

Slabikář analytické mechaniky

Ladislav Hlavatý

17. září 2014

Předběžná verze. Uvítám každé upozornění na překlepy, nejasnosti a chyby.

Kapitoly označené * jsou doplňkové a mohou být rámcově zkušeny jako test uchazečů aspirující na hodnocení výborně.

Zimní semestr TEF : Analytická mechanika

Obsah

1	Prostor a čas, souřadnice, vektory, tenzory, transformace	4
1.1	Afinní prostor a souřadnice bodu	5
1.2	Vektory a tenzory	7
1.3	* Orientace prostoru, pseudovektory, pseudotenzory, vektorový součin	11
1.4	* Orientace ve fyzice (P. Novotný)	13
2	Newtonova mechanika hmotných bodů	15
2.1	Inerciální vztažné soustavy, druhý Newtonův zákon	15
2.2	Druhý Newtonův zákon v neinerciální soustavě	18
2.3	Soustava hmotných bodů, třetí Newtonův zákon	19
2.4	Časová střední hodnota, věta o viriálu	23
3	Mechanika tuhého tělesa	25
3.1	Popis pohybu a fyzikálních veličin	25
3.2	Pohybové rovnice tuhého tělesa, bezsilový setrvačnick	27
4	Lagrangeova formulace mechaniky	30
4.1	Lagrangeova funkce hmotného bodu bez vazeb v poli potenciálových sil	31

4.1.1	Lorentzova síla, zobecněný potenciál	31
4.1.2	Obecné souřadnice	32
4.2	Vazby	33
4.2.1	Lagrangeova funkce pro soustavy s holonomními vazbami . . .	34
4.2.2	Lagrangeovy rovnice druhého druhu	37
4.3	Disipativní síly, Rayleighova funkce	39
4.4	Zákony zachování, cyklické souřadnice, Věta Noetherové	39
5	Základní principy mechaniky	44
5.1	Diferenciální principy	44
5.1.1	Statická rovnováha v soustavě bez vazeb, princip virtuální práce	44
5.1.2	Statická rovnováha soustavy hmotných bodů se skleronomními holonomními vazbami	45
5.1.3	Rheonomní holonomní vazby, virtuální posunutí, ideálními vazby	46
5.1.4	Dynamická rovnováha, d'Alembertův princip	48
5.2	Integrální principy	49
5.2.1	Hamiltonův princip	50
5.2.2	* Neisochronní variace, princip Maupertuisův	51
5.2.3	Jacobiho princip	53
5.3	* Věta Noetherové podruhé	54
6	Řešitelné pohybové rovnice	57
6.1	Jeden hmotný bod na přímce	57
6.2	Hmotný bod v poli sféricky symetrického potenciálu	57
6.3	Úloha dvou těles	58
7	Otázky ke zkoušce	60
8	Přehled základních vzorečků z analytické mechaniky	61

Literatura

- [1] I. Štoll and J. Tolar. *Teoretická fyzika. Skripta.* ČVUT, Praha, 1984.
- [2] M. Brdička, A.Hladík. *Teoretická mechanika.* Academia, Praha, 1987
- [3] J. Langer, J. Podolský. *Teoretická mechanika.*
<http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/OFY003/TEXTY/lagrange.pdf>
- [4] S. Golwala. *Lecture Notes on Classical Mechanics for Physics*
<http://www.astro.caltech.edu/golwala/ph106ab/>
- [5] H.Goldstein, Ch.Poole, J.Safko. *Classical Mechanics*
Addison wesley, San Francisco, 2002.
- [6] Hand L.N., Finch J.D. *Analytical mechanics*
Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [7] V. Votruba. *Základy speciální teorie relativity.* Academia, Praha, 1969.
- [8] I. Štoll. *Elektřina a magnetismus. Skripta.* ČVUT, Praha, 1994.

1 Prostor a čas, souřadnice, vektory, tenzory, transformace

Mechanika je nauka o pohybu těles aproximovaných často tzv. hmotnými body. Pohyb (časový vývoj poloh) jednoho hmotného bodu v prostoru je určen 2. Newtonovým zákonem¹

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F}(b), \quad (1)$$

kde na levé straně se vyskytuje vektor okamžitého zrychlení hmotného bodu a na pravé straně vektor síly v bodě b jeho okamžitého výskytu. Analytický zápis tohoto přírodního zákona v řeči matematiky představuje soustavu obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro funkce $x^j(t)$

$$m \ddot{x}^j(t) = F^j(\vec{x}(t)), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

kde F^j jsou předem zadané (t.j. na konkrétním řešení nezávislé) funkce. Řešením soustavy diferenciálních rovnic 2. řádu (2) dostáváme popis možných drah hmotného bodu, který se pohybuje pod vlivem silového pole \mathbf{F} . Důvod, proč si příroda vybrala právě diferenciální rovnice druhého řádu a ne třeba třetího, může být předmětem více či méně filosofických úvah (viz kapitolu 5), nicméně je třeba to přijmout jako mnohokrát experimentálně ověřený² fakt.

Složitost řešení diferenciálních rovnic (2) silně závisí na tvaru funkcí $F^j(\vec{x})$. Analytická mechanika je především nauka o metodách jak tyto rovnice řešit.

Cvičení 1 Zopakujte si řešení Newtonových rovnic pro harmonický oscilátor, kde $\vec{F}(\vec{x}) = -k \vec{x}$

Otázka: Čím je určena určena konkrétní dráha hmotného bodu? Proč?

Cvičení 2 Řešte jednoduché diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} y' &= f(x), \\ y' &= f(y), \\ y'' &= f(x), \\ y'' &= f(y'), \\ y'' &= f(y), \end{aligned}$$

kde $y = y(x)$ a f je libovolná spojitá funkce.

¹Vektory, t.j. prvky vektorového prostoru budeme v tomto textu označovat tučným písmeny $\mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \dots$ zatímco písmena se šípkou $\vec{v}, \vec{a}, \vec{F}, \dots$ představují n -tice reálných čísel nebo funkcí, obvykle složky vektoru v nějaké bazi

²pro pohyby, jejichž rychlost je mnohem menší než je rychlost světla

Cvičení 3 Zopakujte si větu o derivování složené funkce více proměnných (chain rule). Vysvětlete podrobně schematický vzorec

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

Rozeberme si podrobněji veličiny vyskytující se v matematickém zápisu (2) druhého Newtonova zákona pro hmotný bod. Obecně se říká, že x^j jsou **kartézské souřadnice** hmotného bodu a \ddot{x}^j a $F^j(\vec{x})$ jsou **kartézské složky vektoru** zrychlení a a **vektorového pole** sil \mathbf{F} . Co se těmito pojmy míní?

1.1 Afinity prostor a souřadnice bodu

Mechanika je teorie pohybu ve "fyzikálním" prostoru, který stejně jako čas potřebujeme popsat matematickými pojmy. Čas je v klasické nerelativistické mechanice univerzální parametr $t \in \mathbf{R}$ nezávislý na poloze a pohybu. Fyzikální prostor lze chápat jako soubor míst, kde se mohou nacházet hmotné body. Nerelativistická představa fyzikálního prostoru je, že v něm platí eukleidovská metrika, t.j. vzdálenosti bodů popsaných kartézskými souřadnicemi jsou dány Pythagorovou větou. "Prázdný" prostor, ale nemá žádný význačný bod, není to tedy vektorový prostor. Fyzikální prostor v klasické mechanice považujeme za afinní prostor se skalárním součinem. Co to je?

Definice 1.1.1 **Afinním prostorem** nazýváme uspořádanou trojici $\mathcal{E} := (E, d, \mathbf{E})$, kde

- E je množina
- \mathbf{E} je vektorový prostor.
- d je zobrazení $d : E \times E \rightarrow \mathbf{E}$, takové že
 1. $\forall a, b, c \in E : d(a, b) + d(b, c) + d(c, a) = \theta$. (Součet vektorů tvořící trojúhelník a, b, c je nulový vektor.)
 2. $\forall a \in E d_a : E \rightarrow \mathbf{E}$, $d_a(b) := d(a, b)$ je bijekce. (Zvolím-li "počátek" a , pak každý bod v E lze dostat přičtením vhodného vektoru.)

Rozměrem afinního prostoru \mathcal{E} nazýváme rozměr přidruženého vektorového prostoru \mathbf{E}

Často se značí $d(a, b) \equiv a - b$, $d_a^{-1}(\mathbf{v}) \equiv a + \mathbf{v}$.

Body fyzikálního prostoru tedy chápeme jako prvky afinního prostoru, tedy množiny E , kde přidružený vektorový prostor \mathbf{E} je konečně rozměrný a reálný $\mathbf{E} = \mathbf{V}_n$. Pro body v prostoru $n = 3$, v rovině $n = 2$, na přímce $n = 1$.

Definice 1.1.2 *Nechť \mathbf{E} je reálný vektorový prostor. Skalárním součinem nazveme zobrazení $(\cdot, \cdot) : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$, které je bilineární, symetrické a striktně pozitivní.*

Je vhodné rozlišovat *souřadnice bodů* v afinním prostoru E a *složky vektorů* ve vektorovém prostoru \mathbf{E} . ("Přímočaré") **Souřadnice bodu** $b \in E$ **vzhledem k počátku** $o \in E$ **a bazi** $e = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, $\mathbf{e}_j \in \mathbf{E}$ jsou funkce

$$\psi_{o,e} : E \rightarrow \mathbf{R}^n, b \mapsto \psi_{o,e}(b) \equiv (x^1(b), x^2(b), \dots, x^n(b)) := (\phi_e^1(b-o), \dots, \phi_e^n(b-o)), \quad (3)$$

kde ϕ_e^j jsou funkcionaly na \mathbf{V}_n duální k bazi e , t.j. $\phi_e^j(\mathbf{e}_k) = \delta_k^j$ neboli

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_j V^j \Leftrightarrow V^j = \phi_e^j(\mathbf{V}).$$

Z linearit ϕ a vlastností d plyne

$$x^j(o) \equiv \psi_{o,e}^j(o) = 0, \quad x^j(b_1) - x^j(b_2) \equiv \psi_{o,e}^j(b_1) - \psi_{o,e}^j(b_2) = \phi_e^j(b_1 - b_2).$$

Je-li baze e ortonormální, t.j.

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

pak se souřadnice nazývají **kartézské**.

Transformace souřadnic: Hodnoty souřadnic $x^j(b) \equiv \phi_e^j(b-o)$ pro jeden a tentýž bod b závisí na výběru **vztažných soustav** (o, e) .

Nechť $\psi_{o,e}$, $\tilde{\psi}_{\tilde{o},\tilde{e}}$ jsou dva systémy souřadnic vzhledem k počátku o a bazi $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ respektive $(\tilde{o}, (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n))$, kde³

$$\tilde{o} = o + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j S^j_i \quad (4)$$

a matice S je invertibilní reálná matice $n \times n$, neboli $S \in GL(n, \mathbf{R})$.

Pak pro ně platí vztah

$$x^j(b) = \psi_{o,e}^j(b) = S^j_i \tilde{\psi}_{\tilde{o},\tilde{e}}^i(b + \mathbf{w}) = S^j_i \tilde{x}^i(b + \mathbf{w}) = S^j_i (\tilde{x}^i(b) - \tilde{x}^i(o)),$$

zkráceně⁴

$$\vec{x}(b) = S \cdot (\vec{\tilde{x}}(b) - \vec{\tilde{x}}(o)) \quad (5)$$

Dk.: $b - o = \mathbf{e}_j \phi_e^j(b - o) = b + \mathbf{w} - \tilde{o} = \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\phi}_e^i(b + \mathbf{w} - \tilde{o})$, $\tilde{x}^i(\tilde{o}) = 0 \Rightarrow \dots$

Uvědomme si, že $\vec{x} := (x^1, \dots, x^n)$, $\vec{\tilde{x}} := (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ jsou dvě n -tice **funkcí** $E \rightarrow \mathbf{R}$, pro které platí (5).

³Pokud není výslovně uveden opak, používáme tzv. Einsteinovo sumační pravidlo, že přes opakující indexy se sčítá od 1 do n .

⁴Šipkou $\vec{}$ nad symbolem y pro jakékoliv y míníme *uspořádanou n -tici reálných čísel* $\vec{y} := (y_1, y_2, \dots, y_n)$, zatímco vektory $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ značíme tučně. Tečka uprostřed \cdot znamená maticové násobení nebo skalární součin.

Cvičení 4 Ukažte, že $\vec{x}(\tilde{o}) = -S \cdot \vec{x}(o)$, takže platí též

$$\vec{x}(b) = S \cdot \vec{x}(b) + \vec{x}(\tilde{o}) \quad (6)$$

a odvodte inverzní vztah k (5), t.j. $\tilde{x}^i(b)$ jako funkci $x^i(b)$ a $x^i(\tilde{o})$.

Poznamenejme, že jak matice S , tak vektor \mathbf{w} , t.j. vztah mezi souřadnými soustavami, se může měnit s časem, což se nám bude hodit v dalších úvahách, např. při přechodech mezi inerciální a neinerciální soustavou či při popisu pohybu tuhého tělesa.

1.2 Vektory a tenzory

Je-li zvolen počátek o , pak můžeme bod fyzikálního prostoru b reprezentovat též jako vektor \mathbf{b} přidruženého vektorového prostoru \mathbf{E} a pokud $\tilde{o} = o$, pak se souřadnice bodů transformují jako složky vektoru⁵. "Rozdíl bodů" $(b - a) = d(b, a)$ je v každém případě vektor, takže rychlost pohybujícího se bodu

$$\mathbf{v}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{b(t) - b(t_0)}{t - t_0}$$

je rovněž vektor stejně jako zrychlení nebo síla v daném bodě.

Pro konkrétní výpočty většinou používáme složky vektorů v nějaké bazi a proto fyzikové často pod pojmem vektor myslí n -tici jeho složek $(V^1, V^2, \dots, V^n) =: \vec{V} \in \mathbf{R}^n$. Je ale třeba si uvědomit, že tento zápis vektoru je vázán na danou bazi a pokud *fyzikální interpretace výsledků má být nezávislá na výběru baze* potřebujeme znát pravidla pro transformaci složek vektoru $\mathbf{V} \in \mathbf{E}$ při přechodu od jedné baze ke druhé.

Nechť

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_i V^i = \tilde{\mathbf{e}}_j \tilde{V}^j,$$

kde přechod od (ne nutně ortonormální) baze $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ k bazi $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$ je dán maticí $S \in GL(n)$ způsobem $\tilde{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_i S^i_j$. *Složky* jednoho a téhož vektoru tedy mohou být *různé v závislosti na zvolené bazi*. Ze způsobu transformace prvků bází je snadné ukázat, že složky libovolného vektoru \mathbf{V} se transformují podle pravidla (srovnej s (5))

$$\tilde{V}^j = (S^{-1})^j_i V^i \Leftrightarrow \vec{\tilde{V}} = S^{-1} \cdot \vec{V} \quad (7)$$

Přesněji řečeno tímto způsobem se transformují složky tzv. *kontravariantních* vektorů, což je například rychlost nebo zrychlení. Mimo to existují ještě tzv. *kovariantní*

⁵Obecně nikoliv, porovnej (5) a (7).

vektory⁶, (například gradient) jejichž složky se transformují stejně jako prvky baze, t.j.⁷

$$\tilde{W}_i = W_j S^j_i \Leftrightarrow \vec{\tilde{W}} = \vec{W} \cdot S = S^T \cdot \vec{W} \quad (8)$$

Příklad 1.1 *Nechť $n = 3$ a*

$$S = \begin{pmatrix} 2,54 & 0 & 0 \\ 0 & 2,54 & 0 \\ 0 & 0 & 2,54 \end{pmatrix}$$

(změna měřítka, délky měříme v palcích místo v centimetrech). Složky kovariantního vektoru se zvětší 2,54 krát, zatímco složky kontravariantního vektoru se 2,54 krát zmenší.

Cvičení 5 *Nechť složky veličiny \mathbf{A} v bazi $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ mají hodnoty $(1, 2, 3)$ a složky veličiny \mathbf{B} v téže bazi mají hodnoty $(4, 5, 6)$.*

V bazi $\tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$ má tatáž veličina \mathbf{A} složky $(2, 0, -1)$ a veličina \mathbf{B} složky $(15, 5, -2)$.

Je veličina \mathbf{A} kovariantní nebo kontravariantní vektor? Je veličina \mathbf{B} kovariantní nebo kontravariantní vektor?

Pozn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 6 *Nechť složky veličiny \mathbf{C} v bazi $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ mají hodnoty $(1, 1, 1)$ a v bazi $\tilde{\mathbf{e}}$ z předchozího cvičení mají rovněž hodnoty $(1, 1, 1)$. Je veličina \mathbf{C} kovariantní nebo kontravariantní vektor?*

Podobným způsobem lze definovat složky **tenzoru** v dané bazi. Složky kontravariantního tenzoru 2. řádu \mathbf{T} tvoří $n \times n$ -tici reálných čísel T^{ij} , které se při transformaci bází $\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j S^j_i$ transformují způsobem

$$\tilde{T}^{ij} = (S^{-1})^i_k (S^{-1})^j_l T^{kl} \quad (9)$$

Pro kovariantní (t.j. transformující se podobně jako prvky baze) tenzory je třeba nahradit $S^{-1} \rightarrow S^T$, takže složky kovariantního tenzoru 2. řádu se transformují způsobem

$$\tilde{T}_{ij} = T_{kl} S^k_i S^l_j. \quad (10)$$

⁶Prvky duálního prostoru \mathbf{V}_n^*

⁷Je zvykem psát indexy složek kontravariantních veličin nahoru, zatímco indexy složek kovariantních veličin dolů

Složky kovariantních tenzorů řádu q se transformují analogicky způsobem

$$\tilde{T}_{i_1 i_2 \dots i_q} = T_{k_1 k_2 \dots k_q} S^{k_1}_{i_1} S^{k_2}_{i_2} \dots S^{k_q}_{i_q} \quad (11)$$

Otázka: Jak se transformují složky kontravariantních tenzorů řádu q ?

Složky smíšených tenzorů řádu (p, q) se transformují způsobem

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q} &= \\ &= (S^{-1})^{j_1}_{m_1} (S^{-1})^{j_2}_{m_2} \dots (S^{-1})^{j_p}_{m_p} T^{m_1 m_2 \dots m_p}_{k_1 k_2 \dots k_q} S^{k_1}_{i_1} S^{k_2}_{i_2} \dots S^{k_q}_{i_q} \end{aligned} \quad (12)$$

Cvičení 7 * Ukažte že matice A^j_i přiřazená v bazi e lineárnímu operátoru \mathbf{A} na \mathbf{V}_n způsobem $\mathbf{A}e_i =: e_j A^j_i$ se transformuje jako smíšený tenzor řádu $(1, 1)$.

Příkladem kontravariantního tenzoru 2. řádu je moment setrvačnosti tělesa, viz Kap. 3.2. Jiným zajímavým příkladem je smíšený tenzor \mathbf{I} řádu $(1, 1)$, jehož složky $I^i_j = \delta^i_j := \delta_{ij}$ jsou ve všech bazích stejné, neboť

$$\tilde{I}^i_j = (S^{-1})^i_k I^k_l S^l_j = (S^{-1})^i_k S^k_j = \delta_{ij}$$

Cvičení 8 Necht' e_j jsou prvky ortonormální baze a $\mathbf{f}_i = e_j F^j_i$, kde $F \in GL(n)$ jsou prvky obecně neortonormální baze $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$. Ukažte, že skalární součin $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ má v bazi $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$, a , tvar

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij}, \quad (13)$$

kde $g_{ij} := F^k_i F^k_j$ je Grammova matice souboru $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$.

Cvičení 9 Ukažte, že prvky matice g_{ij} definující skalární součin (13) v obecné bazi lze považovat za složky kovariantního (tzv. metrického) tenzoru.

Jak už bylo řečeno, na pravé straně 2. Newtonova zákona (1) není konstantní vektor nýbrž **vektorové pole** $\mathbf{F}(b)$. Transformační vlastnosti jeho složek mají tvar

$$\tilde{F}^j(\tilde{x}) = (S^{-1})^j_i F^i(x), \Leftrightarrow \vec{\tilde{F}}(\tilde{x}) = S^{-1} \cdot \vec{F}(x) \quad (14)$$

kde $x = (x^1(b), \dots, x^n(b))$ a $\tilde{x} = (\tilde{x}^1(b), \dots, \tilde{x}^n(b))$ jsou souřadnice jednoho a téhož bodu $b \in E$, takže vztah mezi $\vec{x}(b)$ a $\vec{\tilde{x}}(b)$ je dán vztahem (5). Analogické transformace lze napsat i pro složky tenzorových polí. Nejjednodušší příklad je tenzorové pole řádu 0 – skalární pole, které se transformuje způsobem

$$\tilde{U}(\tilde{x}) = U(x) \quad (15)$$

Cvičení 10 Transformace skalárního pole. Jakých hodnot nabývá elektrický potenciál soustavy dvou elektronů vzdálených od sebe na délku l ve vztažné soustavě:

(o, e) , kde o je bod ležící ve středu úsečky spojující elektrony a e je ortonormální soustava taková, že \mathbf{e}_1 směřuje ve směru spojnice obou elektronů a $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ jsou na ní kolmé?

