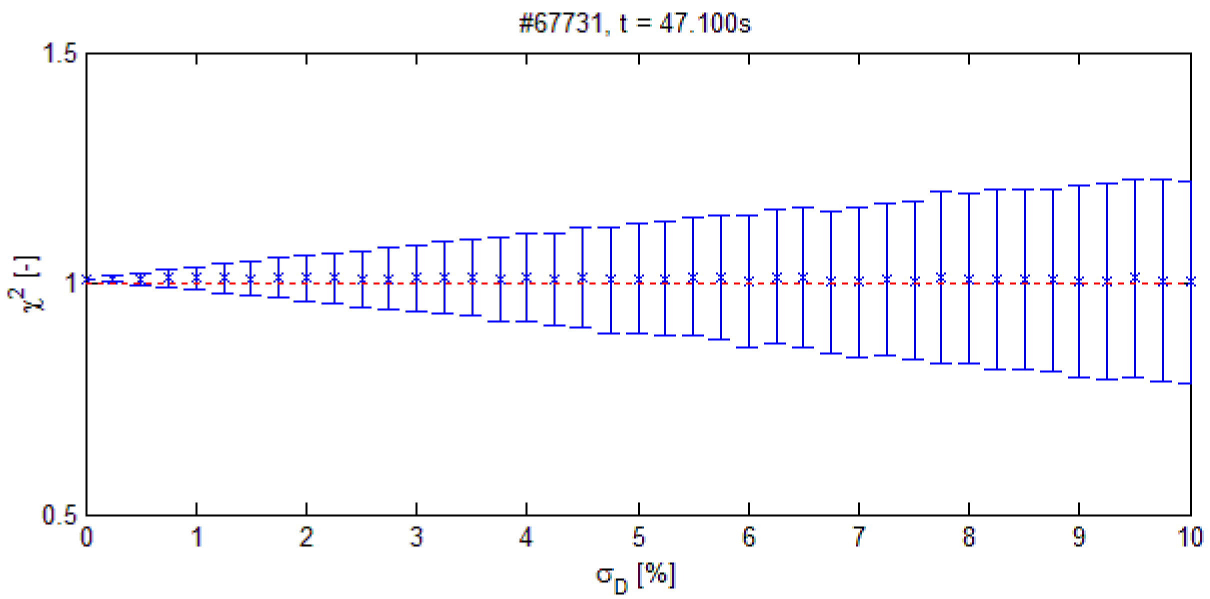
Stejně jako lze pro více časů urychlit výpočet tomografických rekonstrukcí řešením více časů najednou v jedné rekonstrukci (viz kap. 2.2.3), je možné urychlit výpočet tomografických rekonstrukcí pro mnohokrát generovaný šum v detektorech zahrnutím všech signálů s mnohokrát generovaným šumem do jedné rekonstrukce. Např. pro 10 časů a 2000 generací šumu se pak řeší $2 \cdot 10^4$ rekonstrukcí najednou, což sice velmi urychlí výpočet, ale řešení pak zřejmě vlivem numerické nestability[6] vykazuje šum $\sigma_R$ téměř 1% i případě nulového šumu v detektorech (v rekonstrukcích se opakuje několik stejných řešení) a proto není taková simulace šumu v detektorech vhodná.

[6] V použitém jazyce MATLAB je relativní přesnost čísel s plouvoucí desetinnou čárkou $2^{-52}$.




Obrázek 5.7: Závislost velikosti šumu v tomografické rekosntrukci $\sigma_R$ reprezentovaného vztahem (5.6) na velikosti šumu v detektorech $\sigma_D$ (viz vztah (5.3)). Šum byl simulován 2000x na skutečných datech pulzu č. 67731 v čase 47,1s (od vpuštění proudu do cívek magnetického pole).

V případě tomografických rekonstrukcí pro více časů najednou má větší šum v detektorech také za následek větší odchylku $\chi^2$ pro jednotlivé časy (viz vztah 2.40) od požadovaného $\chi^2 = 1$, protože řešení je hledáno tak, aby bylo rovno jedné pouze $\chi^2$ zprůměrované přes všechny časy (viz vztah 2.46). Důsledkem je, že tomografické rekonstrukce pro jednotlivé časy neodpovídají předpokládané chybě (viz obr 5.8).



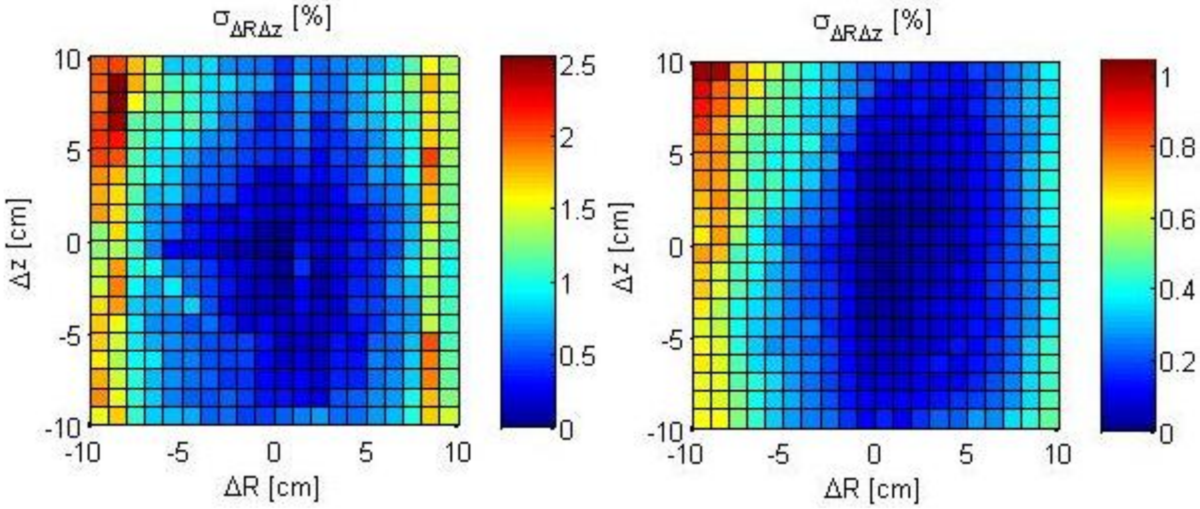

Obrázek 5.8: Průběh $\chi^2$ v závislosti na 2000x generovaném šumu v detektorech pro první ze tří rekonstruovaných časů. Střední hodnoty jsou vyznačeny křížkem, velikosti směrodatných odchylek úsečkou (oběma směry od průměru) a .požadovaná hodnota $\chi^2 = 1$ červeně.

## 5.3. Vychýlení pozice magnetických povrchů

Tomografická rekonstrukce (metodou MFR) emisivity měkkého rentgenového záření je celkem odolná proti nepřesnostem v určení polohy magnetických povrchů (viz obr 5.9), které se při tomografické rekonstrukci v souladu s fyzikálními vlastnostmi plazmatu používají ke shlazování řešení podél magnetických siločar. Relativní odchylkou tomografických rekonstrukcí provedených podle posunutých magnetických povrchů od rekonstrukce bez posunutí magnetických povrchů je zde myšlena odchylka:

$$\sigma_{\Delta R \Delta z} = \frac{\sum_j \left(g_{j\Delta R\Delta z} - g_j\right)^2}{\sum_l g_j^2} \cdot 100 \qquad [\%], \qquad (5.7)$$

kde $g_{j\Delta R\Delta z}$ představuje hodnotu j-tého pixelu na souřadnicích získanou z tomografické rekonstrukce při pounutí magnetických povrchů o $\Delta R$ podle vodorovné osy $x$ a o $\Delta Z$ podle horizontální osy $z$. Odolnost tomografické rekonstrukce (metodou MFR) emisivity měkkého rentgenového záření proti chybě v určení polohy magnetických povrchů je na první pohled výhodou, ale negativním důsledkem je, že ji s dostatečnou přesností a spolehlivostí nelze použít pro optimalizaci polohy magnetických povrchů.



(a) (b)

Obrázek 5.9: Závislost relativní odchylky dáné vztahem (5.7) na posunutí magnetických povrchů pro modelová (a) a skutečná data (b). Sledovaná oblast má velikost jednoho pixelu (10x10cm). Modelová data byla vzata pro 3. časový index (viz vztah (5.1) a parametry (5.2)) a skutečná data z pulzu č. 67731 v čase 47,1s.

## 5.4. Chyba v kalibraci

Detektory měkkého rentgenového záření jsou poškozovány vlivem radiace plazmatu, což se projevuje na jejich efektivitě. Kamera S4 je navíc oproti kameře V radiačně chraněna (viz kap. 3) a její radiační poškozování tak postupuje pomaleji. Použité kalibrační konstanty (viz dodatek A) jsou proto spíše orientační.

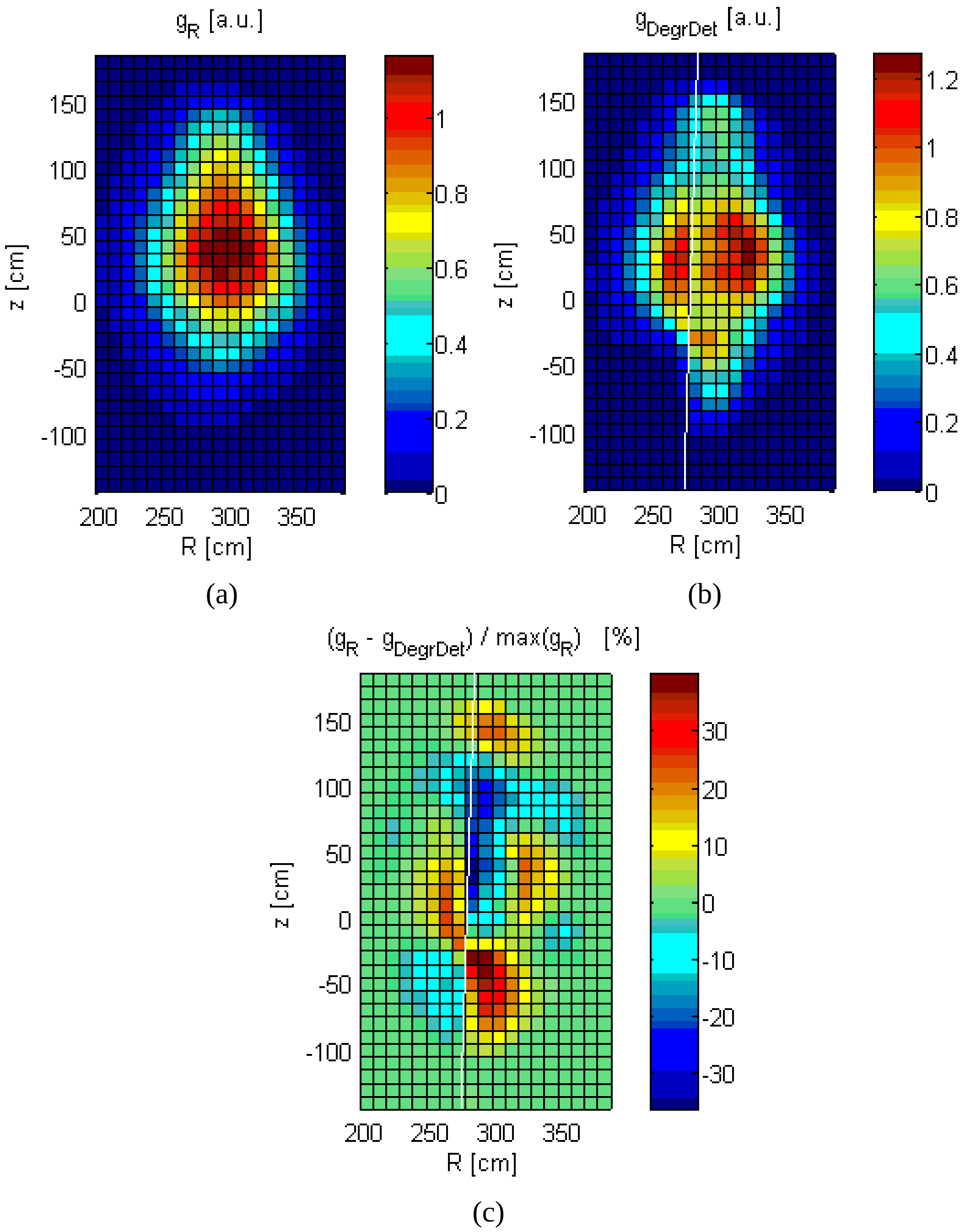
### 5.4.1. Chyba v kalibraci detektoru

Sníží-li se účinnost nějakého detektoru např vlivem radiačního poškození, aniž by byla odpovídajícím způsobem upravena kalibrační konstanta, musí se tomografická rekonstrukce vypořádat s protichůdnými informacemi, což může vést k přesunutí rekonstruované emisivity měkkého rentgenového záření do okrajových částí tomografického obrazu, jak lze vidět např na obr. 5.10, na kterém je výsledek tomografické rekonstrukce při simulovaném snížení účinnosti vybraného detektoru o 50% (spíše pro ilustraci, protože tak vysoký rozpor mezi kalibrační konstantou a účinností detektoru se neočekává).

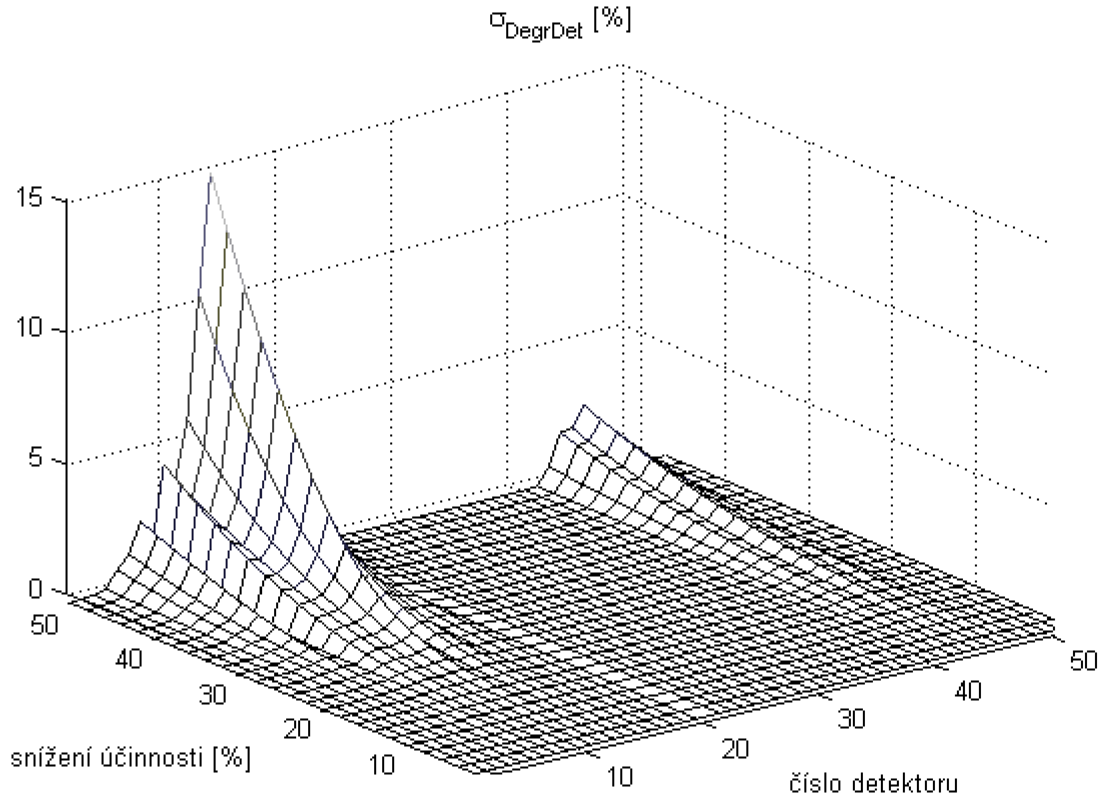
Na obr. 5.11 jsou odchylky rekonstrukcí při pozměněných kalibračních konstantách pro jednotlivé detektory od rekonstrukce s původními kalibračními konstantami. Degradace detektorů byla simulována snížením účinnosti detektorů o 2% až 50%. Odchylka byla obdobně jako v kapitole 5.3 vypočtena jako:

$$\sigma_{DegrDet} = \frac{\sum_j \left(g_{DegrDet} - g_j\right)^2}{\sum_l g_j^2} \cdot 100 \qquad [\%], \qquad (5.8)$$

kde $g_{DegrDet}$ je rekonstrukce při simulované degradaci (resp. snížení účinnosti o určité procento) příslušného detektoru. Z obr. 5.11 patrné, že relativní snížení kalibračních konstant do 15% nemá na rekonstrukci téměř vliv, přičemž největší vliv na tomografickou rekonstrukci maji podle očekávání detektory mířící do středu plazmatu.