(\tilde{o}, \tilde{e}) , kde \tilde{o} je bod ležící ve vrcholu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona je tvořena úsečkou spojující elektrony a \tilde{e} je ortonormální soustava taková, že $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ směřují ve směru jednotlivých elektronů a $\tilde{\mathbf{e}}_3$ je na ně kolmá?

Uvědomte si, že ač funkce U a \tilde{U} mají různý tvar, popisují stejné elektrické pole!

Cvičení 11 Ukažte že pro libovolné skalární pole U se veličina $\text{grad} U$ transformuje jako (kovariantní) vektorové pole.

Používáme-li pouze kartézské souřadnic a složky vektorů v ortonormálních bázích, pro které platí $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$, pak pro transformační matice S dostaneme vztah

$$\delta_{ij} = \tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j = S^k{}_i S^l{}_j \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = S^k{}_i S^l{}_j \delta_{kl} = S^k{}_i S^k{}_j = (S^T \cdot S)_{ij} \Leftrightarrow \mathbf{1} = S^T \cdot S, \quad (16)$$

takže $S^{-1} = S^T$. Matice s touto vlastností nazýváme ortogonální a jejich množinu označujeme $O(n)$. Tato množina, stejně jako $GL(n)$, tvoří grupu (viz [1] dodatek D1), kde grupový součin je násobení matic.

Všimněte si že při ortogonálních transformacích (kdy $S^{-1} = S^T$) se složky vektoru transformují stejnou maticí jako prvky baze, zatímco pro obecné transformace se složky vektoru transformují maticí $(S^{-1}) \neq S^T$. Z vlastností determinantu je zřejmé, že pro $S \in O(n)$ $\det S = \pm 1$. Podmnožina matic s $\det S = 1$ se označuje $SO(n)$ a je podgrupou grupy $O(n)$.

Při přechodu mezi ortonormálními bazemi, t.j. při ortogonálních transformacích platí $S^{-1} = S^T$. Omezíme-li se tedy pouze na ortogonální transformace, pak složky vektoru se transformují stejnou maticí S jako prvky baze, zatímco pro obecné transformace se složky vektoru transformují maticí $(S^{-1}) \neq S^T$. Znamená to mimo jiné, že pomocí pouze ortogonálních transformací nejsme schopni rozlišit mezi kovariantními a kontravariantními vektory, což samozřejmě platí i pro tenzory.

Zobecněním tenzorů jsou **tenzorové hustoty**. Kovariantní *tenzorová hustota* τ váhy λ je veličina, jejíž složky se transformují způsobem

$$\tilde{\tau}_{ijk\dots} = (\det S)^\lambda \tau_{lm\dots} S^l{}_i S^m{}_j S^p{}_k. \quad (17)$$

Analogicky lze definovat kontravariantní či smíšené tenzorové hustoty. Jak vidno z definice tenzorové hustoty, transformacemi pouze z $SO(N)$ nelze rozlišit mezi tenzorovými hustotami a tenzory.

Cvičení 12 Ukažte že $\gamma = \det g_{ij}$, kde g_{ij} je matice definující skalární součin v obecné bazi, je skalární hustota stupně 2.

Cvičení 13 Ukažte že totálně antisymetrické Levi–Civitovy symboly v dimenzi n

$$\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \{-1, 0, 1\}, \quad \varepsilon_{1, 2, \dots, n} = 1 \quad (18)$$

lze chápat jako složky $GL(n)$ –invariantní kovariantní tenzorové hustoty váhy -1 a zároveň invariantní kontravariantní tenzorové hustoty váhy $+1$. Použijte definici determinantu matice.

Pravidla pro počítání s Levi–Civitovými symboly lze nalézt v [1], dodatek D3.

1.3 * Orientace prostoru, pseudovektory, pseudotenzory, vektorový součin

Další zobecnění vektorů a tenzorů, které je ve fyzice zapotřebí, jsou pseudovektory, případně pseudotenzory a pseudoskaláry. Příkladem je moment hybnosti, moment síly nebo magnetická indukce. Jsou to veličiny, jejichž směr závisí na orientaci vektorového prostoru (vybereme-li pravidlo pravé či levé ruky).

Orientaci vektorového prostoru lze zavést například následujícím způsobem: Řekneme, že dvě baze vektorového prostoru \mathbf{E} jsou souhlasně orientované pokud determinant matice přechodu mezi nimi je kladný a opačně orientované pokud je záporný. Množinu všech bazí \mathbf{E} tak lze rozdělit na dvě poloviny – třídy ekvivalence. Orientaci prostoru pak definujeme jako výběr jedné z těchto tříd. Formálnější je

Definice 1.3.1 *Nechť \mathbf{E} je vektorový prostor se skalárním součinem. Orientací n -rozměrného vektorového prostoru \mathbf{E} nazveme multilineární, totálně antisymetrické zobrazení*

$$\omega : \mathbf{E} \times \dots \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$$

takové, že existuje ortonormální baza $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, ve které $\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$. Smíšeným součinem vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ nazveme $\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Definice 1.3.2 *Baze⁸ $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ v prostoru s orientací ω se nazývá pozitivně (negativně)⁹ orientovaná, pokud $\omega(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n) > 0$, (< 0).*

Ortonormální baza $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ v definici 1.3.1 je tedy pozitivně orientovaná. Pokud $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-1}, \mathbf{f}_n)$ je pozitivně orientovaná, pak díky multilinearitě a antisymetrii ω jsou

⁸ne nutně ortonormální

⁹Někdy se používá termín souhlasně (nesouhlasně) orientovaná

$(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-1}, -\mathbf{f}_n)$ a $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_{n-1})$ negativně orientované. V prostoru \mathbb{R}^n se zavádí standardní orientace obvykle tak, že baze

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_n := (0, 0, \dots, 0, 1)$$

je pozitivně orientovaná.

Z výše uvedených definic plyne, že složky orientace v ortonormální pozitivně orientované bazi jsou totálně antisymetrické Levi–Civitovy symboly $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n}$.

Cvičení 14 Napište $\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ve složkách vektorů \mathbf{v}_j v ortonormální bazi

Cvičení 15 Ukažte, že $|\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$ je obsah rovnoběžníka s hranami \mathbf{a}, \mathbf{b} a $|\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ je objem rovnoběžnostěnu s hranami $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Veličiny označované předponou **pseudo-** se při změnách baze transformují stejně jako původní veličiny, ale při změně orientace prostoru $\omega \rightarrow -\omega$ mění znaménko. **Pseudovektorem** (axiálním vektorem) je například vektorový součin dvou vektorů tedy také moment hybnosti či moment síly.

Tvrzení 1.1 Nechť na n -rozměrném vektorovém prostoru je zadán skalární součin a orientace. Pak pro každou uspořádanou $(n-1)$ -tici vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ existuje právě jeden pseudovektor $\mathbf{A}_\omega \in \mathbf{E}$ takový, že

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{E} \quad \omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}_\omega \cdot \mathbf{u}.$$

Pseudovektor \mathbf{A}_ω se nazývá **vektorovým součinem** vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$. Někdy se používá značení $\mathbf{A}_\omega = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]_\omega$. V třírozměrném vektorovém prostoru $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_\omega \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b}, \mathbf{c}]_\omega$. Všimněte si, že při změně orientace prostoru vektorový součin (tak jako každý pseudovektor) změnil znaménko $\mathbf{A}_\omega = -\mathbf{A}_{-\omega}$. Podobně jsou definovány i pseudotensory \mathbf{T}_ω a pseudo skaláry \mathbf{S}_ω tak, že pro ně platí

$$\mathbf{T}_\omega = -\mathbf{T}_{-\omega}, \quad \mathbf{S}_\omega = -\mathbf{S}_{-\omega}, \quad (19)$$

Cvičení 16 Ukažte že v ortonormální pozitivně orientované bazi platí pro vektorový součin vzorec $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \varepsilon_{ijk} a^i b^j \mathbf{e}_k$. Změní se vzorec v negativně orientované bazi?

Cvičení 17 Rozeberte transformační vlastnosti jednotlivých veličin vystupujících v Lorentzově síle působící na nabitou částici v elektromagnetickém poli.

Cvičení 18 *Spočítejte souřadnice vektorových součinů $[\mathbf{a}]$ ve V_2 a $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ ve V_4 .

Inverse os: $\tilde{\mathbf{f}}_j = P\mathbf{f}_j := -\mathbf{f}_j$, $j = 1, \dots, n$ mění (nemění) orientaci baze pokud $\dim \mathbf{E}$ je lichá (sudá).

Cvičení 19 Napište jak se změnil složky vektoru \mathbf{V} , pseudovektoru \mathbf{A}_ω , tensorů \mathbf{T} , pseudotensorů \mathbf{T}_ω a tensorových hustot při inverzi os.

1.4 * Orientace ve fyzice (P. Novotný)

Zatímco v matematice je situace poměrně jasná, dochází ve většině fyzikální literatury k zmatkům ohledně orientace, transformací a pseudovektorů. Zdůrazněme, že jsme klasifikovali výše uvedené matematické objekty vzhledem k jejich chování při změně baze v \mathbf{E} tedy při takzvaných **pasivních transformacích**. Pasivní transformace odpovídají ve fyzice přechodům mezi vztažnými soustavami a proto i fyzikální veličiny klasifikujeme podle jejich chování při pasivních transformacích.

Ačkoli se na první pohled může zdát, že pasivní transformace jsou jen obrácené aktivní transformace (místo pootočení soustavy souřadnic otočíme vektory opačným směrem a dostaneme "totéž"), není tomu tak. Je mezi nimi podstatný rozdíl. Aktivní transformace mění fyzikální objekty zatímco pasivní transformace mění pouze jejich popis. Při vlastních ortogonálních transformacích (rotace) není tento rozdíl příliš vidět. Uvažujme ale například aktivní transformaci $\mathbf{a}' = \mathbf{P}(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}$ inverzi v třírozměrném prostoru. Tato z vektoru \mathbf{a} vyrobí nový vektor \mathbf{a}' který je opačný k původnímu \mathbf{a} . Jak se bude transformovat veličina která je definována jako vektorový součin dvou vektorů $\mathbf{c} := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$? Vektorový součin transformovaných vektorů bude $\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \mathbf{P}(\mathbf{a}) \times \mathbf{P}(\mathbf{b}) = (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, což je zřejmě různé od $P(\mathbf{c}) = -\mathbf{c}$. Veličina \mathbf{c} se tedy při této aktivní transformaci netransformuje jako vektor nýbrž $P(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$, zůstává beze změny.

Uvažujme nyní transformaci P jakožto pasivní transformaci tj. přechod od baze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ k bazi $(-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3)$. Vektory se při této "inverzi os" nemění, ale jejich složky se transformují podle $\tilde{a}^i = P(a^i) = -a^i$. Jak se nyní budou transformovat složky veličiny definované jako vektorový součin $\mathbf{c} := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$? Vyjdeme z definice. Nechť například baze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je pozitivně orientovaná ortonormální. Pak dostaneme

$$c^i = \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_i = \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_i) = \omega(a^j \mathbf{e}_j, b^k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) = a^j b^k \omega(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) = \varepsilon_{jki} a^j b^k.$$

Zatímco pro negativně orientovanou baze $(-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3)$ máme

$$\tilde{c}^i = \mathbf{c} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i = \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \tilde{\mathbf{e}}_i) = \omega(\tilde{a}^j \tilde{\mathbf{e}}_j, \tilde{b}^k \tilde{\mathbf{e}}_k, \tilde{\mathbf{e}}_i) = \tilde{a}^j \tilde{b}^k \omega(\tilde{\mathbf{e}}_j, \tilde{\mathbf{e}}_k, \tilde{\mathbf{e}}_i) = -\varepsilon_{jki} \tilde{a}^j \tilde{b}^k.$$

Tedy

$$\tilde{c}^i = -\varepsilon_{jki} \tilde{a}^j \tilde{b}^k = -\varepsilon_{jki} (-a^j) (-b^k) = -\varepsilon_{jki} a^j b^k = -c^i = P(c^i)$$

a složky vektorového součinu se transformují stejně jako složky vektoru.

Většina fyzikálních dějů které budeme popisovat se odehrává v třírozměrném eukleidovském prostoru. Zde bývá ve fyzice zvykem zavádět tzv. pravotočivé a levotočivé kartézské souřadné systémy. Pravotočivé jsou ty kde třetí bazický vektor dostaneme jako vektorový součin prvního a druhého přičemž použijeme pravidlo pravé ruky (či jakékoliv jiné). Levotočivé pak ty s opačně orientovanou bází. Použití pravidlo pravé ruky představuje volbu orientace prostoru. Fyzikální prostor je

třeba orientovat pomocí reálných fyzikálních předmětů jako například pravotočivý šroub, pravá ruka nebo vybrané *pořadí* předmětů (hvězd, rohů místnosti, ...), ke kterým směřují prvky baze.

Problém je ale v tom, že většina fyziků nerozlišuje orientaci baze od orientace prostoru. A tedy prostor automaticky orientuje tak že jejich baze má vždy pozitivní orientaci. Tj. **pravotočivá soustava** znamená pravotočivou bazi a pravotočivý prostor (pravidlo pravé ruky) a **levotočivá soustava** levotočivou bazi a levotočivý prostor (pravidlo levé ruky). Přejít mezi těmito dvěma soustavami (či spíše modely) pak není pouhá inverze os, ale inverze os spojená se změnou orientace prostoru! A je to *změna orientace prostoru* díky níž pseudovektory (úhlová rychlost, moment hybnosti nebo magnetická indukce) při přechodu od pravotočivé soustavy k levotočivé na rozdíl od vektorů mění svůj směr – jsou totiž pokaždé určeny podle jiného pravidla. Stejně tak vektorový součin, jelikož je závislý na orientaci prostoru, je v těchto pravotočivých a levotočivých soustavách (byť počítaný pomocí stejného vzorce $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k$) opačný. Vzhledem k tomu, že při přechodu od pravotočivé soustavy k levotočivé změní směr jak pseudovektory tak prvky baze, souřadnice pseudovektoru se při této transformaci (na rozdíl od pouhé inverze os) nezmění.

2 Newtonova mechanika hmotných bodů

První Newtonův zákon (formulovaný již Galileem) říká, že *těleso* (v našem pojetí hmotný bod) *se pohybuje rovnoměrně přímočaře* (což zahrnuje i klidový stav), *pokud na něj nepůsobí vtištěné síly*. Toto tvrzení potřebuje opět vyjasnit použité pojmy.

Vtištěnými silami myslíme síly nesetřvačné, jejichž původ je v okolním prostředí, například gravitace, elektromagnetické síly, tření, atd. Rovnoměrný přímočarý pohyb je možno charakterizovat jako časový vývoj poloh hmotného bodu, jehož kartézské (nebo aspoň přímočaré) souřadnice jsou lineárními funkcemi času. Pokud ale ztotožníme počátek souřadnic s pohybujícím se bodem, pak z definice souřadnic (3) plyne $x^i(b(t)) = 0$, což je lineární funkce pro jakýkoliv pohyb. Znamená to, že *pro formulaci pohybových zákonů je důležitý výběr vztažné soustavy*, tedy

1. výběr bodu ve fyzikálním prostoru, který hraje roli počátku souřadnic v afinním prostoru E
2. výběr směrů, které hrají roli baze v přidruženém vektorovém prostoru \mathbf{E} .

Tyto výběry nejsou a priori nijak dány a navíc se v průběhu času mohou měnit. Je třeba tedy určit, které vztažné soustavy jsou pro formulaci zákonů mechaniky význačné a poté určit, jak budou tyto zákony vypadat v ostatních vztažných soustavách. Ukazuje se, že význačnými vztažnými soustavami jsou tak zvané soustavy inerciální, ve kterých platí první Newtonův zákon - zákon setrvačnosti (inercia).

2.1 Inerciální vztažné soustavy, druhý Newtonův zákon

Jak je uvedeno na počátku této kapitoly, inerciálnost vztažné soustavy souvisí s pojmem (absence) vtištěné síly, neboli pojmem **bezsilového bodu**. Bezsilové hmotné body, které se podle 1. Newtonova zákona pohybují rovnoměrně přímočaře, by mohly sloužit jako referenční body pro konstrukci **inerciální** vztažné soustavy, vzhledem ke které by bylo možné studovat pohyb ostatních těles. Existence takových hmotných bodů je však velmi problematická, neboť na každý hmotný bod působí gravitace ostatních bodů a on je zároveň zdrojem gravitace pro ostatní body. Nicméně pokud se elektricky neutrální hmotné body pohybují v dostatečně velké vzdálenosti od ostatních těles, můžeme je s jistou přesností považovat za bezsilové a použít ke konstrukci vztažných soustav jejichž inerciálnost je dostatečná.

Za takové hmotné body můžeme považovat například hvězdy, takže téměř dokonale inerciální je systém, jehož počátek je ve středu Slunce a jehož osový trojhran je v klidu vůči okolním hvězdám (viz[7], kap.I.4). Pro mnoho úloh (typicky takových, kde studovaný pohyb trvá několik sekund či minut, t.j. $t \ll 24$ hodin) se ukazuje dostatečné považovat za inerciální soustavu spojenou se Zemí nebo místností ve které se provádí mechanické experimenty. Jejich neinercálnost se projeví

až po delším čase (např. Foucaultovo kyvadlo). Alternativou hledání inerciální soustavy je možnost "napřímít dráhy" hmotných bodů odečtením vlivu gravitačních a setrvačných sil, což souvisí s principy Obecné teorie relativity a zachází daleko za cíle tohoto textu.

Otázka: *Je kosmická loď na oběžné dráze kolem Země, vůči které se předměty pohybují rovnoměrně přímočaře, inerciální soustavou?*

Obecně se dá říci, že 1. Newtonův zákon – zákon setrvačnosti definuje vlastnosti inerciálních vztažných systémů a jejich souřadnice činí *fyzikálně privilegovanými pro formulaci 2. Newtonova zákona ve tvaru (2)*, který existenci inerciální soustavy a kartézských souřadnic předpokládá.

Je snadné ukázat, že inerciální soustava souřadnic není určena jednoznačně. Inerciálnost vztažné soustavy dané počátkem o a ortonormální bází $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je definována tak, že kartézské souřadnice¹⁰ bezsilových bodů $x_j(t) \equiv x_j(b(t))$ splňují rovnice

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2}(t) = 0. \quad (20)$$

Pokusme se zjistit, jaké transformace souřadnic vztažné soustavy nezmění její inerciálnost. Provedeme-li na čase závislý přechod k jiné kartézské soustavě souřadnic dané počátkem $\tilde{o} = \tilde{o}(t)$ a bází $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$, kde $\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j S_{ji}(t)$, $S(t) \in O(3)$, pak podle transformačního vzorce

$$\tilde{x}_i(b) = S_{ji}(x_j(b) - x_j(\tilde{o})), \quad (21)$$

který je inverzí vzorce (5) pro $S^{-1} = S^T$, dostáváme

$$\frac{d^2 \tilde{x}_i}{dt^2}(t) \equiv \ddot{\tilde{x}}_i = \ddot{S}_{ji}(x_j - \tilde{o}_j) + 2\dot{S}_{ji}(\dot{x}_j - \dot{\tilde{o}}_j) + S_{ji}(\ddot{x}_j - \ddot{\tilde{o}}_j), \quad (22)$$

kde $x_j(t) := x_j(b(t))$ a $\tilde{o}_j(t) := x_j(\tilde{o}(t))$. Pokud $\tilde{x}_i(t) := \tilde{x}_i(b(t))$ mají být opět kartézské souřadnice bezsilových bodů v inerciální soustavě, tedy

$$(\ddot{x}_i = 0 \Rightarrow \ddot{\tilde{x}}_i = 0) \Leftrightarrow (\forall v_i, x_i^0, x_i(t) = v_i t + x_i^0 \Rightarrow \tilde{x}_i(t) = \tilde{v}_i t + \tilde{x}_i^0)$$

musí $\dot{S}_{ji} = 0$ a $\ddot{\tilde{o}}_j = \frac{d^2 x_j}{dt^2}(\tilde{o}(t)) = 0$. Počátek nové inerciální soustavy \tilde{o} se tedy musí vůči počátku původní inerciální soustavy o pohybovat rovnoměrně přímočaře

$$\tilde{o}(t) = o + \mathbf{V}t + \mathbf{x}^0$$

a ortogonální transformace bází $\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j S_{ji}$ je v čase konstantní.

Vidíme tedy, že *vztažná soustava, jejíž počátek se vůči inerciální soustavě pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \mathbf{V} a vektory její baze se vůči původní bazi*

¹⁰Vzhledem k tomu že nadále budeme používat téměř výhradně ortogonální transformace, které nerozlišují mezi kovariantními a kontravariantními tensory a vektory, budeme nadále psát všechny indexy dole

neotáčí, je opět inerciální. Vztah mezi kartézskými souřadnicemi obou inerciálních soustav x_i a \tilde{x}_i je dán vzorcem

$$\tilde{x}_i(b) = S_{ji}(x_j(b) - V_j t - x_j^0). \quad (23)$$

Tyto transformace souřadnic, jejichž parametry jsou $(S, \vec{V}, \vec{x}_0) \in O(3) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, se nazývají transformacemi Galileiho. Množina Galileiho transformací je opět grupa vůči skládání.

Cvičení 20 Napište pravidlo pro skládání Galileiho transformací (grupový součin (S, \vec{V}, \vec{x}_0) a $(S', \vec{V}', \vec{x}'_0)$), t.j. $(S'', \vec{V}'', \vec{x}''_0)$ jako funkci $(S', \vec{V}', \vec{x}'_0)$ a (S, \vec{V}, \vec{x}_0) .

Koncem 19. a začátkem 20. století se ukázalo, že vzorec (23) pro transformaci souřadnic bodů prostoru je ve sporu s experimentálně prokázanou konstantní a konečnou rychlostí světla a je nutno jej modifikovat. To vedlo k tzv. Lorentzovým, neboli relativistickým transformacím. Vzorec (23) je však plně postačující pro vztažné soustavy, které se vůči sobě pohybují rychlostmi malými ve srovnání s rychlostí světla.

Toto poněkud obtížné zavedení inerciálních soustav je důležité, neboť 2. Newtonův zákon pro pohyb hmotného bodu pod vlivem vtištěných sil ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(m(t) \frac{dx_j}{dt}(t) \right) = F_j(\vec{x}(t)), \quad j = 1, 2, 3, \quad (24)$$

kde $m(t)$ je okamžitá hmotnost hmotného bodu,

$$\vec{x}(t) \equiv (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) := (x_1(b(t)), x_2(b(t)), x_3(b(t)))$$

a $F_j(\vec{x})$ jsou složky vektorového pole vtištěných sil, *platí pouze pro kartézské nebo přímočaré souřadnice v inerciální soustavě*. Pro obecné (například sférické) souřadnice je třeba použít Lagrangeovu formulaci mechaniky, kterou se budeme zabývat v kapitole 4.

Je dobré si uvědomit, že při Galileiho transformacích (S, \vec{V}, \vec{x}_0) se kartézské složky rychlostí v_i hmotných bodů (a tím pádem i hybností) netransformují jako složky vektorů, ale kvůli vzájemně se pohybujícím počátkům vztažných soustav pro ně díky (23) platí složitější vztahy (porovnej s (21))

$$\tilde{v}_i = S_{ji}(v_j - V_j), \quad \tilde{p}_i = S_{ji}(p_j - mV_j). \quad (25)$$

Pro složky momentů hybnosti $L_i := \varepsilon_{ijk} x_j p_k$ pak dostáváme poměrně složitý transformační vťah

$$\tilde{L}_i = S_{ji} \left[L_j - m(\vec{x} \times \vec{V})_j - t(\vec{V} \times \vec{p})_j - (\vec{x}_0 \times \vec{p})_j + m(\vec{x}_0 \times \vec{V})_j \right]. \quad (26)$$

2.2 Druhý Newtonův zákon v neinerciální soustavě

Jak už bylo řečeno, 2. Newtonův zákon ve tvaru (24) platí v inerciální vztažné soustavě. Nicméně zahrnutím takzvaných zdánlivých sil je možno jej formulovat i v kartézských (nebo přímočarých¹¹) souřadnicích soustavy neinerciální.

Předpokládejme, že (o, \mathbf{e}) je *inerciální* vztažná soustava, ve které se kartézské souřadnice hmotného bodu vyvíjejí podle (24). Přejít ke kartézským souřadnicím téhož hmotného bodu v soustavě $(\tilde{o}(t), \tilde{\mathbf{e}}(t))$, která se vůči (o, \mathbf{e}) pohybuje a je *neinerciální*, je dán transformací (21), kde $S = S(t) \in SO(3)$. Souřadnice pohybujícího se bodu b lze tedy zapsat ve tvaru

$$\tilde{x}_i(b(t)) = S_{ji}(t)[x_j(b(t)) - x_j(\tilde{o}(t))] \quad (27)$$

Použitím tohoto vztahu a jeho inverze dostaneme vyjádření složek zrychlení bodu b v neinerciální soustavě $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ ve tvaru

$$\ddot{\tilde{x}}_i(b(t)) = S_{ji} \left[\ddot{x}_j(b(t)) - 2\dot{S}_{jk}\dot{\tilde{x}}_k(b(t)) - \ddot{S}_{jk}\tilde{x}_k(b(t)) - \ddot{x}_j(\tilde{o}(t)) \right]. \quad (28)$$

Cvičení 21 *Dokažte vztah (28).*

První člen na pravé straně $S_{ji}\ddot{x}_j(b)$ je podle 2. Newtonova zákona (pro $\dot{m} = 0$) a díky (14) úměrný kartézským souřadnicím vtištěných sil v bodě $b(t)$ vyčíslených v soustavě $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$.

$$S_{ji}(t) m \ddot{x}_j(b(t)) = S_{ji}(t) F_j(\vec{x}(b(t))) = \tilde{F}_i(\vec{x}(b(t))) \equiv \tilde{F}_i(\vec{x}(t)),$$

kde v druhém rovnítku jsme použili předpis pro transformaci složek síly jako vektorového pole. Znamená to, že 2. Newtonův zákon zapsaný v kartézských souřadnicích neinerciální soustavy má (pro $\dot{m} = 0$) tvar

$$m \frac{d^2 \tilde{x}_i}{dt^2}(t) = \tilde{F}_i(\vec{x}(t), t) + \tilde{Z}_i(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t), \quad j = 1, 2, 3, \quad (29)$$

kde

$$\tilde{Z}_i(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) := -m S_{ji} \left[2\dot{S}_{jk}\dot{\tilde{x}}_k(b(t)) + \ddot{S}_{jk}\tilde{x}_k(b(t)) + \ddot{x}_j(\tilde{o}(t)) \right] \quad (30)$$

jsou složky takzvaných **zdánlivých sil**, které vznikají vlivem neinerciálnosti soustavy $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$. Zavedeme-li "matici úhlové rychlosti otáčení soustavy $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ okolo (o, \mathbf{e}) " předpisem

$$\tilde{\omega}_{ik} := -(S^T \dot{S})_{ik} = -\tilde{\omega}_{ki} \quad (31)$$

¹¹Použití přímočarých nekartézských souřadnic ale nepřináší většinou žádnou početní výhodu, proto se téměř nepoužívá

dostaneme zdánlivé síly ve tvaru

$$\tilde{Z}_i(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = m \left[2\tilde{\omega}_{ik}\dot{x}_k(b(t)) - (\tilde{\omega}^2)_{ik}\tilde{x}_k(b(t)) + \dot{\tilde{\omega}}_{ik}\tilde{x}_k(b(t)) - S_{ki}\ddot{x}_k(\tilde{o}(t)) \right], \quad (32)$$

a volbou¹² $\tilde{\omega}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\tilde{\Omega}_k$ t.j. $\vec{\tilde{\Omega}} := (\tilde{\omega}_{23}, \tilde{\omega}_{31}, \tilde{\omega}_{12})$ lze ukázat, že první, druhý a třetí člen jsou síly Coriolisova, odstředivá a Eulerova, takže *druhý Newtonův zákon v kartézských souřadnicích libovolné neinerciální soustavy* má tvar¹³

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) + 2m\dot{\vec{x}} \times \vec{\tilde{\Omega}} + m\vec{\tilde{\Omega}} \times (\vec{x} \times \vec{\tilde{\Omega}}) + m\vec{x} \times \dot{\vec{\tilde{\Omega}}} - m\vec{a}_{\tilde{o}}, \quad (33)$$

kde $\vec{\tilde{\Omega}}(t)$ jsou složky pseudovektoru $\mathbf{\Omega}(t)$ okamžité úhlové rychlosti otáčení neinerciální soustavy $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ okolo \tilde{o} v bazi $\tilde{\mathbf{e}}(!)$ (viz cvičení 24) a poslední člen $\vec{a}_{\tilde{o}}(t)$ je tzv. unášivé zrychlení plynoucí z případného nerovnoměrného pohybu počátku \tilde{o} neinerciální soustavy $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ vůči inerciální (o, \mathbf{e}) .

Cvícení 22 *Nechť*

$$S = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) & 0 \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jaké odpovídá transformaci? Spočítejte $\vec{\tilde{\Omega}}(t)$.

Cvícení 23 *Ukažte, že pro libovolné $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$*

$$(S^T \dot{S})_{ij}y_j = -\tilde{\omega}_{ij}y_j = (\vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{y})_i, \quad (\tilde{\omega}^2)_{ik}y_k = (\vec{\tilde{\Omega}} \times (\vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{y}))_i.$$

Cvícení 24 *Ukažte, že $\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_i = -\tilde{\mathbf{e}}_j\tilde{\omega}_{ji}$ a pro složky vektoru $\mathbf{Y}(t) = Y_i(t)\mathbf{e}_i = \tilde{Y}_j(t)\tilde{\mathbf{e}}_j(t)$ platí $\frac{d}{dt}\vec{Y} = \frac{d}{dt}(\vec{Y}) \cdot S - \vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{Y}$.*

2.3 Soustava hmotných bodů, třetí Newtonův zákon

Pro soustavu N hmotných bodů b_α , $\alpha = 1, \dots, N$, které mezi sebou nemají žádné předem dané vazby, platí v inerciální soustavě 2. Newtonův zákon opět ve tvaru

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}(t)) = \vec{F}(\vec{X}(t)), \quad (34)$$

kde

$$\vec{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (x_1, \dots, x_{3N}),$$

¹²Zde předpokládáme, že base $\tilde{\mathbf{e}}$ je souhlasně orientována s orientací určující směr vektorového součinu. V případě nesouhlasně orientované base by se změnilo znaménko složek pseudovektoru $\mathbf{\Omega}$.

¹³Pro přehlednost zde vynecháváme vlnky, takže všechny vektory \vec{Y} , představují souřadnice vektoru \mathbf{Y} v neinerciální kartézské soustavě.

\vec{x}_α jsou kartézské souřadnice bodů b_α , $\alpha = 1, \dots, N$,

$$\vec{P} = (\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) = (p_1, \dots, p_{3N}),$$

\vec{p}_α jsou kartézské složky vektorů hybnosti bodu b_α , $\vec{p}_\alpha(t) := m_\alpha(t) \frac{d\vec{x}_\alpha}{dt}(t)$ a

$$\vec{F}(\vec{X}) = (\vec{F}_1(\vec{X}), \dots, \vec{F}_N(\vec{X})) = (F_1(\vec{X}), \dots, F_{3N}(\vec{X})),$$

$\vec{F}_\alpha(\vec{X})$ jsou složky sil působící na jednotlivé body, takže 2. Newtonův zákon představuje soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{d}{dt} \left(m_j(t) \frac{dx_j}{dt}(t) \right) = F_j(\vec{X}(t)), \quad j = 1, \dots, 3N. \quad (35)$$

Pokud neplatí, že $\vec{F}_\alpha(\vec{X}, t) = \vec{F}_\alpha(\vec{x}_\alpha, t)$, (to znamená že síla působící na bod b_α závisí i na poloze ostatních bodů, t.j. body vzájemně interagují), pak z matematického hlediska se jedná o velmi těžkou úlohu, kterou lze obecně řešit pouze pro dva hmotné body (tělesa) splňující 3. Newtonův zákon v jeho silné verzi (37) – úloha dvou těles, viz kapitolu 6.3. Nicméně i pro složitější systémy lze získat některé dílčí výsledky díky třetímu Newtonovu zákonu.

Třetí Newtonův zákon (akce a reakce) má dvě verze, silnou a slabou. Slabá verze tvrdí¹⁴, že síla, $\vec{F}_{\beta\alpha}$ kterou hmotný bod b_α působí na hmotný bod b_β má stejnou velikost ale opačný směr než síla, $\vec{F}_{\alpha\beta}$ kterou hmotný bod b_β působí na hmotný bod b_α

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{F}_{\beta\alpha}. \quad (36)$$

Ve své silné verzi zákon říká, že síly navíc směřují ve směru spojnice poloh hmotných bodů

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = (\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) f_{\alpha\beta}(|\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta|) = (\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}), \quad (37)$$

kde $f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}$. To je splněno například pro hmotná tělesa, která na sebe vzájemně působí gravitační silou. Ukážeme důsledky 3. Newtonova zákona pro soustavu hmotných bodů.

¹⁴Ve skutečnosti 3. Newtonův zákon nemusí platit ani ve své slabé verzi a je třeba jej v každém konkrétním případě ověřovat. Máme-li, například dvě smyčky drátu, ve kterých proudí stacionární elektrické proudy j_1 a j_2 , pak segment \vec{ds}_1 (analog hmotného bodu) v bodě \vec{r}_1 vytváří v bodě \vec{r}_2 magnetické pole $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} j_1 \vec{ds}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) / |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3$ a síla, kterou působí na segment \vec{ds}_2 v bodě \vec{r}_2 je

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} j_1 j_2 \frac{\vec{ds}_2 \times [\vec{ds}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3},$$

takže

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j_1 j_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \left[\vec{ds}_1 (\vec{ds}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) - \vec{ds}_2 (\vec{ds}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) \right],$$

což není nutně nula. Na druhé straně po vyintegrování přes obě dvě smyčky se síly vyruší.

Zabývejme se napřed tzv. izolovanou soustavou, čímž rozumíme soubor N hmotných bodů které na sebe působí navzájem, ale z vnějšku na ně nepůsobí žádná vtištěná síla (poměrně dobře je tímto způsobem popsána např. sluneční soustava se všemi planetami, měsíci a Sluncem). Pro kartézské souřadnice hybnosti α -tého bodu pak platí

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_\alpha(t) = \frac{d}{dt} \left(m_\alpha(t) \frac{d}{dt} \vec{x}_\alpha(t) \right) = \vec{F}_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^N \vec{F}_{\alpha\beta} \quad (38)$$

Platí-li zákon akce a reakce aspoň ve své slabé formě, pak

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \vec{F}_{\alpha\beta} = 0, \Rightarrow \vec{P}(t) := \sum_{\alpha=1}^N \vec{p}_\alpha(t) = \vec{P} = \text{const}(t), \quad (39)$$

takže celková hybnost soustavy se zachovává. Odtud okamžitě plyne, že *hmotný střed* (těžiště) izolované soustavy hmotných bodů, jejichž hmotnosti jsou v čase konstantní

$$\vec{R}(t) := \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{x}_\alpha(t), \quad M := \sum_{\beta=1}^N m_\beta \quad (40)$$

se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \vec{P}/M . Je pak snadné ukázat, že v tom případě lze najít inerciální soustavu $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ ve které složky celkové hybnosti vymizí. Stačí totiž provést Galileovu transformaci (23), kde $\vec{V} = \vec{P}/M$. Tato Galileova transformace je určena až na ortogonální transformaci S a konstantní vektor \vec{x}_0 . Ten se obvykle volí tak, že počátek inerciální vztahné soustavy $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ je v hmotném středu soustavy hmotných bodů. Tato vztahná soustava se nazývá *soustavou hmotného středu*.

Není-li soustava izolovaná, t.j. na každý bod soustavy působí navíc vnější síla $\vec{F}_\alpha^{(e)}(\vec{x}_\alpha)$, pak pro celkovou hybnost izolované soustavy platí První věta impulsová:

$$\frac{d}{dt} \vec{P}(t) = \vec{F}^{(e)}(t) := \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha^{(e)}(\vec{x}_\alpha(t)), \quad (41)$$

tedy časová změna celkové hybnosti je rovna celkové vnější síle, která na soustavu působí, t.j. součtu vnějších sil působících na jednotlivé body. Soustava hmotného středu v tomto případě není inerciální.

Podobná tvrzení, můžeme odvodit i pro moment hybnosti (impulsmoment) soustavy. Sečteme-li momenty hybnosti všech bodů soustavy

$$\vec{L} := \sum_{\alpha=1}^N \vec{L}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \vec{x}_\alpha \times \vec{p}_\alpha, \quad (42)$$

pak z 2. Newtonova zákona dostáváme

$$\dot{\vec{L}} := \sum_{\alpha=1}^N \dot{\vec{L}}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{x}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\alpha,\beta=1}^N \vec{x}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta} \quad (43)$$

Platí-li zákon akce a reakce ve své silné formě, pak

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^N \vec{x}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^N \vec{x}_{\alpha} \times (\vec{x}_{\alpha} - \vec{x}_{\beta}) f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = 0, \quad f_{\alpha\beta}(r) = f_{\beta\alpha}(r)$$

a platí Druhá věta impulsová:

$$\frac{d}{dt} \vec{L}(t) = \vec{N}^{(e)}(t) := \sum_{\alpha} \vec{x}_{\alpha}(t) \times \vec{F}_{\alpha}^{(e)}(t), \quad (44)$$

tedy časová změna celkového momentu hybnosti je rovna celkovému momentu vnějších sil, které na soustavu působí. Při této příležitosti je dobré si uvědomit dvě věci:

1. Hodnota momentů hybnosti i momentů síly závisí na volbě počátku vztažné soustavy.
2. Přejdeme-li od inerciální soustavy (o, \mathbf{e}) k obecně neinerciální soustavě $(o'(t), \mathbf{e}')$, která se vůči inerciální pohybuje *pouze translačním pohybem*, t.j. $\mathbf{e}' = \mathbf{e}$, pak celkové hybnosti, momenty hybnosti a momenty sil se díky (5) transformují způsobem (viz příklad 1.5 v [1])

$$\vec{P}' = \vec{P} - M \dot{\vec{x}}(o'), \quad (45)$$

$$\vec{L}' = \vec{L} - \vec{x}(o') \times \vec{P} - M \vec{R} \times \dot{\vec{x}}(o') + M \vec{x}(o') \times \dot{\vec{x}}(o'), \quad (46)$$

$$\vec{N}'^{(e)} = \vec{N}^{(e)} - \dot{\vec{x}}(o') \times \vec{F}. \quad (47)$$

Vybereme-li navíc za počátek pohybující se vztažné soustavy hmotný střed soustavy hmotných bodů $o'(t) = R(t)$, pak

$$\vec{P}'(t) = 0, \quad \vec{L}' = \vec{L} - R \times \vec{P} \quad (48)$$

a 2. věta impulsová v této vztažné soustavě přejde na tvar

$$\frac{d}{dt} \vec{L}'(t) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{x}'_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{(e)}(\vec{x}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{x}'_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}'^{(e)}(\vec{x}'_{\alpha}) = \vec{N}'^{(e)}. \quad (49)$$

Připomeňme, že tyto vztahy platí v soustavě hmotného středu i když vnější síly jsou nenulové, čili tato soustava není inerciální.

2.4 Časová střední hodnota, věta o viriálu

Další poznatky o chování soustavy jako celku je možno získat z tzv. věty o viriálu. Nechť Z je libovolná funkce $2 \times 3N + 1$ proměnných představující nějakou fyzikální veličinu, $Z = Z(\vec{X}, \vec{V}, t)$, kde

$$\vec{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (x_1, \dots, x_{3N}), \quad \vec{V} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N) = (v_1, \dots, v_{3N}).$$

Ukazuje se že pro dlouhodobé průměrné hodnoty některých veličin $Z = Z(\vec{X}, \vec{V}, t)$ mohou platit vztahy, které v jednotlivých okamžicích platit nemusí.

Časovou střední hodnotou $\langle Z \rangle_{\bar{X}}$ **veličiny** Z **pro funkci** $\tilde{X} = \tilde{X}(t) = (\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_{3N}(t))$ nazveme

$$\langle Z \rangle_{\bar{X}} := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau Z \left(\tilde{X}(t), \frac{d}{dt} \tilde{X}(t), t \right) dt \quad (50)$$

Nás budou zajímat časové střední hodnoty pro souřadnice pohybujících se hmotných bodů. Pro ně platí

Věta 2.1 *Nechť T je kinetická energie soustavy $T = T(\vec{V}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{v}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i v_i^2$ a všechny síly v ní působící jsou potenciálové $\vec{F}(\vec{X}) = -\text{grad} U(\vec{X})$. Nechť U je homogenní funkcí x_i stupně k , t.j. $U(\lambda \vec{X}) = \lambda^k U(\vec{X})$.*

Pak pro libovolné řešení \tilde{X} Newtonových pohybových rovnic, které spolu s první derivací nenabývají nekonečných hodnot platí

$$\langle T \rangle_{\bar{X}} = \frac{k}{2} \langle U \rangle_{\bar{X}} \quad (51)$$

Důkaz (viz též [1], kap.2.5) je založen na faktu, že kinetickou energii můžeme pro libovolné řešení pohybových rovnic zapsat pomocí časové derivace **virialu** $G = \vec{P} \cdot \vec{X} = \sum_{i=1}^{3N} m_i v_i x_i$.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{\tilde{x}}_i \dot{\tilde{x}}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{\tilde{x}}_i \tilde{x}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{\tilde{x}}_i \tilde{x}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} G - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} F_i \tilde{x}_i.$$

Zároveň

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \tilde{x}_i = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial \tilde{x}_i} \tilde{x}_i = -k U(\tilde{X}), \quad (52)$$

tedy

$$\langle T \rangle_{\bar{X}} - \frac{k}{2} \langle U \rangle_{\bar{X}} = \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau}.$$

Pokud $\tilde{x}_i, \dot{\tilde{x}}_i$ jsou omezené, pak pravá strana je rovna nule, z čehož plyne (51).