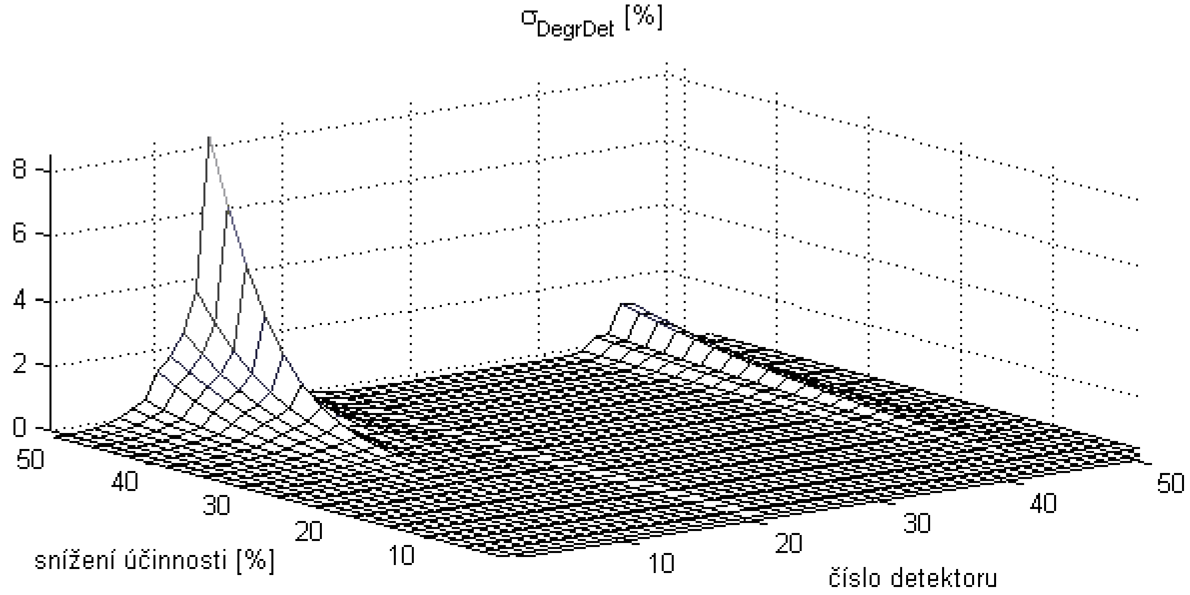



Obrázek 5.10: Tomografická rekonstrukce emisivity měkkého rentgenového záření v čase 58s pulzu č. 65942 (a), rekontrukce při simulovaném snížení účinnosti vybraného detektoru (průhled znázorněn bílou přímkou) o 50% (b) a rozdíl rekonstrukcí vzhledem k maximální hodnotě původní rekonstrukce (c).



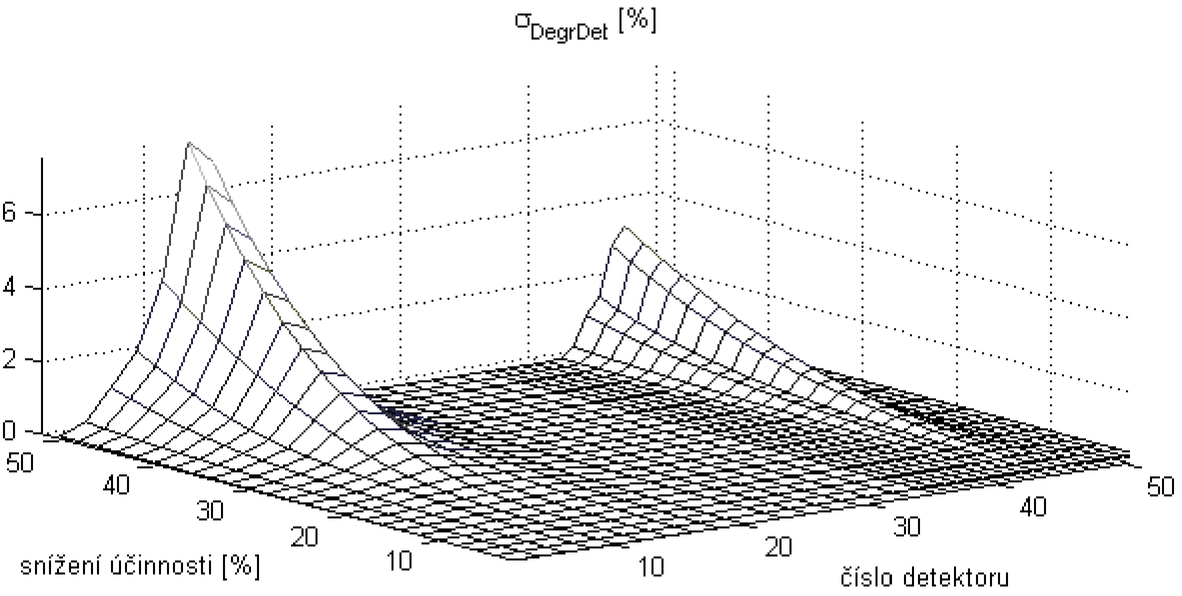

Obrázek 5.11: Závislost relativní odchylky $\sigma_{DegrDet}$ dané vztahem (5.9) na relativní změně účinnosti detektorů. Detektory číslo 1 až 35 odpovídají kameře V a detektory číslo 36 až 52 kameře S4. Rekonstrukce byly řešeny v čase 58s pulzu č. 65942 při předpokládané relativní chybě detektorů 4%.

Velikost vypočtené odchylky $\sigma_{DegrDet}$ závisí na předpokládané chybě v detektorech (viz kap. 2.2.3). Při vyšších předpokládaných chybách detektorů má na rekonstruovanou funkci větší vliv shlazování podél magnetických siločar a minimalizace Fisherovy informace a proto je odchylka $\sigma_{DegrDet}$ nižší. Zvětšení předpokládané chyby v detektorech ze 4% na 5% vedlo ke snížení odchylky $\sigma_{DegrDet}$ na zhruba polovinu (viz obr 5.12).




Obrázek 5.12: Závislost relativní odchylky $\sigma_{DegrDet}$ dané vztahem (5.9) na relativní změně účinnosti detektorů pro stejný případ jako u obr. 5.10 ale s předpokládanou chybou detektorů 5%.

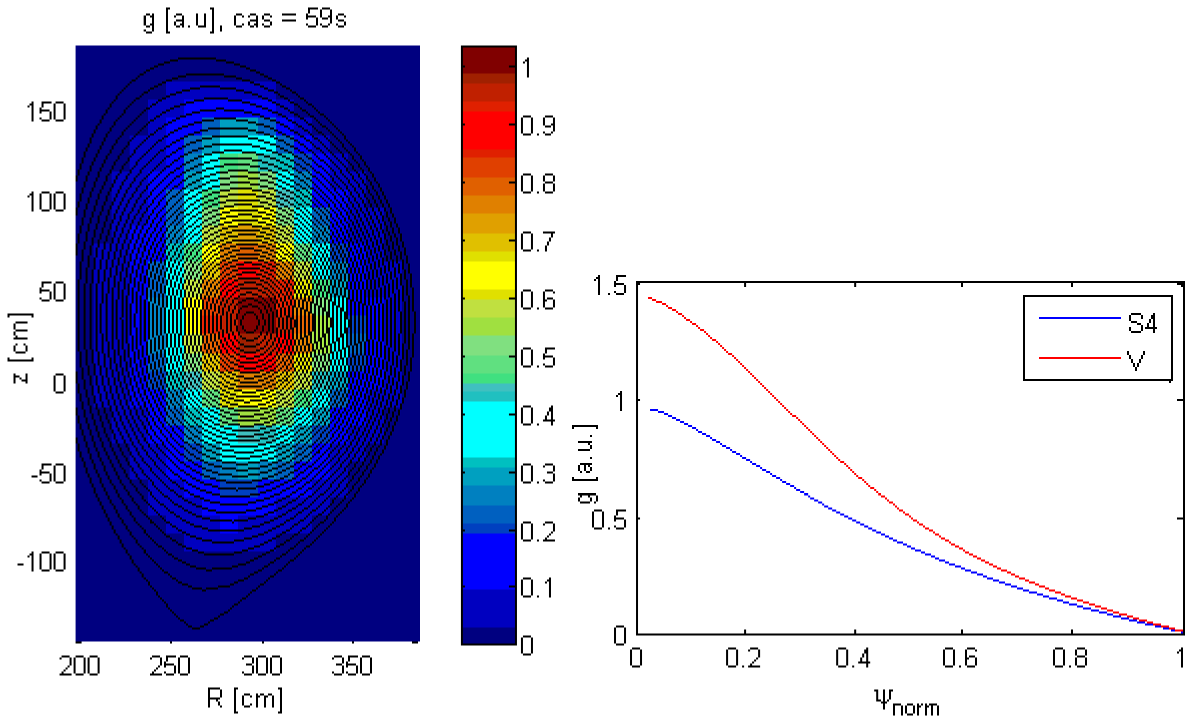
Na rekonstrukci mají větší vliv změny účinností detektorů kamery V než změny účinností detektorů kamery S4, což by mohlo být způsobeno tím, že pokrytí tomografického obrazu kamerou V je hustější a na tomografickou rekonstrukci vázanou podmínkou $\chi^2 = 1$ (viz kap. 2.2.3) nemá shlazování podél magnetických siločar a minimalizace Fisherovy informace tak velký vliv. Při tomografických rekonstrukcích jen se sudými detektory kamery V vyšly odchylky $\sigma_{DegrDet}$ nižší (viz obr 5.13). Podobný výsledek vyšel i při rekonstrukci podle lichých detektorů kamery V.




Obrázek 5.13: Závislost relativní odchylky $\sigma_{DegrDet}$ dané vztahem (5.9) na relativní změně účinnosti detektorů pro stejný případ jako u obr. 5.10 ale rekonstrukce tentokrát probíhaly při vypnutých lichých detektorech kamery V.

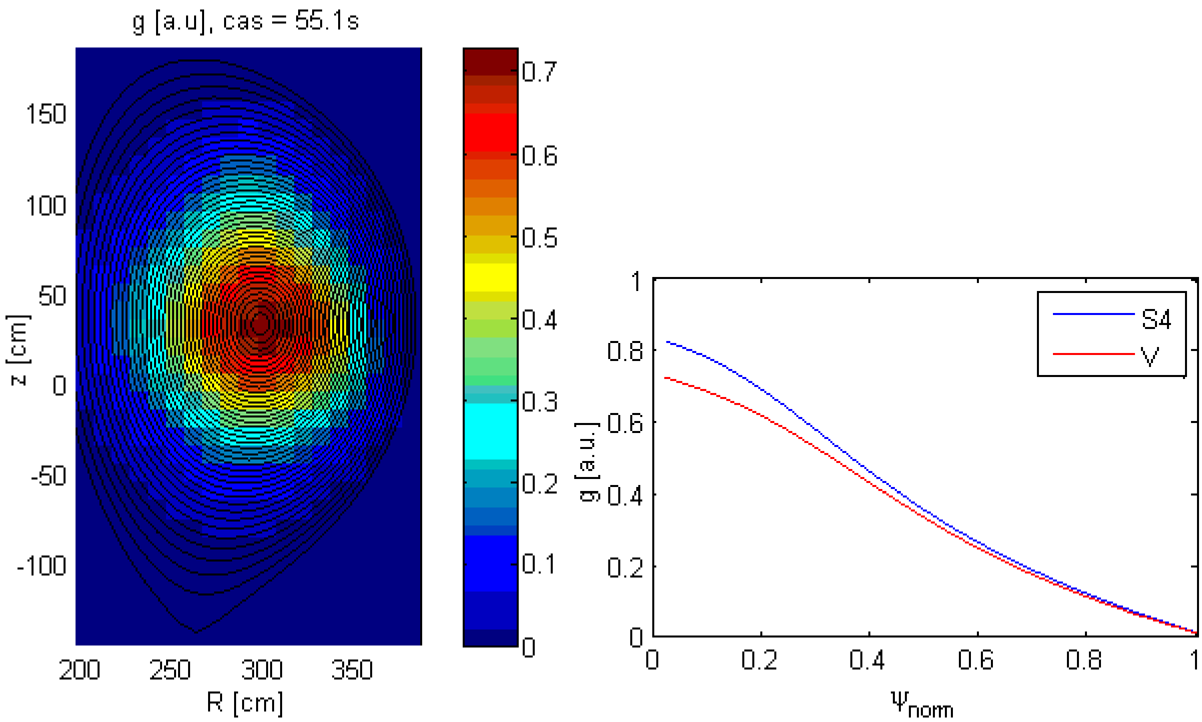
### 5.4.2. Chyba v relativní kalibraci kamer

Technické odlišnosti kamer V a S4 mohou vést k chybě v relativní kalibraci kamer, tj. chybě v důsledku takového poměru citlivosti kamer V a S4, který neodpovídá kalibračním konstantám. Kamera V má berilyový filtr tloušťky 250μm zatímco kamera S4 beriliový filtr tloušťky 350μm, což se zřejmě projeví rozdílnou spektrální citlivostí. Další chyby mohou vznikat dlouhodobě v důsledku rozdílné míry ochrany před radiačním poškozováním nebo v průběhu experimentu vlivem např. rozdílného tepelného namáhání atd. Např. u rekonstrukce emisivity měkkého rentgenového záření v čase 59s pulzu č. 65942 (viz obr. 5.14a) je znatelné „protažení“ vyšších hodnot rekonstruované emisivity měkkého rentgenového záření ve vertikálním směru (v rozporu s tendecí plazmatu příliš neměnit své vlasnosti podél magnetických siločar), což by mohlo naznačovat vyšší citlivost kamery V, která ve vertikálním směru míří. Určitou představu o citlivosti kamer V a S4 lze získat porovnáním rekonstrukce radiálního profilu emisivity měkkého rentgenového záření (abelizací, viz kap. 4.1) nejprve jen podle signálů z kamery V a poté jen podle signálů z kamery S4. Rekonstruovaný radiální profil emisivity měkkého rentgenového záření podle kamery V vykazuje v tomto případě o 43% větší hodnoty než rekonstruovaný radiální profil emisivity měkkého rentgenového záření podle kamery S4 (viz obr 5.14b). V čase 55,1s je naopak rekonstruovaný radiální profil emisivity měkkého retngenového záření podle kamery V nižší než podle kamery S4 (viz obr 5.15b).




(a) (b)

Obrázek 5.14: Tomografická rekonstrukce emisivity měkkého rentgenového záření na mřížce čtvercových pixelů (a) a abelizace (b) neboli závislost rekonstruované emisivity na normovaném magnetickém povrchu $\psi_{norm}$ rekonstruovaná nejprve pouze ze signálů z kamery V (červeně) a poté pouze ze signálů kamery S4 (modře). Rekonstrukce proběhly v čase 59s pulzu č. 65942.




Obrázek 5.15: Tomografická rekonstrukce emisivity měkkého rentgenového záření na mřížce čtvercových pixelů (a) a abelizace (b) podle kamery V (červeně) a podle kamery S4 (modře) v čase 55,1s pulzu č.65942

Různé velikosti rekonstruovaných radiálních profilů podle kamery V a podle kamery S4 mohou být v malé míře způsobeny také nesymetrií plazmatu v poloidálním směru. Podstatným vlivem však může být zmíněná rozdílná spektrální citlivost zapříčíněná především rozdílnou tloušťkou beryliových filtrů. Velikost naměřeného signálu lze vyjádřit ve tvaru

$$P_{\det} = g_{\det} \int P_\nu \cdot f_\nu d\nu \,, \qquad (5.9)$$

kde $P_\nu$ je spektrální vyzařovací výkon, $f_\nu$ pravděpodobnost detekce a $g_{det}$ geometrická konstanta příslušného detektoru (jež je zahrnuta v kalibračních konstantách, viz dodatek A).

Pravděpodobnost detekce $f_\nu$ lze popsat vztahem ([19] ):

$$f_\nu = \exp\left(-\mu_{Be}(\nu) d_{Be}\right)\left(1 - \exp\left(\mu_{Si}(\nu) d_{active}\right)\right), \qquad (5.10)$$

kde $\mu_{Be}(\nu)$ je koeficient absorbce berylia a $\mu_{Si}(\nu)$ koeficient absorbce křemíku, které lze dohledat v tabulkách (např v [26]), $d_{Be}$ tloušťka beryliového filtru (250μm pro kameru V a 350μm pro kameru S4) a $d_{active}$ tloušťka aktivní vrstvy fotodiod.

Za spektrální vyzařovací výkon plazmatu lze za běžných podmínek v tokamaku (čisté horké plazma) vzít spektrální vyzařovací výkon brzdného záření, jež je dán vztahem [5]:

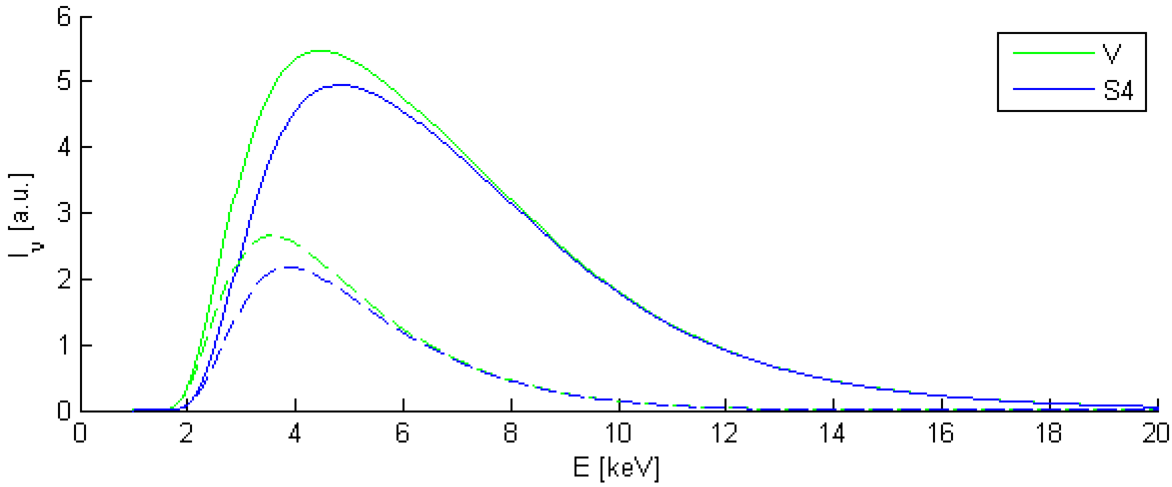
$$P_\nu = 6{,}28 \cdot 10^{-53} \frac{n_e^2 Z_{eff}}{\sqrt{T_e}} e^{-h\nu/T_e} g_{ff} \,, \quad [\mathrm{Wm^{-3}Hz^{-1}}] \qquad (5.11)$$

kde $n_e$ je hustota elektronů [$m^{-3}$], $T_e$ teplota elektronů [eV], $h\nu$ energie fotonu [eV], $Z_{eff}$ efektivní náboj plazmatu (viz vztah (1.10)) a $g_{ff}$ Gauntův faktor pro kvantově-mechanické korekce (v oblasti měkkého rentgenového záření přibližně roven jedné).