Cvičení 25 *Dokažte poslední rovnost v (52).*

Pokud $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, pak celková energie soustavy je $E = T + U$, a z věty o viriálu dostáváme podíly středních hodnot kinetické a potenciální energie na celkové.

$$\langle T \rangle_{\bar{x}} = \frac{k}{k+2} \langle E \rangle_{\bar{x}}, \quad \langle U \rangle_{\bar{x}} = \frac{2}{k+2} \langle E \rangle_{\bar{x}}. \quad (53)$$

3 Mechanika tuhého tělesa

Mechanika tuhého tělesa popisuje například pohyb kamene hozeného do vzduchu, změnu osy rotace Země, fyzikální kyvadlo nebo "setrvačníky" t.j. tělesa otáčející se okolo pevného bodu.

3.1 Popis pohybu a fyzikálních veličin

Tuhé těleso je možno aproximovat jako soustavu hmotných bodů b_α svázaných vazbami $|b_\alpha - b_\beta| = c_{\alpha\beta}$. Pro popis pohybu tuhého tělesa je výhodné zvolit vztažnou soustavu $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ pevně spojenou s tělesem vůči které jsou všechny body tuhého tělesa v klidu, t.j. $\frac{d}{dt}\vec{x}(b(t)) = 0$. Pohyb tuhého tělesa je pak určen pohybem této (obecně *neinerciální*) vztažné soustavy $(\tilde{o}(t), \tilde{\mathbf{e}}(t))$ vůči referenční *inerciální* soustavě (o, \mathbf{e}) .

Pro souřadnice každého bodu tuhého tělesa vzhledem k inerciální soustavě (o, \mathbf{e}) díky (6) platí

$$\vec{x}(b(t)) = S(t) \cdot \vec{x}(b(t)) + \vec{x}(\tilde{o}(t)), \quad (54)$$

z čehož plyne, že pohyb libovolného bodu uvnitř tělesa je dán pohybem (zatím libovolně zvoleného) počátku $\tilde{o}(t)$ a otáčením okolo něj vyjádřeným maticí $S(t)$. Rychlost tohoto bodu pak je

$$\dot{\vec{x}}(b) = \dot{S} \cdot \vec{x}(b) + \dot{\vec{x}}(\tilde{o}) = (\dot{S}S^T) \cdot [\vec{x}(b) - \vec{x}(\tilde{o})] + \dot{\vec{x}}(\tilde{o}). \quad (55)$$

Zavedeme-li, podobně jako v kapitole 2.2, pseudovektor $\vec{\Omega}(t)$ předpisem $\Omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{jk}$, kde ale $\omega_{jk} := (\dot{S}S^T)_{kj} = -\omega_{kj}$ (porovnej s (31)), pak Ω_i jsou opět složky okamžité úhlové rychlosti otáčení neinerciální soustavy $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ okolo \tilde{o} , avšak v bazi \mathbf{e} , tedy složky $\mathbf{\Omega}(t)$ vzhledem k nepohyblivé soustavě (o, \mathbf{e}) . Pro rychlosti bodů b_α tuhého tělesa v soustavě (o, \mathbf{e}) tedy platí

$$\dot{\vec{x}}(b_\alpha - \tilde{o}) = \vec{\Omega}(t) \times [\vec{x}(b_\alpha - \tilde{o})]. \quad (56)$$

Odtud je vidět, že okamžitá úhlová rychlost otáčení všech bodů tělesa okolo počátku soustavy \tilde{o} je stejná (což je víceméně zřejmé) a že dokonce nezávisí na výběru počátku.

Cvičení 26 Ukažte, že ω_{ij} a $\tilde{\omega}_{ij}$ jsou složky jednoho a téhož tensoru v různých bazích a $\vec{\Omega}$ a $\tilde{\vec{\Omega}}$ jsou složky jednoho a téhož (pseudo)vektoru v různých bazích, t.j.

$$\Omega_j(t)\mathbf{e}_j = \tilde{\Omega}_j(t)\tilde{\mathbf{e}}_j(t) = \mathbf{\Omega}(t).$$

Návod: Použijte vzorec pro transformaci bazí a definice $\vec{\Omega}(t)$ a $\tilde{\vec{\Omega}}(t)$.

Kvůli odvození pohybových rovnic tuhého tělesa rozložíme v každém čase t přechod mezi inerciální soustavou (o, \mathbf{e}) a neinerciální $(\tilde{o}(t), \tilde{\mathbf{e}}(t))$ na dva kroky – translaci a rotaci: přechod od (o, \mathbf{e}) k $(o', \mathbf{e}') = (\tilde{o}(t), \mathbf{e})$ a přechod od $(o', \mathbf{e}') = (\tilde{o}(t), \mathbf{e})$ k $(\tilde{o}(t), \tilde{\mathbf{e}}(t))$.

Složky momentu hybnosti \mathbf{L}_α bodu $b_\alpha(t)$ vzhledem k $o' = \tilde{o}(t)$ v soustavě (o', \mathbf{e}') pak díky (56) mají v každém čase t tvar

$$\vec{L}'_\alpha = m_\alpha \vec{x}(b_\alpha - \tilde{o}) \times \dot{\vec{x}}(b_\alpha - \tilde{o}) = m_\alpha \vec{q}_\alpha \times (\vec{\Omega} \times \vec{q}_\alpha), \quad (57)$$

kde

$$\vec{q}_\alpha := \vec{x}'(b_\alpha) = \vec{x}(b_\alpha - \tilde{o}).$$

Vzhledem k tomu, že \vec{q}_α , \vec{L}'_α i $\vec{\Omega}$ představují složky (pseudo)vektorů v bazi \mathbf{e} , složky téhož momentu hybnosti v neinerciální bazi $\tilde{\mathbf{e}}$ jsou

$$\vec{\tilde{L}}_\alpha = m_\alpha \vec{\tilde{q}}_\alpha \times (\vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{\tilde{q}}_\alpha), \quad (58)$$

kde

$$\vec{\tilde{q}}_\alpha = \vec{\tilde{x}}(b_\alpha).$$

Důležitá vlastnost souřadnic $\vec{\tilde{q}}_\alpha$ pohybujícího se bodu tělesa $b_\alpha(t)$ je, že (na rozdíl od souřadnic \vec{q}_α) nezávisí na čase, neboť soustava $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ je pevně spojená s tělesem. Vyjádříme-li složky pseudovektoru $\vec{\tilde{L}}_\alpha$ ve složkách $\vec{\tilde{\Omega}}, \vec{\tilde{q}}_\alpha$ dostaneme¹⁵

$$\tilde{L}_{\alpha,i} = m_\alpha \varepsilon_{ijk} \tilde{q}_{\alpha,j} \varepsilon_{klm} \tilde{\Omega}_l \tilde{q}_{\alpha,m} = \tilde{I}_{\alpha,il} \tilde{\Omega}_l, \quad (59)$$

kde

$$\tilde{I}_{\alpha,il} := m_\alpha \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \tilde{q}_{\alpha,j} \tilde{q}_{\alpha,m} = m_\alpha (\delta_{il} \vec{\tilde{q}}_\alpha \cdot \vec{\tilde{q}}_\alpha - \tilde{q}_{\alpha,i} \tilde{q}_{\alpha,l}) = \tilde{I}_{\alpha,li}. \quad (60)$$

jsou složky momentu setrvačnosti bodů b_α v soustavě $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ spojené s tělesem a z jejich definice je zřejmé, že v této soustavě rovněž nezávisí na čase.

V aproximaci tuhého tělesa soustavou hmotných bodů jsou *složky celkového momentu hybnosti vzhledem k bodu \tilde{o} v bazi $\tilde{\mathbf{e}}$* rovny součtu momentů všech bodů

$$\tilde{L}_i = \sum_\alpha \tilde{L}_{\alpha,i} = \tilde{\Omega}_l \sum_\alpha \tilde{I}_{\alpha,li} = \tilde{\Omega}_l \tilde{I}_{li}. \quad (61)$$

Přejdeme-li od diskrétní aproximace ke spojitému prostředí, pak z (60) a (61) plyne

$$\tilde{I}_{li} = \tilde{I}_{il} = \int_\tau \rho(\tilde{x}) (\delta_{il} \vec{\tilde{x}} \cdot \vec{\tilde{x}} - \tilde{x}_l \tilde{x}_i) d^3 \tilde{x}. \quad (62)$$

Tyto veličiny představují složky symetrického tensoru \mathbf{I} v bazi $\tilde{\mathbf{e}}$, který se nazývá moment setrvačnosti tělesa vzhledem k bodu \tilde{o} a převádí úhlovou rychlost otáčení

¹⁵ α číslují body tuhého tělesa i, j, k číslují složky (pseudo)vektorů v neinerciální soustavě.

tělesa na jeho moment hybnosti. V integrálu (61) $\rho(\tilde{x})$ představuje hustotu hmoty a \tilde{x} jsou souřadnice bodů uvnitř tělesa τ v soustavě pevně spojené s tělesem.

Vzhledem k tomu, že moment setrvačnosti je symetrický tensor, je možné vybrat bazi $\tilde{\mathbf{e}}$ tak, že mimodiagonální složky \tilde{I}_l , $l \neq i$ vymizí (diagonalizace symetrické formy) a diagonální složky můžeme označit $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$. Osy souřadné, které ukazují ve směru těchto $\tilde{\mathbf{e}}_i$ nazýváme *hlavní osy setrvačnosti tělesa*. Moment hybnosti tělesa, pak má složky

$$\vec{L} = (\tilde{I}_1\tilde{\Omega}_1, \tilde{I}_2\tilde{\Omega}_2, \tilde{I}_3\tilde{\Omega}_3). \quad (63)$$

Vyjádření momentu hybnosti ve tvaru (57) můžeme využít i k vyjádření kinetické energie otáčení bodu b_α okolo \tilde{o} .

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \frac{1}{2}m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha \cdot \dot{\vec{q}}_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha \left((\vec{\Omega} \times \vec{q}_\alpha) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{q}_\alpha) \right) = \\ &= \frac{1}{2}m_\alpha \left(\vec{q}_\alpha \times (\vec{\Omega} \times \vec{q}_\alpha) \right) \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{L}_\alpha \cdot \vec{\Omega}, \end{aligned} \quad (64)$$

kde jsme v třetím rovnítku použili cykličnost smíšeného součinu $(\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ pro $\vec{A} = \vec{q}_\alpha$, $\vec{B} = \vec{\Omega} \times \vec{q}_\alpha$, $\vec{C} = \vec{\Omega}$. Pro kinetickou energii otáčení tělesa okolo \tilde{o} pak dostáváme vzorec

$$T = \frac{1}{2}\vec{L} \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{L} \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2}(\tilde{I} \cdot \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2}\tilde{I}_i\tilde{\Omega}_i\tilde{\Omega}_i. \quad (65)$$

3.2 Pohybové rovnice tuhého tělesa, bezsilový setrvačnick

Zvolíme-li za počátek soustavy $(\tilde{o}(t), \tilde{\mathbf{e}}(t))$ hmotný střed tělesa $\tilde{o}(t) = R(t)$, pak pohyb tuhého tělesa je určen pohybem hmotného středu tělesa a otáčením okolo něj. Pohyb hmotného středu je dán první větou impulsovou

$$M \ddot{\vec{R}}(t) = \vec{F}^{(e)},$$

a rovnice pro otáčivý pohyb $S(t)$ vyplývají z druhé věty impulsové v soustavě hmotného středu (49)

$$\frac{d}{dt}\vec{L}' = \vec{N}'^{(e)}. \quad (66)$$

Připomeňme, že \vec{L}' jsou složky celkového momentu hybnosti tělesa v *obecně neinerciální soustavě* (o', \mathbf{e}') a $\vec{N}'^{(e)}$ je celkový moment vnějších sil, které na těleso působí.

Vzhledem k tomu, že složky momentu setrvačnosti je rozumné počítat vzhledem k soustavě $(\tilde{o}(t), \tilde{\mathbf{e}}(t))$ pevně spojené s tělesem, která se vůči (o', \mathbf{e}') otáčí, je vhodné přepsat i 2. větu impulsovou do této soustavy, ve které \tilde{I}_l nezávisí na čase. Z transformačních vlastností (pseudo)vektoru \mathbf{L} snadno odvodíme

$$\frac{d}{dt}\vec{L}' = \frac{d}{dt}(S \cdot \vec{L}) = \dot{S} \cdot \vec{L} + S \cdot \dot{\vec{L}} \quad (67)$$

a s využitím (31) a (66) odsud dostaneme 2. větu impulsovou v soustavě spojené s tělesem ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \vec{L} + \tilde{\Omega} \times \vec{L} = \vec{N}^{(e)}, \quad (68)$$

kde $\vec{N}^{(e)} = \vec{N}^{(e)}(t) = \vec{N}'^{(e)}(t) \cdot S(t)$.

Vyjádříme-li \vec{L} pomocí momentu setrvačnosti tělesa způsobem (61), obdržíme tzv. *Eulerovy setrvačnickové rovnice*

$$\tilde{I}_{il} \dot{\tilde{\Omega}}_l - \varepsilon_{ijk} \tilde{I}_{jm} \tilde{\Omega}_m \tilde{\Omega}_k = \tilde{N}_i^{(e)} \quad (69)$$

které určují časovou závislost rychlosti úhlové rotace $\mathbf{\Omega}(t)$ tělesa s momentem setrvačnosti \mathbf{I} . Eulerovy rovnice tedy nejsou nic jiného než druhá věta impulsová zapsaná v neinerciální soustavě tuhého tělesa a veličiny v nich vystupující jsou zapsány *ve složkách v soustavě pevně spojené s tělesem*, jejíž počátek je v hmotném středu tělesa. Pokud složky $\vec{N}'^{(e)}(t) \cdot S(t)$ momentu síly na pravé straně Eulerových rovnic jsou nenulové, jedná se o velmi složitou soustavu diferenciálních rovnic pro rotační matici $S(t)$, která vystupuje jak ve složkách $\tilde{\Omega}_j$ úhlové rychlosti, tak ve složkách momentu vnější síly.

Pokud na tuhé těleso nepůsobí žádné vnější síly, $\vec{F}_\alpha^{(e)} = 0$, jedná se o izolovanou soustavu, kde $\vec{N}^{(e)} = 0$ – tzv. bezsilový setrvačnick. V tom případě se hmotný střed tělesa pohybuje rovnoměrně přímočaře a Eulerovy setrvačnickové rovnice se zjednoduší na soustavu diferenciálních rovnic pouze pro složky úhlové rychlosti v soustavě pevně spojené s tělesem

$$\tilde{I}_{il} \dot{\tilde{\Omega}}_l = \varepsilon_{ijk} \tilde{I}_{jm} \tilde{\Omega}_m \tilde{\Omega}_k. \quad (70)$$

Předností soustavy pevně spojené s tělesem je, že složky tensoru setrvačnosti jsou pak na čase nezávislé, což podstatně zjednodušuje řešení. V bazi zvolené navíc ve směrech hlavních os momentu setrvačnosti mají diferenciální rovnice (70) tvar

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 \dot{\tilde{\Omega}}_1 &= (\tilde{I}_2 - \tilde{I}_3) \tilde{\Omega}_2 \tilde{\Omega}_3, \\ \tilde{I}_2 \dot{\tilde{\Omega}}_2 &= (\tilde{I}_3 - \tilde{I}_1) \tilde{\Omega}_3 \tilde{\Omega}_1, \\ \tilde{I}_3 \dot{\tilde{\Omega}}_3 &= (\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2) \tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_2. \end{aligned} \quad (71)$$

Z těchto rovnic je okamžitě vidět, že pro těleso, které má složky momentu setrvačnosti v hlavních osách stejné $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \tilde{I}_3$ (například homogenní koule), je $\vec{\tilde{\Omega}}(t) = \text{const.}$, takže těleso se otáčí konstantní úhlovou rychlostí stále ve stejném směru.

Pokud $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3$ (symetrický setrvačnick), pak řešení rovnic (71) je

$$\tilde{\Omega}_1 = C \sin \left(\frac{\tilde{I}_1 - \tilde{I}_3}{\tilde{I}_1} \tilde{\Omega}_3 t - \varphi_0 \right), \quad \tilde{\Omega}_2 = C \cos \left(\frac{\tilde{I}_1 - \tilde{I}_3}{\tilde{I}_1} \tilde{\Omega}_3 t - \varphi_0 \right), \quad \tilde{\Omega}_3 = \text{const.}$$

Odtud plyne, že v tomto případě se směr pseudovektoru $\boldsymbol{\Omega}(t)$ se otáčí okolo třetí hlavní osy setrvačnosti tělesa \tilde{z} rychlostí $\frac{\tilde{I}_1 - \tilde{I}_3}{\tilde{I}_1} \tilde{\Omega}_3$, ale rychlost otáčení $|\boldsymbol{\Omega}(t)|$ je v čase konstantní (odtud název setrvačnick). Tento pohyb pseudovektoru $\boldsymbol{\Omega}(t)$ (pohyb osy otáčení uvnitř tělesa!) se nazývá **precese**. S tím souvisí fakt, že směr osy otáčení Země (kterou je možno v jisté aproximaci považovat za zploštělý elipsoid) se s časem mění, zatímco její rychlost zůstává v této aproximaci stejná. Úhel, který svírá $\boldsymbol{\Omega}(t)$ s osou \tilde{z} se nazývá **úhel nutace** a platí pro něj

$$\cos \theta = \tilde{\Omega}_3 / |\boldsymbol{\Omega}| = \tilde{\Omega}_3 / \sqrt{C^2 + \tilde{\Omega}_3^2}.$$

Pro symetrický setrvačnick $\cos \theta = \text{const.}$, ale v obecném případě nikoliv.

Pokud $\tilde{I}_1 \neq \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3$, $\tilde{I}_1 \neq \tilde{I}_3$, pak řešení Eulerových rovnic je poměrně složité a lze je vyjádřit v termínech tzv. Jacobiho eliptických funkcí (podobně jako přesné řešení matematického kyvadla).

Poznamenejme ještě, že vyřešením složek $\tilde{\Omega}_m(t)$ z Eulerových setrvačnickových rovnic ještě není otáčivý pohyb tělesa určen, neboť ten je dán maticí $S(t)$, takže pro nalezené $\tilde{\Omega}_m(t)$ je třeba ještě řešit rovnice

$$S_{ki}(t) \dot{S}(t)_{kj} = (S^T(t) \cdot \dot{S}(t))_{ij} = -\tilde{\omega}_{ij} = -\varepsilon_{ijm} \tilde{\Omega}_m(t)$$

pro složky ortogonální matice S .

Cvičení 27 * Nalezněte matici otáčení S pro homogenní kouli v bezsilovém prostředí.

Cvičení 28 Ukažte, že pro těleso s konstantní hustotou hmoty v homogenním silovém poli je $\vec{N}^{(e)} = 0$, takže pro ně platí stejné rovnice jako pro bezsilový setrvačnick.

Cvičení 29 * Určete pohyb bodu na povrchu homogenní koule v homogenním silovém poli.

4 Lagrangeova formulace mechaniky

Newtonovská formulace mechaniky hmotných bodů je formulována v kartézských souřadnicích, které pro popis některých systémů, například pohyb v poli centrálních sil, nemusí být nejvhodnější. Mimo to pro hmotné body, které se pohybují nejen pod vlivem vtištěných sil ale jsou rovněž *podřízeny nějakým vazbám*, operuje s intuitivně náročným pojmem vazbových sil.

Příklad: *Rovinné matematické kyvadlo. Hmotný bod se pohybuje pod vlivem konstantní gravitační síly, ale jeho pohyb je omezen na kružnici*

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0, \quad z = 0, \quad (72)$$

kde l je délka (pevného) závěsu. Newtonovy rovnice pohybu mají tvar

$$m\ddot{x} = F_x^{(v)}, \quad (73)$$

$$m\ddot{y} = mg + F_y^{(v)}, \quad (74)$$

$$m\ddot{z} = F_z^{(v)}, \quad (75)$$

kde

$$\vec{F}^{(v)} = \lambda_1 \vec{grad}(x^2 + y^2 - l^2) + \lambda_2 \vec{grad}(z) = (2\lambda_1 x, 2\lambda_1 y, \lambda_2), \quad (76)$$

je vazbová síla a λ_1, λ_2 jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory. Rovnice (72) – (75) představují smíšený algebraicko–diferenciální systém pěti rovnic pro pět neznámých funkcí $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t), \tilde{\lambda}_1(t), \tilde{\lambda}_2(t)$. Z rovnic (73), (74) snadno dostaneme

$$\ddot{x}y - \ddot{y}x + gx = 0$$

a zavedením polárních souřadnic $x = \hat{x}(\phi) := l \sin \phi$, $y = \hat{y}(\phi) := l \cos \phi$, $z = \hat{z}(\phi) := 0$, dotaneme jedinou diferenciální rovnici tvaru

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0. \quad (77)$$

Z jejího řešení $\tilde{\phi}(t)$ pak snadno určíme řešení rovnic (72) – (75)

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(\tilde{\phi}(t)) = l \sin(\tilde{\phi}(t)), \quad \tilde{y}(t) = \hat{y}(\tilde{\phi}(t)) = l \cos(\tilde{\phi}(t)), \quad \tilde{z}(t) = \hat{z}(\tilde{\phi}(t)) = 0.$$

Lagrangeovy multiplikátory pak jsou $\tilde{\lambda}_1(t) = m\ddot{\tilde{x}}(t)/\tilde{x}(t)$, $\tilde{\lambda}_2(t) = 0$.