Dosazením výrazů (5.10) a (5.11) do (5.9) tak přejde vztah pro velikost naměřeného signálu do tvaru:

$$P_{\det} = g_{\det} \cdot 6{,}28 \cdot 10^{-53} \frac{n_e^2 Z_{eff}}{\sqrt{T_e}} g_{ff} \int e^{-h\nu/T_e} \cdot e^{-\mu_{Be}(\nu) d_{Be}} \left(1 - e^{\mu_{Si}(\nu) d_{active}}\right) d\nu \,. \quad [\mathrm{Wm^{-2}}] \qquad (5.12)$$

Porovnání vypočtených spektrálních intenzit brzdného záření zachycených kamerou V a kamerou S4 je na obr 5.16.

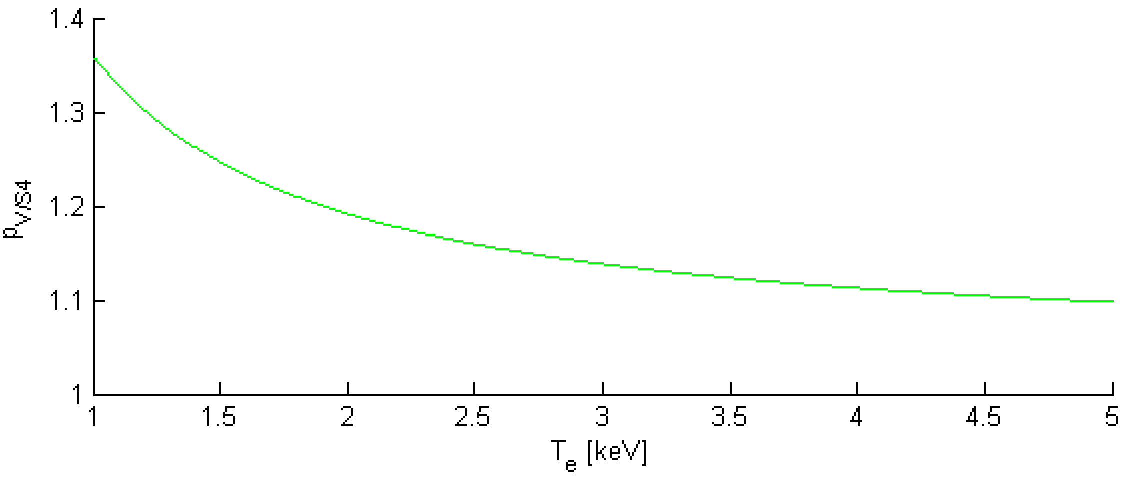



Obrázek 5.16: Relativní spektrální intenzita $I_\nu$ zachycená v aktivní vrstvě fotodiody o tloušce 200µm prošlá přes beryliový filtr tloušťky 250µm (zeleně) a tloušťky 350µm (modře) při teplotě elektronů plazmatu 2keV (čárkovaně) a 5keV (plnou čarou).

Ze vztahu (5.12) plyne závislost poměru účinnosti kamer V a S4 na teplotě elektronů (tloušťky beryliových filtrů kamery V a S4 jsou odlišeny horním indexem):

$$p_{V/S4}(T_e) = \frac{\int_\nu \exp(-h\nu/T_e)\exp\left(-\mu_{Be}(\nu)\cdot d_{Be}^{V}\right)\left(1-\exp\left(-\mu_{Si}(\nu)\cdot d_{active}\right)\right)d\nu}{\int_\nu \exp(-h\nu/T_e)\exp\left(-\mu_{Be}(\nu)\cdot d_{Be}^{S4}\right)\left(1-\exp\left(-\mu_{Si}(\nu)\cdot d_{active}\right)\right)d\nu}, \quad (5.13)$$

jež je graficky znázorněna na obr. 5.17 (různé tloušťky filtrů kamer měkkého rentgenového záření lze využít k měření teplot elektronů [28]).




Obrázek 5.17: Předpokládaný poměr citlivosti kamer V a S4 v závislosti na teplotě elektronů podle vztahu (5.13).

Naměřený poměr citlivosti kamer V a S4 je zde brán jako:

$$p_{V/S4} = \sum_i g_i^V \Big/ \sum_i g_i^{S4} \,, \tag{5.14}$$

kde $g_i^V$ představuje hodnotu pro i-tý magnetický povrch rekonstruovanou abelizací podle signalů z detektorů kamery V a $g_i^{S4}$ hodnotu pro i-tý magnetický povrch rekonstruovanou abelizací podle signalů z detektorů kamery S4. Obdobně je počítán poměr $p_{T/V}$ pro kamery V a T.

Poměry naměřených citlivostí kamer V a S4 s teplotou elektronů klesají (viz obr 5.18), kdežto v případě kamer V a T, které mají beryliový filtr o stejné šířce, se poměr téměř nemění (viz obr 5.19). Nicméně skutečnost, že poměr rekonstrukcí klesá při vyšších teplotách elektronů pod hodnotu jedna, naznačuje, že citlivost kamer V a S4 závisí i na jiných vlivech než rozdílná tloušťka beryliových filtrů. Rozdílnou spektrální citlivost kamer V a S4 naznačuje také nárůst poměru rekonstruovaných radiálních profilů při vpuštění nečistot do plazmatu (viz obr. 5.20) zatímco v případě poměru mezi rekonstrukcemi podle kamery T a podle kamery V se pulzy s nečistotami a bez nečistot rozeznat nedají (viz obr. 5.21., přítomnost nečistot tak vysvětluje velký rozdíl v rekonstruovaných profilech měkkého rentgenového záření na obr 5.14).

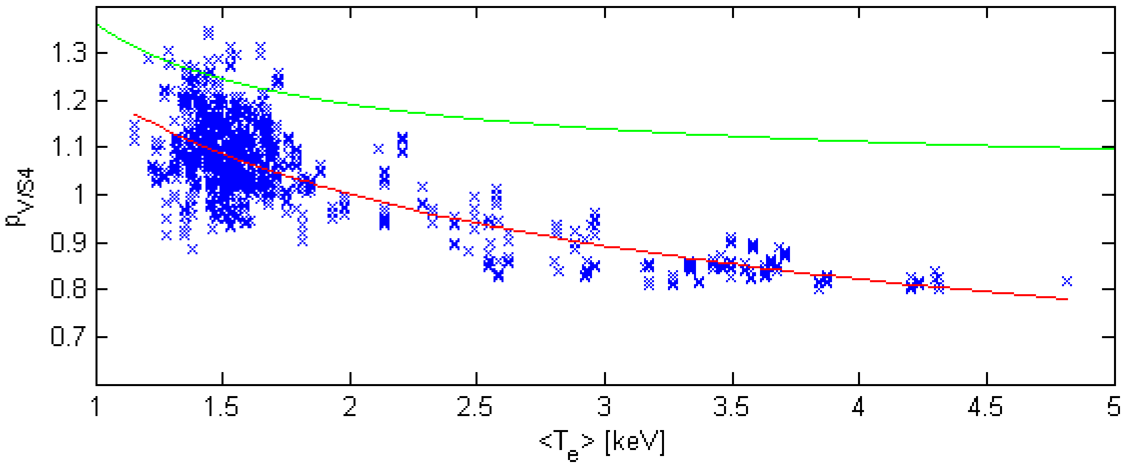
Metodou nejmenších čtverců byla u kamer V a S4 z celkem 1241 měření provedených na pulzech č. 65937, 65941, 65942, 65943, 65944, 65948 a 65949 bez časového úseku s nečistotami, které mají na velikost vliv, nalezena závislost $\widetilde{p}_{V/S4}$ na střední naměřené teplotě elektronů (v jednotkách eV):

$$\widetilde{p}_{V/S4} = 8{,}70 \cdot \langle T_e \rangle^{-0{,}29} \tag{5.15}$$

s chybou:

$$\sigma_{V/S4} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left( \widetilde{p}_{V/S4}^{\,i} - p_{V/S4}^{\,i} \right)^2}{N}} = 0{,}07 \,, \tag{5.16}$$

kde N je počet měření a $p_{V/S4}^i$ hodnota získaná z i-tého měření.




Obrázek 5.18: Poměr $p_{V/S4}$ daný vztahem (5.14) v závislosti na střední teplotě elektronů. Zeleně je vyznačena teoretická závislost vyplývající z rozdílné tloušťky beryliových filtrů (5.13) a červeně je vyznačena závislost (5.15) nalezená metodou nejmenších čtverců z naměřených hodnot.

V případě kamer V a T měla střední teplota elektronů na poměr vypočtených citlivostí kamer mnohem menší vliv. Metodou nejmenších čtverců byla nalezna závislost:

$$\tilde{p}_{T/V} = 1{,}87 \cdot \langle T_e \rangle^{-0{,}05} \qquad (5.17)$$

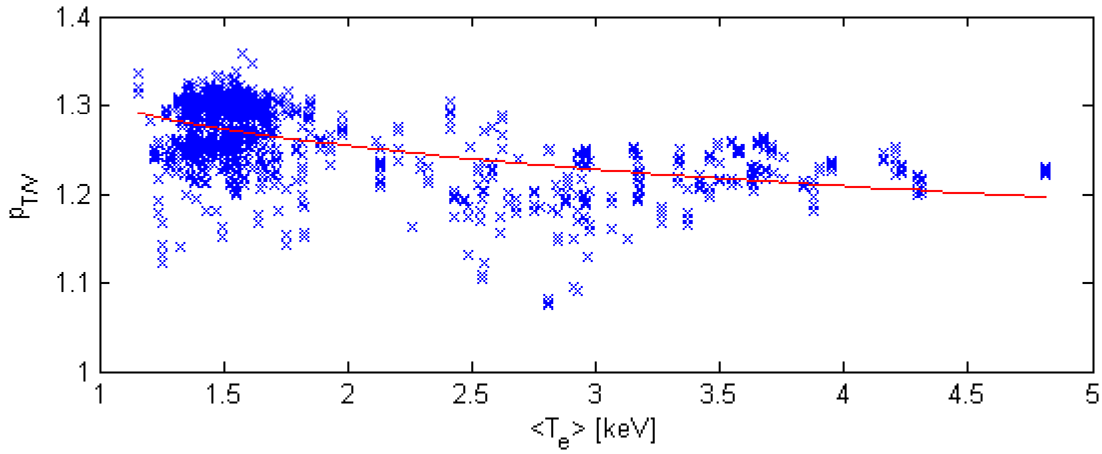
s chybou:

$$\sigma_{T/V} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\tilde{p}_{T/V}^{i} - p_{T/V}^{i}\right)^2}{N}} = 0{,}04 \qquad (5.18)$$

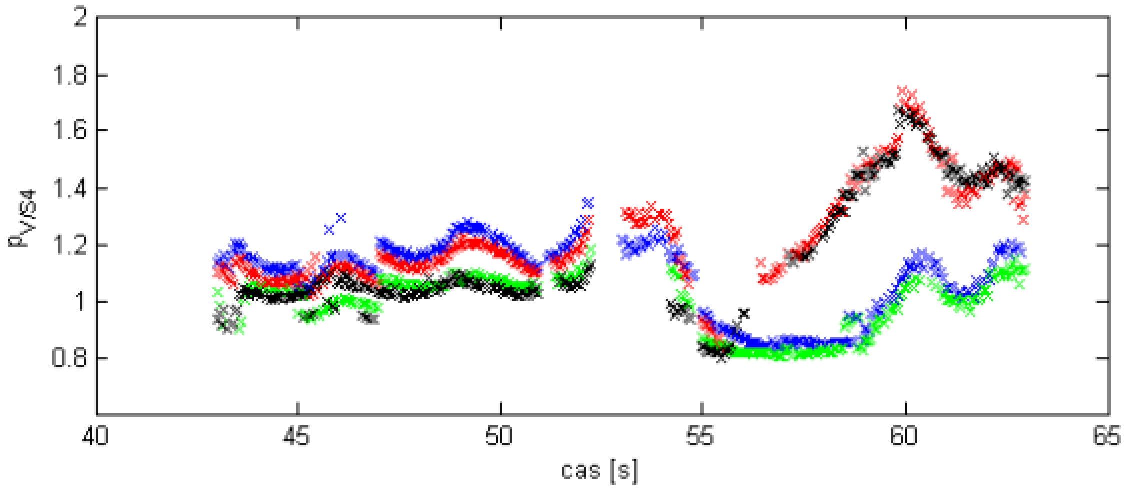
a je tedy možné u rekonstrukcí využívajících současně kameru V i T upravit kalibrační konstanty střední hodnotou:

$$\langle p_{T/V} \rangle = 1{,}25 \qquad (5.19)$$

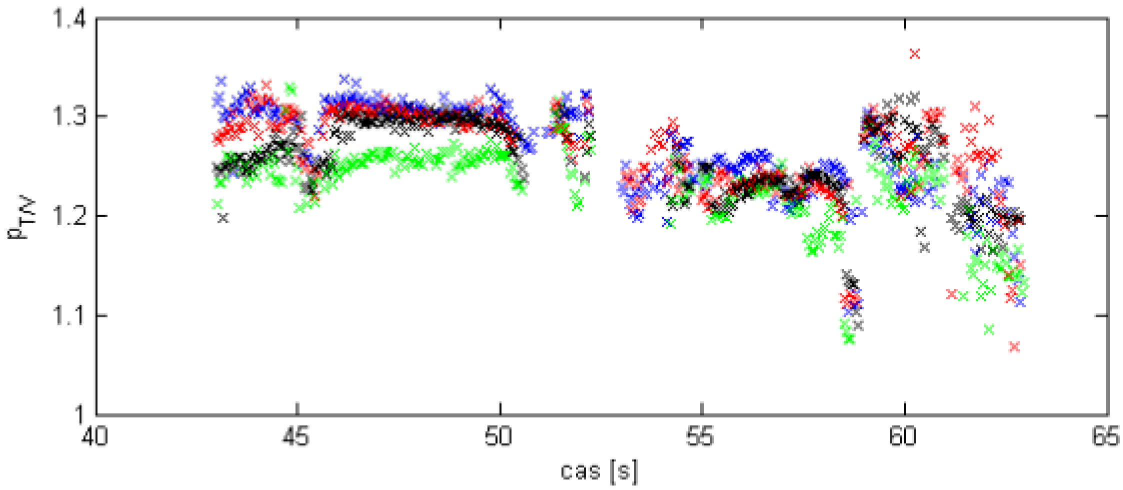
se směrodatnou ochylkou 0,04. Vztah (5.17) a hodnota $\langle p_{T/V} \rangle = 1{,}25$ byla v tomto případě vypočtena z celkem 1240 měření na pulzech č. (65937, 65941, 65942, 65943, 65944, 65948, 65949,). Teploty elektronů byly získány z diagnostiky LIDAR (viz kap. 6.2).




Obrázek 5.19: Poměr $p_{T/V}$ vypočítaný obdobou vztahu (5.9) v závislosti na maximální teplotě elektronů. Červeně je vyznačena závislost nalezená metodou nejmenších čtverců z naměřených hodnot.




Obrázek 5.20: Časová závilost poměru radiálních profilů emisivity měkkého rentgenového záření rekonstruovaných podle kamery V a podle kamery S4 pro 2 pulzy bez nečistot (pulz č. 65937 vyznačen zeleně a pulz č. 65943 modře) a 2 pulzy se vpouštěním nečistot (kryptonu) v intervalu 56 až 58s (červně pulz č. 65942 a černě pulz č. 65941) .

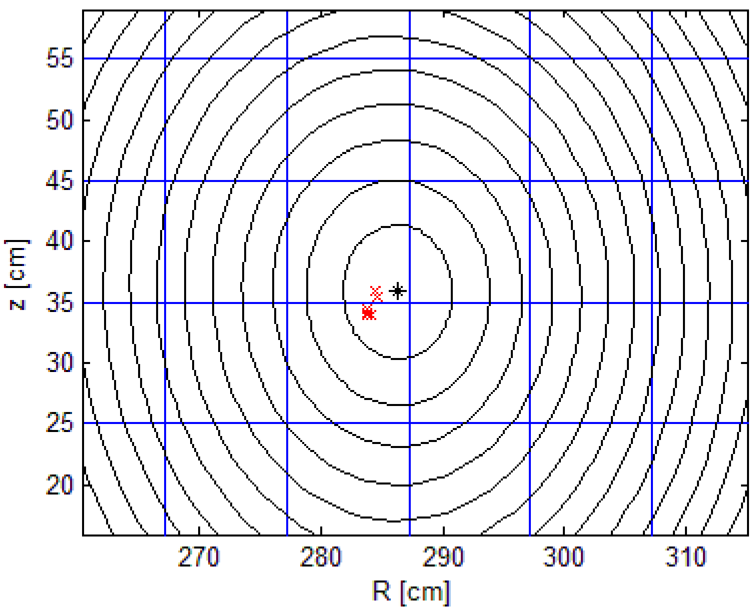



Obrázek 5.21: Časová závilost poměru radiálních profilů emisivity měkkého rentgenového záření rekonstruovaných podle kamery V a podle kamery T pro stejné pulzy jako u obr. 5.20.

# 6. Analýza dat

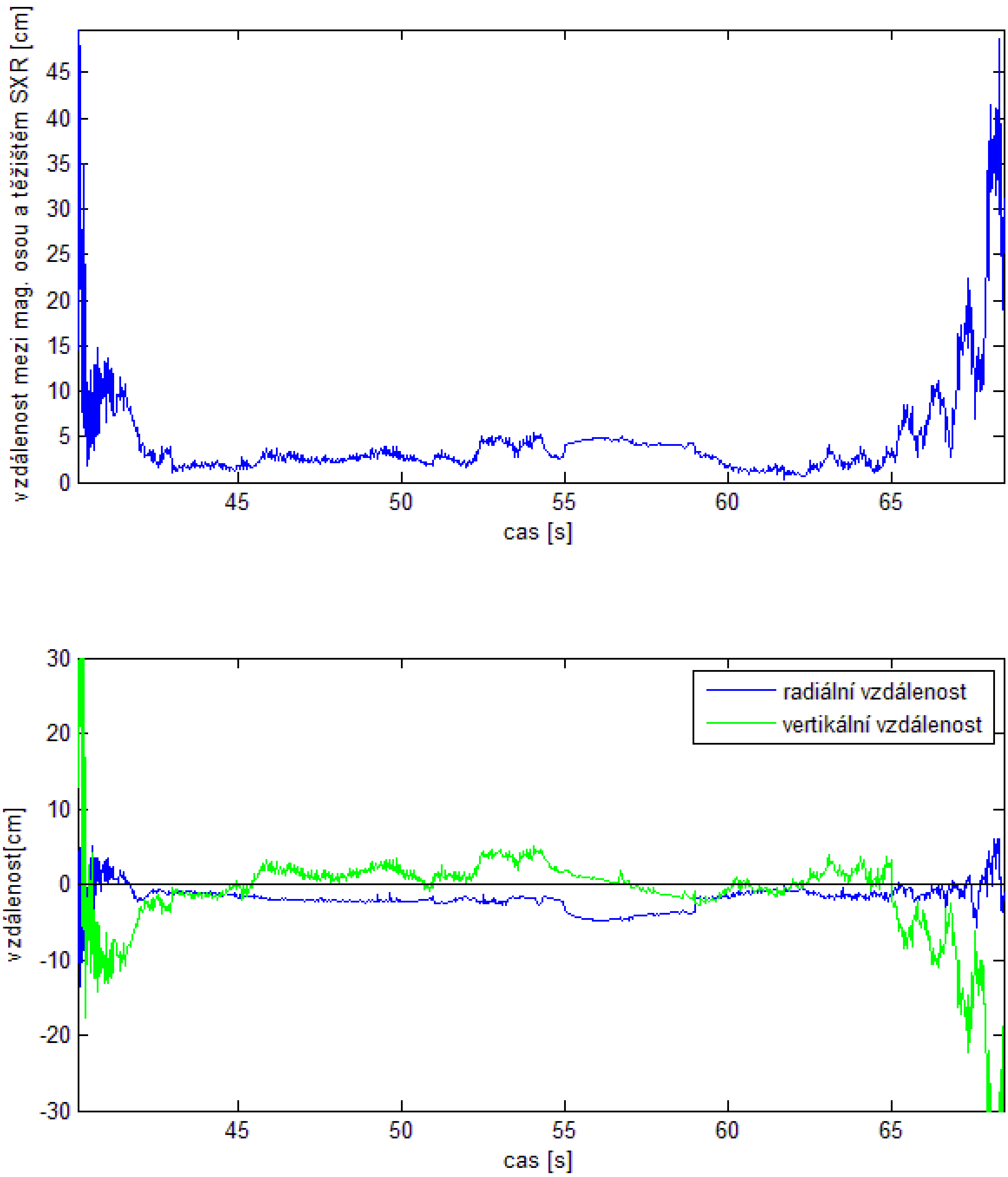
## 6.1. Porovnání těžiště profilu emisivity SXR s magnetickou osou

Vzhledem k závislostem charakteristik plazmatu na magnetickém poli může dát zajímavý výsledek prosté porovnání těžiště tomografické rekonstrukce emisivity měkkého rentgenového záření s magnetickou osou. Těžiště vychází celkem blízko magnetické osy, jak lze vidět např. na obr. 6.1. Odchylka mezi těžištěm a magnetickou osou se v průběhu sledovaných pulzů pohybovala zhruba kolem 1cm až 5cm (viz obr. 6.1 až 6.3), což je při rozlišení pixelů 10x10cm docela dobrý výsledek. Největší odchylky při zažehnutí plazmatu v čase kolem 40s a ke konci pulzu (kdy plazma zaniká) bylo možné očekávat. Dále je také např. u pulzu č. 65944 znatelný nárůst odchylky mezi těžištěm měkkého rentgenového záření a magnetickou osou (viz obr. 6.3) v čase kdy bylo do plazmatu vpuštěno malé množství kryptonu pro diagnostické účely. Těžiště emisivity měkkého rentgenového záření se po vpuštění nečistot do plazmatu posunulo více směrem dolů a k hlavní ose tokamaku (viz dolní část obr. 6.3). Příčinou může být rozdílná spektrální citlivost kamer V a S4.

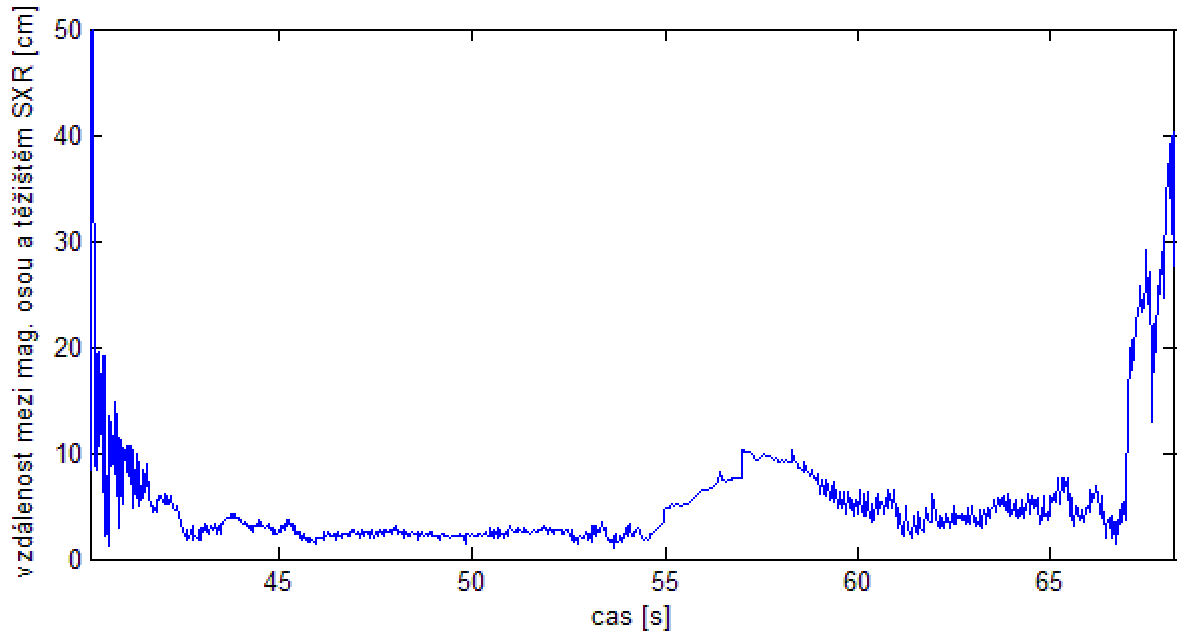


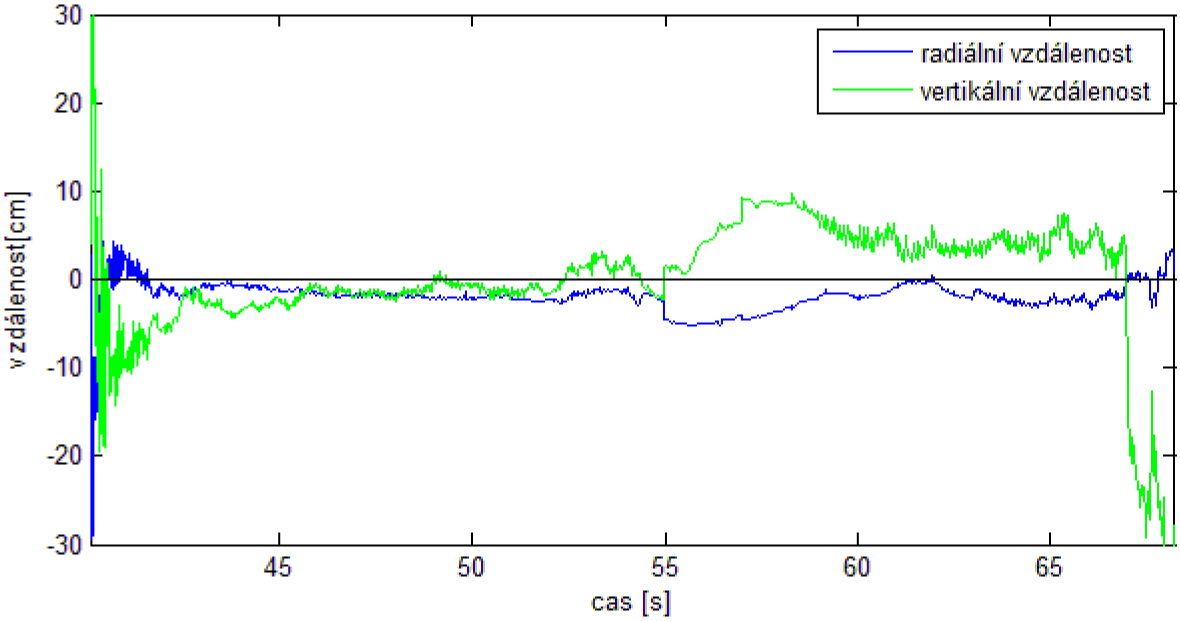

Obrázek 6.1: Magnetická osa a těžiště tomografické rekonstrukce emisivity měkkého rentgenového v čase 52s pro šest vybraných pulzů (jedná se o pulzy č. 65937, 65938, 65941, 65942, 65943 a 65944). Poloha magnetické osy se u vybraných pulzů téměř neměnila a byla vzata z pulzu č. 65942.

Těžiště emisivity měkkého rentgenového záření se v průběhu pulzu nachází většinou blíže k hlavní ose tokamaku než magnetická osa (viz obr. 6.2 a 6.3), což by mohlo být způsobeno jak trojúhelníkovým tvarem magnetických povrchů (viz např. obr. 3.7a) tak Shafranovovým posuvem (tj. posunutím magnetické osy v důsledku přítomnosti vertikálního magnetického pole potřebného k dosažení rovnováhy plazmatu viz [25]). Na druhé straně může být těžiště emisivity měkkého rentgenového záření odsouváno od hlavní osy vlivem banánových orbit. Do odchylky těžiště emisivity měkkého rentgenového záření se může také promítat přesnost a rozlišení rekonstruovaného obrazu.




Obrázek 6.2: Vzdálenost mezi magnetickou osou a těžištěm profilu měkkého rentgenového záření (SXR) u pulzu č. 65943. Radiální vzdálenost mezi magnetickou osou a těžištěm byla získána odečtením radiální polohy magnetické osy od radiální polohy těžiště (těžiště se tak v průběhu pulzu nachází většinou blíže hlavní osy tokamaku, jak lze vidět v dolní části obrázku). Obdobně byla vzata vertikální vzdálenost.



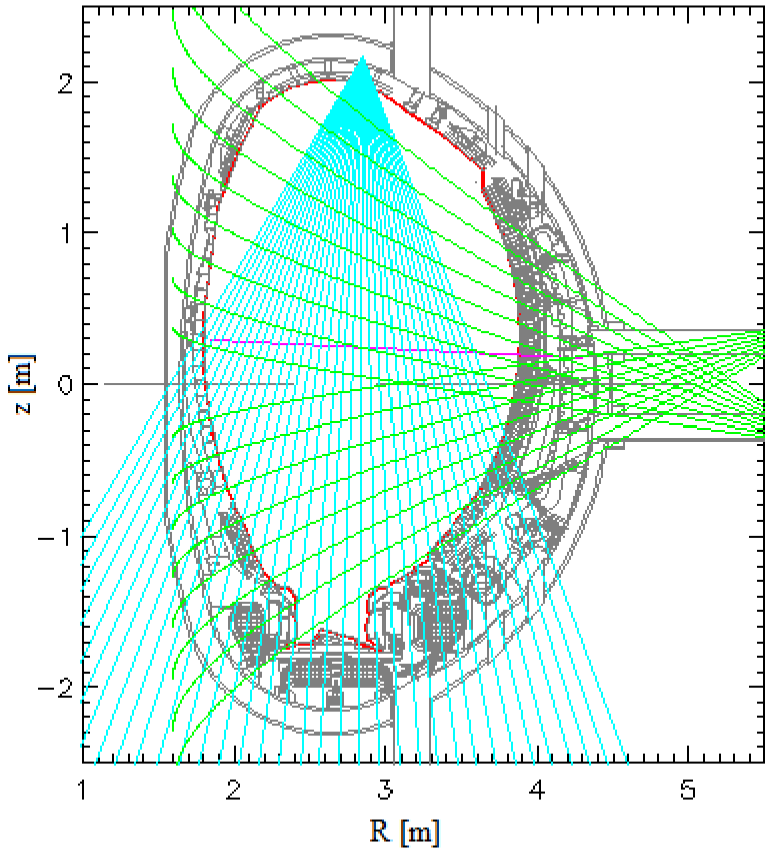




Obrázek 6.3: Vzdálenost mezi magnetickou osou a těžištěm profilu měkkého rentgenového záření (SXR) u pulzu č. 65944. Radiální, resp. vertikální vzdálenost mezi magnetickou osou a těžištěm byla stejně jako u obr. 6.2 získána odečtením radiální, resp. vertikální polohy magnetické osy od radiální, resp. vertikální polohy těžiště. V intervalu 56 až 58 sekund bylo do plazmatu opakovaně (s frekvencí 2Hz) vpuštěno malé množství nečistot (krypton), což se oproti pulzu bez nečistot (viz obr. 6.2) projevilo ve větší odchylce mezi těžištěm měkkého rentgenového záření a magnetickou osou.

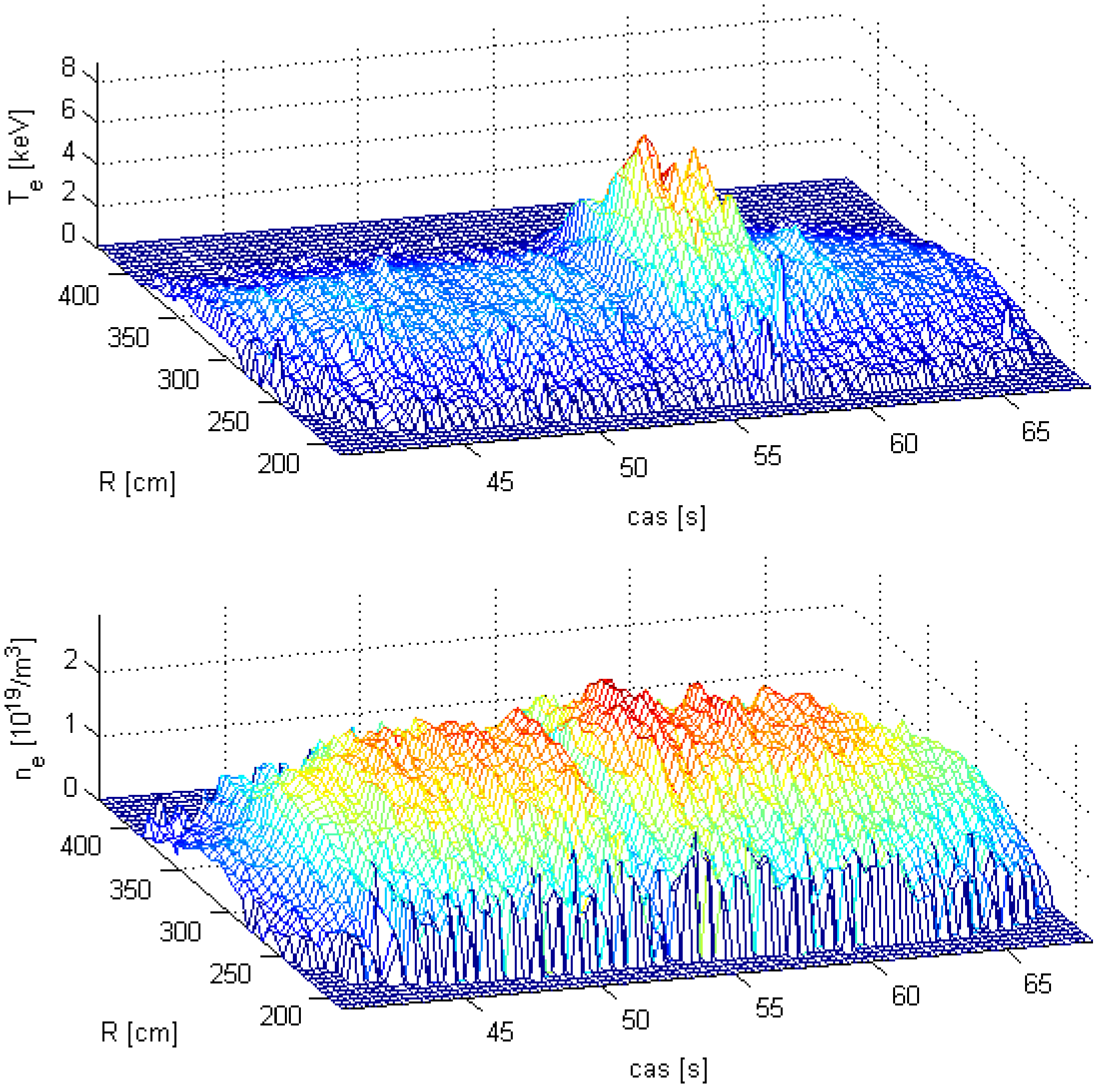
## 6.2. Porovnání měkkého rentgenového záření s hustotou a teplotou elektronů

Za emisi měkkého rentgenového záření z plazmatu v tokamaku je za běžných podmínek (čisté, horké plazma) zodpovědné především brzdné záření, jehož intenzita je přímo úměrná kvadrátu hustoty elektronů, odmocnině z teploty elektronů a efektivnímu náboji (viz vztah (1.9) v kapitole 1.3.1), a proto může být příhodné porovnat emisivitu měkkého rentgenového záření s hustotou a teplotou elektronů.