Jiné příklady soustav s vazbami jsou dva hmotné body, spojené nehmotnou tyčkou, nebo jedna částice v gravitačním poli pohybující se po pevném či kutálejícím se válci.

Cílem Lagrangeovy formulace mechaniky je formulace pohybových zákonů v křivočarých sořadnicích, vyloučení vazeb a zahrnutí potenciálových sil do obecnějšího rámce.

Vyloučení vazeb se provádí zavedením tzv. konfiguračního prostoru systému a jeho (křivočarých) souřadnic q^j , (což ve výše uvedeném příkladu byl úhel ϕ) a k vyloučení potenciálových sil se zavádí Lagrangeova funkce.

4.1 Lagrangeova funkce hmotného bodu bez vazeb v poli potenciálových sil

Odvoďme napřed tvar Lagrangeovy funkce pro nejjednodušší případ jednoho hmotného bodu *bez vazeb* podrobeného pouze potenciálovým silám $\vec{F}(\vec{x}, t) = -\text{grad} U(\vec{x}, t)$. Jinými slovy přepíšme Newtonovy pohybové rovnice do Lagrangeovy formulace. Pohybové rovnice hmotného bodu *bez vazeb* je možno s mírným zneužitím notace zapsat způsobem

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{1}{2} m v^2(t) \right) \right] = m \frac{d}{dt} v_i(t) = m a_i(t) = F_i(\vec{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} U(\vec{x}, t). \quad (78)$$

Snadno se přesvědčíme, že tuto rovnici lze přepsat do tvaru

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v_i} L(\vec{x}, \vec{v}, t) \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} L(\vec{x}, \vec{v}, t) = 0. \quad (79)$$

kde L je tzv. **Lagrangeova funkce** $L = L(\vec{x}, \vec{v}, t) := \frac{1}{2} m v^2 - U(\vec{x}, t)$, zkráceně $L := T - U$, kde T a U jsou kinetická a potenciální energie.

Je dobré si uvědomit, co rovnice (79) vyjadřuje: Lagrangeova funkce je (v tomto případě) funkcí sedmi *nezávislých* proměnných $(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, t)$ a poté, co provedeme parciální derivace naznačené v (79), dosadíme za x_i funkce času $\tilde{x}_i(t)$, za v_i dosadíme $\dot{\tilde{x}}_i(t)$ a provedeme derivaci podle času. Tímto postupem dostaneme soustavu tří diferenciálních rovnic pro funkce $\tilde{x}_i(t)$, která je ekvivalentní druhému Newtonovu zákonu (24) pro hmotný bod v poli potenciálových sil. Přitom, jak vidno ze (79), *veškerá informace o dynamice pohybu je obsažena v jediné Lagrangeově funkci L .*

V případě, že ne všechny síly působící na hmotný bod jsou potenciální, t.j. $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) = -\text{grad} U(\vec{x}, t) + \vec{F}^{(o)}(\vec{x}, \vec{v}, t)$, pravá strana rovnice (79) je rovna $F_i^{(o)}(\vec{x}, \vec{v}, t)$. Existují ale i některé nepotenciální síly, jejichž působení je možno rovněž zahrnout do Lagrangeovy funkce.

4.1.1 Lorentzova síla, zobecněný potenciál

Mezi síly, které se nám zatím nepodařilo zahrnout do Lagrangeovy funkce patří i fyzikálně velmi důležitá síla Lorentzova, která působí na elektrický náboj pohybující se v elektromagnetickém poli. Důvod je ten, že závisí nejen na poloze ale i na rychlosti pohybujícího se náboje.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) = e \left(\vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t) \right), \quad (80)$$

kde e je velikost náboje a \vec{E} a \vec{B} jsou elektrická intenzita a magnetická indukce (viz [8], kap.4.5) v místě o souřadnicích \vec{x} a v čase t .

Cvičení 30 Zopakujte si řešení Newtonových rovnic pro Lorentzovu sílu, kde $\vec{E} = \text{const}$, $\vec{B} = \text{const}$.

Vzhledem k tomu že Lagrangeova funkce závisí i na rychlostech, můžeme uvažovat i potenciály rovněž závislé na rychlostech: $U = U(\vec{x}, \vec{v}, t)$. Je snadné pak ukázat, že Lorentzovu sílu lze získat ze zobecněného potenciálu

$$U(\vec{x}, \vec{v}, t) = e \left(\varphi(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right), \quad (81)$$

kde φ a \vec{A} jsou potenciály elektromagnetického pole pro které platí

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (82)$$

způsobem

$$F_i(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v_i} U(\vec{x}, \vec{v}, t) \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} U(\vec{x}, \vec{v}, t). \quad (83)$$

Znamená to, že i Lorentzovu sílu je možno zahrnout do Lagrangeovy funkce prostřednictvím zobecněného potenciálu (81) a pohybové rovnice pro nabitou částici v elektromagnetickém poli lze opět zapsat ve tvaru (79), kde $L = \frac{1}{2}mv^2 - U(\vec{x}, \vec{v}, t)$. Vzhledem k tomu, že elektromagnetické potenciály jsou určeny až na kalibrační transformace, není odpovídající Lagrangeova funkce určena jednoznačně. Nicméně pohybové rovnice (79), které dostaneme z takto různých Lagrangeových funkcí, jsou identické.

Cvičení 31 Určete jak se liší Lagrangeovy funkce pro elektromagnetické potenciály lišící se o kalibrační transformaci a ukažte, že tento rozdíl nepřispěje k levé straně rovnice (79).

4.1.2 Obecné souřadnice

Pro některé typy úloh, např. pohyb v poli centrálních isotropaních sil (Coulombova síla), je vhodné nahradit kartézské souřadnice jinými, tzv. křivočarými, což spočívá v substituci $x^j = f^j(y^1, \dots, y^n)$, $j = 1, \dots, n$, kde f_j jsou spojitě, mají spojitou první derivaci a navíc pro ně platí tzv. podmínka regularity

$$\det \frac{\partial f^j}{\partial y^k} \neq 0 \quad (84)$$

Tato podmínka může znamenat, že křivočaré souřadnice nemůžeme obecně použít na celém fyzikálním prostoru, nýbrž pouze na jeho části a pro zbytek (či spíše jeho okolí) najít jiné.

Například sférické souřadnice $y^1 = r, y^2 = \varphi, y^3 = \vartheta$

$$\begin{aligned}x^1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\x^2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\x^3 &= r \cos \vartheta\end{aligned}\tag{85}$$

nebo cylindrické souřadnice $y^1 = \rho, y^2 = \varphi, y^3 = z$

$$\begin{aligned}x^1 &= \rho \cos \varphi \\x^2 &= \rho \sin \varphi \\x^3 &= z\end{aligned}\tag{86}$$

lze použít pouze na $E \setminus \{o + k\mathbf{e}_3, k \in \mathbf{R}\}$, t.j. mimo "osu z ".

Cvičení 32 Spočítejte Jacobiány (84) transformací (85) a (86).

Lagrangeova funkce určující pohybové rovnice má opět tvar $L = T - U$, ale obě funkce T a U je nutné vyjádřit v křivočarých souřadnicích.

Cvičení 33 Spočítejte vyjádření kartézských složek rychlosti a \vec{v}^2 ve sférických a cylindrických souřadnicích.

4.2 Vazby

Systém N hmotných bodů bez vazeb má $3N$ stupňů volnosti – nezávislých souřadnic, jejichž vývoj v čase je dán 2. Newtonovým zákonem (35). Existuje však mnoho mechanických systémů, kde hmotné body jsou podřízeny vazbám, přesněji soustavě podmínek mezi souřadnicemi a rychlostmi, které platí a priori, t.j. bez ohledu na konkrétní časový vývoj – pohyb. Význam Lagrangeova formalismu tkví především v tom, že formálně stejným způsobem jako v podkapitole 4.1 lze zapsat pohybové rovnice mechanických systémů s vazbami (matematické kyvadlo, hmotný bod na sféře, na kutálejícím se válci, soustava pevně propojených hmotných bodů,...).

Nadále budeme předpokládat, že se jedná o tzv. udržovací vazby, což znamená, že vztahy mezi souřadnicemi a rychlostmi lze zapsat pomocí p funkcí f_K způsobem

$$f_K(\vec{X}, \vec{V}, t) = 0, \quad K = 1, \dots, p,\tag{87}$$

kde (jedná se o soustavy N hmotných bodů)

$$\vec{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (x_1, \dots, x_{3N}), \quad \vec{V} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N) = (v_1, \dots, v_{3N}).$$

Příkladem udržovací vazby je pohyb bodu na kouli na rozdíl od pohybu uvnitř koule.

Podle tvaru funkcí f_K rozeznáváme především vazby holonomní $f_K = f_K(\vec{X}, t)$ a neholonomní závislé i na rychlostech. Některé neholonomní vazby mohou být skrytě holonomní, což znamená, že je lze "zintegrovat" na vazby holonomní. Např. podmínku, která má tvar

$$f = f_h(\vec{x}, \vec{v}) := \frac{\partial h}{\partial x} v_x + \frac{\partial h}{\partial y} v_y + \frac{\partial h}{\partial z} v_z = 0,$$

kde $h = h(x, y, z)$, lze (pro libovolnou $\vec{x} = \vec{x}(t)$) zapsat způsobem $\frac{d}{dt}h(\vec{x}(t)) = 0$, takže tuto neholonomní vazbu můžeme nahradit holonomní vazbou $h(x, y, z) = \text{const.}$ Obecněji, neholonomní vazbu tvaru

$$f = f_{\vec{g}}(\vec{x}, \vec{v}) := \vec{g}(\vec{x}) \cdot \vec{v} = 0 \quad (88)$$

lze nahradit ekvivalentní holonomní vazbou, pokud platí Eulerova podmínka pro existenci integračního faktoru

$$\vec{g} \cdot \text{rot } \vec{g} = 0.$$

Vazby nezávislé na čase $f_K = f_K(\vec{X}, \vec{V}) = 0$, $K = 1, \dots, p$ nazýváme skleronomní. Vazby (87) závislé na čase se nazývají rheonomní, příkladem je pohyb bodu na kutálejícím se válci.

4.2.1 Lagrangeova funkce pro soustavy s holonomními vazbami

Vazby snižují počet stupňů volnosti (dynamických proměnných – nezávislých funkcí času vyhovujících pohybovým rovnicím). Systém s p holonomními vazbami, pro které jsou funkce f_K nezávislé¹⁶, má počet stupňů volnosti $s = 3N - p$.

Otázka: *Kolik stupňů volnosti má složené matematické kyvadlo? Cihla hrozená do vzduchu?*

Podmnožinu vektorů $\vec{X} \in \mathbf{R}^{3N}$ splňujících holonomní vazby

$$f_K = f_K(\vec{X}, t) = 0, \quad K = 1, \dots, p, \quad (89)$$

kde f_K jsou zadané funkce, nazýváme **konfigurační prostor**. Tato podmnožina obecně není lineární prostor nýbrž (za jistých předpokladů o $f_K(\vec{X}, t)$) tzv. diferenciální varieta, např. kružnice, sféra, torus, ...

Podle věty o implicitních funkcích lze $3N$ souřadnic x_i splňujících holonomní vazby zapsat jako funkce s proměnných q_j , $j = 1, \dots, s$ a času¹⁷

$$x_i = \hat{x}_i(q_1, \dots, q_s, t), \quad i = 1, \dots, 3N, \Leftrightarrow \vec{X} = \vec{X}(q, t) \quad (90)$$

¹⁶t.j. hodnost obdélníkové matice $\frac{\partial f_K}{\partial x_i}$, $K = 1, \dots, p$, $i = 1, \dots, 3N$, je na nějaké otevřené množině rovna p

¹⁷Pozor! Závislost \hat{x}_i na čase není dána pohybem soustavy nýbrž případnou změnou rheonomních podmínek v čase. Pro skleronomní podmínky funkce (90) nezávisejí na čase.

tak, že holonomní vazby (89) jsou splněny pro libovolná q_j z jejich definiční oblasti, t.j. $\hat{f}_K(q, t) := f_K(\vec{X}(q, t), t) \equiv 0$. Pro derivace f_K pak platí

$$\frac{\partial \hat{f}_K}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = 0. \quad (91)$$

Proměnné q_j se nazývají **zobecněné souřadnice soustavy**.

Podobným způsobem můžeme vyjádřit i rychlosti. Dosadíme-li do (90) za x_i i q_j funkce času $\tilde{x}_i(t)$ a $\tilde{q}_j(t)$ a zderivujeme podle t , dostaneme¹⁸

$$\dot{\tilde{x}}_i(t) = \dot{\tilde{q}}_j(t) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}(\tilde{q}(t), t) + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t}(\tilde{q}(t), t). \quad (92)$$

Odtud je vidět, že hodnoty časových derivací funkcí \tilde{x}_i , jejichž hodnoty leží na varietě dané vazbami, je možno vyjádřit jako funkce zobecněných souřadnic q_j a dalších s nezávislých proměnných označených \dot{q}_j nazývaných **zobecněné rychlosti** způsobem

$$\hat{v}_i = \dot{\hat{x}}_i(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) := \dot{q}_j \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}(q, t) + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t}(q, t), \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (93)$$

Cvičení 34 *Ověřte, že z (90) a (93) plyne $\frac{d}{dt} \hat{x}_i(\tilde{q}(t), t) = \dot{\hat{x}}_i(\tilde{q}(t), \frac{d}{dt} \tilde{q}(t), t)$*

Z definice (93) funkce $\dot{\hat{x}}_i$ okamžitě plyne "pravidlo o krácení teček"

$$\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}. \quad (94)$$

Cvičení 35 *Dva body spojené nehmotnou tyčkou měnící se délky: Holonomní rheonomní vazba má tedy tvar $f = f(\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, t) = (\vec{x}_{(1)} - \vec{x}_{(2)})^2 - l(t)^2 = 0$, kde l je předem zadaná funkce času. Zobecněné souřadnice q_k jsou pak například $(y_1, y_2, y_3, \theta, \varphi)$ a funkce (90) jsou $\vec{\hat{x}}_{(1)}(y_1, y_2, y_3, \theta, \varphi, t) := \vec{y} + \vec{r}$, $\vec{\hat{x}}_{(2)}(y_1, y_2, y_3, \theta, \varphi, t) := \vec{y} - \vec{r}$, kde*

$$\vec{y} := (y_1, y_2, y_3), \quad \vec{r} := \frac{1}{2} l(t) (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Spočítejte rychlosti \vec{v}_1, \vec{v}_2 pomocí zobecněných souřadnic a rychlostí. Ověřte pravidlo o krácení teček.

¹⁸Všimněte se tří různých významů výrazů s x_i : Jednak jsou to souřadnice v \mathbf{R}^{3N} , jednak představují funkce s zobecněných souřadnic a času a jsou označeny \hat{x}_i a při označení \tilde{x}_i představují funkce jedné proměnné – času, t.j. křivku v \mathbf{R}^{3N} . Tedy $x_i, \hat{x}_i, \tilde{x}_i$ pokaždé představují jinou matematickou veličinu!!!

Cvičení 36 Ukažte, že pro rheonomní holonomní vazby platí

$$\frac{\partial f_K}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} + \frac{\partial f_K}{\partial t} = 0, \quad K = 1, \dots, p.$$

Naším cílem nyní je napsat **pohybové rovnice pro nové dynamické proměnné**, t.j. pro zobecněné souřadnice soustavy q_j jako funkce času $\tilde{q}_j(t)$. Ukážeme, že zápis těchto rovnic vypadá formálně stejně jako Lagrangeova formulace pohybových rovnic (79) pro kartézské souřadnice hmotných bodů bez vazeb:

Jak už bylo zmíněno na začátku této kapitoly, holonomní vazby je v Newtonské mechanice nutno nahradit vazbovými silami, které nelze zahrnout do potenciálových sil, takže systém s vazbami je možno popsat pohybovými rovnicemi ve tvaru¹⁹

$$\frac{\hat{d}}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v_i} L(\vec{X}, \vec{V}, t) \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} L(\vec{X}, \vec{V}, t) = F_i^{(v)}(\vec{X}, \vec{V}, t) + F_i^{(o)}(\vec{X}, \vec{V}, t), \quad (95)$$

kde $L(\vec{X}, \vec{V}) = T(\vec{V}) - U(\vec{X}, \vec{V}, t)$ a $F_i^{(v)}$ a $F_i^{(o)}$ jsou kartézské složky vazbových a vtištěných nepotenciálových sil, jejichž působení nelze zahrnout do Lagrangeovy funkce.

Vynásobením levé strany faktorem $\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}$ a sečtením podle i dostaneme po úpravách (viz [1] Kap 2.3)

$$\sum_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \left[\frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial v_i} L(\vec{X}, \vec{V}, t) \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} L(\vec{X}, \vec{V}, t) \right] = \frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \hat{L}(q, \dot{q}, t) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \hat{L}(q, \dot{q}, t) \quad (96)$$

Zde, jakož i při zmíněných úpravách, je nutno stále mít na paměti, že q_j i \dot{q}_j, \ddot{q}_j jsou *nezávislé proměnné*, za které až po provedení derivací můžeme dosadit funkce času $\tilde{q}_j(t), \dot{\tilde{q}}_j(t)$ a $\ddot{\tilde{q}}_j(t)$, což je formálně vyjádřeno stříškou nad $\frac{d}{dt}$. Lagrangeova funkce \hat{L} na pravé straně (96) je definována způsobem

$$\hat{L}(q, \dot{q}, t) := L(\hat{\vec{X}}(q, t), \hat{\vec{V}}(q, \dot{q}, t), t) = \hat{T}(q, \dot{q}, t) - \hat{U}(q, \dot{q}, t), \quad (97)$$

¹⁹Operátor "totální derivace" $\frac{\hat{d}}{dt}$ (stříška se často vynechává, někdy se značí D_t) vytvoří z funkcí $2s + 1$ proměnných $F = F(q_j, \dot{q}_j, t)$ (q_j, \dot{q}_j, t jsou nezávislé proměnné!) funkce $3s + 1$ proměnných způsobem

$$\frac{\hat{d}}{dt} [F(q, \dot{q}, t)] \equiv \left(\frac{\hat{d}}{dt} F \right) (q, \dot{q}, \ddot{q}, t) := \dot{q}_j \frac{\partial F}{\partial q_j} (q_j, \dot{q}_j, t) + \ddot{q}_j \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} (q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{\partial F}{\partial t} (q_j, \dot{q}_j, t).$$

Tato definice plyne z požadavku

$$\frac{\hat{d}}{dt} F(q, \dot{q}, t) \Big|_{q_j = \tilde{q}_j(t), \dot{q}_j = \dot{\tilde{q}}_j(t), \ddot{q}_j = \ddot{\tilde{q}}_j(t)} \equiv (D_t F)(\tilde{q}_j(t), \dot{\tilde{q}}_j(t), \ddot{\tilde{q}}_j(t), t) \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} F(\tilde{q}_j(t), \dot{\tilde{q}}_j(t), t).$$

Naopak $\frac{\partial}{\partial t} F(q, \dot{q}, t)$ znamená parciální derivaci $F(q, \dot{q}, t)$ podle t .

kde $\hat{X}(q, t)$ je zkrácený zápis transformace souřadnic (90) a $\hat{V}(q, \dot{q}, t)$ je zkrácený zápis transformace rychlostí (93) takže

$$\hat{T}(q, \dot{q}, t) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \hat{v}_i(q, \dot{q}, t) \hat{v}_i(q, \dot{q}, t), \quad (98)$$

$$\hat{U}(q, \dot{q}, t) := U^{(k)}(\hat{x}_i(q, t), \dot{\hat{x}}_i(q, \dot{q}, t), t), \quad (99)$$

kde $U^{(k)}$ je potenciální energie v kartézských souřadnicích. Všimněte si, že díky (93) je *zobecněná kinetická energie* (98) polynomem druhého stupně ve zobecněných rychlostech \dot{q}_j s koeficienty obecně *závislými na zobecněných souřadnicích a čase*

$$\hat{T}(q_j, \dot{q}_j, t) := \sum_{j,k=1}^s \gamma_{jk}(q, t) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^s \beta_j(q, t) \dot{q}_j + \alpha(q, t). \quad (100)$$

Cvičení 37 *Ověřte, že pro skleronomní vazby je \hat{T} homogenní funkcí \dot{q}_j stupně 2, t.j. $\beta_j = \alpha = 0$. Napište výraz pro γ_{jk} .*

Cvičení 38 *Ukažte, že Lagrangeova funkce matematického kyvadla délky l v \mathbf{R}^3 má v souřadnicích sféry $q_1 = \vartheta$, $q_2 = \phi$ tvar*

$$\hat{L} = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\phi}^2) - mgl \cos \vartheta \quad (101)$$

4.2.2 Lagrangeovy rovnice druhého druhu

Podobným způsobem jako v předchozím paragrafu, t.j. zápisem v zobecněných souřadnicích a rychlostech, je třeba upravit i pravou stranu rovnice (95). Výhodou a smyslem Lagrangeovy formulace mechaniky je, že přechodem k zobecněným souřadnicím, které zaručují splnění holonomních vazeb se zbavíme vazbových sil.