Hustoty a teploty elektronů byly získány z diagnostiky LIDAR (LIght Detection And Ranging) z Thomsonova rozptylu laserového záření vyslaného do plazmatu, rozptyl probíhá na elektronech. Teplota elektronů se určuje z šířky spektrální čáry (s přesností okolo 10%) a hustota elektronů (s přesností okolo 5%) z intenzity rozptýleného laserového záření. Diagnostika LIDAR na tokamaku JET míří do centra plazmatu a měří tak radiální profil hustoty a teploty elektronů. Pro srovnání s rekonstruovanou emisivitou měkkého rentgenového záření byly použity radiální profily hustot a teplot elektronů naměřené diagnostikou LIDAR mířící do centra plazmatu (viz obr. 6.4).




Obrázek 6.4: Průhledy detektorů kamer S4 (zeleně) a V (modře) a využité diagnostiky LIDAR (fialově).




Obrázek 6.5: Radiální profily teploty a hustoty elektronů namřené diagnostikou LIDAR (pulz č. 65943). V čase 54s až 60s byl spuštěn ohřev iontovou cyklotronovou rezonancí (ICRH) s maximálním výkonem v čase 55s, což se projevilo prudkým nárůstem teploty elektronů.

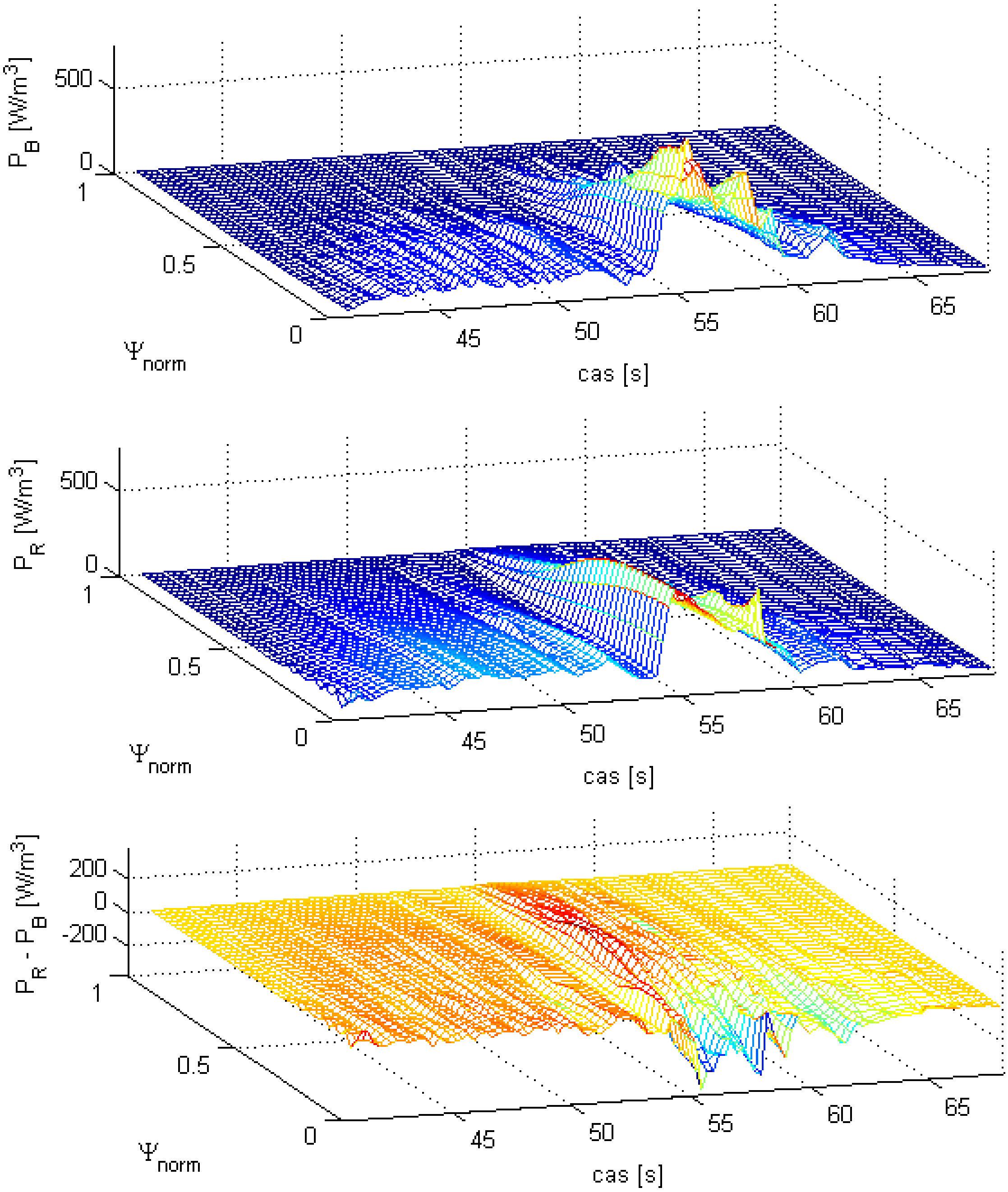
Z obr. 6.6 až 6.8 je patrné, že rekonstruovaný profil vyzařovaného měkkého rentgenového záření přibližně odpovídá detekovatelnému brzdnému záření, které bylo vypočteno podle vztahu :

$$P_B = \int P_\nu \cdot f_\nu d\nu = \int 6{,}28 \cdot 10^{-53} \frac{n_e^2 Z_{eff}}{\sqrt{T_e}} e^{-h\nu/T_e} \cdot \left(e^{-\mu_{Be} d_{Be}} \left(1 - e^{-\mu_{Si} d_{active}}\right)\right) d\nu \,, \qquad [\mathrm{Wm^{-3}Hz^{-1}}] \qquad (6.1)$$

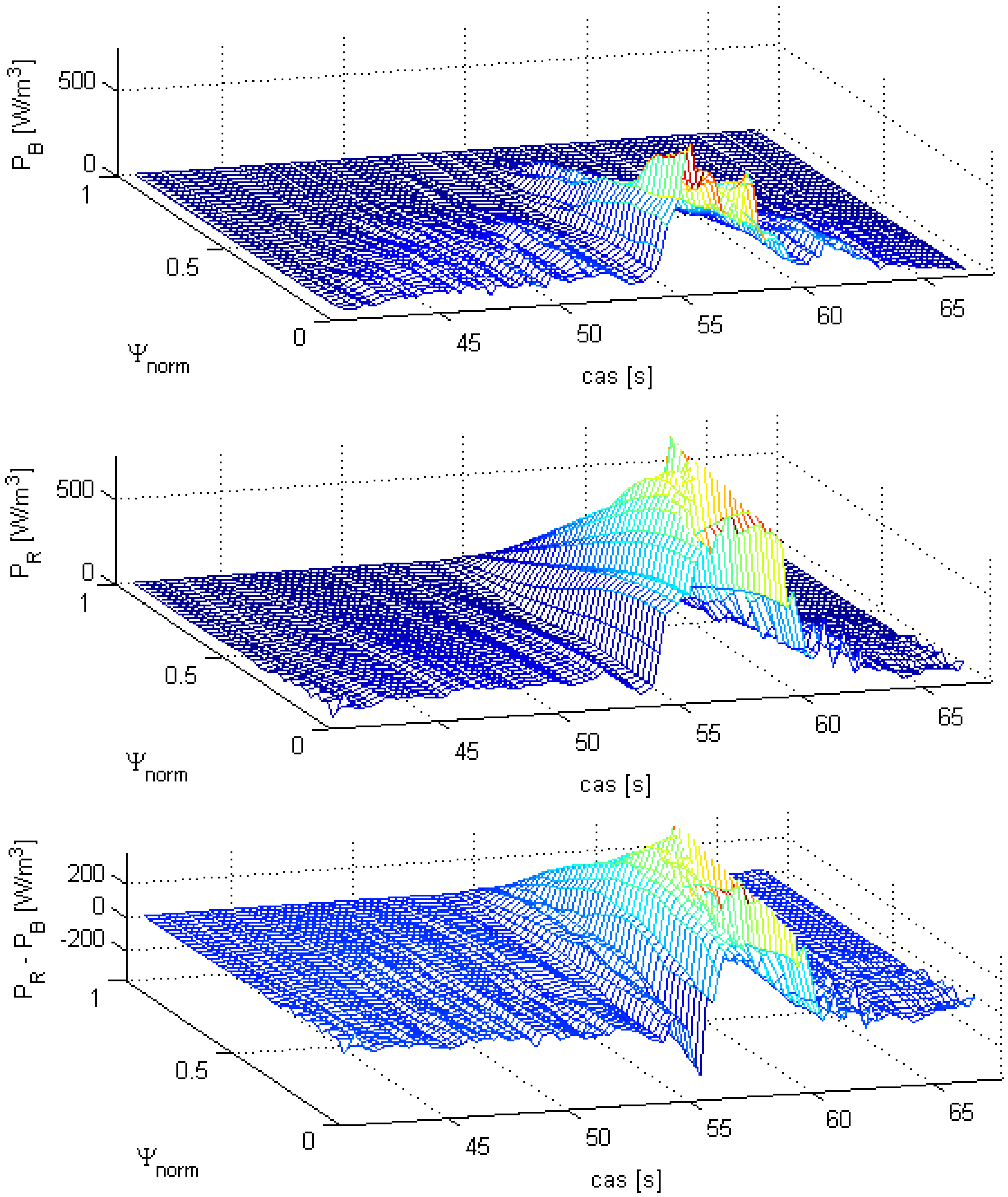
kde $P_\nu$ je spektrální vyzařovací výkon brzdného záření, $f_\nu$ účinnost detekce podle vztahu (4.10), $n_e$ hustota elektronů [$m^{-3}$], $T_e$ teplota elektronů [eV], $h\nu$ energie fotonu [eV], efektivnímu náboji plazmatu $Z_{eff}$ byla přiřazena předpokládaná hodnota $Z_{eff} = 2$, $\mu_{Be}(\nu)$ a $\mu_{Si}(\nu)$ jsou koeficienty absorbce berylia a křemíku, $d_{Be}$ tloušťka beryliového filtru a $d_{active}$ tloušťka aktivní vrstvy fotodiody.

V časovém intervalu, kdy byl do plazmatu vpouštěn krypton, hodnoty naměřeného měkkého rentgenového záření prudce vzrostly (viz obr. 6.7) v důsledku čárového záření, rekombinačního záření a přímé závislosti brzdného záření na efektivním náboji plazmatu.

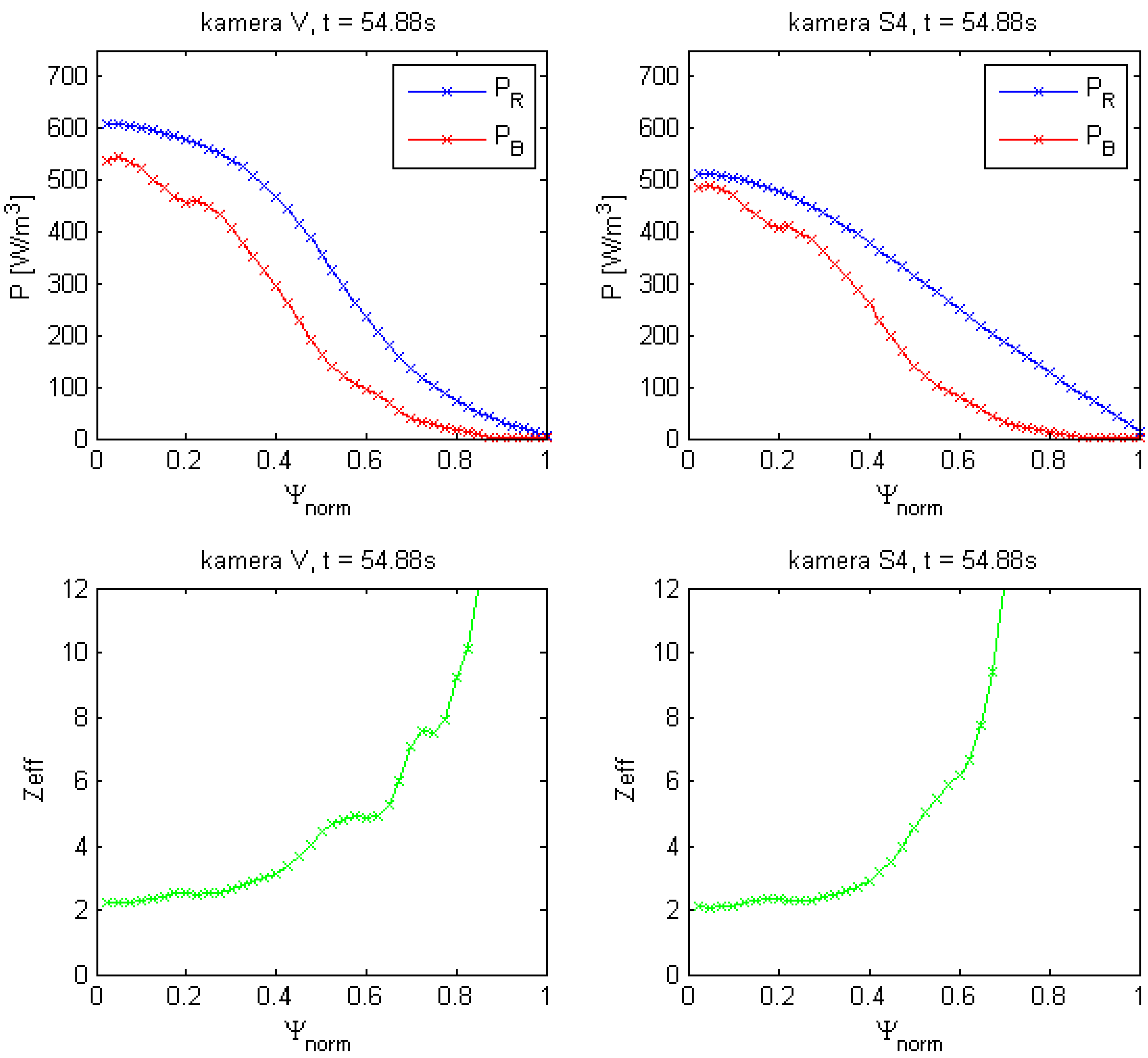
Při zanedbání ostatních radiačních procesů lze porovnáním vztahu (6.1) s rekonstruovanou emisivitou měkkého rentgenového záření přibližně vypočíst hodnotu efektivního náboje plazmatu $Z_{eff}$, jež je pro vybraný čas vykreslena na obr. 6.8. Pro vypočtenou hodnotu $Z_{eff}$ v centru plazmatu zhruba platí $Z_{eff} = 2$. Na okrajích plazmatu roste zřejmě vliv ostatních radiačních procesů a proto je zde vypočtená hodnota $Z_{eff}$ vyšší a také velmi nepřesná.




Obrázek 6.6: Porovnání radiálních profilů rekonstruovaného vyzařovacího výkonu měkkého rentgenového záření ($P_R$) s brzdným zářením ($P_B$) vypočteným z teplot a hustot elektronů podle vztahu (6.1) u pulzu č. 65943. Profily byly získány abelizací podle kamery V a jsou vykresleny v závislosti na normovaném poloidálním toku magnetického pole $\Psi_{norm}$ (poslednímu uzavřenému magnetickému povrchu odpovídá hodnota 1 a magnetické ose 0).




Obrázek 6.7: Porovnání radiálních profilů rekonstruovaného vyzařovacího výkonu měkkého rentgenového záření ($P_R$) s brzdným zářením ($P_B$) vypočteným z teplot a hustot elektronů podle vztahu (1.9) u pulzu č. 65942. V čase 56 až 58s byl do plazmatu vpouštěn krypton (s frekvencí 2Hz), což se projevilo výrazným nárůstem naměřeného měkkého rentgenového záření. Profily byly získány abelizací podle kamery V a jsou vykresleny v závislosti na normovaném poloidálním toku magnetického pole $\Psi_{norm}$ (poslednímu uzavřenému magnetickému povrchu odpovídá hodnota 1 a magnetické ose 0).




Obrázek 6.8: Porovnání brzdného záření (červeně) vypočteného z teplot a hustot elektronů podle vztahu (6.1) (s předpokládanou hodnotou $Z_{eff} = 2$) s abelizací (modře) podle kamery V a podle kamery S4 v čase 54,88s u pulzu č. 65944. V dolní části obrázku jsou přibližné hodnoty efektivního náboje plazmatu odvozené na základě vztahu (6.1). Na okrajích plazmatu je vypočtená hodnota $Z_{eff}$ zřejmě v důsledku většího vlivu dalších radiačních procesů vyšší a proto také velmi nepřesná. Profily jsou vykresleny v závislosti na normovaném poloidálním toku magnetického pole $\Psi_{norm}$ (poslednímu uzavřenému magnetickému povrchu odpovídá hodnota 1 a magnetické ose 0).

## 6.3. Analýza rekonstruované emissivity měkkého rentgenového záření pomocí singulárního rozkladu (SVD)

Singulární rozklad (dále jen SVD - Singular Value Decomposition) umožňuje rozložit matici na součin matic výhodných vlastností, které lze využít např. k řešení problému nejmenších čtverců, stanovení hodnosti původní matice, určení citlivosti systému rovnic k numerickým chybám, k potlačení šumu apod.

Z lineární algebry plyne, že ke každé m×n rozměrné matici **A** lze provést rozklad [30]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{+}, \qquad (6.2)$$

kde $^{+}$ značí hermitovské sdružení (tj. současnou transpozici matice a její komplexní sdružení), **U** je m×m rozměrná unitární matice **U** (tj. matice, pro kterou platí $\mathbf{U}^{+}\mathbf{U} = \mathbf{I}$ ) tvořená vlastními vektory matice $\mathbf{AA}^{+}$ , **V** n×n rozměrná matice unitární matice tvořená vlastními vektory matice $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ a **S** pseudodiagonální m×n rozměrná matice s diagonálními prvky

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \ldots \geq \sigma_{\min\{m,n\}} \geq 0,$$

které jsou dané druhou odmocninou vlastních čísel matice $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ nebo matice $\mathbf{AA}^{+}$ . Rozklad matice **A** ve tvaru (6.2) je nazýván singulárním rozkladem a často bývá označován pod skratkou SVD (Singular Value Decomposition).

Vztah (6.2) lze pro každý prvek matice **A** rozepsat do tvaru

$$a_{ij} = \sum_k u_{ik}\sigma_k v_{jk} \qquad (6.3)$$

a matici **A** následně vyjádřit jako součet matic:

$$\mathbf{A} = \sum_k \mathbf{M}_k = \sum_k \sigma_k \mathbf{U}_k \otimes \mathbf{V}_k^{*}, \qquad (6.4)$$

kde symbol ⊗ značí tenzorový součin, * komplexní sdružení a $\mathbf{U}_k$ a $\mathbf{V}_k$ k-té sloupce příslušných matic. Pomocí vztahu (6.4) je možné např. analyzovat vývoj rekonstruované emisivity měkkého rentgenového záření a pozorovat magnetohydrodynamické módy, pilové nestability, pohyb nečistot atd. Sestává-li se každý řádek matice **A** z hodnot pixelů tomografického obrazu v určitém čase (tj. rozměr matice A je počet časových kroků krát počet pixelů), lze tomografický obraz rozložit na součet více módů a sledovat jejich vývoj v čase. Sloupce matice **V** pak představují jednotlivé módy (tzv. topos) a sloupce matice **U** vynásobené příslušnou singulární hodnotou udávají časovou závislost váhy odpovídajícího módu na původním tomografickém obrazu (tzv. chronos).

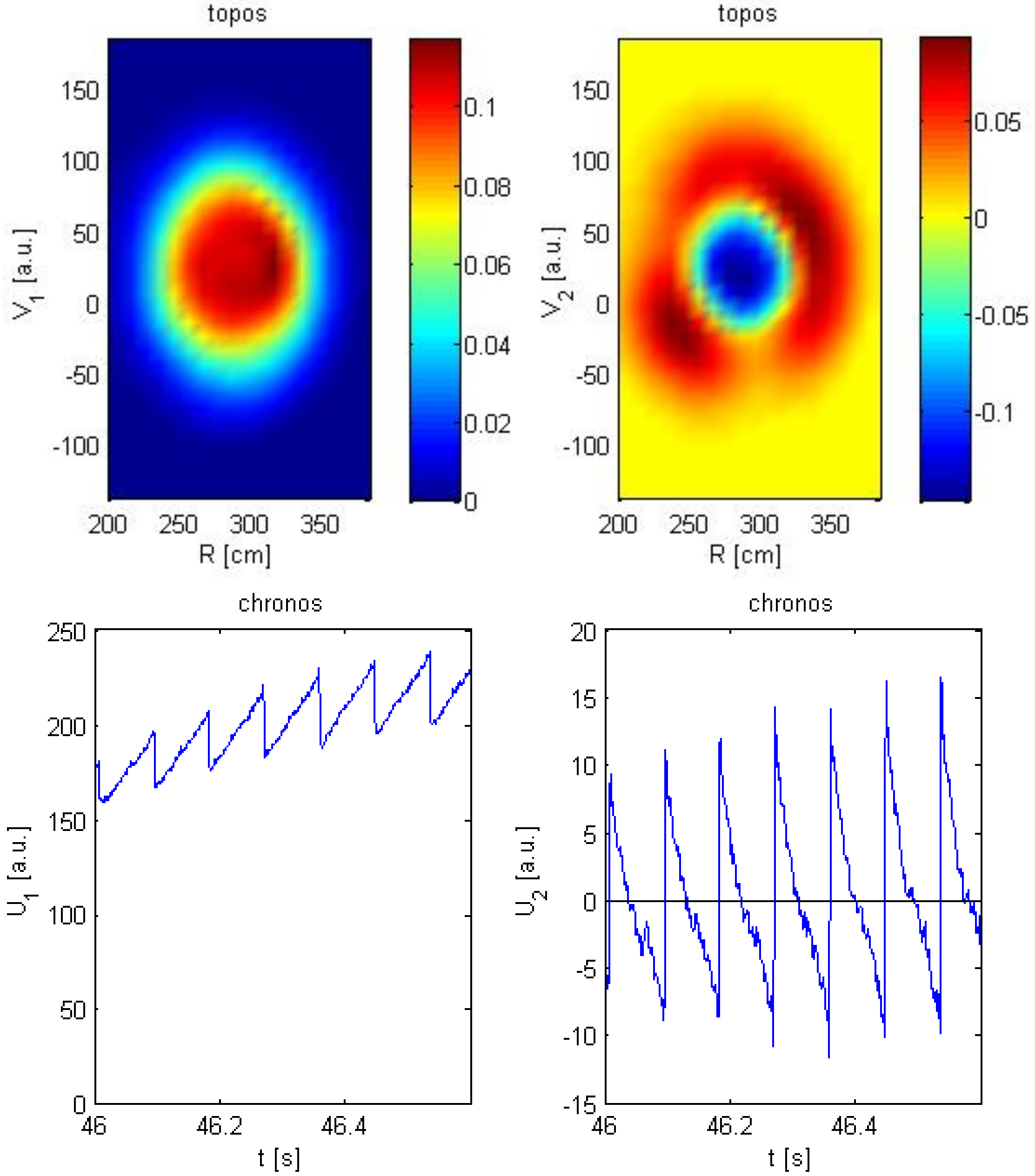
### 6.3.1. Pilová nestabilita

Ukázka využití SVD při sledování pilové nestability je na obrázku 6.9, na kterém je patrný opakovaný pozvolný nárůst a strmý pokles emisivity měkkého rentgenového záření v centru plazmatu a strmý nárůst a pozvolný pokles emisivity měkkého rentgenového záření na okrajích plazmatu. Pilová nestabilita má periodu 87,5ms, o čemž se lze přesvědčit také na obrázku 6.10, na kterém je signál vybraného detektoru kamery V mířícího do centra plazmatu a autokorelační funkce tohoto signálu, tj. korelace mezi původním signálem a jeho replikou zpožděnou o čas τ vypočtená podle vztahu:

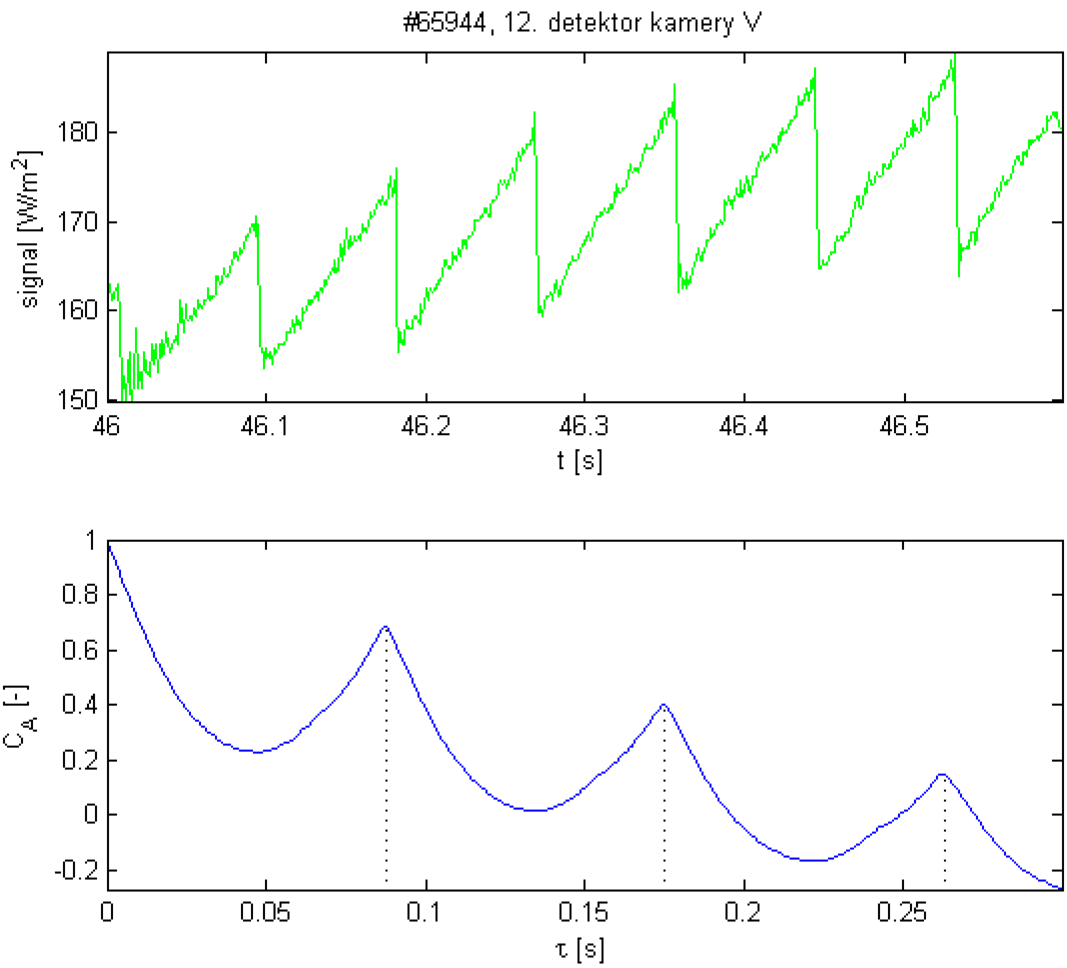
$$C_A(\tau) = \frac{\left\langle \left(f_t - \langle f \rangle\right)\left(f_{t+\tau} - \langle f \rangle\right) \right\rangle_t}{\left\langle \left(f_t - \langle f \rangle\right)^2 \right\rangle_t}, \qquad (6.5)$$

kde *f* značí velikost signálu, *t* čas a závorky $\langle\ \rangle$ střední hodnotu.

Inverzní poloměr sledované pilové nestability (tj. poloměr kružnice, která odděluje vnitřní oblast a vnější oblast, mezi kterými byl pozorován přesun emissivity měkkého rentgenového záření) byl zhruba 40cm.



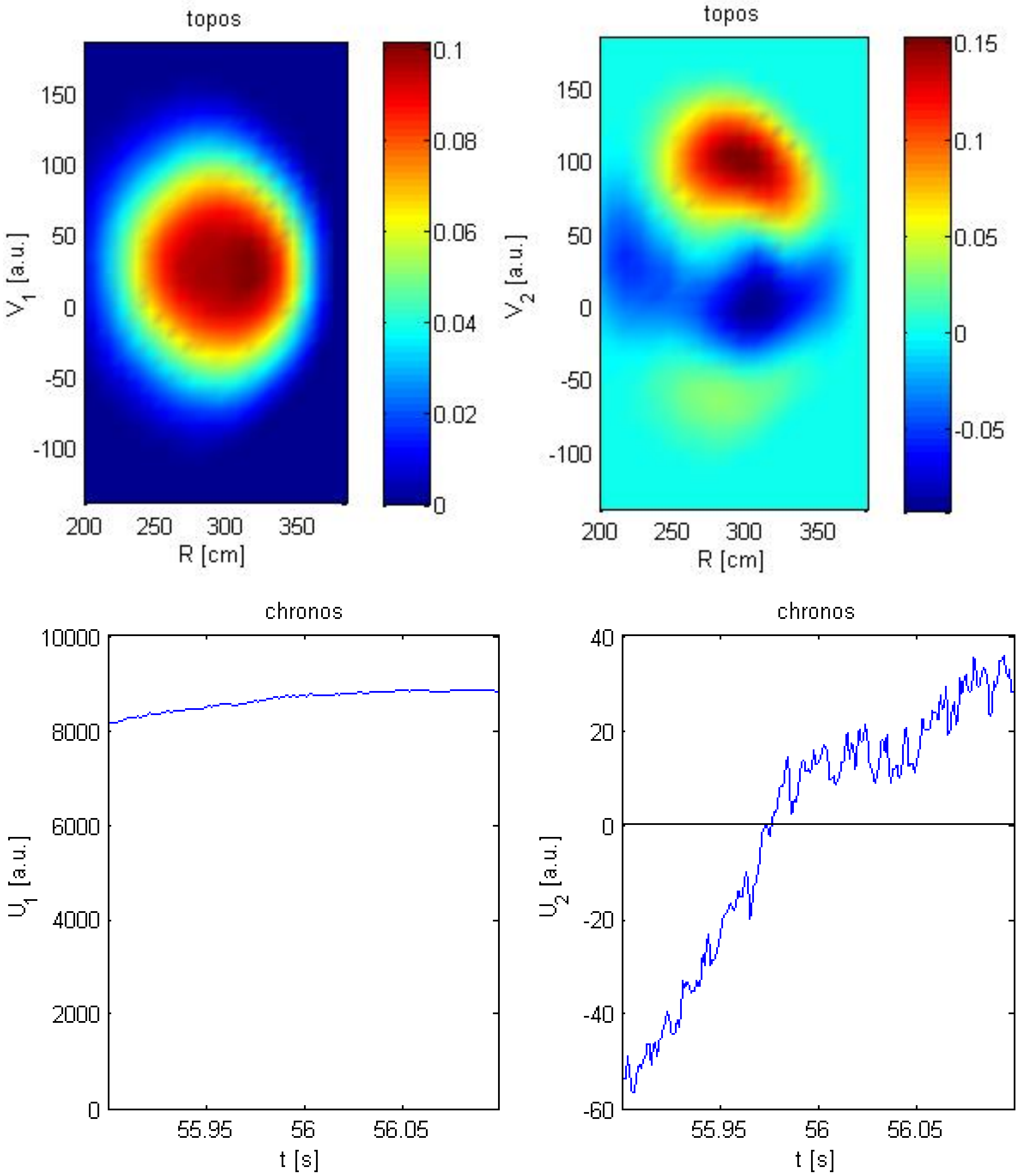

Obrázek 6.9: Sledování pilové nestability pomocí SVD u pulzu č. 65944. V horní části obrázku jsou první dva sloupce matice **V** ($V_1$ a $V_2$) v podobě obrazu emissivity měkkého rentgenového záření a v dolní části obrázku první dva sloupce matice **U** ($U_1$ a $U_2$) znázorňující závislost váhu příslušného módu na čase.



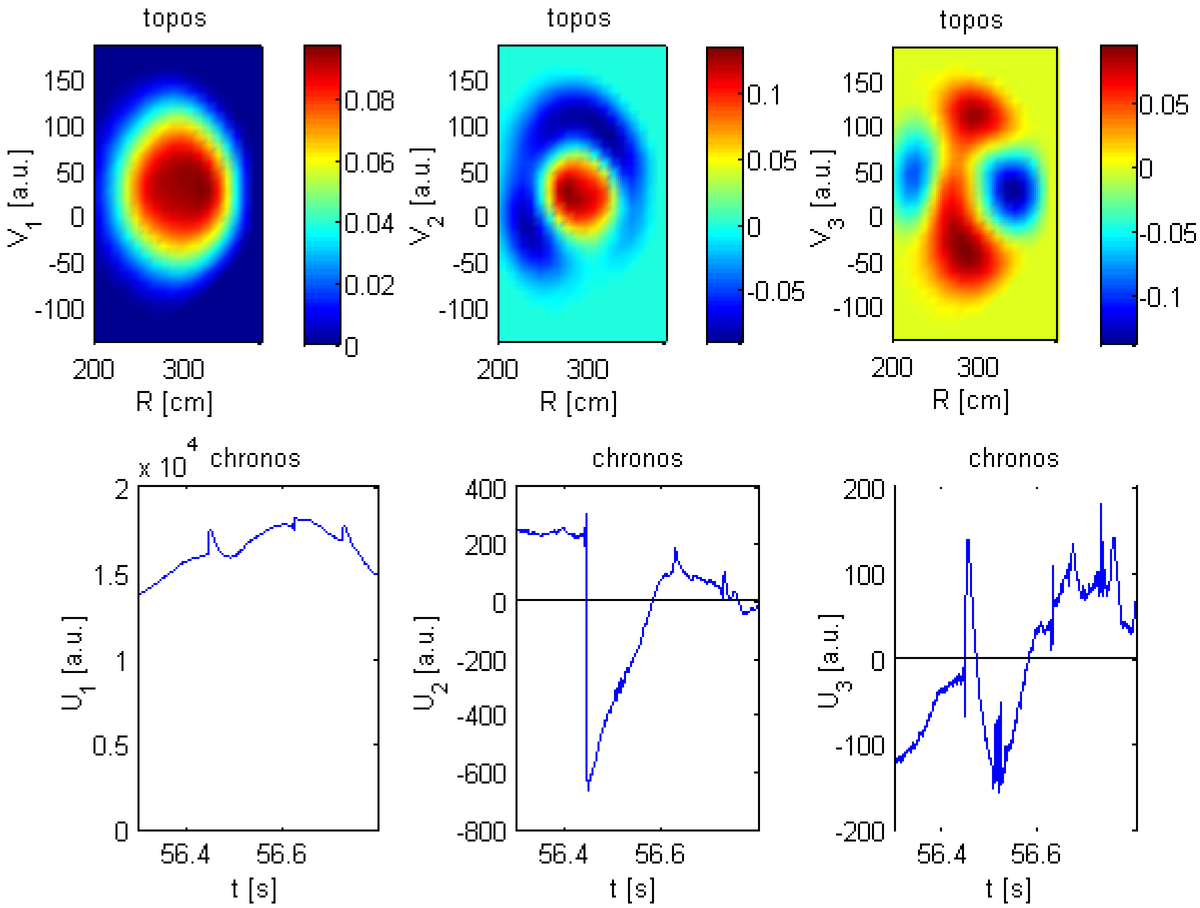

Obrázek 6.10: Signál 12. detektoru kamery V a korelační funkce $C_A$ mezi signálem a jeho replikou zpožděnou o čas $\tau$ u pulzu č. 65944. Vzdálenost lokálních maxim autokorelační funkce odpovídá periodě pilových kmitů 87,5ms.