Soustava holonomních vazeb (89) definuje v každém čase nadplochu v \mathbf{R}^{3N} . Uvažujme-li infinitesimální změny souřadnic $\delta\vec{X}$ v bodě \vec{X} pak

$$f_K(\vec{X} + \delta\vec{X}, t) = f_K(\vec{X}, t) + \frac{\partial f_K}{\partial x_i} \delta x_i + O(\delta X^2).$$

Pokud se tyto změny dějí v souhlasu s vazbami v daném čase, t.j. $f_K(\vec{X} + \delta\vec{X}, t) = 0$, znamená to, že vektory $\delta\vec{X}$ jsou *tečné k nadploše definované vazbami*. Pro infinitesimální změny souřadnic, které se dějí v souhlasu s vazbami pak dostáváme

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t) \delta x_i = 0, \quad (102)$$

což znamená, že gradienty funkcí f_K jsou kolmé na vektory $\delta\vec{X}$.

Práce vazbových sil vykonaná při infinitesimálním pohybu v souhlasu s vazbami je $\vec{F}^{(v)} \cdot \delta\vec{X}$ a vazbové síly jsou definovány jako síly, které při pohybu nekonají mechanickou práci. Vazbové síly jsou tedy v každém čase kolmé na nadplochu, po které se soustava hmotných bodů může pohybovat a je možné je v každém čase vyjádřit jako lineární kombinaci gradientů funkcí f_K

$$F_i^{(v)}(\vec{X}, t) = \sum_{K=1}^p \lambda_K(t) \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t), \quad (103)$$

Vynásobíme-li pravou stranu rovnice (95) faktorem $\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}$ a sečteme podle i , příspěvek vazbových sil zmizí, neboť

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(v)} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{K=1}^p \lambda_K \frac{\partial f_K}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \sum_{K=1}^p \lambda_K \frac{\partial \hat{f}_K}{\partial q_j} = 0 \quad (104)$$

díky (91). Z rovnic (95) a (96) tak dostaneme tzv. *Lagrangeovy rovnice druhého druhu*²⁰

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \hat{L}(q, \dot{q}, t) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \hat{L}(q, \dot{q}, t) = Q_j^{(o)}(q, \dot{q}, t) := \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(o)} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}, \quad (105)$$

kde na pravé straně jsou tzv. *zobecněné ostatní síly*, což jsou vtištěné síly, jejichž vliv se nepodařilo zahrnout do Lagrangeovy funkce. Po dosazení funkcí času $\tilde{q}_j(t)$, $\dot{\tilde{q}}_j(t)$, $\ddot{\tilde{q}}_j(t)$ za proměnné q_j , \dot{q}_j , \ddot{q}_j jsou tyto rovnice, podobně jako rovnice Newtonovy, diferenciálními rovnicemi druhého řádu pro $\tilde{q}_j(t)$. Neobsahují však vazbové síly.

Známe-li Lagrangeovu funkci²¹ $\hat{L}(q, \dot{q}, t)$ mechanické soustavy můžeme definovat zobecnění některých fyzikálních veličin, které se váže na popis soustavy nikoliv v kartézských, nýbrž zobecněných souřadnicích. Nejdůležitější jsou tzv. *kanonické hybnosti*

$$p_j = p_j(q, \dot{q}, t) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t), \quad (106)$$

které se používají k definici Hamiltonovy funkce (viz TEF2, [1]), jež se užívá k alternativní formulaci pohybových rovnic mechanických soustav.

Další zobecněnou veličinou je *zobecněná energie*

$$E = E(q, \dot{q}, t) := \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t). \quad (107)$$

²⁰Lagrangeovy rovnice prvního druhu odvodíme paradoxně později v podkapitole 5.1.4.

²¹V dalším textu budeme stříšku nad L vynechávat

Přestože lze definovat i pojem zobecněné kinetické a potenciální energie způsobem (98), (99), zobecněná energie není obecně součtem zobecněné kinetické a potenciální energie (viz [1], kap.2.5). Pro skleronomní vazby (kdy kinetická energie je homogenní funkcí \dot{q}_j stupně 2) a pro potenciály nezávislé na rychlostech $U^{(k)} = U^{(k)}(x_i, t)$ (viz např. cvičení 38), však ano.

Poznamenejme, že fyzikální veličiny jako kanonická hybnost, kinetická energie, zobecněná energie atd. jsou v pojetí Lagrangeovy mechaniky *funkce na rozšířeném konfiguračním prostoru* se souřadnicemi q_j, \dot{q}_j závisující případně ještě na čase. Vzhledem k tomu, že zobecněné souřadnice nemusí mít vždy rozměr délky (viz např. cvičení 35), zobecněná hybnost nemusí mít fyzikální rozměr kartézské hybnosti mv_i (viz např. cvičení 40).

4.3 Disipativní síly, Rayleighova funkce

Příkladem sil, které nelze zahrnout do Lagrangeovy funkce jsou síly disipativní, kterými působí prostředí proti pohybu mechanického systému (odpor vzduchu, odpor vody, ...). Ty závisí na rychlostech a aproximují se obvykle polynomem. Nejjednodušší aproximace je $\vec{F}^{(d)} = -k\vec{v}$, kterou je možno získat ze skalární *Rayleighovy funkce*

$$R = R(\vec{v}) = \frac{1}{2}k v^2 \quad (108)$$

jako

$$F_i^{(d)} = -\frac{\partial R}{\partial v_i}. \quad (109)$$

Lagrangeovy rovnice zahrnující síly disipativní v obecných souřadnicích pak mají tvar

$$\frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L(q, \dot{q}, t) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} L(q, \dot{q}, t) = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} R(\dot{x}_i(q, \dot{q})). \quad (110)$$

4.4 Zákony zachování, cyklické souřadnice, Věta Noetherové

Přestože řešení pohybových rovnic jsou obvykle netriviální funkce času, je možné v mnoha fyzikálně zajímavých případech nalézt *funkce zobecněných souřadnic, zobecněných rychlostí a času* $F(q_j, \dot{q}_j, t)$ (tedy $2s + 1$ proměnných), takové, že po dosazení řešení Lagrangeových rovnic druhého druhu a jejich derivací $q_j \mapsto \tilde{q}_j(t)$, $\dot{q}_j \mapsto \dot{\tilde{q}}_j(t)$ jsou hodnoty složených funkcí $\mathcal{F}_{\tilde{q}}(t) := F(\tilde{q}_j(t), \dot{\tilde{q}}_j(t), t)$ na čase nezávislé. Tedy

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}_{\tilde{q}}(t) = \frac{d}{dt} F(\tilde{q}_j(t), \dot{\tilde{q}}_j(t), t) = \left(\frac{\hat{d}}{dt} F(q, \dot{q}, t) \right) \Big|_{q=\tilde{q}(t), \dot{q}=\dot{\tilde{q}}(t), \ddot{q}=\ddot{\tilde{q}}(t)} =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t} \right) \Big|_{q=\tilde{q}(t), \dot{q}=\dot{\tilde{q}}(t), \ddot{q}=\ddot{\tilde{q}}(t)} = 0 \quad (111)$$

pro libovolné řešení $\tilde{q}_j(t)$ Lagrangeových rovnic druhého druhu. Takovým funkcím F říkáme **zachovávající se veličiny**, neboť jejich hodnoty se zachovávají během pohybu, nebo také první integrály pohybových rovnic, **integrály pohybu**. Zdůrazněme ještě jednou, že integrály pohybu jsou, podobně jako Lagrangeova funkce, funkcemi na rozšířeném konfiguračním prostoru a čase.

Je zřejmé, že splnění podmínky (111) a tedy i tvar funkce F bude záviset na konkrétním tvaru pohybových rovnic tedy Lagrangeovy funkce L . Neznamená to však, že hodnota $\mathcal{F}_{\tilde{q}}$, tedy hodnota integrálu pohybu pro dané řešení, je dána pohybovou rovnicí. Pro různá řešení pohybových rovnic \tilde{q} může hodnota $\mathcal{F}_{\tilde{q}}$ nabývat různých hodnot daných počátečními podmínkami řešení \tilde{q} , neboť z rovnice (111) plyne

$$\mathcal{F}_{\tilde{q}}(t) = \mathcal{F}_{\tilde{q}}(t_0) = F(\tilde{q}_j(t_0), \dot{\tilde{q}}_j(t_0), t_0).$$

Zachovávající se veličiny jsou důležitým nástrojem pro řešení pohybových rovnic. Přesvědčit se, že nějaká funkce $F(q, \dot{q}, t)$ je integrálem pohybu je poměrně snadné. Stačí vyjádřit proměnné \ddot{q}_j z Lagrangeových rovnic druhého druhu (105) jako funkce q, \dot{q}, t

$$\ddot{q}_j = G_j(q, \dot{q}, t), \quad (112)$$

a dosadit je do $(\frac{d}{dt}F)(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$. Pokud F je integrál pohybu pak výsledek dá nulu pro libovolné q, \dot{q}, t .

$$\frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} G_j(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0. \quad (113)$$

Všimněte si, že pro ověření faktu, že funkce F je integrál pohybu, neřešíme Lagrangeovy rovnice druhého druhu (105) jako diferenciální rovnice pro $\tilde{q}_j(t)$, nýbrž jako soustavu algebraických rovnic pro \ddot{q}_j , což je mnohem jednodušší úloha. Hledání takovýchto funkcí F však může být složitý problém a je proto předmětem různých metod.

Nejsnadněji se integrály pohybu hledají pomocí tzv. *cyklických souřadnic*, což jsou takové zobecněné souřadnice q_j , které se (na rozdíl od \dot{q}_j) nevyskytují v Lagrangeově funkci. Pokud všechny síly mechanického systému lze zahrnout do Lagrangeovy funkce, t.j. pravá strana (105) je nulová, a některá zobecněná souřadnice se v Lagrangeově funkci nevyskytuje, pak dostáváme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L(q, \dot{q}, t) \right) = 0,$$

takže v tom případě

$$F(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L(q, \dot{q}, t) \quad (114)$$

je první integrál Lagrangeových rovnic druhého druhu daných Lagrangeovou funkcí L .

Příklad 4.1 *Lagrangeova funkce pro hmotný bod v homogenním gravitačním poli je*

$$L = L(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) := \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + mgx_3. \quad (115)$$

Cyklické souřadnice jsou x_1, x_2 . Zachovávající se veličiny jsou $F_1 := mv_1$, $F_2 := mv_2$, což jsou hybnosti ve směru kolmém na směr gravitační síly.

Neznamená to však, že pomocí těchto cyklických souřadnic jsme našli všechny zachovávající se veličiny.

Cvičení 39 *Ukažte, že třetí složka momentu hybnosti $L_3 = x_1v_2 - x_2v_1$ je rovněž zachovávající se veličina pro hmotný bod v homogenním gravitačním poli.*

Cvičení 40 *Přepište Lagrangeovu funkci (115) do cylindrických souřadnic a nalezněte cyklickou souřadnici a zachovávající se veličinu. Ukažte, že to je třetí složka momentu hybnosti zapsaná v cylindrických souřadnicích*

Cvičení 41 *Ukažte, že pokud Lagrangeova funkce nezávisí na čase (izolovaná soustava), zobecněná energie (107) je integrálem pohybu.*

Nezávislost Lagrangeovy funkce na zobecněné souřadnici q_j nazýváme *homogennou konfiguračním prostorem v q_j* . Je-li tato zobecněná souřadnice úhel, nazýváme tuto homogenitu isotropií (viz cvičení 40).

Příklad 4.2 *"Fyzikální" prostor ve kterém působí pouze konstantní vertikální síla je homogenní v x_1 a x_2 (a není homogenní v x_3 !).*

Příklad 4.3 *"Fyzikální" prostor ve kterém působí pouze isotropní síla $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}f(r) = -\text{grad}U(r)$ je homogenní ve sférické souřadnici ϕ (a není homogenní v r a ϑ !).*

Existence cyklických souřadnic a jim odpovídajících integrálů pohybu souvisí s (obecnější) větou Noetherové:

Věta 4.1 *Nechť pravé strany Lagrangeových rovnic druhého druhu jsou nulové, t.j. $Q_j^{(0)} = 0$, $j = 1, \dots, s$. Pak ke každé grupě transformací souřadnic $q_j \mapsto q'_j = \phi_j(q, t, \alpha)$ závisejících spojitě na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$, které ponechávají Lagrangeovu funkci nezměněnu (invariantní), existuje nekonzantní první integrál pohybových rovnic*

$$F(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^s Y_j(q, t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L(q, \dot{q}, t), \quad (116)$$

kde $Y_j(q, t)$ jsou složky vektorového pole generující příslušnou jednoparametrickou grupu transformací způsobem

$$Y_j(q, t) := \left. \frac{\partial \phi_j(q, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (117)$$

Tyto složky splňují parciální diferenciální rovnici

$$\sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} Y_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k=1}^s \frac{\partial Y_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Y_j}{\partial t} \right) \right] = 0. \quad (118)$$

Otázka: Jaké podmínky pro funkce $\phi_j(q, t, \alpha)$ plynou z předpokladu, že transformace tvoří (jednoparametrickou) grupu?

Důkaz věty Noetherové: Při transformaci

$$q_j \mapsto q'_j = \phi_j(q, t, \varepsilon) = q_j + \varepsilon \left. \frac{\partial \phi_j}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2) =: q_j + \varepsilon Y_j(q, t) + O(\varepsilon^2), \quad (119)$$

$$\dot{q}_j \mapsto \left(\frac{\hat{d}}{dt} \phi_j \right) (q, \dot{q}, t, \varepsilon) := \dot{q}_j + \varepsilon \dot{Y}_j(q, \dot{q}, t) + O(\varepsilon^2),$$

kde

$$\dot{Y}_j(q, \dot{q}, t) := \left(\frac{\hat{d}}{dt} Y_j \right) (q, \dot{q}, t) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial Y_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Y_j}{\partial t},$$

se Lagrangeova funkce změní o

$$\delta L = L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t) = \varepsilon \left[\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_j} Y_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k=1}^s \frac{\partial Y_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Y_j}{\partial t} \right) \right] + O(\varepsilon^2).$$

Z invariance Lagrangeovy funkce $\delta L = 0$ pak plyne (118). Nyní už je snadné se přesvědčit že funkce (116) je *integrál pohybu odpovídající jednoparametrické grupě* určené polem $\vec{Y}(q, t)$, tedy že splňuje (111):

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}}{dt} F(q, \dot{q}, t) &\stackrel{116}{=} \sum_{j=1}^s \left[\left(\frac{\hat{d}}{dt} Y_j \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + Y_j \frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] = \\ &= \sum_{j=1}^s \left[\left(\sum_{k=1}^s \frac{\partial Y_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Y_j}{\partial t} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + Y_j \frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \stackrel{118}{=} \sum_{j=1}^s \left[-\frac{\partial L}{\partial q_j} Y_j + Y_j \frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \end{aligned}$$

Pro funkce $\tilde{q}(t)$ splňující Lagrangeovy rovnice druhého druhu (105), kde $Q_j^{(o)} = 0$, pak dostáváme

$$\left. \left(\frac{\hat{d}}{dt} F(q, \dot{q}, t) \right) \right|_{q=\tilde{q}(t), \dot{q}=\dot{\tilde{q}}(t), \ddot{q}=\ddot{\tilde{q}}(t)} = 0$$

Q.E.D.

Pokud známe nějakou cyklickou souřadnici q_i , pak je zřejmé, co se myslí onou grupou transformací. Jsou to transformace, které pro $j \neq i$ ponechávají zobecněné souřadnice nezměněny $q'_j = \phi_j(q, t, \alpha) := q_j$ a

$$q'_i = \phi_i(q, t, \alpha) := q_i + \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Nalézt ale všechny (nezávislé) grupy transformací, které ponechávají danou Lagrangeovu funkci invariantní je často nesnadný úkol. Lze postupovat ve dvou krocích. V prvním hledat tzv. infinitesimální transformace – vektorová pole $\vec{Y}(q, t) = (Y_1(q, t), \dots, Y_s(q, t))$, t.j. řešit rovnice (118), a poté hledat jednoparametrickou grupu transformací, t.j. funkce $\phi_j(q, t, \varepsilon)$ pro které platí (117).

Otázka: Jak vypadá vektorové pole $\vec{Y}(q, t)$ pro cyklickou souřadnici q_j ?

Cvičení 42 Nechť Lagrangeova funkce má tvar

$$L = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - U((x_1^2 + x_2^2), x_3),$$

kde U je libovolná diferencovatelná funkce. Ukažte, že $\vec{Y}(\vec{x}) = (-y, x, 0)$ splňuje (118). Napište odpovídající zachovávající se veličinu.

Nalezení vektorových polí $\vec{Y}(q, t)$, která splňují (118) však obecně rovněž není jednoduché. Pomoci může hledání grup symetrií pohybových rovnic (přednáška DRG), avšak grupa symetrie pohybových rovnic nemusí být vždy grupou symetrie Lagrangeovy rovnice:

Cvičení 43 Nechť Lagrangeova funkce má tvar (volný hmotný bod na přímce)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2.$$

Ukažte, že pohybové rovnice jsou invariantní vůči "škálování" $q \mapsto q e^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, zatímco Lagrangeova funkce nikoliv. Jak vypadá vektorové pole Y pro tuto grupu transformací? Je $F(q, \dot{q}, t)$ dané vztahem (116) integrálem pohybu?

5 Základní principy mechaniky

Jak už bylo několikrát řečeno základem mechaniky jsou Newtonovy zákony. Jejich tvar není dán nějakými logickými úvahami, nýbrž přírodou a o jejich platnosti je nutno se přesvědčit experimentálním ověřováním. Nicméně je možné uvažovat o jiné, matematicky ekvivalentní formulaci přírodních zákonů, která by byla stručnější a/nebo by pracovala s jinými pojmy než je zrychlení a síla a která by případně nabízel zobecnění i do jiných oblastí fyziky. Tyto formulace se často nazývají principy, protože neplynou z nějakých obecnějších úvah, nýbrž jsou možným matematickým vyjádřením základů mechaniky.

5.1 Diferenciální principy

5.1.1 Statická rovnováha v soustavě bez vazeb, princip virtuální práce

V této kapitole ukážeme, že systém hmotných bodů s kartézskými souřadnicemi $\vec{X} = (x_1, \dots, x_{3N})$ v inerciální soustavě je ve statické rovnováze, pokud tzv. virtuální práce sil v tomto bodě je nulová.

Řekneme, že systém je ve statické rovnováze, pokud se v čase nemění, t.j.

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) =: \vec{X}_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{3N,0}), \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (120)$$

z čehož automaticky plyne $\dot{\vec{X}}(t) = \vec{0}$.

Nechť zatím v soustavě nepůsobí žádné vazby, nýbrž pouze vtištěné síly $\vec{F} = \vec{F}(\vec{X})$. Pak z druhého Newtonova zákona plyne

$$F_i(\vec{X}_0) = 0, \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (121)$$

Naopak, pokud platí (121) a $\vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$, $\dot{\vec{X}}(t_0) = 0$, pak lze snadno ukázat (viz [1], Kap. 4.2.1), že pokud

$$\left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{X}_0) \right| < \infty, \quad i, j = 1, \dots, 3N$$

pak $\vec{X}(t) = \vec{X}_0$. Řešením algebraických rovnic (121) tedy dostaneme rovnovážné stavy soustavy \vec{X}_0 . Odtud je zřejmé, že tzv. *virtuální práce*

$$\delta A(\vec{X}) := \sum_{i=1}^{3N} F_i(\vec{X}) \delta x_i, \quad (122)$$

kteřou by systém N hmotných bodů vykonal při infinitesimálně malém posunutí celé soustavy $\delta \vec{X}$ v libovolném směru z bodu statické rovnováhy \vec{X}_0 je nulová

$$\delta A(\vec{X}_0) = 0. \quad (123)$$

Na druhé straně, vzhledem k tomu, že v soustavě nepůsobí žádné vazby, jsou směry posunutí $\delta\vec{X}$ libovolné a nulovost virtuální práce v bodě rovnováhy je ekvivalentní nulovosti síly v tomto bodě.

5.1.2 Statická rovnováha soustavy hmotných bodů se skleronomními holonomními vazbami

Co se změní, pokud v systému působí skleronomní holonomní vazby

$$f_K(\vec{X}) = 0, \quad K = 1, \dots, p. \quad (124)$$

Jednak se na pravé straně Newtonova zákona, a tím pádem i na levé straně (121) a na pravé straně (122), objeví a priori neurčené vazbové síly $\vec{F}^{(v)}$ a jednak při výpočtu práce (122) nemůžeme uvažovat libovolná posunutí $\delta\vec{X}$, nýbrž pouze taková, která jsou ve shodě s vazbami. Ukazuje se, že tyto dvě modifikace použité současně nezmění tvar podmínky (123) pro statickou rovnováhu soustavy v tom smyslu, že na pravé straně se neobjeví vazbové síly. Neplatí ale odtud $F_i(\vec{X}_0) = 0$, neboť posunutí δx_i nejsou nezávislá.

Vazbové síly pro holonomní vazby jsou kolmé na nadplochu danou vazbami (viz (103))

$$F_i^{(v)}(\vec{X}) = \sum_{K=1}^p \lambda_K \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}), \quad (125)$$

takže statická rovnováha soustavy hmotných bodů se skleronomními holonomními vazbami je určena soustavou $3N + p$ algebraických rovnic

$$F_i(\vec{X}_0) + F_i^{(v)}(\vec{X}_0) = F_i(\vec{X}_0) + \sum_{K=1}^p \lambda_K \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}_0) = 0, \quad i = 1, \dots, 3N, \quad (126)$$

$$f_K(\vec{X}_0) = 0, \quad K = 1, \dots, p. \quad (127)$$

pro $3N + p$ neznámých $(x_{0,1}, \dots, x_{0,3N}, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

Pro virtuální posunutí δx_i , která se dějí v souhlasu s vazbami (124), dostáváme podobně jako v kapitole 4

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(v)}(\vec{X}) \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{K=1}^p \lambda_K \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}) \delta x_i = 0 \quad (128)$$

takže vazbové síly k virtuální práci (122) nepřispějí. V bodě statické rovnováhy systému se skleronomními holonomními vazbami pak díky (128) a (123) platí **princip virtuální práce**

$$\delta A(\vec{X}_0) := \sum_{i=1}^{3N} \left(F_i(\vec{X}_0) + F_i^{(v)}(\vec{X}_0) \right) \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} F_i(\vec{X}_0) \delta x_i = 0, \quad (129)$$

neboli *virtuální práce*, kterou by systém vykonal při posunutí ze *statické rovnováhy* při zachování *skleronomních holonomních vazbových podmínek* je nulová. Tento princip je možno rozšířit i na tzv. *ideální vazby závislé na čase*.

5.1.3 Rheonomní holonomní vazby, virtuální posunutí, ideálními vazby

Pro vazbové podmínky závislé na čase je důležité, zda budeme uvažovat infinitesimální posunutí souřadnic, která se dějí v souhlasu s *měnícími* se vazbami v běžícím čase nebo okamžitě (vazby jsou "zamrzlé v čase"). První posunutí můžeme nazývat reálná, zatímco druhá budeme nazývat *virtuální*. Je zřejmé, že pro skleronomní vazby tyto pojmy splývají. Pro příklad ze cvičení 35 musíme například uvažovat posunutí, která splňují vazbu $(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 - l(t)^2 = 0$. Reálná posunutí splňují rovnici

$$2\delta\vec{x}_1(t) \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - 2\delta\vec{x}_2(t) \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - 2l(t)l'(t) dt = 0,$$

zatímco pro virtuální posunutí poslední člen na levé straně chybí.

Virtuální posunutí soustavy splňující v čase t holonomní podmínky $f_K(\vec{X}, t) = 0$ tedy splňují podmínky

$$\begin{aligned} f_K(\vec{X} + \delta\vec{X}(t), t) &= f_K(\vec{X}, t) + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t) \delta x_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t) \delta x_i(t) = 0, \quad K = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (130)$$

což je soustava lineárních homogenních rovnic pro $\delta x_i(t)$.

Reálná posunutí soustavy $\delta'x_i(t) = v_i(t)dt$ však splňují v čase $t + dt$ holonomní podmínky

$$\begin{aligned} f_K(\vec{X} + \delta'\vec{X}(t), t + dt) &= f_K(\vec{X}, t) + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t) \delta'x_i(t) + \frac{\partial f_K}{\partial t}(\vec{X}, t) dt = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t) v_i(t) + \frac{\partial f_K}{\partial t}(\vec{X}, t) \right) dt = 0, \end{aligned}$$

takže podmínky pro reálné posunutí jsou

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t) v_i + \frac{\partial f_K}{\partial t}(\vec{X}, t) = 0, \quad K = 1, \dots, p, \quad (131)$$

což je soustava lineárních nehomogenních rovnic pro $v_i(t)$.

Cvičení 44 *Odvodte podmínky pro reálná a virtuální posunutí pro hmotný bod pohybující se po trojosém elipsoidu, jehož osy jsou závislé na čase*

Virtuální práce je nyní taková práce, kterou by systém N hmotných bodů vykonal při virtuálním posunutí jejich poloh, to jest při splnění vazbových podmínek v daném čase a je tedy definována způsobem

$$\delta A(\vec{X}, \vec{V}, t) := \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}(\vec{X}, \vec{V}, t) \cdot \delta \vec{x}_{\alpha}(t), \quad (132)$$

kde \vec{F}_{α} jsou všechny síly působící na bod b_{α} , vazbové i nevazbové a $\delta \vec{x}_{\alpha}(t)$ jsou virtuální posunutí souřadnic bodu b_{α} v čase t .

Máme-li definovanu virtuální práci, můžeme definovat *ideální vazby*, což jsou ty, pro které virtuální práce vazbových sil je nulová. Pro ideální vazby tedy platí

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^{(v)}(\vec{X}, \vec{V}, t) \cdot \delta \vec{x}_{\alpha}(t) = 0 \quad (133)$$

pro všechna \vec{X}, \vec{V} a t , která splňují vazbové podmínky

$$f_A(\vec{X}, \vec{V}, t) = 0, \quad A = 1, \dots, P. \quad (134)$$

Podmínkou statické rovnováhy je pak

$$\delta A(\vec{X}_0, \vec{0}, t) = 0 \quad (135)$$

Mezi ideální vazby určitě patří holonomní vazby, neboť pro virtuální posunutí platí podmínka (130) pro skleronomní i rheonomní případ. Určení ideálnosti ostatních vazeb a odpovídajících vazbových sil je poměrně obtížné, neboť předem musíme znát odpovídající vazbové síly.

Za ideální vazby je možno považovat například neholonomní vazby lineární v rychlostech, kde

$$f_L(\vec{X}, \vec{V}) := \sum_{i=1}^{3N} a_{Li}(\vec{X}) \dot{x}_i, \quad L = 1, \dots, r. \quad (136)$$

Vazbové podmínky

$$\sum_{i=1}^{3N} a_{Li}(\vec{X}) \dot{x}_i = 0, \quad L = 1, \dots, r, \quad (137)$$

jsou pak analogem podmínek pro rychlosti plynoucí z holonomních vazeb

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i} \dot{x}_i = 0,$$

i když a_{Li} obecně nelze zapsat jako $\frac{\partial f_L}{\partial x_i}$. Vazbové síly pro neholonomní vazby lineární v rychlostech lze pak definovat způsobem analogickým k (125) jako

$$F_i^{(v)} = \sum_{L=1}^r \mu_L a_{Li}(\vec{X}). \quad (138)$$

a vzhledem k tomu, že směry rychlostí v daném čase lze ztotožnit se směry virtuálních posunutí, lze pak snadno ověřit, že neholonomní vazby lineární v rychlostech jsou ideální.

5.1.4 Dynamická rovnováha, d'Alembertův princip

Princip virtuální práce lze použít i na nerovnovážné, v čase se vyvíjející stavy mechanických soustav, tedy na jejich časový vývoj tím, že jej uplatníme v každém okamžiku pohybu. Kartézské souřadnice bodů soustavy s vazbami splňují během pohybu rovnice

$$m_i \ddot{x}_i = F_i(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) + F_i^{(v)}(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t), \quad (139)$$

kde F_i jsou složky vtištěných a $F_i^{(v)}$ složky vazbových sil. V případě holonomních vazeb dostáváme tzv. **Lagrangeovy rovnice prvního druhu**

$$m_i \ddot{x}_i = F_i(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) + \sum_{K=1}^p \lambda_K(t) \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t), \quad (140)$$

které spolu s vazbovými podmínkami (89) představují soustavu $3N + p$ algebraicko-diferenciálních rovnic pro $3N + p$ funkcí času $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{3N}, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_p$.

Z těchto rovnic je možné odvodit tzv. d'Alembertův princip. Podmínky statické rovnováhy pro ideální vazby (135) a (133) platí v rovnovážné konfiguraci soustavy. Budeme-li předpokládat že princip nulové virtuální práce platí i v každém okamžiku pohybu pro tzv. **efektivní síly**

$$F_i(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) - m_i \ddot{x}_i,$$

pak dostáváme stejným postupem jako v předchozí podkapitole **d'Alembertův princip**

$$\delta A_{eff}(\vec{X}(t), \dot{\vec{X}}(t), t) := \sum_{i=1}^{3N} \left[F_i(\vec{X}(t), \dot{\vec{X}}(t), t) - m_i \ddot{x}_i \right] \delta x_i(t) = 0, \quad (141)$$

který v analogii se statickou rovnováhou vtištěných sil říká, že *pohyb soustavy se děje v dynamické rovnováze efektivních sil, neboli virtuální práce efektivních sil je v každém okamžiku pohybu nulová.*

Tento princip stejně jako princip virtuální práce je důležitý tím, že pro ideální vazby neobsahuje a priori neznámé vazbové síly. Lze jej považovat za základ klasické mechaniky přesto, že pro soustavy s vazbami z něj nelze odvodit Newtonovy pohybové rovnice (139), neboť virtuální posunutí nejsou lineárně nezávislá. Nicméně, pro holonomní vazby z něj lze odvodit Lagrangeovy rovnice druhého druhu přechodem k zobecněným souřadnicím prakticky stejným postupem jaký jsme použili v kapitole 4.

Zapíšeme li totiž virtuální posunutí kartézských souřadnic pomocí zobecněných

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

pak (automaticky sčítáme přes $i = 1, \dots, 3N$, $j = 1, \dots, s$)

$$m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j =$$

$$\frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \left[\frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \quad (142)$$

$$F_i \delta x_i = F_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j =: Q_j \delta q_j. \quad (143)$$

Zobecněnou sílu Q je možno rozdělit na potenciálovou a nepotenciálovou

$$Q_j = \frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} + Q_j^o$$

a dosadíme-li (142) a (143) do (141) dostaneme pro $L = T - U$

$$\left[Q_j^o - \frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad (144)$$

z čehož díky nezávislosti zobecněných proměnných q_j plynou Lagrangeovy rovnice druhého druhu (105).

5.2 Integrální principy

V této podkapitole předvedeme, že řešení pohybových rovnic, t.j. funkce²² $q(t) = (q_1(t), \dots, q_s(t))$, lze obdržet jako stacionární body jistých funkcionálů. Přesněji:

²²V této podkapitole upouštíme od označování funkcí $q(t)$ vlnkou, neboť by to značně zneprůhledňovalo zápis vzorců.

Nechť C je množina funkcí $q : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^s$ splňujících nějaké vlastnosti. Funkcionálem S nazveme zobrazení $S : C \rightarrow \mathbf{R}$ a můžeme řešit problém, pro jaké funkce q z množiny C nabývá funkcionál S minima, maxima nebo aspoň jaké q jsou stacionárními "body" S .

Nechť $q'(t) = q(t) + \delta q(t) = q(t) + \epsilon h(t)$. Funkce $q(t) \in C$ je *stacionárním bodem funkcionálu S* , pokud splňuje

$$S[q'] - S[q] = O(\epsilon^2), \quad \forall q' \in C, \quad (145)$$

t.j. lineární přírůstek δS funkcionálu S je pro stacionární funkce nulový.

Přírůstku δq funkce q se říká variace funkce a k nalezení stacionární funkce funkcionálu slouží tzv. variační počet, který je obdobou diferenciálního počtu používaného pro hledání stacionárních bodů funkcí.

5.2.1 Hamiltonův princip

Jeden z nejčastěji užívaných a nejužitečnějších integrálních principů mechaniky, kterým lze nahradit Newtonovy rovnice *pro potenciálové nebo zobecněné potenciálové síly a holonomní vazby* je Hamiltonův princip, který říká, že **funkce $q(t)$, která minimalizuje, nebo aspoň stacionarizuje integrál z Lagrangeovy funkce podle času**

$$S[q] := \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (146)$$

nazývaný *akce*, **popisuje skutečný časový vývoj soustavy, t.j. splňuje Lagrangeovy rovnice druhého druhu.**

Abychom Hamiltonův princip formulovali přesně, je třeba specifikovat množinu funkcí C , pro které je funkcionál akce definován. Jinými slovy, je třeba definovat množinu drah, které uvažujeme. Pro Hamiltonův princip je

$$C = C^1(Q_1, Q_2) := \{q : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^s, q_j, \dot{q}_j \text{ spojitě}, q(t_1) = Q_1, q(t_2) = Q_2\}. \quad (147)$$

Naše úloha tedy zní: Máme dva body konfiguračního prostoru Q_1, Q_2 a zajímá nás po jaké dráze $q(t)$ v konfiguračním prostoru parametrizované časem se mechanický systém dostane z bodu Q_1 v čase t_1 do bodu Q_2 v čase t_2 . Ukážeme, že funkce $q(t)$, která je stacionárním bodem akce a platí pro ni tedy $\delta S[q] = 0$, splňuje Lagrangeovy rovnice druhého druhu, takže popisuje skutečný časový vývoj soustavy.

Dosaďme (146) do (145) a spočítejme členy lineární v $\delta q_j(t)$.

$$S[q'] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} [L(q'(t), \dot{q}'(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t)] dt, \quad (148)$$

takže lineární přírůstek funkcionálu akce je

$$\delta S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q_j(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t), t) \delta \dot{q}_j(t) dt. \quad (149)$$

Integraci per partes dostaneme

$$\begin{aligned} \delta S[q] &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q_j(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \\ &\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) \right] \delta q_j(t) dt \end{aligned} \quad (150)$$

Vzhledem k tomu že q i q' leží v $C^1(Q_1, Q_2)$,

$$\delta q(t_1) = q'(t_1) - q(t_1) = Q_1 - Q_1 = 0$$

a podobně $\delta q(t_2) = 0$, první člen v (150) je nula. Z druhého členu a požadavku stacionárnosti $\delta S[q] = 0$ dostáváme Lagrangeovy rovnice druhého druhu (105) s nulovou pravou stranou díky tzv. základnímu lemmatu variačního počtu (viz [1], dodatek D2):

Nechť $G(x)$ je spojitá a $\int_{x_1}^{x_2} G(x)h(x)dx = 0$ pro libovolnou h spojitou se spojitou první derivací, splňující $h(x_1) = h(x_2) = 0$. Pak $G = 0$.

Z Hamiltonova principu tedy plyne že dráha bodu mezi body Q_1, Q_2 splňuje Lagrangeovy rovnice druhého druhu.

5.2.2 * Neisochronní variace, princip Maupertuisův

Variace $\delta q(t) = q'(t) - q(t)$, které díky (147) splňují $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ a které používá Hamiltonův princip, se nazývají isochronní. Je však možno formulovat i integrální principy, které používají tzv. *neisochronní* variace, ve kterém variované funkce q' nabývají hodnot Q_1, Q_2 v časech $t'_1 = t_1 + \Delta t_1, t'_2 = t_2 + \Delta t_2$ ($\Delta t \sim \varepsilon$), takže pro časy t_1, t_2 pro ně platí

$$\delta q(t_1) = -\dot{q}(t_1)\Delta t_1, \quad \delta q(t_2) = -\dot{q}(t_2)\Delta t_2. \quad (151)$$

Příkladem použití neisochronních variací je variační princip Maupertuisův, který platí pro *konzervativní* soustavy, t.j. holonomní skleronomní vazby a všechny síly jsou dány potenciálem $U = U(q)$. V tom případě navíc uvažujeme pouze třídu funkcí, pro které $E(q, \dot{q}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = const$. Ukážeme, že stacionárním bodům tzv. *zkrácené akce*

$$S_0[q] := \int_{t_1}^{t_2} 2T(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (152)$$

kde T je kinetická energie a definiční obor S_0 je

$$C := \{q : [t_1 + \Delta t_1, t_2 + \Delta t_2] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^s, q_j, \dot{q}_j \text{ spojité}, E(q, \dot{q}) = E_0, \\ q(t_1 + \Delta t_1) = Q_1, q(t_2 + \Delta t_2) = Q_2\}, \quad (153)$$

odpovídají řešení pohybových rovnic, t.j. Lgrangeových rovnic druhého druhu.

Rozdíl hodnot funkcionalů zkrácené akce

$$\delta S_0 := S_0[q'] - S_0[q] = \int_{t'_1}^{t'_2} 2T(q', \dot{q}') dt - \int_{t_1}^{t_2} 2T(q, \dot{q}) dt = \quad (154)$$

$$\int_{t'_1}^{t_1} 2T(q', \dot{q}') dt + \int_{t_1}^{t_2} 2[T(q', \dot{q}') - T(q, \dot{q})] dt + \int_{t_2}^{t'_2} 2T(q', \dot{q}') dt =$$

$$O(\varepsilon^2) - 2T(q(t_1), \dot{q}(t_1)) \Delta t_1 + 2T(q(t_2), \dot{q}(t_2)) \Delta t_2 + \int_{t_1}^{t_2} 2[T(q'(t), \dot{q}'(t)) - T(q(t), \dot{q}(t))] dt.$$

Je snadné ukázat, že v konzervativních soustavách se zobecněná energie soustavy (107) zachovává (cvičení 41) a kinetická energie má tvar (cvičení 37)

$$T(q, \dot{q}) := \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s \gamma_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (155)$$

takže

$$E = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - U) = 2T - (T - U) = T + U \Rightarrow L := T - U = 2T - E \quad (156)$$

a lineární přírůstek v ε

$$\delta S_0 = -2 \left[L(q(t_1), \dot{q}(t_1)) + E \right] \Delta t_1 + 2 \left[L(q(t_2), \dot{q}(t_2)) + E \right] \Delta t_2 \\ + \int_{t_1}^{t_2} 2 \left[L(q'(t), \dot{q}'(t)) - L(q(t), \dot{q}(t)) \right] dt. \quad (157)$$

Integrací per partes posledního členu dostáváme

$$2 \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t)), \delta q_j(t) \delta q_j(t) \right]_{t_1}^{t_2} + 2 \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t)) \right) \right] \delta q_j(t) dt.$$

Díky (151)

$$2 \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t)) \delta q_j(t) \right]_{t_1}^{t_2} = -2 \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t_2), \dot{q}(t_2)) \dot{q}_j(t_2) \Delta t_2 - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t_1), \dot{q}(t_1)) \dot{q}_j(t_1) \Delta t_1 \right]$$

a tyto členy se odečtou od prvních dvou členů v (157) (neboť $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$) a dostáváme

$$\delta S_0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t)) \right) \right] \delta q_j(t) dt,$$

odkud podle základního lemmatu variačního počtu plynou opět Lagangeovy rovnice druhého druhu.

Pro zákony pohybu *konzervativních* soustav tedy platí Maupertiusův princip: **Časový vývoj se děje po křivkách v konfiguračním prostoru soustavy na nichž zkrácená akce (152) nabývá stacionární hodnoty vzhledem k variacím ponechávajícím hodnoty celkové energie konstantní.**

5.2.3 Jacobiho princip

Z Hamiltonova či Maupertuisova principu, t.j. z podmínek pro stacionární body akce získáme rovnice pro časový vývoj polohy, t.j. křivku v konfiguračním prostoru *parametrizovanou časem*. Slabší Jacobiho princip, který platí pro *konzervativní* soustavy, stacionarizuje zkrácenou akci (152), avšak připouští libovolnou parametrizaci křivky, po které se bod v konfiguračním prostoru pohybuje. Znamená to, že tento princip určí pouze tvar dráhy, nikoliv to, jak je probíhána v čase.