### 6.3.2. Sledování nečistot

Sledování nečistot je komplikováno rozdílnou spektrální citlivostí kamer V a S4 zapříčíněnou především zmíněnou rozdílnou tloušťkou beryliových filtrů. Po vpuštění kryptonu do plazmatu v čase 56s u zkouaných pulzů vzroste citliovost vertikální kamery V oproti horizontální kameře S4 (viz obr. 5.20). Pomocí SVD lze proto v čase kolem 56s sledovat nárůst rekonstruované emisivity měkkého rentgenového záření v horní a dolní části obrazu (viz obr. 6.11 a 6.12).




Obrázek 6.11: Po vpuštění nečistot do plazmatu v čase 56s u pulzu č. 65944 lze zřejmě v důsledku rozdílné spektrální citlivosti kamer V a S4 pomocí SVD sledovat nárůst rekonstruované emisivity měkkého rentgenového záření v horní a dolní části tomografického obrazu.




Obrázek 6.12: Projev pilové nestability u pulzu č. 65942 (druhý pár topos a chronos) a přesouvání rekonstruované emisivity zřejmě v důsledku odlišné citlivosti vertikální kamery V a horizontální kamery S4 (třetí pár topos a chronos).

# 7. Diskuze

Při řešení zadání této práce vyvstaly zejména následující problémové okruhy: otázka vlivu šumu v detektorech na rekonstruovaný obraz, otázka chyb v kalibraci a rozdílná spektrální citlivost kamer V a S4.

Při zkoumání vlivu šumu v detektorech na tomografickou rekonstrukci v kapitole 5.2 byl generován šum s Gaussovým rozdělením, který je jen aproximací skutečného šumu, nicméně obdobné chování rekonstruovaných obrazů lze očekávat i u skutečného šumu. Vliv simulovaného šumu byl sledován jak na modelových, tak na skutečných datech. U skutečných dat dochází ke skládání skutečného šumu se simulovaným, ale přesto je výhodné skutečná data pro sledování vlivu šumu na tomografickou rekonstrukci použít, protože realisticky vystihnout chování emisivity měkkého rentgenového záření pomocí modelové funkce je obtížné.

Kamery V a S4 mají rozdílnou spektrální citlivost, jež se projevuje závislosti poměru citlivosti kamer V a S4 na teplotě elektronů a na přítomnosti nečistot v plazmatu (viz kap. 5.4.2.). Nesoulad mezi předpokládaným a naměřeným poměrem citlivosti kamer V, S4 a T je zřejmě způsoben tím, že použité kalibrační konstanty v případě zkoumaných pulzů neodpovídají skutečné citlivosti kamer. Kamera V je zhruba o 20% méně citlivá než kamera T a při vyšších teplotách elektronů vykazuje také nižší citlivost než kamera S4, která míří do plazmatu přes tlustší beryliový filtr, ale je lépe radiačně chráněna. Příčinou sporné relativní ctilivosti kamer může být radiační poškození. Srovnání naměřené závislosti relativní citlivosti kamer V a S4 na teplotě elektronů s teoretickým předpokladem je pouze orientační, neboť je zanedbán tvar profilu teploty elektronů (je brána pouze střední hodnota), počítá se pouze s brzdným zářením, předpokládá se úplná poloidální symetrie plazmatu a je zanedbána odlišná spektrální citlivost jednotlivých detektorů v důsledku různého úhlu průhledu přes beryliový filtr a aktivní vrstvu fotodiody. Využití nalezené závislosti relativní citlivosti kamer V a S4 na střední teplotě elektronů (5.15) pro kalibraci je velmi omezné a slouží spíš jako potvrzení pozorovatelné odlišné spektrální citlivosti kamer V a S4. Projevy rozdílné spektrální citlivosti kamer V a S4 lze redukovat silnějším shlazováním podél magnetických siločar (tj. nižší hodnotou $\eta$ ve vztahu (2.35)) nebo vypočtením relativní citlivosti kamer V a S4 z abelizací podle jednotlivých kamer a následným upravením kalibračních konstant před tomografickou rekonstrukcí.

I přes nedostatky použitého systému pro tomografii měkkého rentgenového záření v podobě radiačního poškození kamery V a rozdílné spektrální citlivosti kamer V a S4 byla v první části šesté kapitoly úspěšné srovnána poloha těžiště rekonstruovaného obrazu emisivity měkkého rentgenového záření s magnetickou osou (odchylka se pohybovala kolem 1-5cm, což je při velikostech pixelů 10x10cm na hranici rozlišení). Polohu magnetické osy lze tedy (za studovaných podmínek) celkem rychle určit z tomografie měkkého rentgenového záření s ochylkou kolem 5cm. K dalšímu přezkoumání se nabízí srovnání polohy magnetické osy s těžištěm emisivity měkkého rentgenového záření rekonstruované při nižším rozlišení. V kapitole 6.2 bylo rovněž úspěšně srovnáno předpokládané detekovatelné brzdné záření (vypočtené z teplot a hustot elektronů) s naměřeným měkkým rentgenovým zářením. Dále byla pomocí SVD také analyzována pilová nestabilita.

Na druhou stranu se ukázalo, že rozdílná spektrální citlivost kamer V a S4 výrazně zvyšuje chybu analýzy difúze nečistot do plazmatu po jejich vstřiku (došlo k deformaci rekonstruovaného obrazu emisivity měkkého rentgenového záření).

Dále by bylo možné se věnovat např. vlivu parametru $\eta$, který ve vztahu (2.35) udává míru shlazování podél magnetických siločar, na magnetickou rekonstrukci a hledání jeho optimální hodnoty (tomu se krátce věnuje např. článek [22]), zkoumání dalších typů regularizačních funkcionálů, které vymezují Tichonovovu regularizaci (viz vztah (2.29)), jiným metodám tomografické rekonstrukce, nebo také rozsáhlejšímu sledování různých magnetohydrodynamických událostí.

S rostoucím výpočetním výkonem počítačů je dobrou perspektivou tomografie měkkého rentgenového záření v termojaderných reaktorech její využití pro řízení plazmatu v reálném čase (spojené s rozpoznáváním nestabilit, tvarování profilu teploty elektronů, sledování čistoty plazmatu atd.). K tomuto účelu by vedle Tichonovovy regularizace mohly být nápomocné např. ještě rychlejší neuronové síťě, případně kombinace obou metod.

# 8. Závěr

Práce se věnuje stanovení matice geometrie pro tomografickou rekonstrukci na čtvercových pixelech a pro abelizaci měkkého rentgenového záření na tokamaku JET, studiu chyb tomografických rekonstrukcí a analýze rekonstruovaných obrazů emisivity měkkého rentgenového záření. Všechny tomografické rekonstrukce probíhaly Tichonovovou regularizací vymezenou minimem Fisherovy informace (známou také pod zkratkou MFR – Minimum Fisher Regularization), která je popsána ve druhé kapitole. Rekonstrukce se hledají tak, aby odpovídaly předpokládané chybě detektorů (4% velikosti signálu). Teoretická část práce je obsažena v prvních třech kapitolách: první kapitola je širším úvodem do oblasti řízené termojaderné fúze, druhá kapitola se zabývá teorií tomografické rekonstrukce a třetí kapitola popisuje měření měkkého rentgenového záření na tokamaku JET.

Matice geometrie pro tomografickou rekonstrukci na čtvercových pixelech a pro abelizaci byla stanovena a graficky ověřena ve čtvrté kapitole. Při výpočtu matice geometrie musela být zohledněna skutečnost, že průhledy detektorů kamery S4 nemíří z konstrukčích důvodů na hlavní osu tokamaku ale svírají se spojnicí středu tokamaku a štěrbinou kamery S4 úhel 15,6° (viz obr 3.6 nebo obr. B.1 v dodatcích).

V páté kapitole jsou zkoumány chyby samotné tomografické rekonstrukce porovnáním modelové funkce s její zpětnou rekonstrukcí a následující vlivy na rekonstruovaný obraz: šum v detektorech, nepřesnosti v určení magnetických povrchů (podle kterých probíhá na základě fyzikálních vlastností plazmatu shlazování rekonstruovaného obrazu) a možné chyby v kalibračních konstantách.

Absolutní odchylka tomografické rekonstrukce od původní modelové funkce vycházela zhruba kolem 8% (±2%) z maxima a 15% (±2%) z průměru modelové funkce. Relativní odchylka nabývala uprostřed obrazu velikostí kolem 15% a na okrajích byla podle očekávání větší.

Simulace šumu s Gaussovým rozdělením v detektorech (jak pro skutečná, tak pro modelová data) vedla rovněž k šumu s Gaussovým rozdělením v tomografickém obrazu, přičemž šum se směrodatnou odchylkou 4% velikosti signálu v detektorech měl za následek šum se směrodatnou odchylkou kolem 2% v prostřední části tomografického obrazu (viz obr. 5.4 a 5.5). Variační koeficient na obr 5.4 a 5.5 má tvar čtyřlístku, což je zřejmě způsobeno tím, že šumem v detektorech jsou nejvíce ovlivněny pixely, na které detektory míří a pixely s nižšími hodnotami. S růstem generovaného šumu v detektorech téměř lineárně rostl i šum v tomografickém obrazu (viz obr. 5.5). Průměrné hodnoty tomografických rekonstrukcí s generovaným šumem v signálech detektorů se posunuly o několik procent a lišily se pro různé tvary rekonstruovaných funkcí. Provádí-li se tomografické rekonstrukce pro více časů najednou (viz kap. 2.2.3.), může šum způsobit, že rekonstrukce pro jedotlivé časy neodpovídají předpokládané chybě, protože řešení je hledáno tak, aby bylo rovno jedné pouze $\chi^2$ zprůměrované přes všechny časy (viz vztah (2.46)). Při rekonstruování mnoha rekonstrukcí ($2 \cdot 10^4$) pro různé časy najednou bez šumu byla pozorována numerická nestabilita (rekonstruované obrazy vykazovaly šum 1%).

Nepřesnosti v určení polohy magnetických povrchů nemají na rekonstruovaný obraz emisivity měkkého rentgenového záření metodou MFR velký vliv (viz obr 5.9). Stinnou stránkou této vlastnosti použité metody tomografické rekonstrukce je, že ji nelze využít k optimalizaci polohy magnetických povrchů.

V případě simulované snížení účinnosti jediného detektoru byla tomografická rekonstrukce ovlivněna více, jednalo-li se o detektor kamery V. Důvodem může být hustší pokrytí tomografického obrazu kamerou V, které může při snížení účinnosti jediného detektoru (a nezahrnutí této skutečnosti do kalibračních konstant) způsobit, že se tomografická rekonstrukce musí vypořádat s protichůdnými informacemi.

V kapitole 5.4.2 byla popsána odlišná relativní citlivost kamer S4, V a T. Kamera T se jeví o 25% citlivější než kamera V, což by mohlo být způsobeno radiačním poškozením kamery V. Kamera S4 má v důsledku rodílné tloušťky beryliového filtru (350μm oproti 250μm u kamery V a T) také rozdílnou spektrální citlivost, která se projevuje závislostí poměru citlivosti kamery V ke kameře S4 na teplotě elektronů (viz vztah 5.15) a na přítomnosti nečistot v plazmatu (viz obr. 5.20). Nižší citlivost kamery V se projevuje také v rozporu naměřeného poměru citlivosti kamer V a S4 v závislosti na teplotě elektronů s teoretickou předpovědí (viz obr. 5.18).

Těžiště emisivity měkkého rentgenového záření bylo u sledovaných pulzů vzdáleno 1 až 5cm od magnetické osy, což je při velikostech pixelů 10x10cm dobrý výsledek. Těžiště se v průběhu pulzu nachází většinou blíže k hlavní ose tokamaku než magnetická osa (viz obr. 6.2 a 6.3), což by mohlo být způsobeno trojúhelníkovým tvarem magnetických povrchů a Šafranovovým posuvem. Na druhé straně může být těžiště emisivity měkkého rentgenového záření odsouváno od hlavní osy např. vlivem banánových orbit, nadtepelných částic, nebo vlivem odstředivé síly na těžké nečistoty při rotaci plazmatu [3].

Rekonstruovaný profil přibližně odpovídá předpokládanému detekovatelnému brzdnému záření, jak plyne z obr. 6.6 až 6.8. V čase, kdy byl do plazmatu vpuštěn krypton, lze pozorovat nárůst emisivity měkkého rentgenového záření vlivem rekombinačních a deexcitačních procesů a vyššího efektivního náboje plazmatu. Efektivní náboj plazmatu byl vypočten porovnáním předpokládáného detekovatelného brzdného záření (viz vztah (6.1)) s rekonstruovaným profilem měkkého rentgenového záření (tj. s předpokladem čistého horkého plazmatu v tokamaku při zanedbání ostatních radiačních procesů). V centru plazmatu nabýval vypočtený efektivní náboj plazamtu přibližně hodnoty $Z_{eff} = 2$. Na okrajích plazmatu zřejmě přestává platit předpoklad, že plazma vyzařuje pouze brzdné záření, a proto je vypočtená hodnota efektivního náboje vyšší a velmi vzdálená skutečnosti. Vypočtené hodnoty efektivního náboje jsou pouze orientační. Přesný výpočet by vyžadoval zahrnutí složitých radiačních modelů, což je mimo záběr této práce.

V kapitole 6.3.1 byla pomocí SVD u pulzu č. 65944 v časovém intervalu od 46s do 46,6s pozorována pilová nestabilita s periodou 87,5ms s inverzním poloměrem okolo 40cm (viz obr. 6.9). Sledováni nečistot je komplikováno rozdílnou spektrální citlivosti kamer V a S4. Po vpuštění kryptonu do plazmatu se větší citlivost vertikální kamery V projevila nárůstem rekonstruované emisivity v horní a spodní části obrazu.

Hlavním výsledkem práce je, že se prokázala užitečnost tomografie měkkého rentgenového záření na tokamaku JET i přes zjevné nedostatky v experimentálním uspořádání. Takový výsledek je velmi příznivou zprávou, protože měření na tokamaku JET jsou vzhledem k jeho parametrům jedinečná a důležitá pro ITER.