Zkrácenou akci lze díky (155) a (156) upravit na tvar

$$S_0(q) := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(E_0 - U(q))} \sqrt{\gamma_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k} dt. \quad (158)$$

Přejdeme-li k jiné parametrizaci křivek q , kde τ již nemá význam fyzikálního času

$$t \rightarrow \tilde{t}(\tau), \quad q(t) \rightarrow Q(\tau) := q(\tilde{t}(\tau)), \quad (159)$$

integrand se nezmění. Modifikujeme-li okrajové podmínky definičního oboru způsobem $Q(\tau_1) = Q_1$, $Q(\tau_2) = Q_2$, pak se nezmění ani integrál (158). Zkrácenou akci je tedy možno zapsat jako křivkový integrál

$$S_0(Q) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E_0 - U(Q))} \sqrt{\gamma_{jk}(Q) \dot{Q}_j \dot{Q}_k} d\tau =: \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{2(E_0 - U(Q))} dl, \quad (160)$$

kde dl je element délky v s -rozměrném konfiguračním prostoru určený "metrickým tensorem" γ_{jk}

$$dl = \sqrt{\gamma_{jk}(Q) \dot{Q}_j \dot{Q}_k} d\tau.$$

Euler–Lagrangeovy rovnice, které plynou z podmínky stacionárnosti $\delta S_0[Q] = 0$ v oboru

$$C := \{Q : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^s, \quad Q_j, \dot{Q}_j \text{ spojité}, \quad Q(\tau_1) = Q_1, Q(\tau_2) = Q_2\}, \quad (161)$$

pak určují tvar dráhy konzervativní soustavy s celkovou energií E_0 v jejím konfiguračním prostoru, avšak nikoliv její závislost na konkrétní parametrizaci $Q = Q(\tau) = q(t) = \dots$

Povšimněte si, že pro $U = 0$ (volný hmotný bod) je S_0 až na nepodstatný faktor přímo délka křivky mezi Q_1 a Q_2 . Křivka minimální délky spojující tyto dva body je přímka, což je právě dráha volného hmotného bodu.

Přestože Jacobiho princip neurčuje pohyb bodu po křivce v čase, je možno časovou závislost určit z invariance elementu délky vůči reparametrizaci (159)

$$\sqrt{\gamma_{jk}(Q)\dot{Q}_j\dot{Q}_k} d\tau = \sqrt{\gamma_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k} dt = \sqrt{2T} dt. \quad (162)$$

Odtud plyne

$$t = \int \frac{\sqrt{\gamma_{jk}(Q)\dot{Q}_j\dot{Q}_k}}{\sqrt{2T}} d\tau = \int \frac{\sqrt{\gamma_{jk}(Q)\dot{Q}_j\dot{Q}_k}}{\sqrt{2(E_0 - U(Q))}} d\tau = \tilde{t}(\tau). \quad (163)$$

Určíme-li tedy z Jacobiho principu tvar křivky $Q(\tau)$ v jakékoliv parametrizaci, pak inverzí funkce \tilde{t} a dosazením $\tau = \tilde{t}^{-1}(t)$ do $Q(\tau)$ dostaneme závislost bodů této křivky na čase $q(t) = Q(\tilde{t}^{-1}(t))$, t.j. odpovídající časový vývoj soustavy.

Analogem nebo chcete-li zobecněním Jacobiho principu (160) je Fermatův princip v optice pro tvar paprsku, kde

$$S_0(Q) := \int_{Q_1}^{Q_2} n(Q) dl \quad (164)$$

a $n(Q)$ je index lomu v místě Q .

5.3 * Věta Noetherové podruhé

Z požadavku invariance Lagrangeovy funkce vůči jednoparametrické grupě transformací jsme v podkapitole (4.4) z věty Noetherové obdrželi zachovávající se veličinu (116). Na druhé straně je snadné ukázat (viz cvičení 41), že zobecněná energie (107) se za podmínky $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ rovněž zachovává, přestože nemá tvar (116). Otázkou tedy je, zda je možno zobecněnou energii získat jako důsledek invariance vůči nějaké jednoparametrické grupě transformací. Odpověď je kladná a plyne z následující věty:

Věta 5.1 *Nechť pravé strany Lagrangeových rovnic druhého druhu jsou nulové, t.j. $Q_j^{(o)} = 0$, $j = 1, \dots, s$. Pak ke každé grupě transformací souřadnic a času závislých spojitě na reálném parametru, které ponechávají akci invariantní, existuje nekonzstantní první integrál pohybových rovnic*

$$F(q, \dot{q}, t) := \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) + \sum_{j=1}^s Y_j(q, t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L(q, \dot{q}, t), \quad (165)$$

kde $Y_j(q, t)$ je vektorové pole generující příslušnou jednoparametrickou grupu transformací.

Dokážeme tuto větu pro $s = 1$, $q_1 = q$. Důkaz pro $s > 1$ je zcela analogický.

Nechť je dána akce jednoparametrické grupy (s parametrem ε) transformací²³

$$\psi_\varepsilon : (q, t) \mapsto (q_\varepsilon, t'), \quad q_\varepsilon = \phi(q, t, \varepsilon), \quad t' = t + \varepsilon, \quad (166)$$

kde

$$\phi(q, t, 0) = q, \quad \phi(q, t, -\varepsilon) = \phi^{-1}(q, t, \varepsilon), \quad (167)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial q}(q, t, 0) = 1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(q, t, 0) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}(q, t, 0) = Y(q, t). \quad (168)$$

Tato akce indukuje akci grupy na funkcích $\tilde{q}(t)$

$$\tilde{\psi}_\varepsilon : \tilde{q} \mapsto \tilde{q}_\varepsilon, \quad \tilde{q}_\varepsilon(t') := \phi(\tilde{q}(t), t, \varepsilon) = \phi(\tilde{q}(t' - \varepsilon), t' - \varepsilon, \varepsilon) \quad (169)$$

a rovněž akci grupy na funkcionálu akce s danou Lagrangeovou funkcí $L = L(q, \dot{q}, t)$.

$$\widehat{\psi}_\varepsilon : S[\tilde{q}] \mapsto S_\varepsilon[\tilde{q}_\varepsilon] := \int_{t'_1}^{t'_2} L(\tilde{q}_\varepsilon(t'), \dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t'), t') dt'. \quad (170)$$

Podmínka invariance akce vůči $\widehat{\psi}_\varepsilon$ je

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (S_\varepsilon[\tilde{q}_\varepsilon]) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_{t_1+\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} L((\tilde{q}_\varepsilon(t'), \dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t'), t') dt' \right] \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (171)$$

Výpočet levé strany (171) je poněkud zdlouhavý. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} I(\varepsilon) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\tau_1(\varepsilon)}^{\tau_2(\varepsilon)} f(t, \varepsilon) dt = \\ &= \tau_2'(\varepsilon) f(\tau_2(\varepsilon), \varepsilon) - \tau_1'(\varepsilon) f(\tau_1(\varepsilon), \varepsilon) + \int_{\tau_1(\varepsilon)}^{\tau_2(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(t, \varepsilon) dt \end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} (S_\varepsilon[\tilde{q}_\varepsilon]) \right|_{\varepsilon=0} &= L(\tilde{q}(t_2), \dot{\tilde{q}}(t_2), t_2) - L(\tilde{q}(t_1), \dot{\tilde{q}}(t_1), t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \left. \frac{d}{d\varepsilon} L(\tilde{q}_\varepsilon(t'), \dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t'), t') \right|_{\varepsilon=0} dt'. \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left. \frac{d}{dt'} L(\tilde{q}(t'), \dot{\tilde{q}}(t'), t') + \frac{d}{d\varepsilon} L(\tilde{q}_\varepsilon(t'), \dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t'), t') \right|_{\varepsilon=0} \right] dt', \quad (172) \end{aligned}$$

²³Všimněte si, že (na rozdíl od (119)) v tomto případě předpokládáme i (ne nutně) jednoduchou transformaci času

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(\tilde{q}_\varepsilon(t'), \dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t'), t') \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial q}((\tilde{q}(t'), \dot{\tilde{q}}(t'), t')) \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{q}_\varepsilon(t') \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}((\tilde{q}(t'), \dot{\tilde{q}}(t'), t')) \frac{d}{d\varepsilon} \dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t') \Big|_{\varepsilon=0} \quad (173)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{q}_\varepsilon(t') \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \phi(\tilde{q}(t' - \varepsilon), t' - \varepsilon, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial q}(\tilde{q}(t'), t', 0) \dot{\tilde{q}}(t')(-1) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(\tilde{q}(t'), t', 0)(-1) + \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}(\tilde{q}(t'), t', 0). \end{aligned}$$

Díky (168) pak dostáváme

$$\frac{d}{d\varepsilon} \tilde{q}_\varepsilon(t') \Big|_{\varepsilon=0} = -\dot{\tilde{q}}(t') + Y(\tilde{q}(t'), t') \quad (174)$$

a odtud

$$\frac{d}{d\varepsilon} \dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t') \Big|_{\varepsilon=0} = -\ddot{\tilde{q}}(t') + \frac{d}{dt'} Y(\tilde{q}(t'), t'). \quad (175)$$

Dosadíme-li do (173) a (172) pak z požadavku (171) plyne, že akce je invariantní, pokud vektorové pole Y splňuje rovnici

$$\frac{\hat{d}}{dt} L + \frac{\partial L}{\partial q}(Y - \dot{q}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\hat{d}}{dt} Y - \ddot{q} \right) = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} Y + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial Y}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial Y}{\partial t} \right) = 0, \quad (176)$$

což je podmínka pro vektorové pole Y , která zaručuje, že jednoparamtrická grupa transformací odpovídající tomuto poli ponechává akci invariantní (srovnej s rovnicí (118)).

Přepíšeme-li dále rovnici (172) do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} (S_\varepsilon[\tilde{q}_\varepsilon]) \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt'} L((\tilde{q}(t'), \dot{\tilde{q}}(t'), t')) + \frac{\partial L}{\partial q}((\tilde{q}(t'), \dot{\tilde{q}}(t'), t')) \left(Y(\tilde{q}(t'), t') - \dot{\tilde{q}}(t') \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}((\tilde{q}(t'), \dot{\tilde{q}}(t'), t')) \left(\frac{d}{dt'} Y(\tilde{q}(t'), t') - \ddot{\tilde{q}}(t') \right) \right] dt' \end{aligned}$$

a použijeme Lagrangeovy pohybové rovnice druhého druhu dostaneme

$$\frac{d}{d\varepsilon} (S_\varepsilon[\tilde{q}_\varepsilon]) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt'} \left[L(\tilde{q}(t'), \dot{\tilde{q}}(t'), t') + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tilde{q}(t'), \dot{\tilde{q}}(t'), t') \left(Y(\tilde{q}(t'), t') - \dot{\tilde{q}}(t') \right) \right] dt'.$$

Z požadavku invariance akce (171) vůči jednoparamtrické grupě generované polem Y odtud plyne

$$L(\tilde{q}(t_2), \dot{\tilde{q}}(t_2), t_2) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tilde{q}(t_2), \dot{\tilde{q}}(t_2), t_2) \left(Y(\tilde{q}(t_2), t_2) - \dot{\tilde{q}}(t_2) \right) =$$

$$L(\tilde{q}(t_1), \dot{\tilde{q}}(t_1), t_1) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tilde{q}(t_1), \dot{\tilde{q}}(t_1), t_1) (Y(\tilde{q}(t_1), t_1) - \dot{\tilde{q}}(t_1)), \quad (177)$$

takže výraz (165) nezávisí na čase a je prvním integrálem pohybových rovnic.

Snadno ověříme, že pro $Y = 0$ je tento první integrál zobecněná energie (107).

6 Řešitelné pohybové rovnice

Často není jednoduché pohybové rovnice sestavit, ale mnohem těžší je je řešit. V podstatě existuje velmi málo analyticky řešitelných případů. Připomeneme nejjednodušší z nich.

6.1 Jeden hmotný bod na přímce

Pohybuje li se bod na přímce pod vlivem vtištěné síly, která nezávisí na čase, pak příslušnou pohybovou rovnici

$$m\ddot{x} = F(x). \quad (178)$$

je možné v principu řešit *pro libovolnou spojitou* funkci F . Vynásobením \dot{x} a integrací (viz cvičení 2) dostaneme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\frac{d}{dt}U(x),$$

kde $F(x) = -U'(x)$, takže

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(C - U(x))}, \quad (179)$$

což je rovnice se separovatelnými proměnnými. Její řešení lze zapsat formou integrálu

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(C - U(x))}} =: T_C(x). \quad (180)$$

Inverzí tohoto vztahu dostaneme řešení rovnice (178) $x = X_C(t - t_0)$. Pozorný čtenář si jistě všiml, že integrační konstanta C je hodnota zachovávaná se energie. Je dobré poznamenat, že ač v principu jsme rovnici (178) vyřešili, primitivní funkci (180) nebo její inverzi nemusíme být schopni vyjádřit v termínech "známých" funkcí.

Pro hmotný bod v rovině nebo prostoru, tento postup nelze obecně použít, ba ani pro hmotný bod na přímce, pokud síla závisí na čase $F = F(x, t)$. Na druhé straně rovnice tvaru (178) nemusí popisovat pouze zmíněný případ jednoho bodu na přímce, ale může se vyskytnout i při řešení mnohem složitějších úloh, jako je matematické kyvadlo (viz Kap. 4), či systémy s několika integrály pohybu jako je např. hmotný bod v poli sféricky symetrického potenciálu.

6.2 Hmotný bod v poli sféricky symetrického potenciálu

Úlohy mechaniky ve více rozměrech jsou přesně řešitelné jen pro speciální (a řídké) případy silových polí. Neznámější je centrální a isotropní síla

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x} f(r) = -\text{grad}U(r), \quad r = \sqrt{(\vec{x})^2}. \quad (181)$$

Rovnice pohybu v tomto případě představují soustavu tří diferenciálních rovnic druhého řádu pro tři funkce $\tilde{x}_i(t)$. Zároveň ale pro tuto soustavu existují čtyři integrály pohybu : 3 složky momentu hybnosti a celková energie.

Ze zachování momentu hybnosti plyne, že pohyb se děje v rovině na něj kolmé. Soustavu souřadnou pak můžeme díky sférické symetrii problému zvolit tak, že $\vec{L} = (0, 0, l)$, z čehož plyne $\tilde{x}_3(t) = 0$. V rovině xy pak zavedeme polární souřadnice

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi,$$

ve kterých má zachovávaný se moment hybnosti tvar $\vec{L} = (0, 0, mr^2\dot{\varphi})$, takže

$$mr^2\dot{\varphi} = l. \quad (182)$$

Zachovávaný se energie má díky(182) tvar

$$E = \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r). \quad (183)$$

Vidíme tedy, že znalost čtyř integrálů pohybu nám umožnila redukovat systém tří diferenciálních rovnic druhého řádu na soustavu dvou rovnic prvního řádu (182) a (183) pro $\tilde{r}(t)$ a $\tilde{\varphi}(t)$. Stejným postupem jako v podkapitole 6.1 dostáváme z rovnice (183)

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r))}} =: T_E(r). \quad (184)$$

a inverzí tohoto vztahu dostaneme časovou závislost radiálního pohybu $\tilde{r}(t)$, t.j. okamžitou vzdálenost bodu od centra silového pole. Dosazením $r = \tilde{r}(t)$ do (182) pak můžeme dostat i časovou závislost úhlového pohybu $\tilde{\varphi}(t)$. Pro $U(r) = \frac{const}{r}$ se tato úloha nazývá Keplerova.

6.3 Úloha dvou těles

Úloha o pohybu dvou těles, které na sebe vzájemně působí silami závislými na jejich poloze

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{x}}_1 &= \vec{F}_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ m_2\ddot{\vec{x}}_2 &= \vec{F}_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \end{aligned} \quad (185)$$

představuje systém šesti diferenciálních rovnic pro šest funkcí $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$, který pro libovolné \vec{F}_1, \vec{F}_2 řešit neumíme. Nicméně pokud platí třetí Newtonův zákon aspoň ve tvaru

$$\vec{F}_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \vec{F}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = -\vec{F}_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \quad (186)$$

pak snadno zjistíme, že platí

$$M\ddot{\vec{R}} = m_1\ddot{\vec{x}}_1 + m_2\ddot{\vec{x}}_2 = 0$$

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \vec{F}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \frac{1}{\mu} \vec{F}(\vec{x}).$$

Pokud tedy platí (186), pak je možné rozdělit ("svázanou") soustavu šesti diferenciálních rovnic druhého řádu pro šest funkcí $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ na dvě nezávislé soustavy tří diferenciálních rovnic druhého řádu pro souřadnice hmotného středu soustavy $\vec{R} = (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/(m_1 + m_2)$ a relativní souřadnice $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. V tomto případě lze tedy *převést problém řešení pohybu dvou těles na* (triviální) úlohu o pohybu hmotného středu soustavy a *úlohu o jejich relativním pohybu*. Je-li druhá úloha analyticky řešitelná nebo nikoliv, závisí na konkrétním tvaru síly \vec{F} . Jejím speciálním případem je centrální isotropaní síla řešená v předchozí podkapitole.

7 Otázky ke zkoušce

1. Transformace souřadnic, vektorů, tenzorů, vektorových polí. Grupy $GL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$.
2. Orientace vektorového prostoru, pseudoveličiny, vektorový součin.
3. Inerciální soustava, Galileovy transformace, schema odvození.
4. Druhý Newtonův zákon v neinerciální soustavě, schema odvození.
5. Úloha dvou těles, Keplerova úloha.
6. Věta o viriálu, důkaz.
7. Bezsilový setrvačnick, Eulerovy rovnice, schema odvození.
8. Lagrangeova funkce pro hmotný bod v poli potenciálových sil a v elektromagnetickém poli.
9. Lagrangeův popis systémů s holonomními vazbami.
10. Zachovávané se veličiny v Lagrangeově mechanice, cyklické souřadnice.
11. Jednparametrická grupa transformací, věta Noetherové.
12. Statická rovnováha, princip virtuální práce.
13. Dynamická rovnováha, d'Alembertův princip.
14. Hamiltonův princip
15. Jacobiho princip

8 Přehled základních vzorečků z analytické mechaniky

Znalost níže uvedených vzorečků je **nutná nikoliv postačující** podmínka pro absolvování zkoušky z TEF1.

Věta o derivování složených funkcí více proměnných.

Nechť

$$\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \hat{F}(\vec{x}) := F(\vec{y}(\vec{x})),$$

kde

$$F = F(\vec{z}) = F(z_1, z_2, \dots, z_S),$$

$$y_j = y_j(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad j = 1, \dots, S.$$

Pak

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^S \frac{\partial F}{\partial z_j}(\vec{y}(\vec{x})) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\vec{x}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Často se poněkud nekorektně zato přehledně píše $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$. Tento vzoreček se snadno pamatuje, je ale třeba znát jeho pravý obsah uvedený výše.

Transformace kartézských souřadnic mezi vztažnými soustavami $(o, (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n))$, $(\tilde{o}, (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n))$, kde $\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j S_{ji}$, $S_{ji} \in O(n) \Leftrightarrow S^{-1} = S^T$.

$$x_i(b) = S_{ij}(\tilde{x}_j(b) - \tilde{x}_j(o)) \Leftrightarrow \vec{x}(b) = S \cdot (\vec{\tilde{x}}(b) - \vec{\tilde{x}}(o))$$

Inverzní transformace

$$\tilde{x}_i(b) = S_{ji}(x_j(b) - x_j(\tilde{o})) \Leftrightarrow \vec{\tilde{x}}(b) = S^T \cdot (\vec{x}(b) - \vec{x}(\tilde{o}))$$

Transformace složek tensoru řádu (p, q)

$$\tilde{T}^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q} =$$

$$= (S^{-1})^{j_1}_{m_1} (S^{-1})^{j_2}_{m_2} \dots (S^{-1})^{j_p}_{m_p} T^{m_1 m_2 \dots m_p}_{k_1 k_2 \dots k_q} S^{k_1}_{i_1} S^{k_2}_{i_2} \dots S^{k_q}_{i_q}$$

Eulerovy setrvačnickové rovnice

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1 \dot{\tilde{\Omega}}_1 &= (\tilde{I}_2 - \tilde{I}_3) \tilde{\Omega}_2 \tilde{\Omega}_3 + \tilde{N}_1^{(e)} \\ \tilde{I}_2 \dot{\tilde{\Omega}}_2 &= (\tilde{I}_3 - \tilde{I}_1) \tilde{\Omega}_3 \tilde{\Omega}_1 + \tilde{N}_2^{(e)} \\ \tilde{I}_3 \dot{\tilde{\Omega}}_3 &= (\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2) \tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_2 + \tilde{N}_3^{(e)}\end{aligned}$$

Vazbová síla pro holonomní vazby $f_K(\vec{X}, t) = 0$, $K = j, \dots, p$

$$F_i^{(v)}(\vec{X}, t) = \sum_{K=1}^p \lambda_K(t) \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t)$$

Totální derivace

$$\frac{\hat{d}}{dt}[F(q, \dot{q}, t)] := \dot{q}_j \frac{\partial F}{\partial q_j}(q_j, \dot{q}_j, t) + \ddot{q}_j \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q_j, \dot{q}_j, t).$$

Lagrangeovy rovnice druhého druhu

$$\frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L(q, \dot{q}, t) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} L(q, \dot{q}, t) = Q_j^{(o)}$$

Zobecněná hybnost

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q_j, \dot{q}_j, t)$$

d Alembertův princip

$$\sum_{i=1}^{3N} \left[F_i(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) - m_i \ddot{x}_i \right] \delta x_i(t) = 0$$

Akce

$$S[q] := \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

$q : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^s$, q_j, \dot{q}_j spojitě, $q(t_1) = Q_1, q(t_2) = Q_2$.