# Literatura:

[1] Imríšek M., *Studium transformace chyb v tomografii fúzních neutronů : diplomová práce*, Praha : ČVUT, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2008. 53 l., 6 l. příl. Vedoucí diplomové práce Jan Mlynář

[2] Mlynář J., *Pixels Method Computer Tomography in Tokamak Experiments : doctoral thesis* , Prague, Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, September 1995. 147 l., 62 l. příl. Thesis Advisor Jan Stöckel

[3] Ingesson L.C. et al., Soft X Ray tomography during ELMs and Impurity Injection in JET, *Nuclear Fusion* . 1998, vol. 38, no. 11, p. 1675-1693

[4] Mlynar J., Coda S. et al, Investigation of the consistency of magnetic and soft x-ray plasma position measurements on TCV by means of a rapid tomographic inversion algorithm, *Plasma Phys. Control. Fusion*, February 2003, vol. 45, no. 2, p. 169-180

[5] Ingesson L.C. et al., Tomography diagnostics: Bolometry and Soft X-ray Detection, *Fusion Science and Technology*, 2008, vol. 53, p. 528-576

[6] Atzeni S., Meyer-Ter-Vehn J., *The physics of inertial fusion*, New York : Oxford University Press Inc., 2004. ISBN 0-19-856264-0

[7] McCracken G., Stott P., *Fúze, Energie Vesmíru*, 1. vyd., Praha : Nakladatelství MF v edici Kolumbus, 2006, 328 s., 16s. příl. ISBN 80-204-1453-3

[8] Mlynář J., *Focus On: JET, the Europan Centre of Fusion Research*, Culham Science Centre : EFDA, Culham Science Centre, 2007. 201 s. - (EFDA-JET-R(07)01)

[9] Kulhánek P., *Teoretická mechanika*, studijní text pro doktorské studium, FEL ČVUT v Praze, 2011 Dostupné z : http://www.aldebaran.cz/studium/ [cit. 5.1. 2012]

[10] Mlynar J., Unfolding of the NE213 data at JET via Minimum Fisher Regularisation, *TFD Technical Meeting on Unfolding and Tomographic Techniques for Fusion Applications*, 1st – 2nd July 2008, EFDA JET, Culham

[11] Rebhan E., Van Oost G., Thernomuclear burn criteria, *Transactions of Fusion Science and Technology*, 2008, vol. 53, p. 16-26
Dostupné z : <http:/www.carolusmagnus.net/> [cit. 5.1. 2012]

[12] M. Anton et al., X-ray tomography on the TCV tokamak, *Plasma Phys. Control. Fusion*, 1996, vol. 38, p. 1849-1878

[13] Alper B.: *Status of SXR Diagnostics in 2007/8*, 22. 9. 2007, Culham Science Centre

[14] Gill R. D., Alper B., Edwards A. W.: *First results in D-T from the Radiation Hardened Soft X-Ray Cameras*, Abingdon, Oxfordshire, OX14 3EA, UK, October 1997
Dostupné z : <http://www.iop.org/Jet/fulltext/JETR97011.pdf> [cit. 5.1. 2012]

[15] Kulhánek P., *Úvod do teorie plazmatu*, Praha : AGA, březen 2011, 384 s., ISBN 978-80-904582-2-2

[16] Mlynář J., ITER: Cesta ke zvládnutí řízené termonukleární fúze, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 2004, vol. 49, no. 2, str. 129-150*
Dostupné z : <http://www.dml.cz/dmlcz/141220> [cit. 5.1. 2012]

[17] Wesson J.: *The Science of JET*, JET-R(99)13
Dostupné z : < http://www.iop.org/Jet/fulltext/JETR99013.pdf> [cit. 5.1. 2012]

[18] Stacey W. M., *Fusion plasma physics*, Weinheim : WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KgaA, 2005, 463-478, ISBN 3-527-40586-0

[19] V. Igochine, A. Gude, M. Maraschek, *Hotlink based Soft X-ray Diagnostic on ASDEX Upgrade*, IPP-Report, Max Planck Institu für Plasmaphysik, 2010

[20] Cormack, A.M.: Representation of functions by its line integrals, with some radiological Applications,
*J. Appl. Phys.* 1963, vol. 34 no. 9, ISSN 2722-2727

[21] Cormack, A.M.: Representation of functions by its line integrals, with some radiological Applications,
*J. Appl. Phys*. 1964, vol. 35, ISSN 2908-2912

[22] Mlynar J., Odstrcil M., Imrisek M., Alper B., Giroud C., Murari A., *2D tomography of SXR data from toroidally separated cameras for studies of impurity injection and fast instabilities on JET*, 38th EPS Conference on Plasma Physics (2011)

[23] M. Odstrčil, *Tomografie plazmatu na tokamaku COMPASS : bakalářská práce*, Praha : ČVUT, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2010, 60 l., Vedoucí diplomové práce Jan Mlynář

[24] I.H. Hutchinson: *Principles of Plasma Diagnostics*, Cambridge : Cambridge University Press, 1987, 458 p., ISBN 0-521-80389-6

[25] H.J. de Blank, Plasma equilibrium in tokamaks, *Transactions of Fusion Science and Technology*, 2005, vol. 53, p. 115-121
Dostupné z : <http://www.carolusmagnus.net/> [cit. 5.1. 2012]

[26] B.L. Henke, E.M. Gullikson, and J.C. Davis. X-ray interactions: photoabsorption, scattering, transmission, and reflection at E=50-30000 eV, Z=1-92, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, July 1993, vol. **54,** no.2, p. 181-342
Dostupné z : < http://www.cxro.lbl.gov/> [cit. 5.1. 2012]

[27] P. E. Stott, G. Gorini, P. Prandoni, E. Sindoni, *Diagnostics for experimental thermonuclear fusion reactors 2*, New York : Springer, 1998, 628 p. ISBN 0-306-458365-4

[28] Franz P. et al: Two-dimensional time resolved measurements of the electron temperature in MST, *Review of scientific instruments*, 2006, vol. 77

[29] E. J. Ientelucci, *Using the Singular Value Decomposition*, Chester F. Carlson Center for Imaging Science, Rochester Institute of Technology, 2003
Dostupné z : < http://astro.rit.edu/~ejipci/Reports/svd.pdf> [cit. 5.1. 2012]

[30] M. Dont: *Elementy numericke linearni algebry,* 1. vyd., Praha : Vydavatelstvi ČVUT, 2004, 221 s., ISBN 80-01-02969-7

[31] M. Vácha, *Detection systems for measurements of high-temperature plasma radiation on the COMPASS tokamak by fast bolometers and soft X-ray detectors : diploma thesis*, Prague, Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, 2009. 73p. Supervisor Wladimír Weinzettl

# Dodatek A – Kalibrační konstanty

Tabulka A.1: Použité kalibrační konstanty pro převod signálů v detektorech měkkého rentgenového záření kamer V a S4 na W/m$^2$.

| Kamera V | | Kamera T | | Kamera S4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| detektor | kalibrační konstanta | detektor | kalibrační konstanta | detektor | kalibrační konstanta |
| 1 | 1,379 | 1 | 1,369 | 1 | 0,643 |
| 2 | 1,311 | 2 | 1,297 | 2 | 0,616 |
| 3 | 1,249 | 3 | 1,236 | 3 | 0,597 |
| 4 | 1,191 | 4 | 1,179 | 4 | 0,582 |
| 5 | 1,139 | 5 | 1,126 | 5 | 0,573 |
| 6 | 1,093 | 6 | 1,079 | 6 | 0,567 |
| 7 | 1,049 | 7 | 1,035 | 7 | 0,566 |
| 8 | 1,011 | 8 | 0,997 | 8 | 0,570 |
| 9 | 0,975 | 9 | 0,962 | 9 | 0,583 |
| 10 | 0,945 | 10 | 0,931 | 10 | 0,576 |
| 11 | 0,917 | 11 | 0,903 | 11 | 0,576 |
| 12 | 0,893 | 12 | 0,879 | 12 | 0,578 |
| 13 | 0,873 | 13 | 0,859 | 13 | 0,587 |
| 14 | 0,856 | 14 | 0,842 | 14 | 0,602 |
| 15 | 0,842 | 15 | 0,828 | 15 | 0,626 |
| 16 | 0,829 | 16 | 0,816 | 16 | 0,653 |
| 17 | 0,821 | 17 | 0,807 | 17 | 0,690 |
| 18 | 0,815 | 18 | 0,801 | | |
| 19 | 0,821 | 19 | 0,807 | | |
| 20 | 0,829 | 20 | 0,816 | | |
| 21 | 0,842 | 21 | 0,828 | | |
| 22 | 0,856 | 22 | 0,842 | | |
| 23 | 0,873 | 23 | 0,860 | | |
| 24 | 0,894 | 24 | 0,880 | | |
| 25 | 0,918 | 25 | 0,904 | | |
| 26 | 0,946 | 26 | 0,932 | | |
| 27 | 0,976 | 27 | 0,963 | | |
| 28 | 1,012 | 28 | 0,998 | | |
| 29 | 1,050 | 29 | 1,036 | | |
| 30 | 1,094 | 30 | 1,080 | | |
| 31 | 1,141 | 31 | 1,127 | | |
| 32 | 1,193 | 32 | 1,181 | | |
| 33 | 1,251 | 33 | 1,237 | | |
| 34 | 1,313 | 34 | 1,300 | | |
| 35 | 1,382 | 35 | 1,371 | | |

# Dodatek B – Výpočet matice geometrie

### Výpočet pro kameru V

Úhly přímek průhledů jednotlivých detektorů $\Phi_r$ kamery V vyjadřuje vztah (2.1). Vzdálenost štěrbiny kamery V od hlavní osy je $R_V = 2848mm$ a nachází se ve výšce $z_V = 2172mm$ (nad rovinou procházející vedlejší osou tokamaku). Lze tedy určit soustavu rovnic přímek pro všech 35 detektorů:

$$z = m_r x + b_r \quad r = 1,\ldots,35, \qquad \text{(B.1)}$$

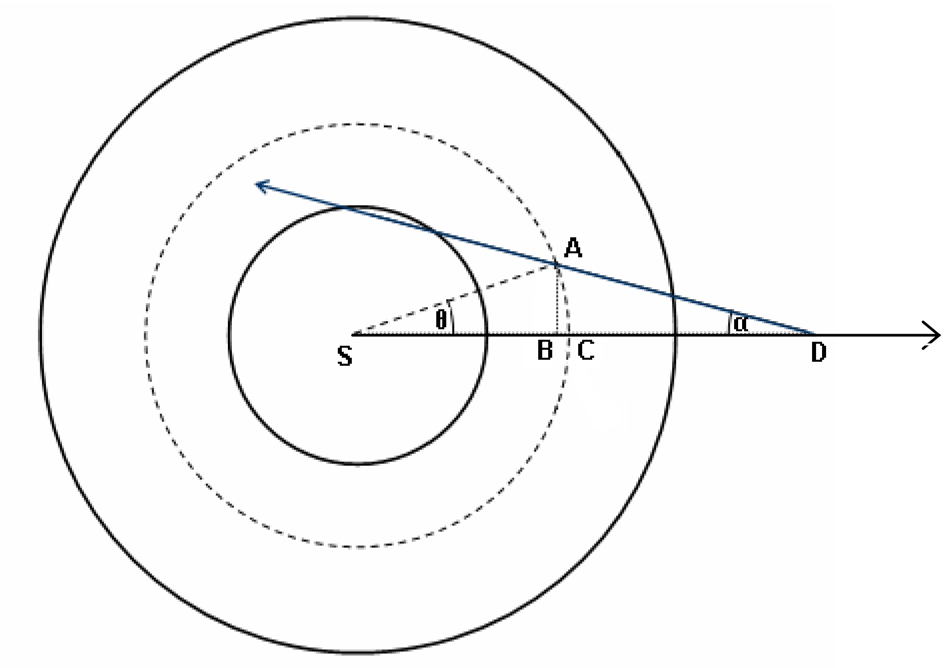
kde $x$ je vzdálenost od hlavní osy, $z$ výška nad vodorovnou rovinou procházející vedlejší osou tokamaku, stoupání přímek $m_r = \tan^{-1}(\Phi_r)$ a konstanta $b_r = z_V - R_V \cdot m_r$.

Průsečíky přímek s horizontálními hranicemi pixelů je možné nalézt dosazením jejich výšek za $z_r$ a průsečíky s vertikálními hranicemi pixelů dosazením jejich vzdáleností od hlavní osy tokamaku za $x_r$ do soustavy rovnic (B.1). Pro každý pixel pak je třeba určit, zda se průsečíky s vybranou přímkou detektoru nacházejí na jeho hranicích a pokud ano, přiřadit pixelu vzdálenost mezi nimi.

### Výpočet pro kameru KJ5 (S4)

Kamera KJ5 se nachází ve vzdálenosti $R_{KJ5} = 5917{,}36\text{mm}$ od hlavní osy tokamaku. Prvních osm detektorů míří z horní štěrbiny ve výšce $z_U = 414\text{mm}$ a zbylých devět z dolní štěrbiny ve výšce $z_L = -408\text{mm}$ vzhledem k rovině procházející vedlejší osou tokamaku. Úhly jednotlivých detektorů shrnuje tabulka 3.1.

V případě kamery KJ5 už není výpočet transformační matice tak prostý, protože detektory nemíří do tokamaku v rovině poloidálního průřezu ale šikmo pod úhlem $\alpha = 15{,}63°$ (viz obr B.1). Je tedy třeba průsečík přímky detektoru s hranicemi pixelů (viz bod A na obr B.1) promítnout do roviny hledaného profilu emisivity měkkého rentgenového záření podle toroidální symetrie tokamaku (viz bod C na obr. 3.1), následně určit pro každý pixel, zda se průměty průsečíků nacházejí na jeho hranicích a případně danému pixelu přiřadit prostorovou vzdálenost mezi těmito průsečíky.




obrázek B.1: Pohled shora na torus tokamaku. Bod D označuje obě štěrbiny, kterými detektory kamery KJ5 míří do tokamaku pod úhlem α. Hlavní osa tokamaku prochází bodem S. Modrá šipka znázorňuje směr kamery KJ5

## Určení rovnic pro přímky detektorů

Z obr. 3.1 plyne, že pro výšku přímky detektoru v bodě A platí:

$$z_A = |AD| \cdot \tan(-\upsilon_r) + z_D = \frac{|BD|}{\cos(\alpha)} \tan(-\upsilon_r) + z_D \,,$$

kde $\upsilon_r$ jsou úhly detektorů vzhledem k vodorovné rovině (viz tab. 2.1) a $z_D$ výška přímky v bodě D.

Protože $|SD| = R_{KJ5}$, lze soustavu rovnic přímek detektorů napsat ve tvaru:

$$z = \frac{R_{KJ5} - x}{\cos(\alpha)} m_r + z_{U,L} \,, \; r = \widehat{17} \,, \qquad \text{(B.2)}$$

kde $r$ je číslo detektoru, $x$ je souřadnice ve vodorovné rovině (viz obr. B.1), $z$ výška nad vodorovnou rovinou procházející vedlejší osou tokamaku, stoupání přímek $m_r = -\tan^{-1}(\upsilon_r)$ a $z_{U,L}$ výška horní nebo dolní štěrbiny kamery KJ5.

**Výpočet průsečíků přímek detektorů s horizontálními linkami mřížky pixelů**

Protne-li přímka detektoru vodorovnou rovinu ve výšce k-té horizontální hranice pixelů, plyne ze soustavy rovnic (B.2) pro souřadnici *x* průsečíku:

$$x_{rk} = R_{KJ5} - \frac{z_k - z_{U,L}}{m_r}\cos(\alpha).$$

Pro souřadnici *x* průmětu průsečíku do rovniny hledaného profilu emisivity měkkého rentgenového záření (tedy po pootočení bodu A o úhel θ do bodu C) pak platí:

$$x'_{rk} = \frac{x_{rk}}{\cos(\Theta_{rk})},$$

kde

$$\Theta_{rk} = \tan^{-1}\left(\frac{(R_{KJ5} - x_{rk})\tan(\alpha)}{x_{rk}}\right).$$

Souřadnice průsečíku přímky r-tého detektoru s k-tou horizontální hranicí pixelů v rovině hledaného profilu emisivity měkkého rentgenového záření tedy jsou:

$$[x'_{rk}, z_k],$$

kde $z_k$ je výška k-té horizontální hranice pixelů.

**Výpočet průsečíků přímek detektorů s vertikálními linkami mřížky pixelů**

Díky toroidální symetrii tokamaku si lze představit, že vertikální hranice pixelů opisují vertikální válce s osou v hlavní ose tokamaku. Protne-li pak přímka detektoru tento válec v bodě A (viz obr B.1), odpovídá souřadnice *x* průmětu průsečíku do roviny hledaného profilu emisivity měkkého rentgenového záření již nadefinované vzdálenosti příslušné vertikální hranice pixelů od hlavní osy.

Pro výpočet výšky průsečíku je nejprve třeba určit vzdálenost mezi body A a D (tj. průmět vzdálenosti mezi průsečíkem a štěrbinou kamery KJ5 do vodorovné roviny). Z kosinové věty plyne:

$$|SB|^2 = |SD|^2 + |BD|^2 - 2\cos(\alpha)\cdot|SD|\cdot|BD|,$$

což je kvadratická rovnice, ze které s přihlédnutím k obr. 3.1 plyne:

$$|BD| = \cos(\alpha)|SD| - \sqrt{(\cos(\alpha)\cdot|SD|)^2 - |SD|^2 + |SB|^2},$$

neboli v obecném případě:

$$s_l = \cos(\alpha) R_{KJ5} - \sqrt{(\cos(\alpha) \cdot R_{KJ5})^2 - R_{KJ5}{}^2 + x_l{}^2} \qquad \text{(B.3)}$$

kde $s_l$ je tedy průmět vzdáleností mezi štěrbinou kamery KJ5 a průsečíkem přímky detektoru s l-tou vertikální linkou do vodorovné roviny (platí pro všech 17 detektorů) a $x_l$ vzdálenost vertikální hranice pixelů od hlavní osy.

Pro výšku průsečíku přímky r-tého detektoru s l-tou vertikální hranicí pixelů pak platí:

$$z_{rl} = s_l m_r + z_{U,D}. \qquad \text{(B.4)}$$

Souřadnice průsečíku přímky r-tého detektoru s l-tou vertikální hranicí pixelů v rovině hledaného profilu emisivity měkkého rentgenového záření tedy jsou:

$$[x_l, z_{rl}].$$

**Výpočet vzdáleností mezi průsečíky přímky detektoru s hranicemi pixelu**

Protne-li přímka určitého detektoru hranice pixelu, platí pro vzdálenost mezi průsečíky označené *a*, *b*:

$$d_{ab} = \sqrt{\left(|AD|_a - |AD|_b\right)^2 + (z_a - z_b)^2},$$

neboli

$$d_{ab} = \sqrt{(s_a - s_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

kde $s_a$, $s_b$ jsou průměty vzdáleností bodů *a* a *b* od štěrbiny detektoru do vodorovné roviny a $z_a$, $z_b$ výšky bodů *a* a *b* nad rovinou procházející vedlejší osou tokamaku.

V případě průsečíku přímky detektoru s vertikální hranicí pixelu je $s_a$, resp. $s_b$ určena příslušným vztahem v soustavě rovnic (B.3) a $z_a$ resp. $z_b$ příslušným vztahem v soustavě rovnic (B.4).

V případě průsečíku s horizontální hranicí je

$$s_{a,b} = \frac{R_{KJ5} - x_{a,b}}{\cos(\alpha)},$$

kde $x_{a,b}$ je x-ová souřadnice průsečíku *a* nebo *b* a $z_a$ resp. $z_b$ je rovna výšce příslušné horizontální hranice pixelu.